J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
12-2 (1972) 263-296

Analyticitès relatives à chaque variable

Analogies du théorème de Hartogs

Par

Toshiaki TERADA

(Reçu le 25 Juin, 1971)[1]

Introduction

Dans le mémoire le plus fameux de Hartogs [6], nous trouvons deux sujets sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. L'un est la pseudoconvexité de domaines d'holomorphie qui s'est ultérieurement développée en grande théorie, et l'autre est l'analyticité relative à chaque variable. Il a montré qu'une fonction holomorphe par rapport à chaque variable est holomorphe comme une fonction de tous les variables. Celui-ci aussi exprime une propriété remarquable de l'analyticité. Les énoncés analogues sur les fonctions non analytiques — infiniment différentiables, par exemple, — ne sont plus vrais.

Ensuite, M. Caccioppoli [3], [4], M. Nishino [10] et M. Rothstein [11] ont établi les théorèmes de même genre sur les fonctions méromorphes en chaque variable et les familles séparément normales de fonctions holomorphes ou méromorphes. D' autre part, l'auteur [14] a montré que, au cas de deux variables par exemple, pour que toute fonction $f(x, y)$ holomorphe en x pour tout y fixé soit holomorphe, il suffit qu'elle soit holomorphe en y seulement pour tout x fixé dans un ensemble de capacité positive, et de plus c'est nécessaire.

---

[1] Revisé le 20 Novembre 1971.

Dans I, nous proposons quelques lemmes élémentaires sur les fonctions plurisousharmoniques et leurs suites. Dans les suivants nous obtenons de nouveau tous les résultats ci-dessus comme leurs conséquences et les étendons en quelques direction; par exemple, sur les fonctions méromorphes multiformes et leurs familles.

D'autre part M. Browder [2], M. Lelong [9], MM. Cameron et Storvic [5] et M. Siciak [13] ont obtenu les théorèmes très beaux qui concernent les deux sujets de Hartogs. Le théorème 1 ne sera qu'une conséquense imédiate de celui de M. Siciak. Cependant les démonstrations n'étant pas élémentaires, nous le preuvons de nouveau à notre manière.

Dans la suite, D signifie un domaine de l'espace produit C^{μ} de l'espace de μ variables complexes $x=(x_1, x_2, \dots x_{\mu})$, G celui de ν variables $y=(y_1, y_2, \dots y_{\nu})$ et E un ensembe de C^{μ}; et notons $\|x\|=\sup(|x_1|, |x_2|, \dots |x_{\mu}|)$, et $\|y\|=\sup(|y_1, |y_2|, \dots |y_{\nu}|)$.

I. Lemmes fondamentaux.

1. Fonctions plurisousharmoniques.

Une fonction $u(x)$ à valeur réelle ou $-\infty$ définie sur D est dite plurisousharmonique si exp $u(x)$ est supérieurement semi-continue et la restriction à toute droite complexe est sousharmonique.

Les fonctions plurisousharmoniques ont des propriétés:

(a) Si $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont plurisousharmonique, $au_1(x)+bu_2(x)$ et sup $(u_1(x), u_2(x))$ le sont, a et b étant des constantes positives.

(b) Si $\{u_n(x)\}$ est une suite de fonctions plurisousharmoniques, et si la suite $\{\exp u_n(x)\}$ converge uniformément ou en décroissant à exp $u(x)$, $u(x)$ est plurisousharmonique.

(c) Etant donnée une fonction $u(x)$ qui est la limite supérieure d'une suite de fonctions plurisousharmoniques supérieurement uniformément bornées dans l'intérieur de D ou la borne supérieure d'une famille de telles fonctions,

$$(A_\rho u)(x)=\frac{1}{(\pi\rho^2)^\mu}\int_{\|x-x'\|\leq\rho}u(x')\quad \mathrm{dv}$$

est continue et plurisousharmonique où elle peut se définir, où dv est la mesure de Lebesgue et ρ est un nombre positif. D'ailleurs, ρ tendant monotonement vers zéro, $(A_\rho u)(x)$, en décroissant, converge à la régularisée supérieure de $u(x)$

$$u^*(x)=\limsup_{x'\to x} u(x')$$

qui est plurisousharmonique et égale à $u(x)$ presque partout. De plus, si $\exp u^*(x)$ est continue sur un ensemble compact, $\exp(A_\rho u)(x)$ y converge uniformément à $\exp u^*(x)$.

2. Ensembles polaires.

Il s'agit maintenant d'étendre la notion de "capacité nulle" au plusieurs variables. *D et E étant donnés, désignons par $\chi_{E,D}(x)$ la régularisée supérieure de la borne supérieure $v_{E,D}(x)$ de la fmille de toutes les fonctions plurisousharmoniques qui sont définies et inférieures a 0 dans D et inférieures a -1 en tout point de $E\cap D$. L'ensemble E est dit*

1° *strictement D-polaire si $\chi_{E,D}(x)\equiv 0$,*

2° *D-polaire si, pour tout domaine D_0 a l'interieur de D, il est strictement D_0-polaire, et*

3° *faiblement D-polaire s'il y a une suite $\{U_n\}_{n=1,2\cdots}$ de voisinages de $\bar{E}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{x\in U_n}\chi_{E,D\cap U_n}(x)=0$ ou si E est une réunion dénombrable de tels ensembles.*

Entre ces définitions et celles de M. Lelong ou de M. Nishino, il y a des relations intimes.

Lemme 1. (Kusunoki [8]) *Un ensemble E est strictement D-polaire si et seulement s'il y a une fonction plurisousharmonique non positive qui prend la valeur $-\infty$ en tout point de $E\cap D$ mais ne la prend plus identipuement dans D.*

En effect, supposons que $\chi_{E,D}\equiv 0$; puisque $\chi_{E,D}(x)=v_{E,D}(x)$ presque partout, il existe au moins un point x' de D et une suite $\{u_n(x)\}$ de fonctions plurisousharmoniques tels que

$$u_n(x)\begin{cases}\leqq 0 & (x\in D)\\ \geqq -2^{-n} & (x=x')\\ \leqq -1 & (x\in E)\end{cases}$$

Alors, la fonction définie par la série décroissante

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

remplit les conditions demandées. Réciproquement, s'il y a une telle fonction $u(x)$, nous avons

$$0\geqq\chi_{E,D}(x)\geqq\left[\sup_{n\geqq 1}\left(\frac{1}{n}u(x)\right)\right]^*=0$$

parce que, la mesure de l'ensemble de points où $u(x)=-\infty$ étant nulle, son complément est dense.

Lemme 2. *Supposons que D soit un domaine d'holomorphie et E soit une réunion dénombrable d'ensembles compacts. Alors, E est D-polaire si et seulement s'il y a une fonction plurisousharmonique sur D qui prend la valeur $-\infty$ en tout point de $E\cap D$ mais qui ne la prend plus identiquement.*

Nous en donnons la démonstration après le lemme 3.

Exemple 1. Ici, le mot "polaire" se lit soit "strictement D-polairé", soit "D-polaire", soit "faiblement D-polaire", si rien n'est marqué.

1° Tout ensemble analytique est D-polaire, mais si $D=\mathrm{C}^{\mu}$, il n'est pas strictement D-polaire.

2° Tout ensemble de capacité nulle sur le plan est polaire si D est borné.

3° Dans un domaine produit, l'ensemble produit d'un ensemble polaire et d'un ensemble quelconque est aussi polaire.

4° Une réunion dénombrale d'ensembles polaires est encore polaire.

5° Une variété de codimension réelle 1 n'est pas polaire.

6° Un ensemble de capacité positive sur le plan n'est pas polaire.

7° Dans un domaine produit, l'ensemble produit d'ensembles non polaires n'est plus polaire.

Nous venons de voir que l'ensemble polaire n'est pas nécessairement strictement polaire, mais, quant à l'ensemble polaire et à celui faiblement polaire, nous ne savons pas encore si ces deux notions se coïncident au cas de plusieurs variables.

3. Suites de fonctions plurisousharmoniques.

Nous examinons l'aspect de convergence et les relations entre la fonction limite et sa régularisée supérieure.

Lemme 3. *Si E est compact et $\{u_n(x)\}$ est une suite de fonctions plurisousharmoniques uniformément supérieurement bornées dans un voisinage U de E, la suite de fonctions*

$$\sup\{(\exp(A_\rho u_n)(x) - \exp(A_\rho u)(x)), 0\}$$

converge à zero uniformément sur E lorsque n grandit où $u(x) = \lim_{n\to\infty} \sup u_n(x)$ et ρ est choisi si petit que les $(A_\rho u_n)(x)$ peuvent se définir partout sur E. De plus, si $\exp u^*(x)$ est contiue,

$$\sup\{(\exp u_n(x) - \exp u^*(x)), 0\}$$

converge à zero uniformément dans E.

En effect, la première partie se démontre par la continuité égale de la suite $\{\exp (A_\rho u_n)(x)\}$, la continuité uniforme de $\exp(A_\rho u)(x)$, le lemme de Fatou et le théorème de Borel-Lebesgue. La deuxième partie est une conséquence de ce que, ρ tendant vers zéro, $\exp(A_\rho u)(x)$ converge uniformément à $\exp u^*(x)$ selon (*c*) du N^0 1 et de ce que $u_n(x) \leqq (A_\rho u_n)(x)$.

Démonstration du lemme 2. D étant un domaine d'holomorphie et E étant une réunion dénombrable d'ensembles compacts, il y a une suite $\{D_n\}$ de domaines d'holomorphie et une suite $\{E_n\}$ d'ensembles compacts tel que $D_n \Subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$, $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E \cap D$, $E_n \subset D_n$ et tous les $[D_n, D]$ soient des paires de Runge, c'est-à-dire, toute fonction holomorphe dans D_n puisse s'approximer uniformément dans son intérieur par une suite de fonctions holomorphes dans D. Car, il ne faut que choisir un polyèdre analytique comme D_n.

E_n étant strictement D_{n+1} -polaire, selon le lemme 1 il existe, pour tout n, une fonction $u_n(x)$ plurisousharmonique, non positive et definie dans D_{n+1} qui prend la valeur $-\infty$ en tout point de E_n mais ne la prend plus identiquement. D_{n+1} étant un domaine d'holomorphie, il y a, d'après M. Bremermann [1], une suite $\{a_{mn}(x)\}_{m=1,2,\cdots}$ de fonctions holomorphes dans D_{n+1} telle que nous ayons

$$u_n(x) = v_n^*(x)$$

où

$$v_n(x) = \limsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log |a_{mn}(x)|.$$

Du fait que $u_n(x) = v_n(x)$ presque partout et par l'additivité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, il existe un point x' de D_1 tel que $u_n(x') = v_n(x') \neq -\infty$. Une suite $\{k_n\}$ de nombre positifs étant arbitrairement donnée, par le lemme 3, nous pouvons choisir un entier positif m_n pour tout n tel que

$$\frac{1}{m_n} \log |a_{m_n n}(x)| \begin{cases} < 0 & (x \in D_n) \\ > -2|u_n(x')| & (x = x') \\ < -k_n |u_n(x')| & (x \in E_n) \end{cases}$$

et $$m_n|u_n(x')|>n.$$

D'ailleurs, les $[D_n, D]$ étant des paires de Runge, il existe encore une suite $\{a_n(x)\}$ de fonctions holomorphes dans D qui satisfont dans D_n

$$|a_n(x)-a_{m_n n}(x)|<\exp(-m_n n k_n|u_n(x')|).$$

Il en resulte que, si $k_n>n^2$ par exemple, la fonction

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2|u_n(x')|m_n}\log|a_n(x)|$$

est celle de notre but, parce que nous avons

$$\frac{1}{n^2 m_n|u_n(x')|}\log|a_n(x)|\begin{cases}<\dfrac{1}{n^2} & (x\in D_n)\\[2ex] >-\dfrac{3}{n^2} & (x=x')\\[2ex] <\dfrac{-k_n}{2n^2} & (x\in E_n)\end{cases}$$

La réciproque est evidente.

Lemme 4. *Soit* $\{u_n(x)\}$ *une suite de fonctions plurisousharmoniques supérieurement uniformément bornées dans l'intérieur de* D. *Si* E *n'est pas* D*-polaire et si*

$$u(x)=\limsup_{n\to\infty} u_n(x)\begin{cases}\leqq 0 & (x\in D)\\ \leqq -1 & (x\in E),\end{cases}$$

nous avons

$$\inf_{x\in D} u^*(x)<0,$$

et, par suite, il y a un nombre négatif $-c$, *un ouvert* U *de* D *et un entier positif* n_0 *tels que*

$$u_n(x)<-c \qquad (x\in U,\ n\geqq n_0).$$

En effect, il existe un domaine D_0 dans l'intérieur de D où E n'est pas strictement D_0-polaire. En posant

$$E_n(\epsilon)=\{x;\ u_p(x)\leqq -1+\epsilon \quad \text{pour tout} \quad p\geqq n\}$$

dont ϵ est un nombre positif, nous avons

$$E\cap D_0\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(\epsilon).$$

Par l'additivité dénombrable d'ensembles polaires, il y a un n_0 tel que, en posant $\eta_n=\sup_{x\in D_0} u_n(x)$, nous ayons

$$(1-\epsilon+\eta_n)^{-1}(u_n(x)-\eta_n)\begin{cases}\leqq 0 & (x\in D_0)\\ \leqq -1 & (x\in E_{n_0}\cap D,\ n\geqq n_0)\end{cases}$$

Donc, nous avons, comme $\lim_{n\to\infty} \eta_n=0$ par le lemme 3,

$$\inf_{x\in D} u^*(x)<(1-\epsilon)\inf_{x\in D_0} \chi_{E_{n_0},D_0}(x)<0$$

D'ailleure, par le lemme 3 et la semi-continuité supérieure de $\exp u^*(x)$, nous avons l'autre résultat.

Corollaire. *Si $E=D$ dans ce lemme, pour tout nombre positif ϵ et tout domaine D_0 dans l'intérieur de D, il y a un entier positif n_0* tel que

$$u_n(x)<-1+\epsilon \qquad (x\in D_0,\ n>n_0).$$

Lemme 5. *Supposons que E ne soit pas faiblement D-polaire. Soit $\{u_n(x)\}$ une suite de fonctions plurisousharmoniques uniformément supérieurement bornées dans un voisinage U de $\bar{E}$. Alors, si*

$$u(x)=\limsup_{n\to\infty} u_n(x)\leqq -1 \qquad (x\in E)$$

et

$$u^*(x) \leqq 0 \qquad (x \in \bar{E}),$$

nous avons

$$\inf_{x \in U} u^*(x) < 0$$

et, par suite, il y un nombre négatif $-c$, *un ouvert* U_0 *de* U *et un entier positif* n_0 *tels que*

$$u_n(x) < -c \qquad (x \in U_0,\ n > n_0).$$

Pour le preuver, nous n'avons qu'à modifier la démonstration du lemme 4. Etant donnés arbitrairement des nombres positifs ϵ et η, de même manière que la démonstration du lemme 4, il y a un ensemble E_ϵ non faiblement D-polaire contenu dans E et un entier n_ϵ tel que

$$u_n(x) < -1 + \epsilon \qquad (n > n_\epsilon,\ x \in E_\epsilon),$$

et, par la semi-continuité de exp $u^*(x)$ et le lemme 3, il y a un voisinage U_η de $\bar{E}$ (par suite, de $\bar{E}_\epsilon$) et un entier positif n_η tels que

$$u_n(x) < \eta \qquad (x \in U_\eta,\ n > n_\eta)$$

donc, nous avons

$$u^*(x) \leqq (1 - \epsilon + \eta) \chi_{E_\epsilon, U_\eta}(x).$$

Or, η peut s'approcher arbitrairement de zéro, cependent, $\inf\limits_{x \in U_\eta} \chi_{E_\epsilon, U_\eta}(x)$ ne s'en approche pas et reste négatif; donc, nous avons l'une des inégalité du but. Quant à l'autre, c'est évident à l'égard du lemme 3 et la semi-continuité supérieure de exp $u^*(x)$.

Corollaire. *Si la mesure de* E *est positive dans ce lemme, il y a un ensemble* E_0 *dont la mesure de* $E - E_0$ *est nulle, et pour tout nombre positifs* ϵ *et tout ensemble compact* E_{00} *contenu dans* E_0, *il y a un entier positif* n_0 *et un voisinage* U_{00} *de* E_{00} *tels que* $u_n(x) > -1 + \epsilon$ *pour tout* $n > n_0$ *et tout* $x \in U_{00}$.

En effect, c'est la conséquence de ce que $u(x)=u^*(x)$ presque partout et de ce que, par la définition de la mesure intérieure, nous pouvons choisir une suite $\{E_n\}$ d'ensembles compacts contenus dans E dont la measure de $E-\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est nulle.

4. Suites d'ensembles pseudoconcaves.

Un ensemble S dans un domaine et dit pseudoconcave s'il est relativement fermé et satisfait au théorème de la continuité en tous ses points, c'est-à-dire, si son complément est localement pseudoconvexe.

En général, un ensemble S et une suite $\{S_n\}$ d'ensembles étant donnés, nous disons que la suite s'enfuit de S si, pour tout ensemble S_0 compact et contenu dans S, il y a un entier positif n_0 tel que tous les $S_n \cap S_0$ soient vides pourvu que $n>n_0$ et que la suite s'enfuit strictement de S si elle s'enfuti d'un voisinage convenable de S. Si S est ouvert, ces deux notions se confondent.

Dans la suite, nous considérons le domaine produit (D, G) de $C^{\mu+\nu}$. Soit S un ensemble pseudoconvave dans un domaine d'holomorphie D et soit y un point de G. Nous savons que la fonction

$$U(x; y)=-\log R'_y(x)$$

est plurisousharmonique dans D excepté les points où $u(x; y)=+\infty$ dont $R'_y(x)$ est le rayon de Hartogs, c'est-à-dire, la borne supérieure de tous les rayons r' tels que, x et y étant fixés, les ensemble $\{(x, y'); \|y-y'\|<r'\}$ soient contenus dans $(D, G)-S$. Nous l'appelons *le rayon négativement logarithmique de Hartogs*. De même, en remplaçant x par y et y par x, nous définissons la fonction

$$v(y; x)=-\log R_x(y)$$

qui est plurisousharmonique dans G excepté les points ou $v(y; x)=+\infty$.

Lemme 6. *Soit E un ensemble non D-polaire et soit $\{S_n\}$ une suite d'ensembles pseusoconvaves dans (D, G). Si la suite s'enfuit* *de (x, G) pour tout x fixé dans E et de (D, y) pour tout y fixé dans G et si elle s'enfuit strictement d'un point de (D, G), elle s'enfuit de (D, G).*

En effect, il suffit de montrer que (D, G) coïncide au domaine $\mathscr{D}_0$ le plus grand d'où la suite s'enfuit.

Soit (x', y') un point de (D, G) et soient r, r' et R trois rayons tels que le polycercle $(\|x-x'\|<R, \|y-y'\|<r')$ reste dans (D, G) et que la suite s'enfuie strictement du polycercle $(\|x-x'\|<r, \|y-y'\|\leqq r')$. Alors les rayons $v_n(y; x')$ négativement logarithmiques de Hartogs par rapport à S_n sont bien définis et supérieurement uniformément bornés dans $(\|y-y'\|\leqq r')$ pourvu que n soient suffisamment grands, et, puisque $\{S_n\}$ s'enfuit de (x', G), nous avons

$$v(y; x')=\lim_{n\to\infty} \sup v_n(y; x')\leqq -\log R$$

Donc, par le corollaire du lemme 4, un nombre positif ϵ étant arbitrairement donné, nous avons

$$v_n(y; x')\leqq -\log R+\epsilon,$$

pour tout n suffisamment grand. Cela signifie que $\{S_n\}$ s'enfuit de $(\|x-x'\|<R, \|y-y'\|<r')$, et, en répétant les mêmes procédes, nous voyons qu'elle s'enfuit aussi de $(D, \|y-y'\|<r')$; conséquemment, $\mathscr{D}_0$ est un domaine produit (D, G_0) dont G_0 est un domaine non vide de G parce que (D, G_0) contient au moins un point (x', y').

Si G n'était pas G_0, il y aurait un point y'' de G_0 et deux rayons différents r_0' et R' tels que les polycylindres $(\|y-y''\|<r_0')$ et $(\|y-y''\| <R')$ soient les plus grands qui sont contenus dans G_0 et respectivement dans G. Alors, les rayons $u_n(x; y'')$ négativement logarithmiques de Hartogs par rapport à S_n sont bien définis et supérieurement uniformément bornés dans l'intérieur de D pourvu que n soient suffisamment grands; comme $\{S_n\}$ s'enfuit de (x, G) pour tout x fixé dans E, nous avons

$$u(x\,;y'')=\limsup_{n\to\infty} u_n(x,y'')\begin{cases}<-\log r_0' & (x\in D)\\ <-\log R' & (x\in E),\end{cases}$$

Il en résult, par le lemme 4, qu il y a un ouvert U de D et un rayon r_1' plus grand que r_0' tels que la suit $\{S_n\}$ s'enfuie de $(U, \|y-y''\| < r_1')$, ce qui contredit parce que r_0' est le plus grand. Donc, nous avons $G_0=G$ et, par suite, $\{S_n\}$ s'enfuit de (D, G).

Corollaire. *Si une suite $\{S_n\}$ d'ensembles pseudoconcaves s'enfuit de (x, G) pour tout x fixé dans D et elle s'enfuit strictement de (D, y') où y' est un point fixé de G, elle s'enfuit de (D, G).*

Lemme 7. *Soient E un ensemble non faiblement D-polaire et U un voisinage de $\bar{E}$, et soit $\{S_n\}$ une suite d'ensembles pseudoconcaves dans (U, G). Si elle s'enfuit de (x, G) pour tout x fixé dans E et si elle s'enfuit strictement de $(\bar{E}, G_0)$ dont G_0 est un ouvert dans l'intérieur de G, il y a au moins un point x' de U et un ouvert G_1 de G contenant proprement G_0 tels que $\{S_n\}$ s'enfuie strictement de (x', G_1).*

En effet, étant $G\neq G_0$, il y a un point y' de G_0 et deux rayons r' et r_0' tels que le polycercle $(\|y-y''\|<r_0')$, $(\|y-y'\|<r')$ soit le plus grand qui est contenu respectivement dans G_0, respectivement dans G. Les rayons $u_n(x\,;y')$ négativement logarithmiques de Hartogs par rapport aux S_n sont bien définis et supérieurement unformément bornés dans un voisinage de $\bar{E}$ pourvu que n soient suffisamment grands, et

$$u(x\,;y')=\limsup_{n\to\infty} u_n(x\,;y')<-\log r' \qquad (x\in E)$$

et

$$u^*(x)<-\log r_0' \qquad (x\in\bar{E})$$

Donc, par le lemme 5, il y a un ouvert U_0 de U et un rayon r_1' plus grand que r_0' tels que nous ayons

$$u_n(x) < -\log r'_1 \qquad (x \in U_0$$

pourvu que n soient suffisamment grands; il en resulte ce lemme.

Corollaire. *Si la mesure de E est positive dans ce lemme, il y a un ensemble E_0 dont la mesure de $E-E_0$ est nulle tel que la suite $\{S_n\}$ s'enfuie de (E_0, G)*

En effet, c'est une conséquence du corollaire du lemme 5 et de l'additivité dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Remarque. E et D étant donnés sur le plan, nous avons $\chi_{E,D}(x) \equiv 0$ ou bien $\inf\limits_{x \in E} \chi_{E,D}(x) = -1$, mais cela n'est pas encore affirmé ni nié au cas de plusieurs variables. Cependant, cet énoncé est équivalent à celui que, D étant donné, l'ensemble de points $\{x; u(x) \neq u^*(x)\}$ est strictement D-polaire où $u(x)$ est la borne supérieure d'une famille quelconque de fonctions plurisousharmonique uniformément supérieurement bornées dans D ou la limite supérieure d'une suite quelconque de telles fonctions.

En effet, supposons qu'il y a une famille $\{u_\lambda(x)\}$ de fonction telle que, en posant $u(x) = \sup\limits_\lambda u_\lambda(x)$, $E = \{x; u^*(x) > u(x)\}$ ne soit pas strictement D-polaire. Parce que $E = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} E_{mn}$ où $E_{mn} = \{x; u^*(x) > a_m > a_n > u(x)\}$, $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ étant l'ensemble de tous les nombres rationnels, il existe un $E_{m_0 n_0}$ non strictement D-polaire par la sommabilité dénombrable. En conséquence, comme

$$\frac{1}{\eta - a_{n_0}}(u_\lambda(x) - \eta) \begin{cases} \leqq 0 & (x \in D) \\ \leqq -1 & (x \in E_{m_0 n_0}) \end{cases}$$

où
$$\eta = \sup_{x \in D} u^*(x),$$

nous avons

$$u^*(x) \leqq (\eta - a_{n_0})\chi_{E_{m_0 n_0}, D}(x) + \eta$$

Donc il y a, D étant donné, un ensemble $E_{m_0 n_0}$ tel que

$$\inf_{x \in E_{m_0 n_0}} \chi_{E_{m_0 n_0}, D}(x) > -1 \qquad \text{et} \qquad \chi_{E_{m_0 n_0}, D} \not\equiv 0$$

Au cas où $u(x)$ est la limite supérieure d'une suite $\{u_n(x)\}$ il ne faut que remplaçer E_{mn} par

$$E_{lmn} = \{x;\ u^*(x) > a_m > a_n > u_p(x) \quad \text{pour tout} \quad p > l\}.$$

Or, la réciproque est évidente.

II. Fonctions holomorphes, luers suites, leurs familles.

Nous obtenons ici de nouveau le théorème de Hartogs concernant les fonctions holomorphes en chaque variable, les travaux de M. Caccioppoli et de M. Nishino relatifs aux familles normales en chaque variable de fonctions holomorphes et celui de l'auteurs qui a diminué une condition dans le théorème de Hartogs, et l'étendons aux familles séparément normales, comme des conséquences de I.

5. Fonctions séparément holomorphes.

D, E et G étant donnes, désignons par $\mathcal{H}(D, E, G)$ *la famille de toutes les fonctions définies dans* (D, G) *qui sont holomorphes par rapport à* x *pour tout* y *fixé dans* G *et à* y *pour tout* x *fixé dans* E.

Lemme 8. (*généralisation du théorème de Hukuhara* [7]) *Si* E *est un ensemble de* D *qui n'est contenu dans aucun ensemble analytique d'un domaine suffisamment grand dans l'intérieur de* D, *toute fonction* $f(x, y)$ *localement bornée appartenant à* $\mathcal{H}(D, E, G)$ *est holomorphe dans* (D, G).

En effet, nous pouvons supposer que $f(x, y)$ soit bornée dans (D, G) parce que, si nécessaire, nous pouvons le racourcir sans changer de la situation. Comme la famille $\{f(x, y)\}_{y\in G}$ de fonctions de x est normale, $f(x, y)$ est continue. Donc, étant donné un y' quelconque de G, la fonction $g(x, y)$ définie par l'intégrale de type de Cauchy par rapport aux y au centre y' et au rayon ρ est holomorphe dans $(D, \|y-y'\|<\rho)$ dont ρ est choisi suffisamment petit. Puisque $f(x, y)=g(x, y)$ pour tout $x\in E$, cette égalité est vraie partout dans $(D, \|y-y'\|<\rho)$ Il en resulte que la fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans (D, G)

Corollaire (*généralisation du théorème de Shimoda* [*12*]) *Soit la même situation excepté que la fonction $f(x, y)$ n'est pas nécessairemt bornée. Alors, il existe un domaine G_0 dense dans G tel que $f(x, y)$ soit holomorphe dans (D, G_0)*

En effet, soit D_0 un domaine dans l'intérieur de D dont $E\cap D_0$ n'est contenu dans aucun ensemble analytique de D_0; les ensembles

$$G_n=\{y;\ \sup_{x\in D_0}|f(x, y)|\leqq n\}$$

sont fermés par la même raison pourquoi la $f(x, y)$ de ce lemme est continue. Etant donné un ouvert U de G, nous avons $U=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\cap U$ et U est de deuxième catégorie de Baire, ce qui montre qu'il y a un n_0 tel que $\mathring{G}_{n_0}\cap U$ ne soit pas vide, Donc, $G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathring{G}_n$ est dense dans G et $f(x, y)$ est holomorphe dans (D_0, G_0) par ce lemme. A la vérité, il faut le théorème de Hartogs pour montrer qu'elle l'est dans (D, G_0).

Théorème 1. *Si E n'est pas D-polaire, toute fonction $f(x, y)$ appartenant à $\mathcal{H}(D, E, G)$ est holomorphe dans (D, G).*

D'abord, montrons que, si $f(x, y)$ est holomorphe en un point (x', y'), elle l'est en tout point de (D, y'). Développons $f(x, y)$ en série de Hartogs

$$f(x, y)=\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_\mu=0}^{\infty} b_{n_1, n_2, \cdots, n_\mu}(y)(x_1-x_1')^{n_1}(x_2-x_2')^{n_2}\dots(x_\mu-x_\mu')^{n_\mu}.$$

Elle converge uniformément en (x', y') et, elle converge uniformément dans l'intérieur de D pour tout y fixé. Conséquemment la suite $\{S_n\}$ d'ensembles pseudoconvaves

$$S_n=\bigcup_{n_1+n_2+\cdots+n_\mu=n}\{(x, y);\ |b_{n_1n_2\cdots n_\mu}(y)(x_1-x_1')^{n_1}(x_2-x_2')^{n_2}\dots(x_\mu-x_\mu')^{n_\mu}|\geqq 1\}$$

s'enfuit de (D, y) pour tout y fixé dans G et s'enfuit strictement de (x', y'). Donc elle s'enfuit strictement de (D, y') par le corollaire du lemme 6 et par suite, la série convergeant uniformément, $f(x, y)$ en est holomorphe en tout point. En conséquence, il y a un domaine G_0 dans G tel que $f(x, y)$ soit holomorphe dans (D, G_0) mais ne le soit en aucun point de $(D, G-G_0)$. Par le corollaire du lemme 8, G_0 n'est pas vide. Si G_0 ne coïncidait pas avec G, il y aurait un point y' tel que les plus grands rayons r_0' et r' des polycercles au centre y' qui sont contenus dans G_0 et respectivement dans G soient différents. Développons $f(x, y)$ en série de Hartoys

$$f(x, y)=\sum_{n_1, n_2, \cdots, n_\nu=0}^{\infty} a_{n_1n_2\cdots n_\nu}(x)(y_1-y_1')^{n_1}(y_2-y_2')^{n_2}\dots(y_\nu-y_\nu')^{n_\nu}.$$

Elle converge uniformément dans l'intérieur de $(D, \|y-y'\|<r_0')$, et dans l'intérieur de $(\|y-y'\|<r')$ pour tout x fixé dans E. En considérant la fuite de la suite $\{S_n\}$ d'ensembles pseudoconcaves

$$S_n=\bigcup_{n_1+n_2+\cdots+n_\nu=n}\{(x, y);\ |a_{n_1n_2\cdots n_\nu}(x)(y_1-y_1')^{n_1}(y_2-y_2')^{n_2}\dots(y_\nu-y_\nu')^{n_\nu}|\geqq 1\}$$

et en utilisant le lemme 6, nous voyons que, un ouvert U de D et un point y'' en dehors de $(\|y-y'\|\leqq r_0')$ existant, la série converge uniformément dans l'intérieur d'un voisinage convenable de (U, y''). Donc, $f(x, y)$ est holomorphe dans $(U, \|y-y'\|<\|y'-y''\|)$, parce que la série est celle à puissance des $y-y'$; cela contredit que r_0' est le plus grand. Par suite $f(x, y)$ est holomorphe dans (D, G)

Corollaire 1. (*Hartogs* [6]). *Toute fonction holomorphe par rapport à chaque variable est holomorphe comme une fonction de toutes les variables.*

Corollaire 2. *Si E n'est pas D-polaire (resp. faiblement D-polaire) et si $f(x, y)$ est holomorphe dans $(D, \|y\|<r'<1)$ (resp. $(\bar{E}, \|y\|<r'<1)$) et holomorphe dans $(\|y\|<1)$ pour tout x fixé dans E, il y a un nombre r'_1 dont $r'<r'_1$ et un ouvert U de D (resp. d'un voisinage de $\bar{E}$) tels que $f(x, y)$ soit holomorphe dans $(U, \|y\|<r'_1)$.*

Corollaire 3. *Dans le corollaire ci-dessus, si E est un ensemble de mesure positive, il y a un ensemble E_0 dont la mesure de $E-E_0$ est nulle tel que $f(x, y)$ soit holomorphe en tout point de $(E_0, \|y\|<1)$.*

En effet, c'est une conséquence du corollaire du lemme 7.

Pour donner un contre-exemple général au cas ou E est polaire, il faudra le

Lemme 9. *Soient G un domaine d'holomorphie et F un ensemble relativement fermé par rapport à G et sans point de l'intérieur. Alors, il y a une suite de fonctions holomorphes dans G qui converge vers zero en tout point de G et ne converge uniformément que dans l'intérieur de $G-F$, si et seulement s'il y a une suite $\{G_n\}$ de domaines d'holomorphie dans G telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} G_m = G$, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} (G-G_m)} = F$, et que tout paire $[G, G_n]$ soit celui de Runge.*

En effet, s'il y a une telle suite $\{G_n\}$ il existe une suite $\{G_{0n}\}_{n=1,2,\cdots}$ de domaines dans l'intérieur de G_n qui satisfait toutes les conditions imposées à la suite $\{G_n\}$. Et nous pouvons choisir une suite $\{y^{(n)}\}$ de points de (G_n-G_{0n}) et celle $\{f_n(y)\}$ de fonctions holomorphes dans

G telles que F soit l'ensemble de points d'accumulation de $\{y^{(n)}\}$ et que nous ayons $|f_n(y^{(n)})|>1$ et $|f_n(y)|<1$ dans G_{0n}. Car, G_n étant des domaines d'holomorphie, il y a une suite $\{G_{1n}\}_{n=1,2,\cdots}$ de polyèdres analytiques $G_{1n}=\bigcap_{j=1}^{j_n}\{y;\ |f_{nj}(y)|<1\}$ où f_{nj} sont holomorphes dans G_n tels que $G_n\supset G_{1n}\supset G_{0n}$; $[G, G_n]$ étant des paire de Runge, nous pouvons supposer que $f_{nj}(y)$ sont holomorphe dans G; alors, nous n'avons qu'à prendre les $y^{(n)}$ dans G_n-G_{1n} tels que $\bigcap_{n=m}^{\infty}\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} y_m}=F$ et qu'à choisir une des $f_{nj}(y)$ comme $f_n(y)$. Donc, les suite quelconques $\{\epsilon_n\}$ et $\{M_n\}$ de nombres positifs étant donnés, pour une suite $\{e_n\}$ d'entier positifs suffisamment grands, nous avons

$$g_n(y)=[f_n(y)]^{e_n}\begin{cases}>M_n & (y=y^{(n)})\\ <\epsilon_n & (y\in G_{0n})\end{cases}$$

Réciproquement, s'il y a une telle suite $\{g_n(y)\}$ il ne faut que poser

$$G_n=\{y;\ |g_n(y)|<1\}$$

Exemple 2. Si (D, G) est un domaine d'holomorphie et l'ensemble E est D-polaire et est une réunion dénombrable d'ensembles compacts et si l'ensemble F dans G satisfait aux conditions du lemme précédent, il existe une fonction qui appartient à $\mathcal{H}(D, E, G)$ mais dont le domaine d'holomorphie est $(D, G-F)$

En effet, prenons la suite $\{a_n(x)\}$ de fonctions définie dans la preuve du lemme 2 et celle $\{g_n(y)\}$ définie dans le lemme précédent dont nous déterminons k_n, ϵ_n et M_n après avoir décidé k_l, ϵ_l, et M_l pour tout $l\leqq n-1$, tels que,

$$\epsilon_n\ \exp|u_n(x')|m_n<2^{-n}, \tag{1}$$

$$M_n\ \exp(-3|u_n(x')|m_n)>\sum_{l=1}^{n-1}|a_l(x')g(y^{(n)})|+n \tag{2}$$

et
$$\sup_{y\in G_2}|g_n(y)\ \exp|(-k_nu_n(x')m_n)<2^{-n} \tag{3}$$

où $\{G_{2n}\}_{n=1,2,\cdots}$ est une suite croissante de domaines dans l'intérieur de G tel que $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n}=G$. Alors, la fonction

$$f(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) g_n(y)$$

est holomorphe en x pour tout y fixé selon (1) et en y pour tout x fixé dans E d'après (3), mais, comme $|f(x', y^{(n)})|>n$ a cause de (2), elle n'est holomorphe en aucun point de (x', F). D'ailleurs elle est holomorphe dans $(D, G-F)$ en conséquence de (1), et si elle l'etait en un point (x'', y'') de (D, F) elle le serait en tout point de (D, y'') par le théorème 1, ce qui contredit.

6. Suites de fonctions holomorphes.

Nous considérons un problème de même genre sur les convergences séparément uniformes de fonctions holomorphes où nous admettons la *convergenance à l'infini.*

Théorème 2. *Soit $\{f_n(x, y)\}$ une suite de fonctions holomorphes dans (D, G) et soit E un ensemble non D-polaire. Si la suite converge uniformément dans l'intérieur de D pour tout y fixé dans G et dans l'intérieur de G pour tout x fixé dans E, elle converge uniformément dans l'intérieur de (D, G).*

En effet, par le théorème 1, la limite est une fonction holomorphe $f(x, y)$ ou bien la constante l'infini, Au premier cas, la suite $\{S_n\}$ d'ensembles pseudoconvaves

$$S_n=\{(x, y) ;\ |f_n(x, y)-f(x, y)| \geqq 1\}$$

s'enfuit de l'emsemble (x, G) pour tout x fixé dans E et de (D, y) pour tout y fixé dans G, et de plus, elle s'enfuit strictement d'un point de (D, G). Donc, elle s'enfuit de (D, G) selon le lemme 6, et par conséquence la suite $\{f_n(x, y)\}$ est uniformément bornée dans l'intérieur de

(D, G), ce qui montre qu'elle y converge uniformément vu le théorème de Montel. Au deuxième cas, il ne faut que poser

$$S_n = \{(x, y)\,;\ |f_n(x, y)| \leqq 1\}.$$

Corollaire. (*Caccioppoli-Nishino* [*3*], [*10*]) *Toute suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément par rapport à chaque variable converge uniformément par rapport à tous les variables.*

D'ailleurs nous obtenons les corollaires analoque à ceux du thèoreme 1.

Quant aux ensembles D-polaire, l'exemple 2 donne un contre-exemple.

7. Famille de fonctions holomorphes.

Théorème 3. *Soient* $\{f(x, y)\}$ *une famille de fonctions holomorphes dans* (D, G) *et* E *un ensemble non* D*-polaire. Supposons que, pour tout* x' *fixé dans* E*, la famille* $\{f(x', y)\}$ *soit normale dans* G *et que pour tout* y' *fixé dans* G*, la famille* $\{f(x, y')\}$ *soit normale dans* D*. Alors, elle est normale dans* (D, G)*.*

En effet, soit $\{x^{(l)}\}$ $\{y^{(m)}\}$ une suite de points qui n'est contenue dans aucun ensemble analytique respectivement dans D, respectivement dans G. Par la méthode diagonale il exist une suite partielle $\{g_n(x, y)\}$ de $\{f(x, y)\}$ qui converge en tout point $(x^{(l)}, y^{(m)})$. Supposons que $\{x^{(l)}\} \subset E$. Alors, d'après le théorème de vitali, $\{g_n(x^{(l)}, y)\}_{n=1,2,\cdots}$, $\{g_n(x, y^{(m)})\}_{n=1,2,\cdots}$ converge uniformément dans l'intérieur respectivement de G, respectivement de D, l et m étant fixés. Encore d'après ce théorème, il en est de même de $\{g_n(x', y)\}$ et de $\{g_n(x, y')\}$, x' étant fixé dans E et y' étant fixé dans G. Donc, selon le théorème 2, elle converge uniformément dans l'intérieur de (D, G).

Corollaire. (*Caccioppoli-Nishino* [*3*], [*10*]) *Toute famille de* *fonctions holomorphes est normale si et seulement si elle est normale par rapport à chaque variable.*

D'ailleur nous obtenons les corollaires analogues à ceux du théorème 1.

Quant aux ensembles D-polaires, l'exemple 2 encore donne un contre-exemple.

III. Fonctions méromorphes, leurs suites, leurs familles.

8. Fonctions méromophes.

A cause de l'apparition de points d'indétermination, nous sommes obligés d'examiner les définitions de l'analyticité séparée. Il faut, en outre de D, de G et de E, un ensemble A dans (E, G) qui est la réunion de trois ensembles (A_D, G), (E, A_G) et A_0 où A_D, A_G est un ensemble analytique de conimenston 2 respectivement dans D, respectivement dans G et pour tout point de A_0 il y a un voisinage U tel que la projection de $A \cap U$ sur D ou G soit un ensemble localement analytique. Quant à la fonction séparément méromorphe, il faut considérer une fonction $f(x, y)$ *définie dans* (D, G) *et méromorphe par rapport à* x *pour tout* y *fixé dans* G *telle qu'il y ait, pour tout* x *dans* E, *une fonction* $g_x(y)$ *méromorphe dans* G *et que* $f(x, y) = g_x(y)$ *sur* $(E, G) - A$, mais puisque l'énoncé ci-dessus est assez ennuyeux et de plus les singularités susceptibles par l'apparition de l'ensemble A sont, soit tout à fait négligibles, soit enlevés par la pseudoconvexité de domaines de méromorphie, nous les négligeons dans ce qui suit. Designons par $\mathcal{M}(D, E, G)$ *la famille de toutes les fonctions satisfaisant ces conditions.*

Lemme 10. *Soit* E *un ensemble de* D *qui n'est contenu dans aucun ensemble analytique d'un domaine suffisamment grand dans l'intérieur de* D, *et soit* $f(x, y)$ *une fonction appartenant à* $\mathcal{M}(D, E, G)$. *S'il y a deux ouvert* D_1 *et* D_2 *dans* D *tels que* $D_1 \cup D_2 = D$ *et* $f(x, y)$, $\dfrac{1}{f(x, y)}$ *soit bornée dans l'intérieur respectivement de* (D_1, G), *respec-*

tivement de (D_2, G), $f(x, y)$ *est méromorphe dans* (D, G).

En effet, c'est une conséquence du lemme 8 et de ce que E n'est contenu dans aucun ensemble analytique de D_1 ou bien de D_2. Nous devons l'idée de cette démonstration à M. Rothstein.

Corollaire. *Soit* E *un ensemble de* D *tel qu'un ensemble analytique de condimenion 2 étant arbitrairement donné, pour son voisinage* U *arbitrairement petit,* E *satisfait la condition ci-dessus par rapport à* $D-U$. *Si une fonction* $f(x, y)$ *appartient à* $\mathcal{M}(D, E, G)$, *il y a un domaine* G_0 *dense dans* G *tel qu'elle soit méromorphe dans* (D, G_0)

En effet, soit $\{D_n\}$ une suite de domaines de D dont tout domaine de D est une limite s'agrandissant d'une suite partielle et soit D_0 un domaine suffisamment grand dans l'intérieur de D. L'ensemble de points d'indétermination étant de condimensions 2, l'envoloppe de méromorphie de son complément le comprend. Alors, pour tout y fixé dans G il y a un paire de domaines $[D_m, D_n]$ tel que $\sup_{x\in D_m\cap D_0} |f(x,y)|\leqq 2$ et $\inf_{x\in D_n\cap D_0} |f(x,y)|\geqq 1$, que l'enveloppe de méromorphie de $D_m\cup D_n$ contienne D_0 et que E ne soit contenue dans aucun ensemble analytique de D_m ou bien de D_n. Notons G_{mn} l'ensemble de tout point de G auquel correspond le paire $[D_m, D_n]$, et posons $G_0=\bigcup_{m,n=1}^{\infty} \mathring{G}_{mn}$. Comme chaque G_{mn} est fermé et tout ensemble ouvert dans G est de deuxième catégorie de Baire, G_0 est dense dans G. Or, $f(x, y)$ est méromorphe dans $(D_0, \mathring{G}_{mn})$ par le lemme précédent, il en est ainsi dans (D_0, G_0). En vérite, il faut le théorème 4 pour montrer qu'elle est méromorphe dans (D, G_0).

Theoreme 4. *Si* E *est un ensemble non faiblement* D*-polaire, toute fonction* $f(x, y)$ *appartenant à* $\mathcal{M}(D, E, G)$ *est méromorphe dans* (D, G).

En effet, il y a, un domaine $D_0 \Subset D$ étant donné, un domaine G_0 dense dans G tels qu'elle soit méromorphe dans (D_0, G_0). D'abord, montrons que, si $f(x, y)$ est méromorphe dans un domaine (U, V), elle l'est aussi dans (D, V). Notons V_0 le plus grand domaine tel que $f(x, y)$ soit méromorphe en tout point de (D_0, V_0). En supposant que la mesure de $V-V_0$ soit positive, il y a un ensemble $F \subset V-V_0$ de mesure positive, et deux domaine D_1 et D_2 tel que nous ayons $\sup_{(x,y)\in(D_1,F)} |f(x, y)| \geqq 2$ et $\inf_{(x,y)\in(D_2,F)} |f(x, y)| \geqq 1$ et $(D_1 \cup D_2) \cap U \neq \phi$ et que l'envoloppe de méromorphie de $D_1 \cup D_2$ contienne D_0 dans son intérieur. Pour le voir, nous n'avons besoin que de remplaçer G par $V-V_0$ dans la démonstration du corollaire précédent et que de remarquer l'additivité dénombrable d'ensembles de mesure nulle. D'ailleurs nous pouvons supposer que F soit compact, par la définition même de la mesure intérieure. Alors, si $D_1 \cap U \neq \phi$ par exemple, comme $f(x, y)$ est méromorphe et bornée dans $(D_1 \cap U, F)$, il y a un ensemble compact $F_0 \subset F$ de mesure positive et un ouvert $U_1 \subset D_1 \cap U$ tel qu'elle soit holomorphe dans (U_1, F_0); de fait $F-F_0$ est l'intersection de F et d'un voisinage suffisamment petit d'un ensemble analytique. Selon le corollaire 3 du théorème 1, elle est holomorphe en tout point de (D_1, F_1) où la mesure de $F-F_1$ est nulle. De même $\dfrac{1}{f(x, y)}$ est holomorphe en tout point de (D_2, F_2) où la mesure de $F-F_2$ est nulle. Donc, $f(x, y)$ est méromorphe en tout point de $(D_0, F_1 \cap F_2)$. Par conséquence la mesure de $V-V_0$ est nulle, cependant, comme le domaine de méromorphie est pseudoconvexe, et le rayon négativement logarithmique de Hartogs $v(y; x)$ est plurisousharmonique où elle ne prend pas la valeur $+\infty$, nous avons $V=V_0$ vu que $A_\rho\, v(y; x) \geqq v(y; x)$. D_0 étant quelconque, $f(x, y)$ est méromorphe dans (D, V).

Donc, il y a un domaine G_1 dans G tel que $f(x, y)$ soit méromorphe dans (D, G_1) mais non plus en aucun point de $(D, G-G_1)$. Dans la démonstration du corollaire précédent, en remplaçant encore D par G et G par E et en usant de l'additivité dénombrable d'ensembles faiblement polaires, il y a deux domaine G_{11} et G_{12} et un ensemble E_0 non faiblement

D-polaire tel que nous ayons

$$\sup_{(x,y)\in(E_0,G_{11})}|f(x,y)|\leqq 2 \quad \text{et} \quad \inf_{(x,y)\in(E_0,G_{12})}|f(x,y)|\geqq 1$$

et que l'enveloppe de méromorphie de $G_{11}\cup G_{12}$ proprement contienne G_1. Encore par l'additivité dénombrable d'ensembles polaires, il existe un ensemble E_1 non faiblement D-polaire tel que E_0-E_1 soit l'intersection de E_0 et d'un voisinge suffisamment petit d'un ensemble localement analytique (la projection des points d' indétermination de $f(x,y)$) et que $f(x,y)$ soit holomorphe en tout point de $(\bar{E}_1, G_{11}\cap G_1)$ que nous pouvons supposer non vide. Selon le corollaire 2 du théorème 1 et le même manière de sa démonstration si $G_{11}-G_1\neq\phi$, elle est holomorphe en un point (x',y') où $x'\in D$ et $y'\in G_{11}-G_1$, ce qui contredit la définition de G_1. Si $G_{11}-G_1=\phi$, $G_{12}-G_1\neq\phi$. Donc, nous avons $G_1=G$ et $f(x,y)$ est méromorphe dans (D, G)

Corollaire. (*Caccioppoli-Rothstein* [4], [11]) *Toute fonction méromorphe par rapport à chaque variable est aussi méromorphe.*

D'ailleur nous obtenons les corollaires analogue à ceux du théorème 1.

L'exemple 2 encore donne un contre-exemple au cas où E est polaire. En effet, si cette fonction était méromorphe, tout point de l'ensemble (D, F) serait son pôle. Cependant si F était un ensemble analytique, $f(x,y)$ serait holomorphe dans (D, G) parce qu'elle est la somme d'une série de fonctions holomorphes qui converge uniformément dans l'intérieur de $(D, G-F)$

9. Suites de fonctions méromorphes.

Nous travaillons sur la convergence séparément uniforme d'une suite de fonctions méromorphes. Nous disons qu' une suite $\{f_n(x, y)\}$ de fonctions méromorphe converge uniformément s'il y a une fonction méromorphe $f(x, y)$ et pour tout point (x', y') en dehors de points d'indétermination de $f(x, y)$ il y a un voisinage convenable $u(x', y')$ tel que, pour un n_0 suffisamment grand, la suite $\{f_n(x, y)\}_{n=n_0, n_0+1\cdots}$ ou bien $\left\{\frac{1}{f_n(x, y)}\right\}_{n=n_0, n_0+1\cdots}$ se compose de fonctions holomorphes et converge uniformément à $f(x, y)$ ou bien respectivement $\frac{1}{f(x, y)}$.

Pour préciser la définition de la convergence séparément uniforme, il faut une remarque analogue à celle de $N°$ 8.

Théorème 5. *Soit $\{f_n(x, y)\}$ une suite de fonctions méromorphes. Si la suite $\{f_n(x, y')\}$, $\{f_n(x', y)\}$ converge uniformément dans l'intérieure respectivement de D pour tout y' fixé dans G, respectivement de G pour tout x fixé dans un ensemble E qui n'est pas faiblement D-polaire, la suite $\{f_n(x, y)\}$ converge uniformément dans l'intérieur de (D, G).*

En effet, d'après le theoreme 4, la fonction limite $f(x, y)$ est méromorphe. Soit y' un point de G. Notons $P(y')$, $Z(y')$ l'image de la projection sur D de l'intersection de (D, y') respectivement de pôles de $f(x, y)$, respectivement de zéros de $f(x, y)$. Il y a trois cas; $P(y') \cap Z(y')$ y est un ensemble analytique de codimension 2, celui de codimension 1 ou bien le domaine D. Au premier cas, par l'additivité dénombrable d'ensembles polaires, pour tout voisinage U de $P(y')$ suffisamment petit, E n'est pas faiblement $(D-U)$-polaire; et un domaine D_0 dans l'intérieur de D étant arbitrairement donné, pour un voisinage V de y', $f(x, y)$ est holomorphe dans (D_0-U, V). Conséquemment, la suite $\{S_n\}$ d'ensembles pseudoconvaves $S_n=\{(x, y);\ |f_n(x, y)| \geqq 1\}$ s'enfuit de (x'', V) et de (D_0-U, y'') pour tout x'' fixé dans $E-U$ et y'' fixé dans V, et d'un ouvert de (D_0-U, V) parce que la suite $\{f_n(x, y)\}$ converge uniformément dans l'intérieur d'un domaine dense dans (D, G). Par suite, $\{f_n\}$ étant uniformément bornée dans l'interieur de (D_0-U, V) parce que $\{S_n\}$ s'en enfuit, elle y converge uniformément. Il en est ainsi de $Z(y')$. Comme le domaine de convergence uniforme est pseudoconvex d'après Saxer, $P(y') \cap Z(y')$ étant de codimension 2 et D_0 étant arbitraire, $\{f_n(x, y)\}$ converge uniformément en tout point de (D, y'). Quant aux autres cas, si nous appliquons la même procédé, l'ensemble de points où la convergence uniforme est douteuse est un ensemble analytique de codimensions 2. Donc, encore par la pseudoconvexité la suite $\{f_n(x, y)\}$ converge uniformément dans l'intérieur de (D, G).

Corollaire. (*Caccioppoli-Nishino* [3], [10]) *Toute suite de fonc tions méromorphes converge uniformément localement, s'il en est de même par rapport à chaque variable.*

D'ailleurs, nous obtenons les resultats analogues aux corollaires du théorème 1

10. Famille de fonctions méromorphes.

Définissons une famille normale de fonctions méromorphes comme au cas de celles holomorphes. Etant donné une suite de fonctions méromorphes et un ensemble dénombrable de points, nons pouvons en extraire une suite partielle qui converge en tout ces points, en donnant une valeur convenable à des points d'indétermination de fonctions de cette suite. D'ailleurs si cet ensemble n'est contenu dans aucun ensemble analytique et si cette suite se constitue une famille normale, elle converge uniformément. Par suite, tout à fait de manière analogue au théorème 3, nous avons le

Theoreme 6. *Soit $\{f(x,y)\}$ une famille de fonctions méromorphes dans (D, G) et soit E un ensemble non faiblement D-polaire. Si cette famille est normale dans D pour tout y fixé dans G et dans G pour tout x fixé sur E, elle est normale dans (D, G)*

Corollaire. (*Caccioppoli-Nishino* [3], [10]) *Toute famille normale de fonctions méromorphe par rapport à chaque variable est normale comme une famille de fonctions de toutes les variables.*

D'ailleurs, nous obtenons les corollaires analoques à ceux du Théorème 1.

IV. Surfaces caractéristiques distinguées, leurs suites, leurs familles.

Pour traiter les fonction algébroïdes, nous considérons les surfaces caractéristiques spéciales dans l'espace $(D, G; M)$ (resp. $(D; M)$ ou $(G; M)$) produit de (D, G) (resp. de D ou de G) et de M qui est le plan complexe C^1 ou la sphère de Riemann P^1 dont nous notons z le coordonné inhomogène et (z, ζ) ceux homogènes. *Une surface caractéristique T dans $(D, G; C^1)$ est dite distiguée si la projection de T sur (D, G) est propre. Et celle dans $(D, G; P^1)$ est dite distinguées s'il y a un ensemble analytique A de codimension 2 dans (D, G) tel que, pour tout point (x, y) de (D, G)-A, la pré-image de (x, y) par la projection de T sur $(D. G)$ ne coïncide pas à toute la sphère.*

Si $M=C^1$ et une surface distinguée T est donnée dans $(D, G; C^1)$, par le théorème de préparation de Weierstrass et le fait que la pré-image d'un point par la projection sur (D, G) consiste d'un nombre fini de points, nous pouvons exprimer la surface T globalement par l'équation

$$z^p+a_1(x, y)z^{p-1}+ \ldots +a_p(x, y)=0$$

ou $a_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots p)$ sont holomorphes dans (D, G) et p est le nombre de points de la pré-image d'un point. Si $M=P^1$, et une surface distinguée T est donnée dans $(D, G; P^1)$, nous pouvons l'exprimer globalement par une équation,

$$z^p a_0(x, y)+z^{p-1}\zeta a_1(x, y)+ \ldots +\zeta^p a_p(x, y)=0$$

ou $a_i(x, y)$ sont holomorphe dans (D, G): en effet, si les images T_0 de $T\cap(z=0)$ ni T_∞ de $T\cap(z=\infty)$ par la projection sur (D, G) ne coïncident pas à (D, G), nous pouvons décrire T en

$$z^p+b_{1\infty}(x, y)z^{p-1}+ \ldots +b_{p\infty}(x, y)z_p=0$$

globalement dans $((D, G)-T_\infty; P^1)$

et en

$$b_{00}(x, y)z^{p}+b_{10}(x, y)\zeta z^{p-1}+\ \ldots\ +\zeta^{p}=0$$

dans $((D, G)-T_0; P^1)$ ou $b_{i\infty}$ $(i=1, \ldots p)$ et b_{i0} $(i=0, \ldots p-1)$ sont holomorphe dans $(D, G)-T_\infty$ et respectivement dans $(D, G)-T_0$; ses expressions étant uniques, nous avons

$$b_{00}(x, y)b_{i\infty}(x, y)=b_{i0}(x, y) \quad (i=1, 2, \ldots p); \quad \text{donc.}$$

$b_{i\infty}$, b_{i0} sont méromorphe dans $(D, G)-(T_0\cap T_\infty)$ et conséquemment dans (D, G) par le pseudoconvexité de domaines de méromorphie pourvu que l'ensemble analytique $T_0\cap T_\infty$ soit de codimensions deux; donc, nous avons une équation demandée, les conditions ajoutées à T_0 et à T_∞ seront satisfaites après une transformation fractionnaire linéaire de P^1.

11. Surfaces caracteristiques distinguees.

Nous traitons ici les fonctions séparément algébroïdes. Soit T un ensemble de $(D, G; M)$. Un point x' étant donné dans D, notons $T'(x')$ l'image de l'ensemble $T\cap(x=x')$ par la projection sur $(G; M)$ et y' étant donné dans G, notons $T(y')$ l'ensemble analoque. Dans la suite, si $M=P^1$, il faut une remarque semblable à celle de N° 8

Un ensemble T de $(D, G; M)$ et celui E de D qui n'est contenu dans aucun ensemble analytique dans D étant donnés, supposons que $T(y)$, $T'(x)$ soit une surface caractéristique distingué respectivement pour tout y fixé dans G, respectivement pour tout x fixé dans E. Alors si $M=C^1$, T peut s'exprimer en

$$z^{p}+a_1(x, y)z^{p-1}+\ \ldots\ +a_p(x, y)=0$$

ou $a_i(x, y)$ appartiennent à $\mathcal{H}(D, E, G)$. Et si $M=P^1$ et si le coordonné z est bien choisi tel que les ensembles $(z=\infty)$ et $T\cap(z=\infty)$ ne se coïnident pas, T peut s'exprimer par l'équation semblable où $a_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ appartiennent *à* $\mathcal{M}(D, E, G)$. En effet, si $M=C^1$, les nombres de points des pré-images de la projection de T sur les points de (E, G) ont une borne supérieure fini; autrement, il y aurait une suite

$\{x^{(n)}\}$ de points de E telle que les nombres de feuilles de $T'(x^{(n)})$ grandissent infiniment, ce qui est absurde parce que, pour tout y fixé en debors d'une réunion dénombrables d'ensembles analytiques, le nombre de feuilles de $T(y)$ serait infini. Donc, il y a un ensemble analytique E_0, F_0 respectivement dans D respectivement dans G tel que les nombres de feuilles de $T'(x)$ et de $T(y)$ sont la borne supérieure p pour tout $x \in E - E_0$ et $y \in G - F_0$; par suite nous pouvons exprimer T par l'équation ci-dessus dans $(D - E_0, G - F_0)$ en prenant les fonctions symétriques élémentaires. Or, par le théorème de Riemann, cette expression est valable partout dans (D, G). Au cas ou $M = P^1$, la démonstration est tout à fait pareille si nous éliminons de (D, G) l'image de $T \cap (z = a)$ par la projection sur (D, G) dont a est une constante quelconque. Comme le domaine de méromorphie est pseudoconvexe, nous obtenons l'expression ci-dessus.

De ce que nous venons de vérifier, nous pouvons réduire les problème sur les surfaces caractéristiques distinguées à ceux sur les fonctions holomorphes ou méromorphes.

Theoreme 7. *Soit T un ensemble de $(D, G; C^1)$ ou respectivement de $(D, G; P^1)$ et soit E un ensemble non D-polaire ou respectivement non faiblement D-polaire. Si, x étant fixé dans E, $T'(x)$ est une surface caractéristique distinguée et si, y étant fixé dans G, il en est de même de $T(y)$, T est une surface caractéristique distinguée dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$*

Corollaire. *Toute fonction algébroïde (qui peut avoir les pôles) par rapport à chaque variable est algébroïde comme une fonction de toutes les variables.*

D'ailleurs, nous obtenons les corollaires analogues à ceux du théorème 1.

12. Suites de surface caractéristiques distinguées.

En considérant les convergences d'une suite de surfaces caractéristiques il faut en préciser les définitions. Nous appelons un diviseur positif un deuxième donné de Cousin ; la surface caractéristique définie par cela est dite son support. Une suite $\{\Delta_n\}$ de diviseurs positifs est dite convergente en un point s'il y a un voisinage U de ce point et une suite $\{f_n\}$ de fonctions holomorphes dans U et y définissant ces diviseurs qui tend uniformément vers une fonction holomorphe non identiquement nulle dans U. Elle est dite convergente dans un domaine si elle converge en tout point de ce domaine. La limite décide encore un diviseur positif.

Une suite $\{T_n\}$ de surface caractéristique est dite géométriquement convergente en un point s'il y a un voisinage fermé U de ce point et une surface caractéristique T définie sur U tels que, étant donné arbitrairement un voisinage U_0 de $T\cap U$, pour tout n suffisamment grand, $T_n\cap U\subset U_0$, que tout point de T soit un point d'accumulation de $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, et qu' il en soit de même de toute suite partielle de $\{T_n\}$.

Remarque. Nous pouvons, formellement, considérer une autre convergence comme un médiéval de ces deux. Disons qu'une suite $\{T_n\}$ de surfaces caractéristiques est convergente s'il y a une suite $\{\Delta_n\}$ convergente de diviseurs positifs dont les supports sont T_n, alors il arrive des phénomènes pathologiques. Par exemple, la suite $\{T_n\}$

où $$T_n=\left\{(x, y, z);\ z(z-x)(z-y)=\frac{1}{n}\right\} \quad \text{(avec } n \text{ paires)}$$

$$T_n=\left\{(x, y, z);\ \left[z(z-x)^2-\frac{1}{n}\right]\left[z(z-y)^3-\frac{1}{n}\right]=0\right\} \quad \text{(avec } n \text{ impaires)}$$

converge en ce sens en tout point excepté l'origine; ce qui montre que *le domaine de cette convergence n'est plus pseudoconvexe.* Et le théorème 8 n'est plus vrai.

Une suite $\{\Delta_n\}$ *de diviseurs positifs de* $(D, G; M)$ *(resp. de* $(D; M)$, $(G; M)$) *est dite distingué si les supports* T_n *des* Δ_n *sont des surfaces caractéristiques distinguées et si pour tout point en dehors d'un ensemble* *de codimension 2 de (D, G) (resp. de D, resp. de G), il y a un voisinage U de ce point et un ouvert V de M tels que, pour tout n suffisamment grand, T_n n'envahit pas dans $(U; V)$.* Dans ce cas, si la suite $\{\Delta_n\}$ est convergente, nous pouvons choisir globalement des pseudopolynomes distingués de Weierstrass qui définissent ces diviseurs et convergent uniformément à une fonction non identiquement nulle. Donc, nous pouvons réduir le problème de convergence d'une suite distinguée de diviseurs à celui des suites de fonctions holomorphes ou méromorphes.

Un diviser Δ défini par le donné de Cousin $\{f(x, y; z)\}$ étant donné dans $(D, G; M)$, notons $\Delta'(x')$ le diviseur dans $(G; M)$ défini par $\{f(x', y; z)\}$ et notons $\Delta(y')$ le diviseur analogue. Le "lemme 8" et son corollaire sont aussi triviaux et nous avons le.

Theoreme 8. *Soit $\{\Delta_n\}$ une suite de diviseurs dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$ et soit E un ensemble non D-polaire ou respectivement non faiblement D-polaire. Si, pour tout point x de E, la suite $\{\Delta'_n(x)\}$ est distiguée et convergente, et s'il en est de même de la suite $\{\Delta_n(y)\}$ pour tout y fixé dans G, la suite $\{\Delta_n\}$ est aussi distiguée et convergente dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$.*

Corollaire. *Toute suite de fonctions algébroïdes (qui admettent les pôles) qui converge uniformément par rapport à chaque variable converge uniformément comme une suite de fonctions de toutes les variables.*

D'ailleurs, nous obtenons les resultats analogues aux corollaires du théorème 1.

Quant à la convergence géométrique, définissons les suites distinguées de surfaces caractéristiques semblablement au cas de diviseurs.

Une suite $\{T_n\}$ de surfaces caractéristiques étant donnée dans $(D, G; M)$, nous obtenons le "lemme 8" et son corollaire en remarquant que la suite $\{T_n\}$ d'ensembles pseudoconvaves s'enfuit de $(D, G; M) - T_0$

ou T_0 est l'ensemble analytique de la limite, que nous voyons facilement en appliquant le lemme 6 successivement relativement en chaque point de $(D, G; M)-T_0$. Donc, nous avons le

Théorème 9. *Soit $\{T_n\}$ une suite de surfaces caractéristiques dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$ et soit E un ensemble non D-polaire ou respectivement non faiblement D-polaire. Si, pour tout x fixé dans E, la suite $\{T'_n(x)\}$ est géométriquement convergente et ditinguée, et s'il en est de même de la suite $\{T_n(y)\}$ pour tout y fixé dans G, la suite $\{T_n\}$ est géométriquement convergente et distinguée dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$.*

En effet, par le théorème 8, la limite est une surface T caractéristique distinguée; soit $f(x, y, z)$ le pseudopolynome distingué y associé. Etant donné un nombre complexe a, l'image de l'ensemble analytique $T_n \cap \{f(x, y, z)=a\}$ par la projection sur (D, G) est une surface caractéristique parce que la projection est propre et T_n et T sont distinguées. Donc, étant donné un nombre positif ϵ, l'image $S_{\epsilon,n}$ de l'ensemble pseudoconvace $T_n \cap \{|f(x, y, z)| \geqq \epsilon\}$ par la projection sur (D, G) est aussi pseudoconcave. Pour compléter la démonstration au cas de $(D, G; C^1)$ il ne faut que considérer la fuite de $\{S_{\epsilon,n}\}_{n=1,2,\cdots}$ et au cas de $(D, G; P^1)$ nous n'avons besoin que de la modifier comme dans la démonstration du théorème 5.

13. Familles distinguées de surfaces caractéristiques.

Une famille de diviseurs ou respectivement de surfaces caratéristiques dans $(D, G; M)$ est dite normale et distinguée si de toute suite de diviseurs ou respectivement de surfaces appartenant à cette famille nous pouvons extraire une nouvelle suite partielle qui est convergente et distinguée. Comme le théorème de Vitali est vrai pour les suites distinguées de diviseurs ou surfaces caractéristiques, tout analoguement au cas des familles de fonctions holomorphes ou méromorphes, nous avons le

Théorème 10. *Soit $\{\Delta\}$ une famille de diviseurs dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$ et soit E un ensemble non D-polaire ou respectivement non faiblement D-polaire. Si la famille $\{\Delta'(x)\}$ est normale et distinguée dans $(G; C^1)$ ou respectivement dans $(G; P^1)$ pour tout x fixé dans E et il en est de même de la famille $\{\Delta(y)\}$ pour tout y fixé dans G, la famille $\{\Delta\}$ est normale et distinguée dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$*

Corollaire. *Une famille de fonctions algébroïdes (qui peuvent avoir les pôles) est normale si elle est normale par rapport à chaque variable.*

Nous avons aussi les corollaires analogues à ceux du théorème 1.

Théorème 11. *Soit $\{T\}$ une famille de surfaces caractéristiques dans $(D, G; C^1)$ ou respectivement dans $(D, G; P^1)$ et soit E un ensemble non D-polaire ou respectivement non faiblement D-polaire. Si la famille $\{T'(x)\}$ est normale et distinguée dans $(G; C^1)$ ou respectivement dans $(G; P^1)$ pour tout x fixé dans E et il en est de même de la famille $\{T(y)\}$ pour tout y fixé dans G, la famille $\{T\}$ est normale et distinguée.*

Corollaire. *Toute famille de surfaces caractéristiques dans $(D, G; P^1)$ qui est normale est distinguée par rapport à chaque variable est normale et distinguée dans $(D, G; P^1)$*

Nous obtenons, d'ailleurs, les résultats analogues aux corollaire du théorème 1.

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE DE KYOTO

Bibliographies

[1] H. J. Bremermann, On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions. Math. Ann., **131** (1956), 76–86.

[2] F. E. Browder, Real analytic functions on product spaces and separate analyticity. Canad. J. Math. **13**. (1961), 650–656.

[3] R. Caccioppoli, Sulle famiglie normale di funzioni analitiche di due variabili. Rend. Semin. Mat. Padova., **4**. (1933), 111–121.

[4] R. Caccioppoli, Un teorema generale sulle funzioni di due variabili complesse. Atti. Accad. Naz. Lincei Rend., **19**. (1934), 699–703.

[5] R. H. Cameron et D. A. Storvic, Analytic continuation for functions of several complex variables. Trans. Amer. Math. soc., **125**. (1966), 7–12.

[6] F. Hartogs, Zur theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger veränderlichen, insbesondere über die darstellung derselben durch reihen, welche nach potenzen einer veränderlichen fortschreiten. Math. Ann., **62** (1906), 1–88.

[7] M. Hukuhara, L'extension du théorème d'Osgood et de Hartogs. (en Japonais) Kansuhoteisiki oyobi Oyo-kaiseki (1930), 48–49.

[8] Y. Kusunoki, On the generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions. J. Math. Kyoto Univ., **4** (1964) No. 1, 123–147.

[9] P. Lelong, Fonction plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **11** (1961) 515–562.

[10] T. Nishino, Sur une propriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes. J. Math. Kyoto Univ. 4 No. **2**. (1965), 255–282.

[11] W. Rothstein, Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Anwendung auf meromorphe Funktionen. Math. Z. **53** (1950), 84–95.

[12] I. Shimoda, Notes on the functions of two complex variables. J. Gakugei Tokushima Univ., **8** (1957), 1–3.

[13] J. Siciak, Analyticity and seperate analyticity of functions defined on lower dimensional subsets of C^n. Prace Matematyczne Zeszyt, **13** (1969), 53–70.

[14] T. Terada, Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, 2 No. **3**, (1967), 383–396.