J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
19-2 (1979) 231-254

Sur les systèmes de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes

Par

Osamu FUJITA

(Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 16 Février, 1978)

Introduction

Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes. Une autre fonction entière $g(x, y)$ sera dite fonction associée à $f(x, y)$, si la transformation

$$z=f(x, y), \qquad w=g(x, y)$$

de l'espace de deux variables complexes est un automorphisme analytique. En 1969, T. Nishino a indiqué que l'on peut trouver une fonction associée à $f(x, y)$, si et seulement si toute fibre $f^{-1}(z)$ est analytiquement homémorphe à tout le plan d'une variable complexe en tant que surface de Riemann[1].

Soit

$$(1) \qquad f_i(x)=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

un système de n fonctions entières de $n+1$ variables complexes. Une fonction entière $f_{n+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ sera dite fonction associée au système (1), si la transformation

$$y_i=f_i(x) \qquad (i=1, 2, \cdots, n+1)$$

de l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ est un automorphisme analytique.

Soit $\mathfrak{D}$ l'image de l'espace (x) par l'application

$$y=f(x)$$

où $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ et $f(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$. Supposons que le système (1) satisfasse aux conditions suivantes que l'on dira conditions (A_0).

1) Le rang de la matrice

$$(\partial f_i/\partial x_j) \qquad (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n+1)$$

est toujours n.

1) Nishino [5], p. 258, Théorème I. Voir aussi ibid. p. 269, Théorème 2 et p. 274, Conclusion.

2) Pour tout $y \in \mathfrak{D}$, la fibre $f^{-1}(y)$ est analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe.

Alors, on peut trouver une fonction associée au système (1), si et seulement si $\mathfrak{D}$ coïncide avec l'espace $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ (Théorème 1 au $n°$ 2).

Dans le cas où $n>1$, le domaine $\mathfrak{D}$ ci-dessus n'est pas nécessairement égal à l'espace (y)[(2)]. Je ne sais pas encore s'il est toujours pseudoconvexe. Mais nous pouvons constater que $\mathfrak{D}$ est toujours pseudoconvexe d'ordre $n-2$[(3)].

Sur une variété de Stein de dimension $n+1$ on peut définir pareillement un système de n fonctions holomorphes satisfaisant aux conditions (A_0). Alors, le domaine $\mathfrak{D}$ n'est pas nécessairement pseudoconvexe au sens ordinaire[(4)], tandis qu'il est aussi pseudoconvexe d'ordre $n-2$ (Théorème 2 au $n°$ 5).

Dans le cas d'un système de fonctions holomorphes et rationnelles sur une variété affine V, le domaine $\mathfrak{D}$ est plus limité, c'est-à-dire que le complément E de $\mathfrak{D}$ est, s'il n'est pas vide, une variété affine dans l'espace (y) dont les composantes irréductibles sont toutes de dimension $n-1$ ou $n-2$ (Théorème 3 au $n°$ 6). Supposons de plus que $\pi_1(V)=\pi_3(V)=0$, $\pi_i(V)$ étant le $i^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de V. Alors, le domaine $\mathfrak{D}$ toujours coïncide avec l'espace (y) et l'on peut trouver une fonction holomorphe associée avec laquelle le système fournit une application birationnelle et biholomorphe de V sur l'espace de $n+1$ variables complexes (Théorème 4 au $n°$ 8).

En particulier, si toutes les fonctions $f_i(x)$ du système (1) sont des polynômes par rapport aux variables $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ et si le système satisfait aux conditions (A_0), on peut toujours trouver un autre polynome $f_{n+1}(x)$ en $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ comme fonction associée au systeme (1) (Corrollaire au n° 8)[(5)].

La généralisation d'un lemme dû à Nishino (Lemme I au n° 1) est le point de départ de nos recherches. Au n° 5 nous citerons un lemme (Lemme II), dû à R. Fujita, concernant les problèmes de Cousin sur lequel nos résultats principaux se fondent.

1. Lemme de Nishino

Dans l'espace de $n+1$ variables complexes $z_1, z_2, \cdots, z_n, u$, considérons un polycylindre (Γ, C) de la forme

$$\Gamma:\ |z_1|<\rho,\ |z_2|<\rho, \cdots, |z_n|<\rho,$$
$$C:\ |u|<\infty,$$

où ρ est un nombre positif. Soit D un domaine multivalent[(6)] étalé au-dessus de (Γ, C). Pour tout $c=(c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \Gamma$, désignons par D_c l'ensemble analytique dans D, défini par

2) Voir Exemple 1 au n° 3.

3) Pour les domaines pseudoconvexes d'ordre général, voir le n° 4.

4) On doit ce fait à T. Ueda. Voir le n° 5.

5) On peut substituer aux conditions (A_0) certaines conditions moins restrictives; nous le traiterons ultérieurement.

6) Dans ce mémoire, un domaine multivalent peut en général avoir des points de ramification.

$$z_1=c_1,\ z_2=c_2,\ \cdots,\ z_n=c_n.$$

Supposons que D satisfait aux conditions suivantes[7]:

1) D est une variété de Stein.

2) Pour tout c dans Γ, D_c n'a aucun point singulier en tant qu'ensemble analytique dans D.

3) Pour tout c dans Γ, D_c est irréductible et analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe[8].

4) Il y a au moins un feuillet de D qui contient une partie univalente justement étalée au-dessus d'un voisinage de la surface analytique $u=0$ dans (Γ, C).

Nous dirons, avec Nishino, un tel domaine *de type* (T). On désigne par O l'ensemble de tous les points dans la prtie exprimée dans 4), qui se trouvent au-dessus de la surface analytique $u=0$. D'après 3), pour tout c dans Γ, on peut faire correspondre à D_c tout le plan d'une variable complexe w par une fonction holomorphe sur D_c biunivoquement. De plus, cette fonction, désignée par $\varphi_c(p)$, est déterminée de la facon unique, quand on y impose deux conditions,

$$\varphi_c(O_c)=0 \quad \text{et} \quad \partial\varphi_c(O_c)/\partial u=1,$$

où O_c est le seul point commun de O et de D_c. Par suite, on peut définir une fonction $\varphi(p)$ dans D en posant sur D_c pour tout c dans Γ

$$\varphi(p)=\varphi_c(p).$$

On dira $\varphi(p)$ *fonction attachée au domaine D*. Nous verrons dans la suite que $\varphi(p)$ est holomorphe dans D.

Soit $c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ un point quelconque de Γ. D'après Oka[9], on peut trouver une fonction holomorphe $\psi_c(p)$ dans D telle que l'on ait sur D_c

$$\psi_c(p)=\varphi(p).$$

On aura le

Lemme[10]**.** *Pour tout point p_0 de D, il existe un voisinage U de p_0 dans D tel que l'on puisse regarder*

$$z_1, z_2, \cdots, z_n \quad \textit{et} \quad v=\psi_c(p)$$

comme un système de coordonées locales dans U.

En effet, soient $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ un système de coordonnées locales en p_0 ayant p_0 pour origine. Alors, on peut regarder $z_1, z_2, \cdots, z_n$ et v comme fonctions holo-

7) Voir Nishino [5], p. 222 et 223.

8) Cela veut dire qu'on peut faire correspondre à D_c tout le plan d'une variable complexe holomorphiquement et biunivoquement.

9) Voir Oka [6], p. 230.

10) C'est une généralisation du Lemme 2 de Nishino [5], p. 225.

morphes par rapport aux $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ dans un voisinage de l'origine. Par hypothèse, le rang de la matrice

$$(\partial z_i/\partial x_j) \qquad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n+1)$$

est toujours n. Supposons, pour fixer les idées, que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \neq 0$$

à l'origine. Alors, on peut regarder $z_1, z_2, \cdots, z_n, x_{n+1}$ comme un système de coordonnées locales en p_0 qui deviennent en p_0 $z=c$, $x_{n+1}=0$. Le déterminant fonctionnel

$$\begin{aligned} J &= \frac{D(z_1, \cdots, z_n, v)}{D(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})} = \frac{D(z_1, \cdots, z_n, v)}{D(z_1, \cdots, z_n, x_{n+1})} \cdot \frac{D(z_1, \cdots, z_n, x_{n+1})}{D(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x_{n+1}} \cdot \frac{D(z_1, \cdots, z_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \end{aligned}$$

ne s'annule pas à l'origine, puisque D_c est donné par $z=c$, que $v=\psi_c(p)=\varphi(p)$ est univalent sur D_c et que l'on a $\partial v/\partial x_{n+1}\neq 0$ en $z=c$, $x_{n+1}=0$. Ceci démontre le lemme.

Soit p_0 un point quelconque de D. Nous allons voir que $\varphi(p)$ est holomorphe en p_0, en réduisant notre cas au cas de $n=1$, où ce fait a été démontré par Nishino. Supposons que p_0 est sur D_c et formons une fonction $v=\psi_c(p)$ du lemme précédent pour D_c. D'après le lemme, on peut regarder $\varphi(p)$ comme fonction par rapport aux $z_1, z_2, \cdots, z_n, v$ dans un domaine cylindrique (Γ', U), où

$$\Gamma': \quad |z_1-c_1|<\rho',\ |z_2-c_2|<\rho',\ \cdots,\ |z_n-c_n|<\rho'$$

est un polycylindre contenu dans Γ, et U est un voisinage de $\varphi(p_0)$. Désignons, de nouveau, la fonction $\varphi(p)$ par $\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n, v)$.

Soit $z^\circ=(z_1^\circ, z_2^\circ, \cdots, z_n^\circ)$ un point quelconque de Γ', et soit, pour chaque $i=1,2,\cdots,n$, D^i la section de D définie par

$$z_1=z_1^\circ,\ \cdots,\ z_{i-1}=z_{i-1}^\circ,\ z_{i+1}=z_{i+1}^\circ,\ \cdots,\ z_n=z_n^\circ.$$

On peut regarder D_i comme domaine de type (T) étalé au-dessus du dicylindre $(|z_i|<\rho, C)$. La trace $\varphi^i(p)$ de $\varphi(p)$ sur D^i est la fonction attachée au domaine D^i. D'après Nishino, elle est holomorphe sur D^i[(11)]. Alors, i $(1\leqq i\leqq n)$ étant quelconque, le théorème de Hartogs montre que $\varphi(z_1, \cdots, z_n, v)$ est holomorphe dans (Γ', U). Nous avons donc le lemme suivant:

Lemme I (Lemme de Nishino)[(12)]. *Pour un domaine multivalent quelconque D de type (T) étalé au-dessus du polycylindre (Γ, C), la fonction $\varphi(p)$ attachée à D est holomorphe sur D.*

11), 12) Voir Nishino [5], p. 253, Lemme fondamental.

Soit p un point quelconque de D et soit $(z_1(p), \cdots, z_n(p))$ la projection de p sur Γ. D'après le lemme ci-dessus, l'application

$$z_1 = z_1(p), \cdots, z_n = z_n(p), \ w = \varphi(p)$$

est une application biholomorphe de D sur le polycylindre (Γ, C') où C' signifie tout le plan de w.

2. Fonction associée à un système de fonctions entières.

Soit

$$f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.1}$$

un système de n fonctions entières de $n+1$ variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$. Considérons l'application

$$y = f(x) \tag{2.2}$$

de l'espace $\boldsymbol{C}^{n+1}$ des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ dans l'espace $\boldsymbol{C}^n$ des variables complexes $y_1, y_2, \cdots, y_n$, où $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ et $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$. Une autre fonction entiére $f_{n+1}(x)$ sera dite fonction associée au système (2.1), si la transformation

$$y_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n+1)$$

de l'espace $\boldsymbol{C}^{n+1}$ est un automorphisme analytique. Etablissons le

Théorème 1[13]. *On peut trouver une fonction associée au système* (2.1), *si et seulement s'il satisfait aux conditions* (*A*) *suivantes*:

1) *Le rang de la matrice*

$$(\partial f_i / \partial x_j) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n+1)$$

est toujours n.

2) *Pour tout* $y \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ *étant l'image de* $\boldsymbol{C}^{n+1}$ *par l'application* (2.2), *la fibre* $f^{-1}(y)$ *est irréductible et analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe en tant qu'ensemble analytique dans* $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

3) *Le domaine* $\mathfrak{D}$ *ci-dessus coïncide avec l'espace* $\boldsymbol{C}^n$.

En effet, il est facile de voir que les conditions sont nécessaires.

Supposons d'abord que le système (2.1) satisfasse aux conditions 1), 2) de (A) seulement. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n)$ un point quelconque de $\mathfrak{D}$ et soit $p_0 = (x_1^\circ, \cdots, x_{n+1}^\circ)$ un point appartenant à la fibre $f^{-1}(a)$. D'après la condition 1), on peut supposer, pour fixer les idées, que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$$

13) C'est une généralisation du théorème I de Nishino [5].

en p_0. Par suite, on peut regarder

$$y_i = f_i(x) \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad x_{n+1}$$

comme un système de coordonnées locales en p_0 dans C^{n+1}. Donc, on peut trouver un voisinage U de p_0 homéomorphe à un polycylindre (Γ, C_0), où

$$\Gamma: \quad |y_1 - a_1| < \rho, \ |y_2 - a_2| < \rho, \cdots, |y_n - a_n| < \rho$$

est un polycylindre contenu dans $\mathfrak{D}$ et

$$C_0: \quad |x_{n+1} - x_{n+1}^{\circ}| < r$$

est un cercle, ρ et r étant des nombres positifs suffisamment petits. Dans ces circonstances, la partie $f^{-1}(\Gamma)$ de C^{n+1} peut etre regardée comme un domaine multivalent étalé au-dessus du polycylindre (Γ, C), où C est le plan de la variable x_{n+1}. Il est facile de voir que ce domaine est de type (T). En particulier, le voisinage U de p_0 est une partie univalente justement étalée au-dessus de (Γ, C). D'après le lemme I, la fonction $\varphi_\Gamma(x)$ attachée à $f^{-1}(\Gamma)$ est holomorphe dans $f^{-1}(\Gamma)$. Par suite, $f^{-1}(\Gamma)$ est analytiquement homéomorphe au polycylindre $(\Gamma, |w| < \infty)$, par la transformation

$$y_i = f_i(x) \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad w = \varphi_\Gamma(x).$$

D'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir tout $\mathfrak{D}$ avec une infinité dénombrable de ces polycylindres Γ_j $(j=1, 2, \cdots)$. Désignons la fonction attachée à $f^{-1}(\Gamma_j)$ par $\varphi_j(x)$ respectivement. Alors, comme on sait bien, dans la partie $f^{-1}(\Gamma_j) \cap f^{-1}(\Gamma_k)$, si elle n'est pas vide, on a l'équation

$$\varphi_j(x) = \alpha_{jk}(f(x))\varphi_k(x) + \beta_{jk}(f(x)),$$

où $\alpha_{jk}(y)$ et $\beta_{jk}(y)$ sont des fonctions holomorphes dans $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ et $\alpha_{jk}(y)$ ne s'annule en aucun point de $\Gamma_j \cap \Gamma_k$. Donc $(C^{n+1}, f, \mathfrak{D})$ *est un espace fibré holomorphe sur* $\mathfrak{D}$, *dont la fibre est le plan* C *d'une variable complexe et dont le groupe est le groupe des transformations linéaires holomorphes du plan* C.

Maintenant, supposons que $\mathfrak{D}$ coïncide avec l'espace C^n (Condition 3) de (A)). D'après Cousin, les premier et deuxième problèmes de Cousin sont toujours résolubles pour C^n. Alors, d'après le mode de raisonnement de Nishino[14], on peut trouver une fonction entière $g(x)$ des variables $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$, telle que pour tout Γ_j

$$g(x) = \alpha_j(f(x))\varphi_j(x) + \beta_j(f(x))$$

dans $f^{-1}(\Gamma_j)$, où $\alpha_j(y)$, $\beta_j(y)$ sont des fonctions holomorphes dans Γ_j et $\alpha_j(y)$ ne s'annule jamais. Elle est certainement une fonction associée au système (2.1).

C.Q.F.D.

14) Voir Nishino [5], p. 257 et 258.

3. Systèmes de fonctions entières satisfaisants aux conditions (A_0).

Nous allons étudier des systèmes de fonctions entières satisfaisants aux conditions 1) et 2) de (A) du théorème 1, que l'on appellera *conditions* (A_0). Supposons que le système (2.1) de fonctions entières du $n°$ 2 satisfasse aux conditions (A_0). Alors nous avons vu, en chemin de la démonstration du théorème 1, que $(C^{n+1}, f, \mathfrak{D})$ est un espace fibré holomorphe sur $\mathfrak{D}$. Si ceci est trivial, c'est-à-dire s'il existe une fonction entière $f_{n+1}(x)$ des variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ telle que l'application

$$y_i = f_i(x) \qquad (i=1, 2, \cdots, n+1)$$

soit une application biholomorphe de C^{n+1} sur le produit $\mathfrak{D} \times C$, le domaine $\mathfrak{D}$ est nécessairement pseudoconvexe.

De plus, on aura la

Proposition. *L'espace fibré holomorphe* $(C^{n+1}, f, \mathfrak{D})$ *est trivial, si et seulement si le domaine* $\mathfrak{D}$ *est pseudoconvexe.*

En effet, il suffit de voir que la condition est suffisante. Supposons que le domaine $\mathfrak{D}$ soit pseudoconvexe. Alors, d'après Oka[15], $\mathfrak{D}$ est holomorphe-convexe et le premier problème de Cousin est toujours résoluble pour $\mathfrak{D}$.

Il s'agit du deuxième problème de Cousin pour $\mathfrak{D}$. Envisageons la topologie de $\mathfrak{D}$. En vertu de la suite exacte des groupes d'homotopie de l'espace fibré, on voit facilement que son $i^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie $\pi_i(\mathfrak{D})$ s'annule pour tout $i \geqq 1$. De là, d'après Hurewicz, il suit que son $i^{\text{ième}}$ groupe d'homologie $H_i(\mathfrak{D}, Z)$ à coefficients entiers s'annule aussi pour tout $i \geqq 1$. Donc, d'après le théorème des coefficients universels, le deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{D}, Z)$ à coefficients entiers s'annule toujours. Le domaine $\mathfrak{D}$ étant holomorphe-convexe, d'après Serre[16], le deuxième problème de Cousin est toujours résoluble pour $\mathfrak{D}$.

Alors, d'après ce que nous avons vu dans la démonstration du théorème 1, l'espace fibré holomorphe $(C^{n+1}, f, \mathfrak{D})$ est certainement trivial. C.Q.F.D.

Pour $n=1$, on voit facilement que les conditions (A_0) sont équivalentes aux conditions (A). Pour $n=2$, il y a l'exemple suivant:

Exemple 1. Soient $g_i(x_1, x_2)$ $(i=1, 2)$ deux fonctions entières de deux variables complexes x_1 et x_2 telles que l'application

$$y_1 = g_1(x_1, x_2), \qquad y_2 = g_2(x_1, x_2)$$

soit une transformation biholomorphe de l'easpce (x_1, x_2) à un vrai domaine partiel $\mathfrak{D}$[17] de l'espace (y_1, y_2) de deux variables complexes. D'après Fatou-

15) Voir Oka [6], p. 211, Théorème II et p. 222, Théorème III.
16) Voir Serre [8], p. 60 et 61.
17) Ceci signifie que $\mathfrak{D} \subsetneqq C^2$.

Bieberbach[18], il existe certainement telles fonctions. Posons $f_i(x_1, x_2, x_3) = g_i(x_1, x_2)$ $(i=1, 2)$ identiquement. Alors le système

$$f_1(x_1, x_2, x_3), \qquad f_2(x_1, x_2, x_3)$$

de fonctions entières de 3 variables complexes *satisfait aux conditions* (A_0), *sans satisfaire aux conditions* (A).

Lorsque le système (2.1) *de fonctions entières satisfait aux conditions* (A_0), *le domaine* $\mathfrak{D}$ *est-il toujours pseudoconvexe*? Je ne sais pas encore la réponse. Mais nous verrons au *n*° 5 qu'*il est toujours pseudoconvexe au sense général.*

4. Domaines pseudoconvexes d'ordre général[19]

Soit E un ensemble de points de l'espace C^n de n variables complexes $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Soit q un nombre entier tel que $0 \leqq q \leqq n-1$. On dira que E satisfait au *théorème de la continuité* (*C*) *d'ordre* q en un point $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ de E, s'il existe un voisinage U de η satisfaisant à la condition suivante:

Soit $y^\circ = (y_1^\circ, \cdots, y_n^\circ)$ un point quelconque de U. Considérons les ensembles $\varDelta_0, \varDelta_{q+1}, \cdots, \varDelta_n$ définis par

$$\begin{aligned} \varDelta_0&: \ |y_i - y_i^\circ| < r' \ (i=1, 2, \cdots, q), \ |y_j - y_j^\circ| < \rho \ (j=q+1, \cdots, n), \\ \varDelta_k&: \ |y_i - y_i^\circ| < r \ (i=1, 2, \cdots, q), \ |y_j - y_j^\circ| < \rho \ (j=q+1, \cdots, n; \ j \neq k), \ \rho' < \\ &\quad |y_k - y_k^\circ| < \rho, \end{aligned}$$

pour $k = q+1, \cdots, n$, où r, r', ρ et ρ' sont des nombres positifs tels que $0 < r' < r$ et $0 < \rho' < \rho$. Si le polycylindre

$$\varDelta: \ |y_i - y_i^\circ| < r \ (i=1, 2, \cdots, q), \ |y_j - y_j^\circ| < \rho \ (j=q+1, \cdots, n)$$

est contenu dans U et si la réunion $\varDelta_0 \cup \varDelta_{q+1} \cup \cdots \cup \varDelta_n$ reste extérieure à E, alors le polycylindre $\varDelta$ n'a aucun point commun avec E.

Soit D un domaine dans l'espace C^n. Nous dirons D *pseudoconvexe d'ordre* q[20], si la complément E $(= C^n - D)$ de D satisfait au théorème de la continuité (C) d'ordre q en tout point $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$ de E, et si cette propriété est invariante par toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de η.

En particulier un domaine dans l'espace C^n est pseudoconvexe d'ordre $n-1$, si et seulement s'il est pseudoconvexe au sense ordinaire. Un domaine pseudoconvexe d'ordre $q' > q$ est nécessairement pseudoconvexe d'ordre q, et tout domaine est pseudoconvexe d'ordre 0.

---

18) Voir Bieberbach [1].

19) Voir Tadokoro [9], p. 281, note 2) et Fujita [2], p. 403, n° 9.

20) Il y a les théorèmes (A), (B), (C), de la continuité d'ordre q de trois sortes. Donc on peut définir domaines pseudoconvexes (A), (B), (C) de trois sortes respectivement par ces théorèmes (A), (B), (C). Mais elles signifient une seule et la même sorte. Voir Tadokoro [9], p. 283 à 285.

5. Systèmes de fonctions holomorphes sur une variété de Stein.

Soit V une variété de Stein (connexe) de dimension $n+1$. Considérons un système

$$f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p) \tag{5.1}$$

de n fonctions holomorphes sur V, satisfaisant aux *conditions* (A_0) suivantes:

1) Soit p_0 un point quelconque de V et soit $z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}$ un système de coordonnées locales en p_0 ayant p_0 pour origine. Alors le rang de la matrice

$$(\partial f_i(p(z))/\partial z_j) \qquad (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n+1)$$

est toujours n à l'origine.

2) Soit $\mathfrak{D}$ l'image de V par l'application

$$y=f(p), \tag{5.2}$$

où $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ et $f(p)=(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p))$. Pour tout $y \in \mathfrak{D}$, la fibre $f^{-1}(y)$ est irréductible et analytiquement homéomorphe à tout le plan d'une variable complexe en tant qu'ensemble analytique dans V.

Dans ces circononstances Ueda a montré un exemple intéressant, dont le domine $\mathfrak{D}$ *n'est pas pseudoconvexe* (*d'ordre* $n-1$)[21]. Nous donnerons un autre tel exemple dans la suite (Exemple 3 au $n°$ 6). D'un autre côté, on aura le

Théorème 2. *Dans les circonstances ci-dessus,* $(V, f, \mathfrak{D})$ *est un espace fibré holomorphe sur* $\mathfrak{D}$*, dont la fibre est le plan* $\boldsymbol{C}$ *d'une variable complexe et dont le groupe est le groupe des transformations linéaires holomorphes du plan* $\boldsymbol{C}$*. De plus, le domaine* $\mathfrak{D}$ *dans l'espace* $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *est toujours pseudoconvexe d'ordre* $n-2$.

Pour l'effet, introduisons le lemme suivant:

Lemme II[22]. *Considérons, dans l'espace* $\boldsymbol{C}^n$ *des* n *variables complexes* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ $(n \geqq 3)$, *trois domaines cylindriques* $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$ *des formes suivantes*:

$$\Delta^1:\ |y_i|<r_i\ (i=1, 2, \cdots, n-2),\ \rho_1'<|y_{n-1}|<\rho_1,\ |y_n|<\rho_2,$$
$$\Delta^2:\ |y_i|<r_i\ (i=1, 2, \cdots, n-2),\ |y_{n-1}|<\rho_1,\ \rho_2'<|y_n|<\rho_2,$$
$$\Delta^3:\ |y_i|<r_i'\ (i=1, 2, \cdots, n-2),\ |y_{n-1}|<\rho_1,\ |y_n|<\rho_2,$$

où r_i, r_i' $(i=1, 2, \cdots, n-2)$, ρ_j, ρ_j' $(j=1, 2)$ *sont des nombres réels tels que* $0<r_i' <r_i$, $0 \leqq \rho_j' < \rho_j$.

1° *Soit donnée une fonction* $g_i(y)$ *holomorphe dans* $\Delta^j \cap \Delta^k$ *pour chaque permutation circulaire* (i, j, k) *de* $(1, 2, 3)$, *de façon que l'on ait identiquement*

---

21) Il n'est pas publié encore.

22) Ce lemme que l'on doit à R. Fujita sera publié prochainement.

$$g_1+g_2+g_3=0 \quad dans \quad \Delta^1\cap\Delta^2\cap\Delta^3.$$

Alors on peut trouver des fonctions $h_i(y)$ *holomorphes dans* Δ^i *respectivement, de façon que l'on ait identiquement*

$$g_i=h_j-h_k \quad dans \quad \Delta^j\cap\Delta^k.$$

2° *Etant donnée une fonction* $g_i(y)$ *holomorphe et non nulle dans* $\Delta^j\cap\Delta^k$ *pour chaque permutation circulaire* (i,j,k) *de* $(1,2,3)$, *de facon que l'on ait identiquement*

$$g_1g_2g_3=1 \quad dans \quad \Delta^1\cap\Delta^2\cap\Delta^3.$$

Alors on peut trouver des fonctions $h_i(y)$ *holomorphes et non nulles dans* Δ^i, *respectivement, de facon que l'on ait identiquement*

$$g_i=h_j/h_k \quad dans \quad \Delta^j\cap\Delta^k.$$

Démonstration du théorème 2. D'après Remmert[23], on peut supposer que V soit un ensemble analytique non singulier dans l'espace de m variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_m$, m étant un nombre entier suffisamment grand. Soit y° un point quelconque de $\mathfrak{D}$ et soit x° un point de la fibre $f^{-1}(y^\circ)$. D'après Grauert[24], en choisissant des coordonnées convenables de l'espace (x), on peut supposer que l'intersection de V et de l'ensemble analytique $x_1=a_1$, $x_2=a_2, \cdots, x_{n+1}=a_{n+1}$ soit au plus de dimension 0 pour tout point $(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$ de l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ et que, dans un voisinage de x°, V soit défini par

$$x_{n+2}=\xi_{n+2}(x_1, \cdots, x_{n+1}), \cdots, x_m=\xi_m(x_1, \cdots, x_{n+1}),$$

ξ_i $(n+2\leqq i\leqq m)$ étant des fonctions holomorphes dans un voisinage de $(x_1^\circ, \cdots, x_{n+1}^\circ)$. Alors $z_1=x_1-x_1^\circ, \cdots, z_{n+1}=x_{n+1}-x_{n+1}^\circ$ étant un système de coordonnées locales en x° ayant x° pour origine, d'après 1), le rang de la matrice

$$(\partial f_i(x(z))/\partial z_j) \qquad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n+1)$$

est n à l'origine. Pour fixer les idées, supposons que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1(x(z)), \cdots, f_n(x(z)))}{D(z_1, \cdots, z_n)}$$

est non nul à l'origine. Alors pour un polycylindre Γ $(\subset\mathfrak{D})$ autour de y°, on peut regarder la partie $f^{-1}(\Gamma)$ comme un domaine multivalent de type (T) étalé au-dessus du polycylindre (Γ, C), où C est le plan de la variable x_{n+1}. Donc, en raisonnant pareillement au n° 2, on voit que $(V, f, \mathfrak{D})$ est un espace fibré holomorphe sur $\mathfrak{D}$, dont la fibre est le plan $\boldsymbol{C}$ d'une variable complexe et dont le groupe est le groupe des transformations linéaires holomorphes du plan $\boldsymbol{C}$.

23) Remmert [7].

24) Grauert [3], p. 249, Satz 9. Voir aussi Nishino [4], p. 382, Théorème I.

Pour prouver la dernière partie du théorème, on peut supposer $n\geqq 3$. Soit $\eta=(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ un point quelconque du complément E $(=C^n-\mathfrak{D})$ de $\mathfrak{D}$. Considérons un polycylindre U de centre η. Soit $y^\circ=(y_1^\circ, \cdots, y_n^\circ)$ un point quelconque de U. Supposons que le polycylindre

$$\Delta:\quad |y_i-y_i^\circ|<r\ (i=1, 2, \cdots, n-2), |y_j-y_j^\circ|<\rho\ (j=n-1, n)$$

soit contenu dans, U et que les ensembles $\Delta_0, \Delta_{n-1}, \Delta_n$ définis par

$$\Delta_0:\quad |y_i-y_i^\circ|<r'\ (i=1, 2, \cdots, n-2), |y_j-y_j^\circ|<\rho\ (j=n-1, n),$$
$$\Delta_{n-1}:\quad |y_i-y_i^\circ|<r\ (i=1, 2, \cdots, n-2), \rho'<|y_{n-1}-y_{n-1}^\circ|<\rho, |y_n-y_n^\circ|<\rho,$$
$$\Delta_n:\quad |y_i-y_i^\circ|<r\ (i=1, 2, \cdots, n-2), |y_{n-1}-y_{n-1}^\circ|<\rho, \rho'<|y_n-y_n^\circ|<\rho,$$

soient contenus dans $\mathfrak{D}, r, r'$ $(<r)$, ρ, ρ' $(<\rho)$ étant des nombres positifs.

Posons

$$\Delta^{(1)}=\Delta_{n-1},\quad \Delta^{(2)}=\Delta_n,\quad \Delta^{(3)}=\Delta_0.$$

Les premier et deuxième problèmes de Cousin étant toujours résolubles pour les domaines $\Delta^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$[25], pour chaque i on peut trouver une fonction $\varphi_i(x)$ holomorphe dans $f^{-1}(\Delta^{(i)})$, telle que l'application

$$y=f(x),\qquad w=\varphi_i(x),$$

soit une application biholomorphe de $f^{-1}(\Delta^{(i)})$ sur le produit $(\Delta^{(i)}, |w|<\infty)$.

Soit (i, j, k) une permutation circulaire quelconque de $(1, 2, 3)$. Alors on a

$$\varphi_j(x)=\alpha_{jk}(f(x))\varphi_k(x)+\beta_{jk}(f(x))\qquad \text{pour } x\in f^{-1}(\Delta^{(j)}\cap\Delta^{(k)}),$$

où $\alpha_{jk}(y)$ et $\beta_{jk}(y)$ sont des fonctions holomorphes dans $\Delta^{(j)}\cap\Delta^{(k)}$ et $\alpha_{jk}(y)$ ne s'annule jamais. Posons $g_1(y)=\alpha_{23}(y)$, $g_2(y)=\alpha_{31}(y)$ et $g_3(y)=\alpha_{12}(y)$. Alors on a identiquement $g_1g_2g_3=1$ dans $\Delta^{(1)}\cap\Delta^{(2)}\cap\Delta^{(3)}$. En vertu du 2° du lemme II, on peut trouver des fonctions $h_i(y)$ holomorphes et non nulles dans $\Delta^{(i)}$, de façon que l'on ait identiquement

$$g_i=h_j/h_k\qquad \text{dans } \Delta^{(j)}\cap\Delta^{(k)}.$$

Posons

$$\varphi_i'(x)=\varphi_i(x)/h_i(f(x))\qquad \text{pour } x\in f^{-1}(\Delta^{(i)}).$$

Alors chaque $\varphi_i'(x)$ est holomorphe dans $f^{-1}(\Delta^{(i)})$ et on a

$$\varphi_j'(x)=\varphi_k'(x)+\beta_{jk}'(f(x))\qquad \text{pour } x\in f^{-1}(\Delta^{(j)}\cap\Delta^{(k)}),$$

où $\beta_{jk}'(y)=g_i'(y)$ est une fonction holomorphe dans $\Delta^{(j)}\cap\Delta^{(k)}$, telle que l'on ait identiquement $g_1'+g_2'+g_3'=0$ dans $\Delta^{(1)}\cap\Delta^{(2)}\cap\Delta^{(3)}$. Donc, d'après le 1° du lemme II, on peut trouver des fonctions $h_i'(y)$ holomorphes dans $\Delta^{(j)}\cap\Delta^{(k)}$, de facon que l'on ait identiquement

25) Voir Oka [6], p. 39, Théorème II.

$$g'_i = h'_j - h'_k \qquad \text{dans } \Delta^{(j)} \cap \Delta^{(k)}.$$

Pour $x \in f^{-1}(\Delta')$, où $\Delta' = \Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)} \cup \Delta^{(3)}$, posons

$$\varphi(x) = \varphi'_i(x) - h'_i(x), \qquad \text{si } x \in f^{-1}(\Delta^{(i)}).$$

Alors $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe dans $f^{-1}(\Delta')$ et l'application

$$y = f(x), \qquad w = \varphi(x) \tag{5.3}$$

est une application biholomophe de $f^{-1}(\Delta')$ sur le produit $(\Delta', |w| < \infty)$.

Regardons l'application inverse de (5.3) comme application de $(\Delta', |w| < \infty)$ dans l'espace $(x_1, \cdots, x_m)$, et désignons-la par

$$x = F(y, w), \tag{5.4}$$

où $x = (x_1, \cdots, x_m)$ et $F(y, w) = (F_1(y, w), \cdots, F_m(y, w))$. $F_i(y, w)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ étant des fonctions holomorphes dans $(\Delta', |w| < \infty)$, d'apres Hartogs, elles pouvent se prolonger en des fonctions $\tilde{F}_1(y, w), \cdots, \tilde{F}_m(y, w)$ holomorphes dans $(\Delta, |w| < \infty)$. Posons

$$x = \tilde{F}(y, w) = (\tilde{F}_1(y, w), \cdots, \tilde{F}_m(y, w)). \tag{5.5}$$

C'est une application holomorphe de $(\Delta, |w| < \infty)$ dans l'espace (x) coïncidant avec l'application (5.4) pour $(y, w) \in (\Delta', |w| < \infty)$. Donc, on peut regarder l'application (5.5) comme celle de $(\Delta, |w| < \infty)$ dans V. Or, la composition de l'application (5.2) avec (5.5) est une application holomorphe de $(\Delta, |w| < \infty)$ dans Δ telle que

$$y = f(\tilde{F}(y, w))$$

pour tout $y \in \Delta'$. D'où, il en est de même pour tout $y \in \Delta$. Donc Δ est nécessairement contenu dans $\mathfrak{D}$, ce qui montre que l'ensemble E satisfait au théorème de la continuité (C) au point η de E.

On peut vérifier immédiatement que cette propriété est invariante par toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de η. Donc $\mathfrak{D}$ est pseudoconvexe d'ordre $n-2$. C.Q.F.D.

En particulier le domaine $\mathfrak{D}$ au n° 3 est toujours pseudoconvexe d'ordre $n-2$ dans l'espace (y).

6. Systèmes de fonctions rationnelles sur une variété affine.

Un sous-ensemble V de l'espace (x) de m variables complexes $x_1, x_2, \cdots, x_m$ est appelé *variété affine* s'il est l'ensemble des zéros communs d'un nombre fini de polynômes des $x_1, x_2, \cdots, x_m$. On dit qu'une variété affine V est *non singulière* si elle est non singulière comme un ensemble analytique dans l'espace (x). Une variété non singulière est évidemment une variété de Stein comme une variété analytique complexe. Une fonction $f(x)$ sur une variété affine V sera dite *fonction rationnelle* *sur* V si elle est une trace sur V d'une fonction rationnelle $F(x)$ des variables $x_1, x_2, \cdots, x_m$. Alors on a le

Théorème 3. *Soit V une variété affine non singulière (connexe) de dimension $n+1$ dans l'espace $(x_1, \cdots, x_m)$ et soit*

$$f_1(x), \cdots, f_n(x) \tag{6.1}$$

un système de fonctions holomorphes et rationnelles sur V satisfaisant aux conditions (A_0) du n° 5. Considérons l'image $\mathfrak{D}$ de V par l'application

$$y_1 = f_1(x), \cdots, y_n = f_n(x). \tag{6.2}$$

Alors le complément E de $\mathfrak{D}$ est, s'il n'est pas vide, une variété affine dans l'espace (y) dont les composantes sont de dimension $n-1$ ou $n-2$.

En effet, soit x^0 un point quelconque de V. On peut supposer, pour fixer les idées, que l'intersection de V et de l'ensemble analytique $x_1 = a_1, \cdots, x_{n+1} = a_{n+1}$ soit au plus de dimension 0 pour tout point $(a_1, \cdots, a_{n+1})$ de l'espace $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ et que, dans un voisinage de x°, $x_1, \cdots, x_{n+1}$ soient coordonnées locales de V[26]. De plus, daprès les conditions (A_0), on peut supposer que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0 \qquad \text{en } x^\circ. \tag{6.3}$$

Dans l'espace $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$ des $m+n$ variables complexes, considérons la variété affine Σ définie par

$$x \in V,\ y_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

D'après (6.3) Σ s'exprime dans un voisinage de $(x^\circ, f(x^\circ))$ par

$$x_i = \xi_i(x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n) \qquad (1 \leqq i \leqq m),$$

où $\xi_i(x_{n+1}, y)$ sont des fonctions holomorphes par rapport aux $x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n$ dans un voisinage de $(x^\circ_{n+1}, f(x^\circ))$. Soit $\mathfrak{R}$ le domaine multivalent étalé au-dessus de l'espace $(x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n)$ défini par le prolongement analytique simultané de ces fonctions, admettant les pôles et les points critiques d'ordre fini d'elles pour points intérieurs de $\mathfrak{R}$. ($\mathfrak{R}$ est le domaine de Riemann d'une fonction algébrique des variables $x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n$ sur l'espace fini (x_{n+1}, y).) Pour chaque i $(1 \leqq i \leqq m)$ soit $\xi_i(q)$ la fonction méromorphe sur $\mathfrak{R}$ correspondant à $\xi_i(x_{n+1}, y)$ et soit S l'ensemble de tous les pôles de ces fonctions sur $\mathfrak{R}$. Le point q de $\mathfrak{R}$ correspondant au point $(x^\circ, f(x^\circ))$ de Σ n'appartient pas à S. Pour tout point q de $\mathfrak{R} - S$ dont la projection est (a_{n+1}, b), il existe un point (a, b) de Σ dont la projection sur l'espace (x_{n+1}, y) est (a_{n+1}, b) et par suite $b \in \mathfrak{D}$. Supposons que le complément E existe effectivement. Alors, pour tout point $b = (b_1, \cdots, b_n)$ de E, l'ensemble analytique (de dimension un) de $\mathfrak{R}$ défini par

26) Voir la démonstration du théorème 2 au n° 5.

$$y_1=b_1, \cdots, y_n=b_n$$

est contenu dans S.

Soit $\underline{S}$ la projection de S sur l'espace $(x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n)$ et soient $\underline{S}_1, \cdots, \underline{S}_\nu$ les composantes irréductibles de $\underline{S}$ définies respectivement par

$$F_j(x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n)=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, \nu),$$

F_j étant polynômes (irréductibles) de $x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n$. Supposons, pour fixer les idées, que $F_1, \cdots, F_\mu$ soient indépendantes de x_{n+1} et que $\partial F_j/\partial x_{n+1}\not\equiv 0$ pour $j>\mu$. Pour chaque j $(>\mu)$, soit $x_{n+1}=\chi_j(y)$ la fonction algébrique des variables $y_1, \cdots, y_n$ définie par

$$F_j(x_{n+1}, y_1, \cdots, y_n)=0,$$

et soit σ_j la projection de l'ensemble de tous les points d'indétermination de χ_j sur l'espace $(y_1, \cdots, y_n)$; σ_j $(\mu<j\leqq\nu)$ sont des variété affines dans l'espace $(y_1, \cdots, y_n)$ à composants de dimension $\leqq n-2$. Soient $\mathscr{S}_j$ $(j=1, 2, \cdots, \mu)$ les surfaces analytiques dans l'espace (y) définies respectivement par

$$F_j(y_1, \cdots, y_n)=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, \mu).$$

Alors on a

$$E\subset\Big(\bigcup_{j=1}^{\mu}\mathscr{S}_j\Big)\cup\Big(\bigcup_{k=\mu+1}^{\nu}\sigma_k\Big).$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\mathscr{S}_j\subset E$ pour $j\leqq\lambda$ et que $\mathscr{S}_j\not\subset E$ pour $j>\lambda$. Nous allons voir que toute $\mathscr{S}_j\cap E$ $(j>\lambda)$ est contenue dans une variéré affine de dimension $\leqq n-2$. Considérons la surface analytique T_j dans $\mathfrak{R}$ définie par

$$F_j(y)=0.$$

1° Supposons que $T_j\subsetneq S$. Alors il existe une composante T_j° de T_j telle que $T_j^\circ\subsetneq S$. L'intersection $T_j^\circ\cap S$ est un ensemble analytique dans $\mathfrak{R}$ de dimension $\leqq n-1$ et $\mathscr{S}_j\cap E$ est contenue dans la projection de $T_j^\circ\cap S$ sur l'espace $(y_1, \cdots, y_n)$. Le raisonnement, qui vient montrer que l'ensemble E est contenu dans une variété affine de dimension $\leqq n-1$, montre aussi que $\mathscr{S}_j\cap E$ est contenue dans une variété affine de dimension $\leqq n-2$.

2° Supposons que $T_j\subset S$. $\mathscr{S}_j$ n'étant pas contenue dans E, on peut trouver un point $\bar{y}$ appartenant au $\mathfrak{D}\cap\mathscr{S}_j$ et par suite $\bar{x}\in C^m$ tel que $(\bar{x}, \bar{y})\in\Sigma$. En remplaçant le point x° par le point $\bar{x}$, considérons un système de coordonnées $x_1', \cdots, x_m'$ de l'espace (x) satisfaisant aux conditions parlées plus haut. Soient $\mathfrak{R}'$ le domaine multivalent étalé au-dessus de l'espace $(x_{n+1}', y_1, \cdots, y_n)$ et S' le sous-ensemble de $\mathfrak{R}'$ pareils aux $\mathfrak{R}$ et S respectivement. Alors au point $(\bar{x}, \bar{y})$ correspond un point q' de $\mathfrak{R}'-S'$. Soient $\mathscr{S}_l'$ $(1\leqq l\leqq\mu')$ les surfaces analytiques pareilles aux $\mathscr{S}_j$ $(1\leqq j\leqq\mu)$ et soient σ_m' $(\mu'<m\leqq\nu')$ les variétés affines pareilles aux σ_k $(\mu<k\leqq\nu)$. Alors

l'ensemble E est contenu dans

$$\left(\bigcup_{l=1}^{\mu'} \mathscr{S}'_l\right) \cup \left(\bigcup_{m=\mu'+1}^{\nu'} \sigma'_m\right).$$

Si aucune $\mathscr{S}'_l$ ne coïncide avec $\mathscr{S}_j$. $\mathscr{S}_j \cap E$ est contenu dans

$$\left(\bigcup_{l=1}^{\mu'} (\mathscr{S}_j \cap \mathscr{S}'_l)\right) \cup \left(\bigcup_{m=\mu'+1}^{\nu'} \sigma'_m\right),$$

dont toutes les composantes sont au plus de dimension $n-2$. S'il existe une $\mathscr{S}'_l$ telle que $\mathscr{S}'_l = \mathscr{S}_j$, l'ensemble T'_l pareil au T_j n'est pas contenu dans S'. Car, le point q' de $\mathfrak{R}'-S'$ appartient au $T'_l - S'$. Donc nous avons déja vu au 1°, que $\mathscr{S}'_l \cap E$ $(=\mathscr{S}_j \cap E)$ satisfait à la condition voulue.

D'après ce que nous avons vu, on a

$$E \subset \left(\bigcup_{j=1}^{\lambda} \mathscr{S}_j\right) \cup \tau,$$

où τ est une variété affine à composantes de dimension au plus égal à $n-2$. Supposons, pour fixer les idées, que

$$E \not\subset \left(\bigcup_{j=1}^{\lambda} \mathscr{S}_j\right) \cup \tau',$$

pour toute variété affine $\tau' \subsetneqq \tau$. Or, d'après le théorème 2, l'ensemble E satisfait au théorème de la continuité d'ordre $n-2$. Par suite la variété τ ne peut avoir aucune composante de dimension plus petit que $n-2$. De plus, si la variété τ a une composante τ_0 de dimension $n-2$, τ_0 doit être contenue dans E. Donc l'ensemble E coïncide avec la variété affine $\left(\bigcup_{j=1}^{\lambda} \mathscr{S}_j\right) \cup \tau$ dont toute composante est de dimension $n-1$ ou $n-2$. C.Q.F.D.

Exemple 2. Dans l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+2})$ de $n+2$ variables complexes, considérons la variété affine V définie par

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1 = 0.$$

Alors le système $y_1 = x_1, \cdots, y_n = x_n$ satisfait aux conditions du théorème 3 ci-dessus. Le complément E de l'image $\mathfrak{D}$ est une variété affine définie par

$$y_1 y_2 \cdots y_n = 0,$$

dont les composantes sont toutes de dimension $n-1$.

Exemple 3. Dans l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4) de 4 variables complexes, soit V la variété affine définie par

$$x_1 x_3 + x_2 x_4 - 1 = 0.$$

Alors le système $y_1=x_1$, $y_2=x_2$ satisfait aux conditions du théorème 3 (pour $n=2$). Le complément E du $\mathfrak{D}$ consiste en le seul point (0, 0). Donc $\mathfrak{D}$ n'est pas pseudo-convexe au sens ordinaire.

7. *Dans les circonstances du théorème* 3, *supposons de plus que* $\pi_1(V)=\pi_3(V)=0$. *Alors l'image* $\mathfrak{D}$ *de* V *coïncide avec l'espace* (y).

En effet, supposons que l'image $\mathfrak{D}$ ne coïncide pas avec l'espace (y). Alors, d'après le théorème 3, le complément E du $\mathfrak{D}$ est la variété affine dans l'eapsce (y) à composantes de dimension $n-1$ ou $n-2$. D'autre part, la suite exacte d'homotopie de l'espace fibré $(V, f, \mathfrak{D})$ montre que $\pi_1(\mathfrak{D})=\pi_3(\mathfrak{D})=0$.

Soit $\mathscr{S}$ une composante de dimension $n-1$ de E. $\mathscr{S}$ est définie par $g(y)=0$, $g(y)$ étant un polynôme des variables $y_1, \cdots, y_n$. Alors, on peut trouver une courbe fermée C dans $\mathfrak{D}$, telle que la variation de l'argument de $g(y)$ soit non nulle, lorsque le point y décrit la courbe C. Or, comme $g(y)$ ne s'annule pas dans le domaine $\mathfrak{D}$ tel que $\pi_1(\mathfrak{D})=0$, la variation de l'argument de $g(y)$ est nécessairement nulle, lorsque le point y décrit une courbe fermée quelconque dans $\mathfrak{D}$; ceci est une contradiction. Donc E n'admet pas de composante de dimension $n-1$.

Soit σ une composante de dimension $n-2$ de E, et soit $a=(a_1, \cdots, a_n)$ un point ordinaire de σ. Supposons, pour fixer les idées, que σ soit définie par

$$y_{n-1}=\eta_1(y_1, \cdots, y_{n-2}), \qquad y_n=\eta_2(y_1, \cdots, y_{n-2})$$

dans un voisinage de a, η_1 et η_2 étant des fonctions holomorphes des variables $y_1, \cdots, y_{n-2}$ en $(a_1, \cdots, a_{n-2})$, telle que $a_{n-1}=\eta_1(a_1, \cdots, a_{n-2})$ et $a_n=\eta_2(a_1, \cdots, a_{n-2})$. Dans $\mathfrak{D}$, considérons une sphère (de dimension réelle 3)

$$\gamma:\quad y_1=a_1, \cdots, y_{n-2}=a_{n-2}, |y_{n-1}-a_{n-1}|^2+|y_n-a_n|^2=r^2 \qquad (r>0),$$

r étant assez petit pour que l'ensemble

$$y_1=a_1, \cdots, y_{n-2}=a_{n-2}, \qquad 0<|y_{n-1}-a_{n-1}|^2+|y_n-a_n|^2\leqq r^2$$

soit contenu dans $\mathfrak{D}$. Comme $\pi_3(\mathfrak{D})=0$, la sphère γ, munie d'un certaine orientation, est un bord d'une chaine singulière c_1 de dimension 4 (à support compact) de $\mathfrak{D}$. Regardons la boule

$$(\gamma):\quad y_1=a_1, \cdots, y_{n-2}=a_{n-2}, |y_{n-1}-a_{n-1}|^2+|y_n-a_n|^2\leqq r^2$$

comme une chaine singulière c_2 de dimension 4 de l'espace (y) telle que $\partial c_2=\partial c_1$ $(=\gamma)$. Alors $c=c_1-c_2$ est un cycle de dimension 4 (à support compact) de l'espace (y) tel que le nombre d'intersection $(c, \sigma)=\pm 1$ $(\neq 0)$, ce qui est contradictoire avec $H_4(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{Z})=0$. Donc, l'ensemble E est vide et le domaine $\mathfrak{D}$ coincide avec l'espace $\boldsymbol{C}^n$.

8. Les premier et deuxième problèmes de Cousin étant resolubles pour $\boldsymbol{C}^n$, *dans les circonstances du n° 7 on peut trouver une fonction $g(x)$ holomorphe sur V, telle que l'application*

(8.1) $$y_1=f_1(x), \cdots, y_n=f_n(x), \qquad w=g(x)$$

soit une application biholomorphe de V sur C^{n+1}. Nous nous proposons de montrer que *l'on peut choisir pour $g(x)$ une fonction rationnelle sur V.*

Regardons l'application inverse de (8.1) comme une application de C^{n+1} dans l'espace (x), et représentons-la par

(8.2) $$x_i=F_i(y, w) \qquad (i=1, 2, \cdots, m),$$

où $F_i(y, w)$ sont des fonctions entières des variables $y_1, \cdots, y_n, w$. D'abord nous allons voir que *toutes les $F_i(y, w)$ sont des polynômes en w.* Soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble analytique dans l'espace $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n, w)$ de $m+n+1$ variables complexes défini par (8.1) (ou (8.2)). Alors la projection de $\mathfrak{S}$ sur l'espace $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n)$ est la variété affine Σ définie par

$$x \in V, y_i=f_i(x) \qquad (i=1, 2, \cdots, n),$$

et l'application canonique de $\mathfrak{D}$ sur Σ est biholomorphe.

Si $\partial F_i/\partial w$ s'annule identiquement, il n'y a rien à faire. Supposons donc que $\partial F_i/\partial w$ ne s'annule pas identiquement. Alors la projection de $\mathfrak{S}$ sur l'espace $(x_i, y_1, \cdots, y_n, w)$ est la surface analytique $\mathfrak{S}_i$ définie par

(8.3) $$x_i=F_i(y, w),$$

et l'application canonique de $\mathfrak{S}$ sur $\mathfrak{S}_i$ est biholomorphe. L'ensemble $\mathfrak{R}_i$ des points $(a_i, b_1, \cdots, b_n, c)$ de $\mathfrak{S}_i$, tels que l'intersection de $\mathfrak{S}_i$ et du plan analytique défini par $x_i=a_i$, $y_j=b_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ soit de dimension 0, peut etre regardé comme un domaine multivalent étalé au-dessus de l'espace $(x_i, y_1, \cdots, y_n)$ et, en général, ramifié intérieurement. Il est le domaine d'holomorphie de la fonction w définie par l'équation (8.3).

Pour chaque j $(1\leqq j\leqq m)$ soit ξ_j la restriction de $F_j(y, w)$ à $\mathfrak{R}_i$ et soit $(\psi_1(q), \cdots, \psi_n(q))$ la projection de $q \in \mathfrak{R}_i$ sur l'espace (y). Alors le point

$$(\xi_1(q), \cdots, \xi_m(q), \psi_1(q), \cdots, \psi_n(q))$$

reste dans la variété affine Σ, quand q parcourt le domaine $\mathfrak{R}_i$. Il en résulte que toutes les fonctions $\xi_j(q)$ sont des fonctions algébriques des variables $x_i, y_1, \cdots, y_n$ et que $\mathfrak{R}_i$ peut etre plongé comme une partie ouverte dans le domaine de Riemann d'une fonction algébrique des variables $x_i, y_1, \cdots, y_n$, ce qui montre que $F_i(y, w)$ est un polynôme en w.

En appliquant une transformation linéaire non singulière convenable de l'espace (x), on peut supposer que toutes les $F_i(y, w)$ $(1\leqq i\leqq m)$ soient de degré ν $(\geqq 1)$ comme polynômes en w. Posons

(8.4) $$F_1(y, w)=a_0(y)+a_1(y)w+\cdots+a_\nu(y)w^\nu,$$

où $a_j(y)$ sont des fonctions entières des variables $y_1, \cdots, y_n$ et $a_\nu(y)$ ne s'annule pas identiquement.

On peut supposer que:

1° *$\partial F_1/\partial w$ n'ait aucun facteur multiple comme fonction entière des variables $y_1, \cdots, y_n, w$.*

2° *Dans le cas où $\nu > 1$, $a_1(y), a_2(y), \cdots, a_\nu(y)$ n'aient aucun facteur commun comme fonctions entières des variables $y_1, \cdots, y_n$*[27].

En effet, le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \cdots & \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdots \dfrac{\partial F_m}{\partial y_n} & \dfrac{\partial F_m}{\partial w} \end{bmatrix}$$

étant toujours $n+1$, $\partial F_i/\partial w$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ n'a aucun facteur commun comme fonctions entières des variables $y_1, \cdots, y_n, w$. Soient $t_1, \cdots, t_m$ m variables complexes indépendantes et posons

$$F(t, y, w) = \sum_{i=1}^{m} t_i F_i(y, w) = a_0(t, y) + a_1(t, y)w + \cdots + a_\nu(t, y)w^\nu.$$

Alors, on voit que:

(1) $\partial F/\partial w$ n'a aucun facteur multiple comme fonction entière des variables $t_1, \cdots, t_m, y_1, \cdots, y_n, w$.

(2) Dans le cas où $\nu > 1$, $a_1(t, y), \cdots, a_\nu(t, y)$ n'ont aucun facteur commun comme fonctions entières des variables $t_1, \cdots, t_m, y_1, \cdots, y_n$.

Donc, on peut choisir les nombres $t_1', \cdots, t_m'$ de façon que $F(t', y, w)$ satisfasse aux conditions 1°, 2°.

Sur l'espace $(x, y_1, \cdots, y_n)$, considérons le domaine d'holomorphie (intérieurement ramifié) $\mathfrak{R}_1$ de la fonction w définie par l'équation

$$x_1 = F_1(y, w). \tag{8.5}$$

Pour chaque j $(1 \leq j \leq m)$ soit $\xi_j(q)$ la fonction holomorphe sur $\mathfrak{R}_1$ correspondant à $F_j(y, w)$. Nous avons déjà vu que toutes les $\xi_j(q)$ sont des fonctions algébriques des variables $x_1, y_1, \cdots, y_n$. Soit $\overline{\mathfrak{R}}_1$ $(\supset \mathfrak{R}_1)$ le domaine d'holomorphe de la fonction $a_\nu(y)w$ sur l'espace (x_1, y). ($\overline{\mathfrak{R}}_1$ est le domaine de Riemann d'une fonction algébrique des variables $x_1, y_1, \cdots, y_n$ sur l'espace fini (x_1, y).) On peut regarder toutes les $\xi_j(q)$ comme fonctions méromorphes sur $\overline{\mathfrak{R}}_1$. Soit S l'ensemble de tous les pôles de ces fonctions sur $\overline{\mathfrak{R}}_1$. Alors on a $\mathfrak{R}_1 = \overline{\mathfrak{R}}_1 - S$.

L'ensemble analytique dans l'easpce (x_1, y) défini par l'équation

27) Plus exactement, 1° signifie que $\partial F_1/\partial w$ n'a aucun facteur de la forme $(f(y,w))^2$, où $f(y,w)$ est une fonction entière des variables $y_1, \cdots, y_n, w$ ayant au moins un zéro. Il en est de même de 2°.

$$a_\nu(y)=0$$

coïncide avec la projection $\underline{S}$ de S sur l'espace (x_1, y). $\underline{S}$ étant une variété affine, on a

$$a_\nu(y)=a_\nu^\circ(y)\Omega(y),$$

où $a_\nu^\circ(y)$ est un polynôme en $y_1, \cdots, y_n$ et $\Omega(y)$ est une fonction entière qui ne s'annule jamais.

En remplaçant $g(x)$ par $g_1(x)=\sqrt[\nu]{\Omega}\,g(x)$, on peut supposer que *le coefficient $a_\nu(y)$ de F_1 soit un polynôme en $y_1, \cdots, y_n$*. De plus, supposons, pour fixer les idées, que $a_\nu(y)$ soit de degré λ $(\geqq 0)$ comme polynôme en $y_1, \cdots, y_n$ et le coefficient de y_1^λ soit 1. D'après *le théorème du reste*[28], on a

$$a_{\nu-1}(y)=a_\nu(y)\varphi(y)+a_{\nu-1}^\circ(y),$$

où $\varphi(y)$ et $a_{\nu-1}^\circ(y)$ sont des fonctions entières et $a_{\nu-1}^\circ(y)$ est un polynôme en y_1 de degrè au plus égal à $\lambda-1$ (identiquement nul si $\lambda=0$). En remplaçant $g_1(x)$ par $g_2(x)=g_1(x)+\varphi(y)/\nu$, on peut supposer que *le coefficient $a_{\nu-1}(y)$ de F_1 soit un polynôme en y_1 de degrè au plus égal à $\lambda-1$*. (La fonction F_1 modifiée satisfait de même aux conditions 1°, 2°.)

Nous allons voir que *$w=g_2(x)$ est rationnelle sur V.*

Cas 1 *où* $\nu=1$. Posons

$$a_1(y_1, \cdots, y_n)=c_0+c_1y_1+\cdots+y_1^\lambda,$$

où $c_j(y_2, \cdots, y_n)$ sont des polynômes en $y_2, \cdots, y_n$. On peut supposer que $\lambda>0$ (si $\lambda=0$, l'équation (8.5) se réduit à $x_1=w$). D'après 1°, $\partial F_1/\partial w=a_1(y)$ n'a aucun facteur multiple. Donc, toutes les racines $\eta_1(y_2, \cdots, y_n), \cdots, \eta_\lambda(y_2, \cdots, y_n)$ de l'équation

$$c_0+c_1y_1+\cdots+y_1^\lambda=0$$

sont distinctes. Prenons un point $y'=(y_2', \cdots, y_n')$ tel que toutes les $\eta_1, \cdots, \eta_\lambda$ soient holomorphes en y' et que toutes les valeurs $\eta_1(y'), \cdots, \eta_\lambda(y')$ soient distinctes. Dans l'espace (x_1, y) l'ensemble analytique σ défini par

$$a_1(y)=0, \qquad x_1=a_0(y)$$

est l'ensemble des points d'indétermination de la fonction w définie par (8.5). Donc, il est contenu dans la réunion des ensembles des points d'indétermination de $\xi_j(q)$ $(1\leqq j\leqq m)$. $\xi_j(q)$ étant des fonctions algébriques des variables $x_1, y_1, \cdots, y_n$, σ est une variété affine dans l'espace (x_1, y). D'où toutes les fonctions

$$a_0(\eta_i, y_2, \cdots, y_n)=\alpha_i(y_2, \cdots, y_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, \lambda)$$

sont des fonctions algébriques des variables $y_2, \cdots, y_n$ holomorphes en y'. Posons

28) Voir Oka [6], p. 109 à 114. La démonstration du théorème dans le cas actuel est tout pareil à celle d'Oka.

$$a_0(y_1, \cdots, y_n)=d_0+d_1y_1+\cdots+d_{\lambda-1}y_1^{\lambda-1},$$

où $d_j(y_2, \cdots, y_n)$ sont des fonctions entières. Au voisinage de y', les fonctions d_j $(0\leqq j\leqq \lambda-1)$ sont déterminées uniquement par les équations linéaires

$$\sum_{j=0}^{\lambda-1} d_j\eta_i^j=\alpha_i \qquad (1\leqq i\leqq \lambda).$$

Donc, toutes les d_j sont des fonctions algébriques des variables $y_2, \cdots, y_n$; d_j étant des fonctions entières, elles sont des polynômes en $y_2, \cdots, y_n$; ce qui montre que $w=(x_1-a_0)/a_1$ est rationnelle sur l'espace (x_1, y). Les fonctions $y_i=f_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ étant rationnelles sur V, il en est de même de $w=g_2(x)$.

Cas 2 *où* $\nu>1$. D'après l'équation (8.5), $v=a_\nu w$ satisfait à l'équation

$$a_\nu^{\nu-1}x_1=a_\nu^{\nu-1}a_0+\cdots+a_{\nu-1}v^{\nu-1}+v^\nu.$$

Donc, $z=v+a_{\nu-1}/\nu$ satisfait à l'équation

$$a_\nu^{\nu-1}x_1=b_0+b_1z+\cdots+b_{\nu-2}z^{\nu-2}+z^\nu, \tag{8.6}$$

où $b_j(y)$ $(0\leqq j\leqq\nu-2)$ sont des fonctions entières des variables $y_1, \cdots, y_n$. En raisonnant pareillement à Nishino[29], nous verrons que *toutes les* $b_j(y)$ *sont des polynômes en* $y_1, \cdots, y_n$.

Posons

$$G(y, z)=b_0+b_1z+\cdots+b_{\nu-2}z^{\nu-2}+z^\nu.$$

D'après 1°, $\partial G/\partial z$ n'a aucun facteur multiple. Donc, toutes les racines $\zeta_1(y), \cdots, \zeta_{\nu-1}(y)$ de l'équation

$$\partial G/\partial z=0$$

sont distinctes. Prenons un point y° de l'espace (y) tel que $a_\nu(y^\circ)\neq 0$, que toutes les $\zeta_i(y)$ $(1\leqq i\leqq\nu-1)$ soient holomorphes en y° et que toutes les valeurs $\zeta_i(y^\circ)$ soient distinctes. Alors, pour un voisinage δ suffisamment petit de y°,

(i) $a_\nu(y)$ ne s'annule pas dans δ,

(ii) $\zeta_i(y)$ $(1\leqq i\leqq\nu-1)$ sont holomorphes dans δ, et pour tout $c\in\delta$ toutes les valeurs $\zeta_i(c)$ $(1\leqq i\leqq\nu-1)$ sont distinctes.

Posons

$$G(y, \zeta_i(y))=\gamma_i(y) \qquad (1\leqq i\leqq\nu-1) \text{ pour } y\in\delta.$$

D'après (i), (ii) et (8.6), $\gamma_i(y)$ sont holomorphes dans δ et les ensembles analytiques définis par

$$(a_\nu(y))^{\nu-1}x_1=\gamma_i(y)$$

sont contenus dans la projection de la surface critique de $\mathfrak{R}_1$ sur l'espace (x_1, y);

29) Voir Nishino [5], p. 228 à 231.

donc toutes les $\gamma_i(y)$ sont des fonctions algébriques des variables $y_1, \cdots, y_n$.

Supposons, pour fixer les idées, que $\gamma_1(y)=\cdots=\gamma_\theta(y)$, $\gamma_{\theta+1}(y)=\cdots=\gamma_{\theta+\kappa}(y)$, $\cdots, \gamma_{\theta+\kappa+\cdots+1}(y)=\gamma_{\theta+\kappa+\cdots+\mu}(y)$ $(\theta+\kappa+\cdots+\mu=\nu-1)$ identiquement pour δ et toutes les $\gamma_\theta(y), \gamma_{\theta+\kappa}(y), \cdots, \gamma_{\nu-1}(y)$ soient distinctes. Posons

$$\Phi(X, z)=X_0+X_1z+\cdots+X_{\nu-2}z^{\nu-2}+z^\nu,$$

où $X_0, X_1, \cdots, X_{\nu-2}$ sont des variables complexes indépendantes. La condition (nécessaire et suffisante) pour que les équations algébriques simultanées en z

$$\begin{pmatrix}\gamma_\theta(y)=\Phi(X,z)\\ \partial\Phi/\partial z=0,\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\gamma_{\theta+\kappa}(y)=\Phi(X,z)\\ \partial\Phi/\partial z=0,\end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix}\gamma_{\nu-1}(y)=\Phi(X,z)\\ \partial\Phi/\partial z=0\end{pmatrix}$$

aient respectivement au moins θ, au moins κ, $\cdots$, au moins μ racines est donnée par l'équation

$$(8.7) \qquad \mathfrak{P}_i(y, X)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, k),$$

où $\mathfrak{P}_i(y, X)$ sont des polynômes par rapport aux $X_0, X_1, \cdots, X_{\nu-2}$ dont les coefficients sont des fonctions algébriques des variables $y_1, \cdots, y_n$ holomorphes dans δ, k $(\geqq\nu-1)$ étant un nombre entier[30].

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble analytique défini par (8.7) dans $(\delta, (X))$, (X) étant l'espace des variables $X_0, X_1, \cdots, X_{\nu-2}$. Allors, l'ensemble analytique $\mathfrak{B}$ défini par

$$X_j=b_j(y) \qquad (0\leqq j\leqq\nu-2)$$

est évidemment contenu dans $\mathfrak{A}$. De plus, on voit que:

$\mathfrak{B}$ *est une composante de* $\mathfrak{A}$.

En effet, soit $\mathfrak{A}_c$ l'intersection de $\mathfrak{A}$ et de l'ensemble anlytique $y_1=c_1, \cdots, y_n=c_n$, $c=(c_1, \cdots, c_n)$ étant un point de δ. Il suffit de voir que le point $(c, b_0(c), \cdots, b_{\nu-2}(c))$ est isolé dans $\mathfrak{A}_c$ pour tout $c\in\delta$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors on

---

30) Soient

$$f(z)=\alpha_0z^n+\alpha_1z^{n-1}+\cdots+\alpha_n, \qquad g(z)=\beta_0z^m+\beta_1z^{m-1}+\cdots+\beta_m$$

deux polynômes en z respectivement de degrè n et m. Alors, la condition (nécessaire et suffisante) pour que les équations

$$f(z)=0, \qquad g(z)=0$$

aient au moins e $(\leqq\min(n, m))$ racines communes est donnée par

$$\text{rang}(A)<n+m-2e+2,$$

où A est la matrice $(n+m-e+1$ lignes et $n+m-2e+2$ colonnes)

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & 0 & \beta_0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \quad \beta_0\\ \alpha_n & \alpha_0 & \beta_m & \vdots\\ & \ddots \vdots & & \ddots \vdots\\ 0 & \alpha_n & 0 & \beta_m\end{pmatrix}$$

Donc, la condition est donnée par $\binom{n+m-e+1}{n+m-2e+2}$ $(\geqq e)$ équations algébriques des $\alpha_0, \cdots, \alpha_n, \beta_0, \cdots, \beta_m$.

peut trouver des fonctions $B_i(t)(0 \leqq i \leqq \nu-2)$ d'une variable complexe t satisfaisant aux conditions suivantes:

(iii) $B_i(t)$ sont des fonctions holomorphes dans $|t|<1$ telles que $B_i(0)=b_i(c)$ $(0 \leqq i \leqq \nu-2)$.

(iv) $(c, B_0(t), \cdots, B_{\nu-2}(t)) \in \mathfrak{A}_c$ pour $|t|<1$.

(v) Au moins une $B(t)$ n'est pas constante.

Soit z_t la fonction algébrique de x_1 définie par

$$(a_\nu(c))^{\nu-1}x_1 = B_0(t) + B_1(t)z_t + \cdots + B_{\nu-2}(t)z_t^{\nu-2} + z_t^\nu, \tag{8.8}$$

t $(|t|<1)$ étant un paramètre; soit R_t le domaine d'holomorphie (intérieurement ramifié) de z_t sur le plan x_1. D'après (i) et (iii), R_0 coïncide avec la section de $\mathfrak{R}_1$ par $y=c$; d'après (ii), (iii), (iv) et (8.7) les nombres de points critiques de R_t sur

$$\gamma_\theta(c)/(a_\nu(c))^{\nu-1},\ \gamma_{\theta+\kappa}(c)/(a_\nu(c))^{\nu-1},\ \cdots, \gamma_{\nu-1}(c)/(a_\nu(c))^{\nu-1}$$

sont respectivement $\theta, \kappa, \cdots, \mu$ pour $|t|<\varepsilon$, ε étant un nombre positif suffisamment petit. Or, tous les points critiques ci-dessus de R_t sont d'ordre un, et R_t n'a aucun autre point critique pour $|t|<\varepsilon$; donc, toute R_t $(|t|<\varepsilon)$ est identique à R_0 comme surface de Riemann sur le plan x_1. R_0 étant analytiquement homéomorphe au plan de la variable complexe z_0, on a

$$z_t = \alpha_t z_0 + \beta_t \qquad (|t|<\varepsilon),$$

où α_t et β_t ne dépendent que de t et α_t ne s'annule jamais[31]. D'après (8.8) on a identiquement

$$\alpha_t^\nu = 1 \quad \text{et} \quad \beta_t = 0;$$

α_t étant une fonction continue de t telle que $\alpha_0 = 1$, on a identiquement

$$\alpha_t = 1 \quad \text{et} \quad \beta_t = 0 \qquad \text{pour } |t|<\varepsilon,$$

ce qui contredit (v) et démontre la proposition.

Or, $\mathfrak{B}$ étant une composante de $\mathfrak{A}$ défini par l'équation (8.7), toutes les $b_j(y)$ $(1 \leqq j \leqq \nu-2)$ sont des fonctions algébriques des $y_1, \cdots, y_n$. $b_j(y)$ étant des fonctions entières, elles sont des polynômes en $y_1, \cdots, y_n$. Donc, d'après (8.6),

$$z = a_\nu w + a_{\nu-1}/\nu$$

est une fonction algébrique des variables $x_1, y_1, \cdots, y_n$.

Soient $\eta_i(y_2, \cdots, y_n)$ $(i=1, 2, \cdots, \rho)$ les racines distinctes de l'équation

$$a_\nu(y_1, \cdots, y_n) \equiv c_0 + c_1 y_1 + \cdots + y_1^\lambda = 0,$$

et soient e_i les multiplicités de η_i $(e_1 + \cdots + e_\rho = \lambda)$. D'après 2°, on peut choisir un point $y' = (y_2', \cdots, y_n')$ satisfaisant aux conditions suivantes:

31) Il est facile de voir que z_t est un polynôme en z_0. D'autre part, d'apres (8.8), on voit que dz_t/dz_0 ne s'annule jamais pour $|t|<\varepsilon$.

(1′) Toutes les η_i sont holomorphes en y' et toutes les valeurs $\eta_i(y')$ $(1 \leqq i \leqq \rho)$ sont distinctes.

(2′) Pour tout i $(1 \leqq i \leqq \rho)$, au moins une $a_j(\eta_i(y'), y')$ $(1 \leqq j \leqq \nu - 1)$ ne s'annule pas.

D'après (2′), l'équation

$$x_1 = a_0(y^{(i)}) + a_1(y^{(i)})w + \cdots + a_{\nu-1}(y^{(i)})w^{\nu-1}$$

est de degrè positif en w, où $y^{(i)} = (\eta_i(y'), y')$ $(1 \leqq i \leqq \rho)$. Donc, pour chaque i on peut trouver au moins une racines $w = \omega_i(x_1, y)$ de l'équation (8.5) qui est holomorphe dans un voisinage de $(x_1^{(i)}, y^{(i)})$, $x_1^{(i)}$ étant un point convenable du plan x_1. La racine

$$z = a_\nu \omega_i + a_{\nu-1}/\nu \tag{8.9}$$

de (8.6) correspondant à ω_i est une fonction algébrique des $x_1, y_1, \cdots, y_n$ holomorphe en $(x_1^{(i)}, y^{(i)})$. Posons

$$a_{\nu-1}(y_1, \cdots, y_n) = d_0 + d_1 y_1 + \cdots + d_{\lambda-1} y_1^{\lambda-1},$$

$d_j(y_2, \cdots, y_n)$ étant des fonctions entières. En substituant $\eta_i(y_2, \cdots, y_n)$ à y_1 de (8.9), on a

$$a_{\nu-1}(\eta_i, y_2, \cdots, y_n) = d_0 + d_1\eta_i + \cdots + d_{\lambda-1}\eta_i^{\lambda-1} = \alpha_i,$$

où $\alpha_i(y_2, \cdots, y_n)$ est une fonction algébrique des variables $y_2, \cdots, y_n$ holomorphe en y'. En général, d'après (8.9), on a

$$\partial^k z/\partial y_1^k = \partial^k(a_\nu \omega_i)/\partial y_1^k + (1/\nu)(\partial^k a_{\nu-1}/\partial y_1^k) \qquad (0 \leqq k < e_i),$$

où tous les termes sont holomorphes en $(x_1^{(i)}, y^{(i)})$. En substituant $\eta_i(y_2, \cdots, y_n)$ à y_1, on a

$$\partial^k(a_{\nu-1}(\eta_i, y_2, \cdots, y_n))/\partial y_1^k = \alpha_{ik} \qquad (0 \leqq k < e_i,\ 1 \leqq i \leqq \rho), \tag{8.10}$$

$\alpha_{ik}(y_2, \cdots, y_n)$ étant des fonctions algébriques des variables $y_2, \cdots, y_n$ holomorphes en y'. D'après (1′), dans un voisinage de y' les fonctions $d_0, d_1, \cdots, d_{\lambda-1}$ sont déterminées uniquement par λ $(= e_1 + \cdots + e_\rho)$ équations linéaires (8.10). Il suit de là que toutes les d_j sont des fonctions algébriques de $y_2, \cdots, y_n$; d_j étant des fonctions entières, elles sont des polynômes en $y_2, \cdots, y_n$, c'est à dire que $a_{\nu-1}$ est aussi un polynôme en $y_1, \cdots, y_n$. Nous avons déjà vu que $z = a_\nu w + a_{\nu-1}/\nu$ est une fonction algébrique des variables $x_1, y_1, \cdots, y_n$, donc il en est de même de w. $y_i = f_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ étant rationnelles sur V, $w = g_2(x)$ est aussi rationnelle sur V. On a donc le théorème suivant:

Théorème 4. *Soit V une variété affine non singulière (connexe) de dimension $n+1$ telle que $\pi_1(V) = \pi_3(V) = 0$, $\pi_i(V)$ étant le $i^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de V. Etant donné un système*

$$f_1(p), \cdots, f_n(p)$$

de fonctions holomorphes et rationnelles sur V satisfaisant aux conditions (A_0) du n° 5, on peut toujours trouver une fonction $f_{n+1}(p)$ holomorphe et rationnelle sur V telle que l'application

$$y_i = f_i(p) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n+1)$$

soit une application birationnelle et biholomorphe de V sur C^{n+1}.

En particulier, dans le cas où $V = C^{n+1}$ on a le

Corollaire. *Soit $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ un système de polynômes par rapport aux $x_1, \cdots, x_{n+1}$, satisfaisant aux conditions (A_0) du n° 3. Alors, on peut toujours trouver un autre polynôme $f_{n+1}(x)$ en $x_1, \cdots, x_{n+1}$ tel que l'application*

$$y_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n+1)$$

soit un automorphisme analytique de l'espace $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$.

UNIVERSITÉ FÉMININE DE NARA

Bibliographie

[1] L. Bieberbach, Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, S.-B. preuß Akad. Wis.. (1933), 476–479.

[2] O. Fujita, Sur les familles d'ensembles analytiques, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 379–405.

[3] H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Ann., **129** (1955), 233–259.

[4] T. Nishino, Les ensembles analytiques et les domaines, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 379–384.

[5] T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (II). Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable, J. Math. Kyoto Univ., **9** (1969), 221–274.

[6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo, Japan 1961.

[7] R. Remmert, Habilitationsschrift, Münster 1958.

[8] J.-P. Serre, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Coll. sur les fonct. de plus. var., Bruxelles 1953, 57–68.

[9] M. Tadokoro, Sur les ensembles pseudoconcaves généraux, J. Math. Soc. Japan, **17** (1965), 281–290.