J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
11-3 (1971) 415-424

La Réciproque d'un Théorème de Kikuchi

par

Hamet Seydi

(Communicated by Professor Nagata, September 21, 1970
Revised, February 12, 1971)

Etant donné un anneau intègre A, on dit qu'une A-algèbre B est une A-algèbre affine ou que B est une algèbre affine sur A si B est une A-algèbre de type fini intègre contenant A. Dans son article [3] KIKUCHI a montré que si A est un anneau noethérien intègre dont la clôture intégrale A' est un A-module de type fini, et si pour tout idéal premier P, l'anneau local A_P est "formellement réduit" (i.e. le complété $\hat{C}$ de $C=A_P$ est réduit); alors si B est une A-algèbre affine dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de A, la clôture intégrale de B est un B-module de type fini. En fait KIKUCHI démontre ce théorème en supposant que l'anneau A est normal. Mais il n'est pas difficile de voir que le théorème est vrai sous la forme que nous venons d'indiquer. Dans cet article on se propose de démontrer la réciproque de ce théorème et d'en déduire quelques conséquences dans la théorie des anneaux japonais.

1. LE THEOREME DE KIKUCHI

Théorème (1.1): *Soient A un anneau noethérien intègre dont la clôture intégrale A' est un A-module de type fini et K son corps des fractions. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *Pour tout idéal maximal M de l'anneau A, l'anneau local A_M est formellement réduit.*

2) *Pour toute* A-algèbre *affine* B *dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de* A, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

3) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini et intègre* B *contenant* A, *dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de* A, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

4) *Pour toute* A-algèbre *affine* B *contenue dans le corps des fractions* K *de* A, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

5) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini* B *contenue dans* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

Preuve: D'après le théorème de KIKUCHI ([3] th. 3 p. 364), 1) implique 2), et 2) implique 3) trivialement. De même, d'après le théorème de NAGATA ([1] 6.13.6.) et le théorème de normalisation ([4] 14.4 p. 45), 3) implique 4); et 4) implique 5) trivialement. Montrons maintenant que 5) implique 1). Quitte à remplacer A par sa clôture intégrale A' qui est par hypothèse un A-module de type fini, on peut supposer que A est normal. Nous allons raisonner par récurrence sur $n=\dim(A_M)$. Si $n\leq 1$, l'assertion est triviale puisque dans ce cas A_M est un anneau régulier. Supposons donc $n\geq 2$. Soient a et b deux éléments appartenant au radical de Jacobson de $C=A_M$ formant une suite régulière dans C. Soient $C'=C[X]$ l'anneau des polynômes à une variable sur C, $N=MC'$ et $D=C'_N$. D'après ([4] 11.3 p. 39), $aX-b$ engendre un idéal premier dans C' et $C'/(aX-b) \cong C\left[\frac{b}{a}\right]$. Donc $aX-b$ engendre un idéal premier dans D puisque $aX-b\in N$. Posons $D'=D/(aX-b)$; alors $\dim(D')\leq n-1$ et D' vérifie l'hypothèse de 5) et par conséquent, par récurrence, son complété $\hat{D}'$ est réduit. Mais puisque $\hat{D}'\cong \hat{D}/(aX-b)$ et que D est normal, on en conclut d'après le lemme de ZARISKI ([1] 7.6.4 ou [4] 36.3 p. 132) que $\hat{D}$ est réduit; donc par fidèle platitude $\hat{C}$ est réduit. C.Q.F.D.

Corollaire (I.2): *Soient* A *un anneau semi-local noethérien intègre et* K *son corps des fractions. Alors les conditions suivantes sont* *équivalentes*:

1) *Le complété* $\hat{A}$ *de* A *est réduit.*

2) *Pour toute* A-algèbre *affine* B *dont le corps des fractions est une extension séparable de* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

3) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini et intègre* B *contenant* A, *et dont le corps des fractions est une extension séparable de* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

4) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini et intègre* B *contenue dans* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

5) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini et intègre* B *contenue dans* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

Preuve: Puisque $\hat{A}$ est réduit, la clôture intégrale A est A-module de type fini (cf. [4] 32.2 p. 114). Donc l'assertion découle de (I.1) et de ([4] 36.8 p. 134). C.Q.F.D.

Corollaire (I.3): *Soient* A *un anneau régulier intègre et* B *une* A-algèbre *affine dont le corps des fractions est une extension séparable de celui de* A. *Alors la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

Remarque (I.4): Le corollaire (I.3) peut être mis en défaut si l'on ne suppose pas que le corps des fractions de B est une extension séparable de celui de A, puisqu'il existe des anneaux de valuation discrète qui ne sont pas des anneaux japonais (cf. [4] E3 p. 206).

II. APPLICATIONS A LA THEORIE DES ANNEAUX JAPONAIS

Théorème (II.1): *Soient* A *un anneau noethérien japonais et* K *son corps des fractions. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *Pour tout idéal premier* P, *l'anneau total des fractions du complété* $\hat{A}_P$ *de l'anneau local* A_P *est une* K-algèbre *séparable.*

2) *Pour toute* A-algèbre *affine* B *dont le corps des fractions est une extension finie de* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

3) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini et intègre* B *contenant* A, *dont le corps des fractions est une extension finie de* K, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

4) *Pour toute* A-algèbre *affine* B, *la clôture intégrale de* B *est un* B-module *de type fini.*

5) *Pour toute* A-algèbre *locale essentiellement de type fini et intègre* B *contenant* A, *la clôture intégrole de* B *est un* B-module *de type fini.*

Preuve: Soit A' la fermeture intégrale de A dans une extension finie de K. Si P' est un idéal premier de A', la condition 1) du théorème implique l'anneau local $A_{P'}$ est formellement réduit, donc les conditions 1), 2) et 3) sont équivalentes d'après (I.2). D'autre part les conditions 4) et 5) sont équivalentes d'après le théorème de NAGATA ([4] 35.3 p. 128), et 4) implique 3). Il suffit donc de prouver que 1) implique 4). On peut supposer que A est local d'idéal maximal P. Soit R l'anneau total des fractions de $\hat{A}$. On peut supposer que B est un anneau de fractions d'une A-algèbre affine C en un idéal maximal M au-dessus de P. Soit L le corps des fractions de B. Alors $B\otimes_A\hat{A}$ est isomorphe à un sous-anneau de $L\otimes_K R$ donc est réduit. Puisque $B\otimes_A\hat{A}$ est un anneau excellent, son complété pour la topologie M-adique qui est isomorphe au complété de B est réduit. Donc la clôture intégrale de B est un B-module de type fini d'après la théorème de MORI ([4] 32.2 p. 114). C.Q.F.D.

(II.2): *On dira qu'un anneau* A *appartient à la classe* (K) *si* A *est un anneau noethérien japonais qui vérifie les conditions équivalentes du théorème* (II.1).

Corollaire (II.3): *Soit* A *un anneau appartenant à la classe* (K).

*Alors si B est un anneau de fractions d'une A-*algèbre *affine, B appartient à la classe (K).*

Corollaire (II.4): *Tout anneau noethérien universellement japonais intègre appartient à la classe (K). En particulier tout anneau japonais noethérien de dimension ≤ 1 appartient à la classe (K).*

Corollaire (II.5): *Soient A un anneau semi-local noethérien intègre et K son corps des fractions. Alors A appartient à la classe (K) si et seulement si l'anneau total des fractions du complété $\hat{A}$ de A est une K-*algèbre *séparable i.e. si la fibre générique du morphisme* $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ *est géométriquement réduite.*

Preuve: Si la fibre générique du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est géométriquement réduite, alors l'anneau total des fractions R de $\hat{A}$ est une K-algèbre séparable puisque pour toute extension finie L de K, l'anneau $R \otimes_K L$ est un anneau de fractions de fractions de $\hat{A} \otimes_A L$ donc est réduit puisque par hypothèse $\hat{A} \otimes_A L$ est réduit. Donc A est un anneau japonais d'après ([1] 23.1.7, où l'on peut remplaçer local par semi-local). D'autre part pour toute A-algèbre finie et intègre C contenant A, le complété $\hat{C}$ de C est réduit puisque $\hat{C} \subseteq \hat{A} \otimes_A L$ où L est le corps des fractions de C; donc pour tout idéal maximal M de C le complété $\hat{C}_M$ de l'anneau local C_M est réduit (cf. [4] 36.7 p. 134). Soit B une A-algèbre affine dont le corps des fractions est une extension finie de K. Puisque A est un anneau japonais, la fermeture intégrale C de A dans B est une A-algèbre finie, donc pour tout idéal maximal M de C le complété $\hat{C}_M$ de l'anneau local C_M est réduit d'après ce que nous venons de voir. Alors puisque B est une C-algèbre affine, la clôture intégrale B est un B-module de type fini d'après (I.1.1) puisque B et C ont même corps des fractions, donc A appartient à la classe (K) d'après (II.1.2)). Réciproquement si A appartient à la classe (K), alors pour toute extension finie L de K et tout idéal maximal M de la fermeture intégrale C de A dans L, $\hat{C}_M$ est réduit (cf. II.1.2)), donc $\hat{C}$ est réduit (cf. [4] 36.7 p. 134), donc $R \otimes_K L$ qui est un anneau de fractions de $\hat{C}$ est aussi réduit, donc R est une K-algèbre séparable, donc la fibre générique de $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ est géométriquement réduite puisque $\hat{A} \otimes_A L \subseteq R \otimes_K L$ pour toute extension finie L de K. C.Q.F.D.

Théorème (II.6): *Soient A un anneau noethérien intègre et x un élément appartenant au radical de Jacobson de A. On suppose*:

i) *$P = xA$ est un idéal premier de A et A est séparé et complet pour la topologie P-adique.*

ii) *A/xA appartient à la classe (K). Alors A appartient aussi à la classe (K).*

Preuve: D'après ([8] th. 1.1), A est un anneau japonais. Soit L une extension finie du corps des fractions de A et A' la fermeture intégrale de A dans L, donc A' est un A-module de type fini. Soit M un idéal maximal de A, donc $x \in M$. Soient $\bar{A}$ la clôture intégrale de A et $\bar{P}$ un idéal premier minimal de $x\bar{A}$. D'après ([4] 33.11 p. 120), $\bar{P} \cap A \in \mathrm{Ass}(A/xA)$; donc $\bar{P} \cap A = P = xA$. Donc pour tout idéal premier minimal P' de $xB (B = A'_M)$ on a $P' \cap A = P$ puisque $ht(P' \cap \bar{A}) = ht(P') = 1$ (cf. [4] 10.14 p. 32) i.e. $P' \cap \bar{A}$ est un idéal premier minimal de $x\bar{A}$. Donc puisque A/xA appartient à la classe (K), si P' est un idéal premier minimal de xB, le complété de B/P' est réduit (cf. II.3 et II.5) parce que B/P' est un anneau de fractions d'une A/xA algèbre affine. D'autre part B vérifie (S_2) et (R_1) d'après le critère de normalité de SERRE ([4] 12.9 p. 41) donc le complété $\hat{B}$ de B est d'après le lemme de ZARISKI ([1] 7.6.4 ou [4] 36.3 p. 132). Donc les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(A)$ aux points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ appartiennent à la classe (K) d'après (II.5) puisque pour un anneau semi-local noethérien intègre R de corps des fractions K, il revient au même de dire que R est un anneau japonais et pour toute extension finie L de K, le complété de la fermeture intégrale de R dans L est réduit que de dire que la fibre générique du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{R}) \to \mathrm{Spec}(R)$ est géométriquement réduite. Donc A appartient à la classe (K) d'après

(II.5, II.3 et II.1.1)) puisque A est un anneau japonais. C.Q.F.D.

De la même manière on peut prouver:

Théorème (II.7): *Soient A un anneau noethérien japonais et x un élément appartenant au radical de JACOBSON de A. Alors si A/xA appartient à la classe (K) (donc $P=xA$ est un idéal premier), A appartient aussi à la classe (K).*

Comme application du théorème (II.6), nous avons le théorème suivant:

Théorème (II.8): *Soit A un anneau appartenant à la classe (K). Alors tout anneau de séries formelles sur A à un nombre fini de variables $B=A[[T_1, \cdots, T_r]]$ appartient aussi à la classe (K).*

Théorème (II.9): *Soit A un anneau local noethérien intègre. Alors le henselisé $\tilde{A}$ de A appartient à la classe (K) si et seulement si A est unibranche et appartient à la classe (K).*

Preuve: Supposons que $\tilde{A}$ appartient à la classe (K). Puisque $\tilde{A}$ est intègre, on en conclut que A est unibranche. Soit A' une A-algèbre intègre finie contenant A. Alors $\tilde{A}'=A'\otimes_A\tilde{A}$ est une $\tilde{A}$-algèbre finie et sans torsion. Donc l'image réciproque dans $\tilde{A}$ de tout idéal premier minimal de $\tilde{A}'$ est l'idéal 0 de $\tilde{A}$. Puisque $\tilde{A}$ appartient à la classe (K), le complété de $\tilde{A}'$ qui est isomorphe au complété de A' est réduit. Donc la fibre générique du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A})\rightarrow\mathrm{Spec}(A)$ est géométriquement réduite. Donc A appartient à la classe (K) d'après (II.5). Réciproquement, supposons que A est unibranche et appartient à la classe (K). Donc $\tilde{A}$ est intègre puisque A est intègre et unibranche. Soit B une $\tilde{A}$-algèbre intègre finie contenant $\tilde{A}$. Il existe donc une A-algèbre locale essentiellement étale A_0 et une A_0-algèbre finie (nécessairement intègre) B_0 ([1] 18.6.1) telle que $B\cong B_0\otimes_{A_0}\tilde{A}$. Puisque A appartient à la classe (K), le complété $\hat{B}_0$ de B_0 qui est isomorphe au complété $\hat{B}$ de B est réduit. On en conclut comme précédemment que $\tilde{A}$ appartient à la classe (K). C.Q.F.D.

De la même façon on prouve:

Théorème (II.10): *Soient A un anneau local noethérien et $\tilde{\tilde{A}}$ son henselisé strict. Alors $\tilde{\tilde{A}}$ appartient à la classe (K) si et seulement si A est géométriquement unibranche et appartient à la classe (K).*

Théorème (II.11): *Soient A un anneau japonais régulier, K son corps des fractions et p l'exposant caractéristique de K. Si $[K: K^p]<+\infty$, alors A appartient à la classe (K).*

Preuve: On peut supposer que A est local. D'après (II.5) il suffit de prouver que la fibre générique du morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{A})\to\operatorname{Spec}(A)$ est géométriquement réduite. Soient L une extension radicielle finie de K et A' la clôture intégrale de A dans L. Il existe une puissance q de p telle que $L\subseteq K^{q^{-1}}$. Puisque $[K^{q^{-1}}: K]<+\infty$ la clôture intégrale B de A dans $K^{q^{-1}}$ est un A-module de type fini. Il n'est pas difficile de voir que B est un anneau régulier. Donc le complété $\hat{A}'$ de A' qui est isomorphe à un sous-anneau de $\hat{B}$ est réduit. On en conclut donc que la fibre générique du morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{A})\to\operatorname{Spec}(A)$ est géométriquement réduite. Ce qui termine la démonstration. C.Q.F.D.

Exemple: Un anneau régulier de dimension 2 appartenant à la classe (K) qui n'est pas un anneau universellement japonais.

Soient X_i $i\in\mathbf{N}$ des indéterminées et $V=\mathbf{Z}_2(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ qui est l'anneau local de $B=\mathbf{Z}_2[X_i]_{i\in\mathbf{N}}$ en l'idéal premier $2B$. Donc V est un anneau de valuation discrète. Posons $C=V[[T]][T_i]_{i\in\mathbf{N}}/(T_i^2-X)_{i\in\mathbf{N}}$ et pour tout entier i soit Y_i l'image de T_i dans C. Alors $C_0=C/2C \cong k^2[[T]][k]$ (où $k=\mathbf{F}_2(Y_i)_{i\in\mathbf{N}}$) est un anneau local régulier d'après ([4] 3.1 p. 206). Donc le séparé complet A de C pour la topologie

$2C$-adique est un anneau noethérien d'après ([7] ch. 2, prop. 6, Cor. 3). Par définition même de C, C est un V-module plat. Donc 2 n'est pas diviseur de 0 dans C et $2C=P$ est un idéal premier. Donc A est isomorphe à un sous-anneau du complété de l'anneau de valuation discrète $V'=C_P$ (cf. [2] 23.1.3.1), donc A est intègre et puisque $A/2A \cong C/2C$ est régulier, A est un anneau local régulier ([4] 9.11 p. 28). Puisque le corps des fractions de A est de caractéristique 0, A appartient à la classe (K) d'après (II.11) puisque A est un anneau japonais. Mais $A/2A=k^2[[T]][k]$ n'est pas un anneau japonais d'après ([4] 3.2 p. 206) puisque $[k:k^2]=+\infty$, donc A n'est pas un anneau universellement japonais, et il est clair que $\dim(A)=2$. C.Q.F.D.

On ne peut pas espérer que tout anneau japonais appartienne à la classe des anneaux étudiés dans cet article puisqu'un anneau japonais n'est pas nécessairement noethérien. Cependant l'auteur ne connaît pas d'exemple d'anneau japonais noethérien n'appartenant pas à la classe (K). Ce qui motive donc la

Question: Existe-t-il un anneau japonais noethérien qui n'appartient pas à la classe (K)?

Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75 Paris V (France)

Bibliographie

[1] A. Grothendieck et J. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique chap. IV. Paris P.U.F. No **24** (1965) No. **32** (1967).
[2] A. Grothendieck et J. Dieudonné: Eléments de Géométrie Algébrique chap. IV. P.U.F. Paris No **20** (1964).
[3] T. Kikuchi: On the finiteness of the derived normal ring of an affine ring, J. Math. Soc. Japan Vol. **15** No **3**, 1963, p. 360-365.
[4] M. Nagata: Local Rings, Interscience Publishers New-York, 1962.
[5] L. Ratliff: Affine rings over rank two regular local rings, Amer. J. Math. **83**, 1961, p. 709-722.
[6] D. Rees: A note on analytically unramified local rings, J. Math. Soc. **30** (1961), p. 24-28.

[7] J. P. Serre: Algèbre locale-Multiplicité, Lecture Notes in Math. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 2ème édition 1965.

[8] H. Seydi: Sur la théorie des anneaux japonais, C. R. Acad. Sc. Paris t. **271** (1970) p. 73-75.