J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
22-4 (1983) 643-664

Sur la formulation du problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ordinaires linéaires

Par

Keiichiro KITAGAWA

(Communiqué par Prof. S. Mizohata, le 27 juillet 1981)

1. Introduction.

Il s'agit du problème de Cauchy analytique: Étant donné un système général d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients analytiques, on se propose de demander quelle formulation du problème de Cauchy à données analytiques soit possible. Soit $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ une NxN-matrice d'opérateurs différentiels ordinaires linéaires à coefficients analytiques au voisinage d'un point, soit l'origine. Soit $\mathfrak{M}=(m_1,\dots, m_N)$ une multi-indice d'éléments entiers non négatifs. Nous entendons par le problème de Cauchy analytique le probléme $(C)_{\mathfrak{M}}$ suivant:

$(C)_{\mathfrak{M}}$ *Étant donnés un vecteur* $\vec{f}(t)={}^t(f_1(t),\dots,f_N(t))$ *d'éléments analytiques au voisinage de l'origine et un système de nombres complexes* $\Phi=\{\phi_{jk};\ k=0, 1,\dots, m_j-1, j=1,\dots, N\}$, *trouver un vecteur* $\vec{u}(t)={}^t(u_1(t),\dots, u_N(t))$ *d'éléments analytiques au voisinage de l'origine tel que l'on ait* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ *au voisinage de l'origine et que l'on ait* $\left(\frac{d}{dt}\right)^k u_j(0)=\phi_{jk};\ k=0, 1,\dots, m_j-1, j=1,\dots, N$.

Nous disons que *ce problème de Cauchy*$(C)_{\mathfrak{M}}$ *est bien posé* si, pour toutes les données $\vec{f}(t)$ et Φ, il existe une et une seule solution $\vec{u}(t)$ du problème $(C)_{\mathfrak{M}}$.

Notre but est alors de chercher la condition nécessaire ou suffisante pour que le problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ soit bien posé. A cette étude, les travaux de L. R. Volevič [4] sont fondamentaux et il nous est utile d'en esquisser ici brièvement.

L'ordre formel R_f de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)=\left(a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right)\right)_{i,j\in I}$, où $I=\{1,\dots, N\}$, est défini par:

$$R_f= \operatorname{Sup}\left\{\sum_{i=1}^{N} \text{ordre } a_{i\pi(i)}\left(t, \frac{d}{dt}\right);\ \pi\in\Pi\right\}$$

où Π est l'ensemble de toutes les permutations π de $I=\{1,\dots, N\}$, et qu'il est convenu que ordre $a\left(t, \frac{d}{dt}\right)$, ordre de dérivation de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$, est $-\infty$ pour $a\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ identiquement nul et que $-\infty+\alpha=-\infty$ pour α nombre fini ou $-\infty$. R_f est alors non négatif sinon $-\infty$. Au cas où $R_f=-\infty$, cas envisagé par G. Hufford [1], on peut trouver un $\vec{f}(t)$ tel qu'il n'existe pas de $\vec{u}(t)$ satisfaisant $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ au voisinage de l'origine. Il est donc naturel d'envisager le cas où R_f est non négatif. Grâce à un lemme, dit le lemme de Volevič que nous citons à l'appendice, il existe alors un système $\sigma=\{s_i, t_j\}_{i,j\in I}$ d'entiers tel que l'on ait:

$$\text{ordre } a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right) \leqq t_j-s_i;\ i, j\in I$$

et

$$\sum_{j=1}^{N} t_j-\sum_{i=1}^{N} s_i=R_f.$$

Nous l'appelons *un système admissible pour l'ordre formel* R_f ou *un système admissible* tout court. A l'aide de ce système admissible σ on peut définir *la partie principale* $A^\sigma\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ et *sa matrice-coefficient* $\mathring{A}^\sigma(t)$ par:

$$A^\sigma\left(t, \frac{d}{dt}\right)=\left(a_{ij}^{t_j-s_i}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{t_j-s_i}\right)_{i,j\in I}$$

et

$$\mathring{A}^\sigma(t)=(a_{ij}^{t_j-s_i}(t))_{i,j\in I} \quad \text{respectivement,}$$

où l'on a représenté:

$$a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right)=\sum_{k\geqq 0} a_{ij}^k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k;\ i, j\in I.$$

L. R. Volevič [4] a montré premièrement que, *si le* dét $\mathring{A}^\sigma(t)$ *s'annule identiquement au voisinage de l'origine, alors le système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ *y est équivalent, soit à un systéme d'équations* $B\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{g}(t)$ *tel que la matrice coefficient de sa partie principale ait son déterminant non identiquement nul, soit à un système d'équations* $C\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{h}(t)$ *tel que son ordre formel soit* $-\infty$. Le problème étant ainsi réduit au cas où le dét $\mathring{A}^\sigma(t)$ ne s'annule pas identiquement au voisinage de l'origine, il a montré deuxièmement que, *si le* dét $\mathring{A}^\sigma(t)$ *ne s'annule pas à l'origine, il existe alors un systéme* $\mathfrak{M}=(m_1,\dots, m_N)$ *d'éléments entiers non négatifs tel que l'on ait* $\sum_{i=1}^{N} m_i=R_f$ *et que le système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ *soit équivalent au voisinage de l'origine à un système* $\mathfrak{M}$-*normal* [3] *d'équations* $B\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{g}(t)$. Le problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ étant alors bien posé, il en conclut finalement qu'*il existe* R_f *solutions indépendantes du* *système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ *formant un système fondamental de solutions au voisinage de l'origine.*

Sur ce deuxième résultat de L. R. Volevič, M. Miyaké [3] a montré un résultat *local*: *Pour que le problème de Cauchy* $(C)_{\mathfrak{M}}$ *pour* $\mathfrak{M}$ *donné soit bien posé à tout point d'un domaine, il faut et il suffit qu'il existe une matrice inversible* $P\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ *á coefficients analytiques telle que le système équivalent d'équations* $P\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ *soit* $\mathfrak{M}$*-normal.*

Ce rséultat de M. Miyaké perd sa validité si on ne considère qu'un problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ à l'origine comme on le voit bien à l'exemple ci-après; Pourtant il reste valide si le dét $\mathring{A}^{\sigma}(t)$ ne s'annule pas à l'origine et que $\mathfrak{M}$ est tel que l'on ait $\sum_{i=1}^{N} m_i=R_f$.

Exemple

$A\left(t, \frac{d}{dt}\right)=\begin{pmatrix} t\frac{d}{dt} & 1 \\ 1 & at\frac{d}{dt}\end{pmatrix}$ avec une constante $a \neq 0$. Ici on a evidemment:

$$R_f=2 \qquad \text{et} \quad \text{dét}\, \mathring{A}^{\sigma}(t)=\text{a}t^2.$$

Et à tout point sauf l'origine, le problème de Cauchy $(C)_{(1,1)}$ est clairement bien posé. A l'origine, si l'on considère la solution formelle, on voit aisément que, pour que le probléme de Cauchy $(C)_{(0,0)}$ soit bien posé, il faut et il suffit que l'on ait $a \neq n^{-2}$; $n=1, 2,\dots$: A ces valeurs exceptionnelles de a, il existe un $\vec{f}(t)$ tel qu'il n'existe pas de solution à $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$.

Cet exemple nous invite alors à investir le problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ à l'origine au cas où le dét $\mathring{A}^{\sigma}(t)$ s'annule à l'origine sans le faire identiquement. Et c'est le but de cette note, mais pour avoir des généralités nous supposerons seulement que l'ordre formel R_f est non négatif.

Quant au problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$, il nous semble naturel de le gèneraliser: Envisageons par exemple le probléme de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ pour l'équation de type Fuchs suivant

$$t\left(\frac{d}{dt}\right)^2 u(t)+u(t)=f(t).$$

Or à cette équation on ne peut pas donner la valeur $u(0)$ qui est uniquement déterminée par l'équation elle même. Mais si l'on donne la valeur de $\frac{d}{dt}u(0)$, alors la solution existe uniquement. Nous considérons donc le problème $(C)_{\Lambda}$, une généralisation du problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$ (voir la Définition 2).

Nous commençons notre analyse par celle de l'algorithme par lequel on obtient la solution formelle du système d'équations $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$. Après une investigation sur les polynômes caractéristiques, nous énonçons à la proposition 4 *les conditions nécessaires et suffisantes pour que la solution formelle du problème* $(C)_A$ *existe uniquement.* Au théorème 1, nous donnons *une condition suffisante pour que la solution formelle soit convergente.* Au cas où cette dernière condition soit réalisée, nous énonçons, au théorème 2, *les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème* $(C)_A$ *soit bien posé.* Nous envisageons aussi le problème de Cauchy à données assujetties à la condition de compatibilité au sens de C. Wagschal [5].

2. Notations et définitions.

Reprenons $A\left(t, \frac{d}{dt}\right) = \left(a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right)\right)_{i,j \in I}$ que nous représentons:

$$a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{k(ij)} a_{ij}^k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k \qquad \text{où } a_{ij}^{k(ij)} \not\equiv 0$$

$$= \sum_{k=0}^{k(ij)} \sum_{n=n(ijk)}^{\infty} a_{ij}^{kn} \frac{t^n}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^k \qquad \text{où } a_{ij}^{kn(ijk)} \neq 0$$

où nous convenons que $k(ij) = -\infty$ pour $a_{ij}\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ identiquement nul et que $n(ijk) = +\infty$ *si* $a_{ij}^k(t)$ est identiquement nulle.

Nous précisons sous l'hypothèse la situation où nous nous plaçons.

Hypothèse.

L'ordre formel R_f *de* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ *est non négatif.*

Pareillement à l'ordre formel R_f, nous définissons *l'ordre modifié* R_m de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$.

Soit

$$n(ij) = \operatorname{Sup}\{k - n(ijk);\ 0 \leqq k \leqq k(ij)\};\ i, j \in I.$$

Définition 1. *L'ordre modifié* R_m *de* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ *est défini par:*

$$R_m = \operatorname{Sup}\{\sum_{i=1}^{N} n(i\pi(i));\ \pi \in \Pi\}$$

Lemme 1. *Nous avons* $-\infty < R_m \leqq R_f$.

Preuve. L'inégalité $R_m \leqq R_f$ étant triviale, il suffit de montrer l'inégalité $-\infty < R_m$. Or sil l'on avait $R_m = -\infty$, alors, pour chaque $\pi \in \Pi$, il existerait un nombre $i \in I$ tel que l'on ait $n(i\pi(i)) = -\infty$. Ceci montre que, pour chaque $\pi \in \Pi$, il existe un $i \in I$ tel que l'on ait $a_{i\pi(i)}\left(t, \frac{d}{dt}\right) \equiv 0$. On en conclut $R_f = -\infty$. Il est contradictoire à l'hypothèse. ■

Grâce au lemme de Volevič, il existe alors un système $\tau = \{\mu_i, \nu_j\}_{i,j \in I}$ d'entiers tel que l'on ait:

$$n(ij) \leqq \nu_j - \mu_i;\ i, j \in I$$

et

$$\sum_{j=1}^{N} \nu_j - \sum_{i=1}^{N} \mu_i = R_m.$$

Nous l'appelons *un système admissible pour l'ordre modifié R_m ou un système admissible* tout court s'il n'y a pas de confusion avec le système admissible pour l'ordre formel R_f.

Nous généralisons le concept du problème de Cauchy $(C)_{\mathfrak{M}}$.

Soit Λ un sous-ensemble fini de $I \times Z$ ou Z est l'ensemble de tous les entiers non négatifs.

Puisque nous nous occupons toujours de fonctions analytiques au voisinage de l'origine, nous omettons, pour la simplicité de l'énoncé, ces qualificatifs assez longs et nous disons, par exemple, un vecteur $\vec{f}(t)$ au lieu de dire un vecteur $\vec{f}(t)$ aux éléments fonctions analytiques au voisinage de l'origine.

Définition 2. *Le problème $(C)_\Lambda$ est le problème suivant.*

$(C)_\Lambda$ *Étant donnés un vecteur $\vec{f}(t) = {}^t(f_1(t), \ldots, f_N(t))$ et un système de nombres complexes $\Phi = \{\phi_{jk}; (jk) \in \Lambda\}$, trouver un vecteur $\vec{u}(t) = {}^t(u_1(t), \ldots, u_N(t))$ tel que l'on ait $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ et que l'on ait $\left(\frac{d}{dt}\right)^k u_j(0) = \phi_{jk}$; $(jk) \in \Lambda$.*

Nous disons que *ce problème $(C)_\Lambda$ est bien posé*, si, pour toutes les données $\vec{f}(t)$ et Φ, il existe une et une seule solution $\vec{u}(t)$ du problème $(C)_\Lambda$.

3. Solution formelle et algorithme.

Soient $\vec{f}(t) = {}^t(f_1(t), \ldots, f_N(t))$ avec $f_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f_{in}$; $i \in I$, et $\vec{u}(t) = {}^t(u_1(t), \ldots, u_N(t))$ la solution formelle de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ avec $u_i(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u_{in}$; $i \in I$. Alors nous avons une infinité d'équations simultanées:

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 0 \leq k \leq k(ij) \\ n(ijk) \leq n}} C_n^l\, a_{ij}^{kn}\, u_{j\,l+k-n} = f_{il};\quad i \in I,\ l = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

où le coefficient binomial C_n^l est convenu d'être nul pour $l < n$.

Soient Λ un sous-ensemble de $I \times Z$ et $\tau = \{\mu_i, \nu_j\}_{i,j \in I}$ un système admissible pour l'ordre modifié R_m tel que l'on ait:

$$\begin{cases} \mu_i \geq 1;\ i \in I \quad \text{et} \\ \Lambda \subset \{(jk);\ 0 \leq k \leq \nu_j - 1,\ j \in I\}. \end{cases} \tag{2}$$

Nous considérons alors (1) comme une infinité de systèmes d'équations simultanées suivants:

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 0 \leq k \leq k(ij) \\ n(ijk) \leq n}} C_n^l\, a_{ij}^{kn} u_{j\,l+k-n} = f_{il};\quad 0 \leq l \leq \mu_i - 1,\ i \in I \tag*{$(3)_B$}$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 0 \leq k \leq k(ij) \\ n(ijk) \leq n}} C_n^{\mu_i+\lambda}\, a_{ij}^{kn} u_{j\,\mu_i+k-n+\lambda} = f_{i\,\mu_i+\lambda};\quad i \in I\ \ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \tag*{$(3)_\lambda$}$$

Considérons $(3)_B$. A ce système, le nombre d'équations est $\sum_{i=1}^{N} \mu_i$ et le nombre d'inconnues $u_{j\nu}$ est $\sum_{j=1}^{N} \nu_j$. En effet, pour chaque $j \in I$, les $u_{j\nu}$ qui peuvent se présenter au premier membre de $(3)_B$ sont ceux dont l'indice ν est telle que l'on ait:

$$0 \leqq \nu \leqq \sup_{\substack{0 \leqq l \leqq \mu_i - 1 \\ 0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n}} (l+k-n) \equiv \nu_j - 1.$$

En ordonnant convenablement les $u_{j\nu}$ et $f_{i\mu}$ qui figurent à $(3)_B$ nous les considérons comme les vecteurs U_B et F_B respectivement. Alors $(3)_B$ s'écrit avec une $\sum_{i=1}^{N} \mu_i \times \sum_{j=1}^{N} \nu_j$ -matrice Q_B;

$$Q_B = \Big(\sum_{\substack{l+k=h+n \\ 0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n}} C_n^l a_{ij}^{kn} \Big)_{\substack{0 \leqq l \leqq \mu_i - 1,\, i \in I \\ 0 \leqq h \leqq \nu_j - 1,\, j \in I}}$$

$$(4) \qquad Q_B U_B = F_B.$$

Les termes contenant $u_{j\nu}$; $(j\nu) \in \Lambda$ pouvant être considérés comme connus au problème $(C)_\Lambda$, nous les faisons passer au deuxième membre à $(3)_B$. Nous avons alors:

$$(3)_B - bis \qquad \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq N \\ 0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n \\ (j\,l+k-n) \notin \Lambda}} C_n^l a_{ij}^{kn} u_{j\,l+k-n} = f_{il} - \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq N \\ 0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n \\ (j\,l+k-n) \in \Lambda}} C_l^n a_{ij}^{kn} u_{j\,l+k-n};\ 0 \leqq l \leqq \mu_i - 1 \ \ i \in I$$

Par ordonner aussi convenablement les $u_{j\nu}$; $(j\nu) \in \Lambda$, et $u_{j\nu}$; $(j\nu) \notin \Lambda$ qui figurent à $(3)_B$-bis, nous les considérons comme les vecteurs V_d et V_0 respectivement. Alors $(3)_B$-bis s'écrit avec une certaine $\sum_{i=1}^{N} \mu_i \times |\Lambda|$ -matrice Q_d et une $\sum_{i=1}^{N} \mu_i \times (\sum_{j=1}^{N} \nu_j - |\Lambda|)$-matrice Q_Λ;

$$Q_\Lambda = \Big(\sum_{\substack{l+k=h+n \\ 0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n}} C_n^l a_{ij}^{kn} \Big)_{\substack{0 \leqq l \leqq \mu_i - 1,\, i \in I \\ 0 \leqq h \leqq \nu_j - 1,\, j \in I,\, (jh) \notin \Lambda}}$$

$$(5) \qquad Q_\Lambda V_0 = F_B - Q_d V_d.$$

Considérons maintenant $(3)_\lambda$; $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. Nous les écrivons:

$$(3)_\lambda - bis \qquad \sum_{\xi=0}^{\lambda} \sum_{\substack{j=1 \\ \mu_i+\lambda+k=\nu_j+n+\xi}}^{N} \Big(\sum_k C_n^{\mu_i+\lambda} a_{ij}^{kn}\Big) u_{j\nu_j+\xi} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=0 \\ \mu_i+\lambda+k=h+n}}^{\nu_j-1} \Big(\sum_k C_n^{\mu_i+\lambda} a_{ij}^{kn}\Big) u_{jh}$$

$$= f_{i\mu_i+\lambda};\ i \in I, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots.$$

Soient

$$F_\xi = {}^t(f_{1\mu_1+\xi}, \ldots, f_{N\mu_N+\xi}),\ U_\xi = {}^t(u_{1\nu_1+\xi}, \ldots,\ u_{N\nu_N+\xi})$$

$$P_\xi^\lambda = \Big(\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n \\ \mu_i+k+\lambda=\nu_j+n+\xi}} C_n^{\mu_i+\lambda} a_{ij}^{kn} \Big)_{i,j \in I};\ 0 \leqq \xi \leqq \lambda$$

et $$P_B^\lambda = \Big(\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq k(ij) \\ n(ijk) \leqq n \\ \mu_i + k + \lambda = n + \gamma}} C_n^{\mu_i+\lambda} a_{ij}^{kn}\Big)_{\substack{i \in I \\ 0 \leqq \gamma \leqq \nu_j - 1,\, j \in I}} ; \lambda = 0, 1, 2, \dots .$$

Posons: $$P_\lambda \equiv P_\lambda^\lambda = \Big(\sum_{\substack{k \\ k - n(ijk) = \nu_j - \mu_i}} C_{n(ijk)}^{\mu_i+\lambda} a_{ij}^{kn(ijk)}\Big)_{i,j \in I} ; \lambda = 0, 1, 2, \dots .$$

Alors $(3)_\lambda$-bis s'écrit:

$$P_\lambda U_\lambda = F_\lambda - \sum_{\xi=0}^{\lambda-1} P_\xi^\lambda U_\xi - P_B^\lambda U_B ; \lambda = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Ces systèmes d'équations (4) (ou (5)) et (6) réunis représentent (2).

4. Polynômes caractéristiques et conditions nécessaires.

Les conditions nécessaires pour que le problème $(C)_A$ soit bien posé découlent immédiatement de ces trois systèmes d'équations (4), (5) et (6). En effet, si l'on fait varier $\vec{f}(t) = {}^t(f_1(t), \dots, f_N(t))$, les deuxièmes membres de (4), et (5) peuvent prendre toutes les valeurs de $\boldsymbol{C}^{\sum_{i=1}^N \mu_i}$. Donc l'existence de solution formelle du système d'équations $A\left(t, \frac{d}{dt}\right) \vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ pour tout $\vec{f}(t)$ réclame que l'application représentée par Q_B est surjective. De même, si l'on a dét$P_\lambda \neq 0$ pour λ suffisamment grands, l'existence unique de solution formelle du problème $(C)_A$ pour tout $\vec{f}(t)$ réclame que l'application représentée par Q_A est bijective. Ainsi nous avons la proposition suivante.

Prorosition 1. 1) *Pour que le système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right) \vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ *ait une solution formelle pour tout* $\vec{f}(t)$, *il faut que l'on ait*:

$$R_m \geqq 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{rang} Q_B = \sum_{i=1}^N \mu_i.$$

2) *Si l'on a dét* $P_\lambda \neq 0$ *pour* λ *suffisamment grands, pour que le problème* $(C)_A$ *ait l'unique solution formelle pour toutes les données* $\vec{f}(t)$ *et* Φ, *il faut et il suffit que l'on ait*:

$$|A| = R_m, \ \textit{dét}\ Q_A \neq 0 \quad \textit{et}$$

$$\text{dét}\, P_\lambda \neq 0 \quad \textit{pour} \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

Comme on voit à la proposition 1, le déterminant des matrices Q_A et P_λ jouent un rôle important. Et, avant de revenir à ces équations (4), (5) et (6), nous allons envisager leur déterminant de plus près.

Nous avons au premier abord la proposition suivante.

Proposition 2. 1) *Le* dét $\mathring{A}^\sigma(t)$ *a le zéro d'ordre au moins* $R_f - R_m$ *à l'origine.*

2) *Le* dét P_λ *est un polynôme en* λ *de degré au plus* $R_f - R_m$ *et le coefficient de son terme de puissance* $R_f - R_m$ *est*

$$\left[\frac{1}{(R_f - R_m)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f - R_m} \text{dét}\, \mathring{A}^\sigma(t)\right]_{t=0}$$

Preuve. Soient Π^f et Π^m l'ensemble de toutes les permutations π de I réalisant R_f et R_m respectivement, c'est-à-dire que l'on ait: $\sum_{i=1}^{N} k(i\pi(i))=R_f$ et $\sum_{i=1}^{N} n(i\pi(i))=R_m$ respectivement.

Calculons le déterminant de $\mathring{A}^\sigma(t)$:

$$\text{dét } \mathring{A}^\sigma(t) = \sum_{\pi\in\Pi} \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^{N} a_{i\pi(i)}^{t_{\pi(i)}-s_i}(t)$$

Il est clair que la sommation $\sum_{\pi\in\Pi}$ n'est en effet prise que sur $\pi\in\Pi^f$ et nous avons:

$$\text{dét } \mathring{A}^\sigma(t) = \sum_{\pi\in\Pi^f} \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{t^{n(i\pi(i)k_i)}}{n(i\pi(i)k_i)!} a_{i\pi(i)}^{k_i n(i\pi(i)k_i)} + \cdots \right]$$

où $k_i=k(i\pi(i))=t_{\pi(i)}-s_i$; $i\in I$.
Or nous avons:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Inf}_{\pi\in\Pi^f} \sum_{i=1}^{N} n(i\pi(i)k_i) &\geqq \operatorname*{Inf}_{\pi\in\Pi^f} \sum_{i=1}^{N} [t_{\pi(i)}-s_i-n(i\pi(i))] \\ &= R_f - \operatorname*{Sup}_{\pi\in\Pi^f} \sum_{i=1}^{N} n(i\pi(i)) \geqq R_f - R_m.\end{aligned}$$

Où l'égalité a lieu pour des permutations π telles que l'on ait $\pi\in\Pi^f\cap\Pi^m$ et que l'on ait $k(i\pi(i))-n(i\pi(i)k(i\pi(i)))=n(i\pi(i))$ pour tout $i\in I$. Nous avons donc:

$$(7)\quad \begin{cases} \text{dét } \mathring{A}^\sigma(t) = \displaystyle\sum_{\substack{\pi\in\Pi^f\cap\Pi^m \\ k(i\pi(i))-n(i\pi(i)k(i\pi(i)))=n(i\pi(i));i\in I}} \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^{N} \frac{a_{i\pi(i)}^{k(i\pi(i))n(i\pi(i)k(i\pi(i)))}}{n(i\pi(i)k(i\pi(i)))!} t^{R_f-R_m} \\ + \text{ les termes de puissance en } t \text{ supérieure à } R_f-R_m. \end{cases}$$

Celle-ci montre la première partie de la proposition.

Calculons maintenant le déterminant de P_λ:

$$\text{dét } P_\lambda = \sum_{\pi\in\Pi} \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^{N} \Bigg[\sum_{\substack{k \\ k-n(i\pi(i)k)=v_{\pi(i)}-\mu_i}} (\lambda+\mu_i)(\lambda+\mu_i-1)\cdots(\lambda+\mu_i-n(i\pi(i)k)+1) \times \frac{a_{i\pi(i)}^{kn(i\pi(i)k)}}{n(i\pi(i)k)!} \Bigg]$$

On y voit clairement que le dét P_λ est un polynôme en λ. La sommation $\sum_{\pi\in\Pi}$ n'étant en effet prise que sur $\pi\in\Pi^m$, nous avons:

$$\text{dét } P_\lambda = \sum_{\pi\in\Pi^m} \varepsilon(\pi) \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{a_{i\pi(i)}^{k_i n(i\pi(i)k_i)}}{n(i\pi(i)k_i)!} \lambda^{n(i\pi(i)k_i)} + \cdots \right]$$

où k_i est le plus grand entier k $(k\leqq k(i\pi(i)))$ tel que l'on ait $k_i-n(i\pi(i)k_i)=v_{\pi(i)}-\mu_i$; $i\in I$

Or nous avons:

$$\operatorname*{Sup}_{\pi\in\Pi^m}\sum_{i=1}^{N} n(i\pi(i)k_i)=\operatorname*{Sup}_{\pi\in\Pi^m}\sum_{i=1}^{N}(k_i-(\nu_{\pi(i)}-\mu_i))$$

$$=\operatorname*{Sup}_{\pi\in\Pi^m}\sum_{i=1}^{N}k_i-R_m\leqq R_f-R_m.$$

Où l'on a l'égalité pour des permutations π telles que l'on ait $\pi\in\Pi^f\cap\Pi^m$ et que l'on ait $k(i\pi(i))-n(i\pi(i)k(i\pi(i)))=n(i\pi(i))$ pour tout $i\in I$. Donc nous avons:

$$(8)\quad\begin{cases}\text{dét } P_\lambda=\displaystyle\sum_{\substack{\pi\in\Pi^f\cap\Pi^m\\ k(i\pi(i))-n(i\pi(i)k(i\pi(i)))=n(i\pi(i));i\in I}}\varepsilon(\pi)\prod_{i=1}^{N}\frac{a_{i\pi(i)}^{k(i\pi(i))n(i\pi(i)k(i\pi(i)))}}{n(i\pi(i)k(i\pi(i)))!}\lambda^{R_f-R_m}\\ +\text{ les termes de puissance en }\lambda\text{ inférieure à }R_f-R_m.\end{cases}$$

Comparant (7) avec (8), nous avons la deuxième partie de la proposition. ■

Les matrices Q_Λ, P_λ etc. ainsi que les vecteurs U_ξ, F_ξ etc. dépendent du choix du système admissible $\tau=\{\mu_i,\nu_j\}_{i,j\in I}$ pour l'ordre modifié R_m. *Pour distinguer la dépendance du choix du système admissible, nous écrivons par exemple* Q_Λ^τ, P_λ^τ, U_ξ^τ, F_ξ^τ *etc.*. L'étude cette dépendance aux Q_Λ et P_λ nous étant désirable, nous la faisons dans la suite. Or il nous y faut une investigation sur la diversité au choix du système admissible. Mais cette analyse détaillée n'ayant pas d'intérêt direct avec l'étude actuelle, nous nous contentons ici d'en énoncer le résultat et nous envoyons sa démonstration à l'appendice. Le voici:

Lemme 2. 1) *Il existe des sous-ensembles I_k, J_k de I; $k=1,\dots,r$, tels que l'on ait*:

i) $\bigcup_{k=1}^{N} I_k=\bigcup_{k=1}^{N} J_k=I$ *et* $I_h\cap I_k=J_h\cap J_k=\emptyset$ *pour* $h\neq k$

ii) *Soient Π_k les ensembles des restrictions π_k sur I_k des permutations π appartenant à Π^m; $k=1,\dots,r$. Alors π_k sont des bijections de I_k sur J_k; $k=1,\dots,r$, et Π^m est la somme directe des Π_k; $k=1,\dots,r$, soit* $\Pi^m=\sum_{k=1}^{N}\Pi_k$.

2) *Pour deux systèmes admissibles pour l'ordre modifié R_m $\tau=\{\mu_i,\nu_j\}_{i,j\in I}$ et $\tilde\tau=\{\tilde\mu_i,\tilde\nu_j\}_{i,j\in I}$, il existe des entiers γ_k; $k=1,\dots,r$, tels que l'on ait*:

$$\mu_i=\tilde\mu_i+\gamma_k,\ \nu_j=\tilde\nu_j+\gamma_k;\ i\in I_k,\ j\in J_k,\ k=1,\dots,r.$$

Lemme 3. *Pour un système quelconque d'entiers $\{\xi_i,\eta_j\}_{i,j\in I}$, il existe un système d'entiers $\{\tilde\mu_i,\tilde\nu_j\}_{i,j\in I}$ tel que l'on ait*:

$$\tilde\mu_i\geqq\xi_i,\ \tilde\nu_j\geqq\eta_j\qquad \textit{pour}\quad i,j\in I$$

et que, pour tout système admissible $\tau=\{\mu_i,\nu_j\}_{i,j\in I}$ pour l'ordre modifié R_m tel que l'on ait $\mu_i\geqq\xi_i$, $\nu_j\geqq\eta_j$ pour $i,j\in I$, il existe des entiers non négatifs γ_k; $k=1,\dots,r$, tels que l'on ait:

$$\mu_i=\tilde\mu_i+\gamma_k,\ \nu_j=\tilde\nu_j+\gamma_k;\ i\in I_k,\ j\in J_k,\ k=1,\dots,r.$$

Preuve. Soit $\tau=\{\mu_i,\nu_j\}_{i,j\in I}$ un système admissible pour l'ordre modifié R_m tel que l'on ait $\mu_i\geqq\xi_i$, $\nu_j\geqq\eta_j$ pour i, $j\in I$. Soients

$$\tilde{\mu}_i=\mu_i-\delta_k,\ \tilde{\nu}_j=\nu_j-\delta_k;\ i\in I_k,\ j\in J_k,\ k=1,\dots,r$$

où

$$\delta_k=\operatorname*{Inf}_{i\in I_k, j\in J_k}(\mu_i-\xi_i,\ \nu_j-\eta_j)$$

Alors le système $\{\tilde{\mu}_i,\ \tilde{\nu}_j\}_{i,j\in I}$ ne dépend pas de choix du systéme admissible τ et on voit aisèment qu'il est celui désiré. ■

Proposition 3. 1) *Il existe des polynômes en* λ, *soient* $p_k(\lambda)$; $k=1,\dots,r$, *tels que, pour un système admissible* $\tau=\{\mu_i,\ \nu_j\}_{i,j\in I}$ *pour l'ordre modifié* R_m *satisfaisant* $\mu_i\geqq 0$, $\nu_j\geqq 0$ *pour* $i, j\in I$, *il existe des entiers non négatifs* γ_k; $k=1,\dots,r$, *tels que l'on ait*:

$$\text{dét}\, P_\lambda^\tau=\prod_{k=1}^r p_k(\lambda+\gamma_k).$$

2) *Si l'on a* $|\Lambda|=R_m$, *l'énoncé* (*):

$$(*)\qquad \text{dét}\, Q_\Lambda^\tau\neq 0 \text{ et dét}\, P_\lambda^\tau\neq 0 \qquad \text{pour}\quad \lambda=0,\ 1,\ 2,\dots$$

est indépendant du choix du système admissible τ *satisfaisant la condition* (2).

Preuve. Nous avons d'une part (avec un abus de notation):

$$\text{dét}\, P_\lambda^\tau=\sum_{\pi\in\Pi^m}\varepsilon(\pi)\prod_{i=1}^N\Big(\sum_{\substack{k\\ k-n(i\pi(i)k)=\nu_{\pi(i)}-\mu_i}} C_{n(i\pi(i)k)}^{\mu_i+\lambda}a_{i\pi(i)}^{kn(i\pi(i)k)}\Big)$$

$$=\sum_{\pi\in\Pi^m}\varepsilon(\pi)\prod_{h=1}^r\prod_{i\in I_h}\Big(\sum_{\substack{k\\ k-n(i\pi(i)k)=\nu_{\pi(i)}-\mu_i}} C_{n(i\pi(i)k)}^{\mu_i+\lambda}a_{i\pi(i)}^{kn(i\pi(i)k)}\Big)$$

$$=\sum_{\pi\in\Pi^m}\prod_{h=1}^r\varepsilon(\pi|_{I_h})\prod_{i\in I_h}\Big(\sum_{\substack{k\\ k-n(i\pi(i)k)=\nu_{\pi(i)}-\mu_i}} C_{n(i\pi(i)k)}^{\mu_i+\lambda}a_{i\pi(i)}^{kn(i\pi(i)k)}\Big)$$

Grâce au lemme 2, nous avons:

$$\text{dét}\, P_\lambda^\tau=\prod_{h=1}^r\Big[\sum_{\pi_h\in\Pi_h}\varepsilon(\pi_h)\prod_{i\in I_h}\Big(\sum_{\substack{k\\ k-n(i\pi_h(i)k)=\nu_{\pi_h(i)}-\mu_i}} C_{n(i\pi_h(i)k)}^{\mu_i+\lambda}a_{i\pi_h(i)}^{kn(i\pi_h(i)k)}\Big)\Big]$$

$$\equiv\prod_{h=1}^r p_h^\tau(\lambda).$$

D'autre part, il existe, grâce au lemme 3, un système d'entiers non négatifs $\tau^0=\{\mu_i^0,\ \nu_j^0\}_{i,j\in I}$ tel que, pour tout système admissible $\tau=\{\mu_i,\ \nu_j\}_{i,j\in I}$ pour l'ordre modifié R_m satisfaisant $\mu_i\geqq 0$, $\nu_j\geqq 0$ pour $i, j\in I$, il existe des entiers non négatifs γ_k; $k=1,\dots,r$, tels que l'on ait $\mu_i=\mu_i^0+\gamma_k$, $\nu_j=\nu_j^0+\gamma_k$; $i\in I_k, j\in J_k$, $k=1,\dots,r$. Soient alors:

$$p_h(\lambda)=\sum_{\pi_h\in\Pi_h}\varepsilon(\pi_h)\prod_{i\in I_h}\Big(\sum_{\substack{k\\ k-n(i\pi_h(i)k)=\nu_{\pi_h(i)}^0-\mu_i^0}} C_{n(i\pi_h(i)k)}^{\mu_i^0+\lambda}a_{i\pi_h(i)}^{kn(i\pi_h(i)k)}\Big);\ h=1,\dots,r.$$

Alors nous avons $p_h^\tau(\lambda)=p_h(\lambda+\gamma_h)$; $h=1,\dots,r$, et la première partie de la proposition est démontrée.

Soient $\tau=\{\mu_i, \nu_j\}_{i,j\in I}$ et $\tilde{\tau}=\{\tilde{\mu}_i, \tilde{\nu}_j\}_{i,j\in I}$ deux systèmes admissibles satisfaisant tout deux la condition (2). Nous supposons $\mu_i \geqq \tilde{\mu}_i$ et $\nu_j \geqq \tilde{\nu}_j$; $i, j \in I$ (qui est faisable). Alors grâce aux lemme 2 et lemme 3, il existe des nombres entiers δ_k et γ_k; $0\leqq\delta_k\leqq\gamma_k$, $k=1,\dots, r$, tels que l'on ait: $\mu_i=\tilde{\mu}_i+\gamma_k-\delta_k=\mu_i^0+\gamma_k$ et $\nu_j=\tilde{\nu}_j+\gamma_k-\delta_k=\nu_j^0+\gamma_k$; $i\in I_k$, $j\in J_k$, $k=1,\dots, r$. Soient

$$H_l=\{(i\alpha);\ \alpha=\tilde{\mu}_l+l-1,\ i\in \bigcup_{\gamma_k-\delta_k\geqq l} I_k\};\ l=1,\dots, l^0.$$

$$K_l=\{(j\beta);\ \beta=\tilde{\nu}_j+l-1\ j\in \bigcup_{\gamma_k-\delta_k\geqq l} J_k\};\ l=1,\dots, l^0$$

$$H_0=\{(i\alpha);\ 0\leqq\alpha\leqq\tilde{\mu}_i-1\ i\in I\}$$

$$K_0=\{(j\beta);\ 0\leqq\beta\leqq\tilde{\nu}_j-1\ j\in I\}-\Lambda$$

où $l^0=\mathrm{Sup}\,\{(\gamma_k-\delta_k);\ k=1,\dots, r\}$.
Alors nous avons:

$$\{(i\alpha);\ 0\leqq\alpha\leqq\mu_i-1=\tilde{\mu}_i+\gamma_k-\delta_k-1\ i\in I\}=\bigcup_{l=0}^{l^0} H_l$$

$$\{(j\beta);\ 0\leqq\beta\leqq\nu_j-1\ j\in I\}-\Lambda=\bigcup_{l=0}^{l^0} K_l$$

Et nous avons:

$$\begin{aligned} Q_\Lambda^\tau &= \Big(\sum_{\substack{l+k=h+n\\ 0\leqq k\leqq k(ij)\\ n(ijk)\leqq n}} C_n^l\, a_{ij}^{kn}\Big)_{\substack{0\leqq l\leqq\mu_i-1,\,i\in I\\ 0\leqq h\leqq\nu_j-1,\,j\in I,\,(jh)\notin\Lambda}} \\ &= \Big(\sum_{\substack{\beta-\alpha\leqq k-n(ijk)\\ 0\leqq k\leqq k(ij)}} C_{\alpha-\beta+k}^{\alpha} a_{ij}^{k\alpha-\beta+k}\Big)_{\substack{0\leqq\alpha\leqq\mu_i-1,\,i\in I\\ 0\leqq\beta\leqq\nu_j-1,\,j\in I,\,(j\beta)\notin\Lambda}} \\ &= (Q_{pq})_{p,q=0,1,\dots l^0} \end{aligned}$$

avec

$$Q_{pq}=\Big(\sum_{\substack{\beta-\alpha\leqq k-n(ijk)\\ 0\leqq k\leqq k(ij)}} C_{\alpha-\beta+k}^{\alpha} a_{ij}^{k\alpha-\beta+k}\Big)_{\substack{(i\alpha)\in H_p\\ (j\beta)\in K_q}};\ p, q=0, 1,\dots, l^0.$$

Or nous avons:

$$Q_{pq}=0 \qquad \textit{pour} \quad p<q$$

$$\text{dét}\, Q_{pp}=\prod_{\substack{1\leqq k\leqq r\\ \gamma_k-\delta_k\geqq p}} p_k(\delta_k+p-1);\ p=1,\dots, l^0$$

et

$$Q_{oo}=Q_\Lambda^{\tilde{\tau}}.$$

Nous avons donc au cas où $|\Lambda|=R_m$:

$$\text{dét } Q_A^{\tau} = \text{dét } Q_A^{\bar{\tau}} \prod_{l=1}^{l^0} \prod_{\substack{1 \leq k \leq r \\ \gamma_k - \delta_k \geqq l}} p_k(\delta_k + l - 1)$$

$$= \text{dét } Q_A^{\bar{\tau}} \prod_{k=1}^{r} p_k(\delta_k) p_k(\delta_k + 1) \cdots p_k(\gamma_k - 1).$$

Si nous nous souvenons:

$$\text{dét } P_\lambda^{\tau} = \prod_{k=1}^{r} p_k(\gamma_k + \lambda) \ et \ \text{dét } P_\lambda^{\bar{\tau}} = \prod_{k=1}^{r} p_k(\delta_k + \lambda),$$

alors la deuxième partie de la proposition est claire. ∎

Pour la simplicité de l'énoncé nous adoptons la suivante.

Définition 3. *Nous appelons* $\{p_k(\lambda)\}_{k=1,\dots,r}$ *à la proposition* 3 *le système de polynômes caractéristiques pour l'opérateur* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$. *Et le problème* $(C)_A$ *avec* $|A| = R_m$ *est dit non caractéristique au sens large si la condition* $(*)$ *à la proposition* 3 *est réalisée.*

Nous disons "*non caractéristique*" *au sens qu'il n'y a pas de racine caractéristique entière et non négative.* Mais, comme on voit à la proposition suivante, celle-ci donne *une généralisation du problème de Cauchy "non caractéristque"*.

Avec cette terminologie, nous avons:

Proposition 4. (*Proposition* 1-*bis*) 1) *Pour que le problème* $(C)_A$ *ait une solution formelle pour toutes les données* $\vec{f}(t)$ *et* Φ, *il faut que l'on ait* $|A| \leqq R_m$, *et si l'on a* $|A| = R_m$, *il faut et il suffit pue le problème* $(C)_A$ *est non caractéristique au sens large.*

2) *Si aucun des polynômes caractéristiques pour l'opérateur* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ *ne s'annule identiquement, alors pour que le problème* $(C)_A$ *ait l'unique solution formelle pour toutes les données* $\vec{f}(t)$ *et* Φ, *il faut et il suffit que l'on ait* $|A| = R_m$ *et que le problème* $(C)_A$ *est non caractéristique au sens large.*

Comme un corollaire de cette proposition, nous avons:

Proposition 5. *Pour que le problème* $(C)_A$ *avec* $|A| = R_f$ *soit bien posé, il faut que le* dét $\mathring{A}^{\sigma}(t)$ *ne s'annule pas à l'origine.*

Soit qu'*aucun des polynômes caractéristiques* $p_k(\lambda)$ *pour* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$; $k = 1, \dots, r$, *ne s'annule identiquement.* Soient r_k *les plus grandes racines entières non négatives* de $p_k(\lambda) = 0$; $k = 1, \dots, r$, où r_k est convenu d'être $-\infty$ s'il n'existe pas de racine entière non négatives à $p_k(\lambda) = 0$.

Pour un système admissible $\tau = \{\mu_i, \nu_j\}_{i,j \in I}$, nous disons qu'il est *suffisamment grand* si l'on a:

$$\mu_i, \nu_j \geqq r_k + 1; \ i \in I_k, \ _j \in J_k, \ k = 1, \dots, r.$$

Alors, grâce à la proposition 3 et sa démonstration, *pour un système admissible* *suffisamment grand* τ, *le dét* P_λ^τ *ne s'annule pas pour* $\lambda=0, 1, 2, \ldots$. Et nous avons:

Proposition 6. *Pour* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ *dont aucun polynôme du système de polynômes caractéristiques ne s'annule identiquement, si l'on prend un système admissible suffisamment grand* τ, *il y a, pour un* $\vec{f}(t)$ *donné, une correspondance biunivoque enhe l'ensemble des solutions formelles du système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ *et celui des solutions des équations simultanées* (4): $Q_B^\tau U_B^\tau = F_B^\tau$.

5. Estimations de solution formelle et conditions suffisantes.

Reprenons (6). Nous supposons que le dét P_λ ne s'annule pas pour $\lambda=0, 1, 2, \ldots$. (Nous omettons τ aux P_λ, U_λ, etc.) Alors (6) s'écrit:

$$(6)_{bis} \qquad U_\lambda = P_\lambda^{-1}F_\lambda - \sum_{\xi=0}^{\lambda-1} P_\lambda^{-1}P_\xi^\lambda U_\xi - P_\lambda^{-1}P_B^\lambda U_B;\ \lambda=0, 1, 2, \ldots$$

Lemme 4. *Il existe des nombres positifs* C, ρ_0 *et un entier positif* s *tels que l'on ait pour tout* $\lambda=0, 1, 2, \ldots$:

$$|(P_\lambda^{-1}P_\xi^\lambda)_{ij}| \leqq \frac{C\lambda^{R_f-R_m}}{|\text{dét } P_\lambda|} \frac{\rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i-t_i+s}\lambda!}{\rho_0^\xi \xi^{\nu_j-t_j+s}\xi!};\ 0\leqq\xi\leqq\lambda-1,\ i, j\in I$$

$$|(P_\lambda^{-1}P_B^\lambda)_{i(j\gamma)}| \leqq \frac{C\lambda^{R_f-R_m}}{|\text{dét } P_\lambda|} \rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i-t_i+s}\lambda!;\ 0\leqq\gamma\leqq\nu_j-1,\ i, j\in I$$

$$|(P_\lambda^{-1}F_\lambda)_i| \leqq \frac{C\lambda^{R_f-R_m}}{|\text{dét } P_\lambda|} \rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i-t_i+s}\lambda!;\ i\in I$$

où $\rho_0^\xi \xi^{\nu_i-t_i+s}\xi!$ *est convenu d'être* 1 *pour* $\xi=0$.

Preuve. Soit $\Pi(hi)$ l'ensemble de toutes les applications biunivoques de $I-\{h\}$ sur $I-\{i\}$. Les (ih)-éléments de P_λ^{-1} s'écrivent:

$$(P_\lambda^{-1})_{ih} = \frac{1}{\text{dét } P_\lambda} \Delta_{hi}$$

avec

$$\Delta_{hi} = (-1)^{h+i} \sum_{\pi\in\Pi(hi)} \varepsilon(\pi) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} \Big[\sum_{\substack{k\\ k-n(l\pi(l)k)=\nu_{\pi(l)}-\mu_l}} C_{n(l\pi(l)k)}^{\mu_l+\lambda} a_{l\pi(l)}^{kn(l\pi(l)k)} \Big]$$

Nous convenous toujours que le coefficient binomial C_q^p est nul pour $p<q$. Alors nous avons:

$$\begin{aligned} &|\text{dét } P_\lambda (P_\lambda^{-1}P_\xi^\lambda)_{ij}| \\ &= \sum_{h=1}^{N} (-1)^{h+i} \Big\{ \sum_{\pi\in\Pi(hi)} \varepsilon(\pi) \prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} \Big[\sum_{\substack{k\\ k-n(l\pi(l)k)=\nu_{\pi(l)}-\mu_l}} C_{n(l\pi(l)k)}^{\mu_l+\lambda} a_{l\pi(l)}^{kn(l\pi(l)k)} \Big] \\ &\quad \times \Big[\sum_{\substack{0\leqq k\leqq k(hj)\\ n(hjk)\leqq n\\ n=k+\lambda-\xi-\nu_j+\mu_h}} C_n^{\mu_h+\lambda} a_{hj}^{kn} \Big] \Big\} \end{aligned}$$

Choisissons $\rho_0>1$ en sorte que nous ayons:

$$|a_{ij}^{kn}|\leqq n!\ \rho_0^n \quad et\ |f_{in}|\leqq n!\ \rho_0^n \quad pour\ tous\ i,\ j,\ k\ et\ n.$$

Alors nous avons:

$$\begin{aligned}&|\text{dét}\ P_\lambda||(P_\lambda^{-1}P_\xi^\lambda)_{ij}|\\ &\leqq \sum_{h=1}^N \left\{ \sum_{\pi\in\Pi(hi)} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^N \left[\sum_{\substack{k\\ k-n(l\pi(l)k)=v_{\pi(l)}-\mu_l}} \frac{(\mu_l+\lambda)!}{(\mu_l+\lambda-n(l\pi(l)k))!}\rho_0^{n(l\pi(l)k)}\right]\right.\\ &\quad\left.\times\left[\sum_{\substack{0\leqq k\leqq k(ij)\\ n(hjk)\leqq n\\ n=k+\lambda-\xi-v_j+\mu_h}} \frac{(\mu_h+\lambda)!}{(\mu_h+\lambda-n)!}\rho_0^n\right]\right\}\\ &\leqq C_1\ \text{Sup}\left\{\left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^N \frac{(\mu_l+\lambda)!}{(\mu_l+\lambda-n(l\pi(l)k))!}\right]\frac{(\mu_h+\lambda)!}{(\mu_h+\lambda-n)!}\right\}\rho_0^{\sup\{\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^N n(l\pi(l)k)+n\}}\end{aligned}$$

où $n=k+\lambda-\xi-v_j+\mu_h$, que C_1 est une constante absolue et que le Sup $\{\cdots\}$ est pris sur tout le choix en question.

Or nous avons:

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^N n(l\pi(l)k)+n\leqq \sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^N (t_{\pi(l)}-s_l-v_{\pi(l)}+\mu_l)+\lambda-\xi+t_j-s_h-v_j+\mu_h=\lambda-\xi+\delta_{ij}$$

avec

$$\delta_{ij}=R_f-R_m+t_j-t_i-(v_j-v_j).$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned}&|\text{dét}\ P_\lambda(P_\lambda^{-1}P_\xi^\lambda)_{ij}|\leqq C_1\rho_0^{\lambda-\xi+\delta_{ij}}\frac{\lambda!}{\xi!}\\ &\times \underset{\substack{h\in I\\ \pi\in\Pi(hi)}}{\text{Sup}}\left\{\left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^N \frac{(\mu_l+\lambda)!}{(\mu_l+\lambda-t_{\pi(l)}+s_l+v_{\pi(l)}-\mu_l)!}\right]\frac{(\mu_h+\lambda)!}{(\xi+v_j-t_j+s_h)!}\frac{\xi!}{\lambda!}\right\}.\end{aligned}$$

Et ce dernier Sup $\{\cdots\}$ s'écrit:

$$\underset{\substack{h\in I,\pi\in\Pi\\ \pi(h)=i}}{\text{Sup}}\left\{\left[\prod_{l=1}^N \frac{(\mu_l+\lambda)!}{(\mu_l+\lambda-t_{\pi(l)}+s_l+v_{\pi(l)}-\mu_l)!}\right]\frac{(\lambda+v_i-t_i+s_h)!}{(\xi+v_j-t_j+s_h)!}\frac{\xi!}{\lambda!}\right\}.$$

Or grâce à la formule de Stirling, tant que p et q restent bornés, il existe une constante C_2 telle que nous ayons pour tout λ non négatif:

$$\frac{(p+\lambda)!}{(p+\lambda-q)!}\leqq C_2\lambda^q$$

Nous avons donc:

$$\prod_{l=1}^N \frac{(\mu_l+\lambda)!}{(\mu_l+\lambda-t_{\pi(l)}+s_l+v_{\pi(l)}-\mu_l)!}\leqq C_2^N\ \lambda^{R_f-R_m}.$$

De même, grâce à la formule de Stirling, il existe une constante C_3 telle que l'on ait pour $0 \leqq \xi \leqq \lambda - 1$:

$$\frac{(\lambda+\nu_i-t_i+s_h)!}{(\xi+\nu_j-t_j+s_h)!}\,\frac{\xi!}{\lambda!} \leqq C_3 \frac{\lambda^{\nu_i-t_i+s_h}}{\xi^{\nu_j-t_j+s_h}} \leqq C_3 \frac{\lambda^{\nu_i-t_i+s}}{\xi^{\nu_j-t_j+s}}$$

où s est un nombre entier plus grand que le $\operatorname{Sup}\{s_i, t_j;\ i, j \in I\}$. Donc nous avons avec une certaine constante C:

$$|(P_\lambda^{-1}P_\xi^\lambda)_{ij}| \leqq C \frac{\lambda^{R_f-R_m}}{|\text{dét } P_\lambda|}\,\frac{\rho_0^\lambda}{\rho_0^\xi}\,\frac{\lambda^{\nu_i-t_i+s}}{\xi^{\nu_j-t_j+s}}\,\frac{\lambda!}{\xi!}\ ;\ 0 \leqq \xi \leqq \lambda-1,\ i, j \in I.$$

De la même façon, nous avons:

$$|\text{dét } P_\lambda\ (P_\lambda^{-1}P_B^\lambda)_{i(j\gamma)}| \leqq C_4 \operatorname{Sup}\left\{\left[\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} \frac{(\mu_l+\lambda)!}{(\mu_l+\lambda-n(l\pi(l)k))!}\right]\frac{(\mu_h+\lambda)!}{(\mu_h+\lambda-n)!}\right\}$$

$$\times\, \rho_0^{\sup\{\sum_{l=1,\, l\neq h}^{N} n(l\pi(l)k)+n\}}$$

où $n = k+\lambda-\gamma+\mu_h$, que C_4 est une constante absolue pareille à C_1, et que l'on ait:

$$\operatorname{Sup}\{\sum_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{N} n(l\pi(l)k)+n\} = \lambda + \tilde{\delta}_{ij\gamma}$$

avec

$$\tilde{\delta}_{ij\gamma} = R_f - R_m + t_j - t_i + \nu_i - \gamma.$$

Et nous avons avec une certaine constante C:

$$|(P_\lambda^{-1}P_B^\lambda)_{i(j\gamma)}| \leqq C \frac{\lambda^{R_f-R_m}}{|\text{dét } P_\lambda|}\,\rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i-t_i+s}\lambda!\,;\ 0 \leqq \gamma \leqq \nu_j-1,\ i, j \in I.$$

Enfin si l'on remarque que l'on a:

$$|(F_\lambda)_i| \leqq (\mu_i+\lambda)!\ \rho_0^{\mu_i+\lambda};\ i \in I,$$

alors la dernière inégalité au lemme est claire. ■

Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 1. *Si l'on a* $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f-R_m} \text{dét } \mathring{A}^\sigma(t)\right]_{t=0} \neq 0$, *alors la solution formelle du système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ *est toujours convergente.*

Démonstration. Grâce à la proposition 2, le dét P_λ ne s'annule pas identiquement. Donc si l'on choisit un système admissible $\tau = \{\mu_i, \nu_j\}_{i,j\in I}$ suffisamment grand pour l'ordre modifié R_m, alors on peut bien supposer que le déterminant de $P_\lambda \equiv P_\lambda^\tau$ ne s'annule pas pour $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. Nous le supposons dans la suite et nous choisissons les nombres M et ρ tels que nous ayons:

$$|(U_B)_{(j\gamma)}| \leqq M,\ |(U_0)_i| \leqq M,\ |(U_1)_i| \leqq M;\ 0 \leqq \gamma \leqq \nu_j - 1,\ i,\ j \in I$$

et

$$C \operatorname*{Sup}_{\lambda} \frac{\lambda^{R_f - R_m}}{|\text{dét } P_\lambda|} \leqq M,\quad \operatorname{Sup}\{1,\ (M(N_0+2N)+2)\rho_0\} \leqq \rho$$

où C et ρ_0 sont des constantes au lemme 3 et $N_0 = \sum_{j=1}^{N} \nu_j$. Alors nous pouvons montrer par récurrence l'estimation suivante:

$$|(U_\lambda)_i| \leqq M\rho^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\lambda!;\ i \in I,\ \lambda = 0,\ 1,\ 2,\dots. \tag{9}$$

En effet elle est claire pour $\lambda = 0,\ 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour tout $\xi < \lambda$ et montrons-la pour $\xi = \lambda$. D'après le lemme 4, si l'on convient que l'on a $\rho^\xi \xi^{\nu_j - t_j + s}\xi! = \rho_0^\xi \xi^{\nu_j - t_j + s}\xi! = 1$ pour $\xi = 0$, nous avons:

$$\begin{aligned}
|(U_\lambda)_i| &\leqq M\rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\,\lambda! + \sum_{\xi=0}^{\lambda-1}\sum_{j=1}^{N} \frac{M\rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\lambda!}{\rho_0^\xi \xi^{\nu_j - t_j + s}\xi!} M\rho^\xi \xi^{\nu_j - t_j + s}\xi! \\
&\quad + \sum_{(j\gamma)} M\rho_0^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\lambda!\, M \\
&= M\rho^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\lambda! \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\lambda + \sum_{\xi=0}^{\lambda-1} MN\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\lambda-\xi} + MN_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\lambda\right] \\
&\leqq M\rho^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\lambda! \left[\frac{\rho_0}{\rho}(MN_0 + 2MN + 1)\right] \leqq M\rho^\lambda \lambda^{\nu_i - t_i + s}\lambda!.
\end{aligned}$$

Ainsi l'estimation (9) étant démontrée, elle montre de son côté la convergence de la solution formelle. ■

De ce théorème nous nous déduisons les suivants.

Théorème 2. *Si l'on a* $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f - R_m} \text{dét } \mathring{A}^\sigma(t)\right]_{t=0} \neq 0$, *pour que le problème* $(C)_A$ *soit bien posé, il faut et il suffit que l'on ait* $|A| = R_m$ *et que le problème* $(C)_A$ *est non caractéristique au sens large.*

Démonstration. Grâce au théorème 1, sous la condition $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f - R_m} \text{dét } \mathring{A}^\sigma(t)\right]_{t=0} \neq 0$, la solution formelle du système d'équations $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ est la solution analytique. Et le théorème-ci découle de la deuxième partie de la proposition 4. ■

De même, de la proposition 6, nous avons:

Théorème 3. *Pour* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ *tel que l'on ait* $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f - R_m} \det \mathring{A}^\sigma(t)\right]_{t=0} \neq 0$, *il y a, pour un* $\vec{f}(t)$ *donné, une correspondance biunivoque entre l'ensemble des solutions analytiques du système d'équations* $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ *et celui des solutions des équations simultannées* (4): $Q_B^\tau U_B^\tau = F_B^\tau$, *si l'on choisit suffisamment grand le système admissible* τ *pour l'ordre modifié* R_m.

Nous remarquons le suivant:

Proposition 7. *Au cas où l'on a* $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f-R_m} \text{dét}\, \mathring{A}^{\sigma}(t)\right]_{t=0} \neq 0$, *pour le problème* $(C)_A$ *avec* $|A|=R_m$, *les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *Le problème* $(C)_A$ *est bien posé.*

ii) *Le problème* $(C)_A$ *a une solution analytique pour chaques données* $\vec{f}(t)$ *et* Φ.

iii) *La solution analytique du probléme* $(C)_A$ *est unique.*

6. Le problème de Cauchy à données assujetties à la condition de compatibilité.

Nous voulons envisager, selon C. Wagschal [5], le problème de Cauchy suivant.

Soient n_j; $j\in I$, les entiers non négatifs que nous supposons:

$$\text{(H)} \qquad n_j \geqq \sup_{i\in I} n(ij);\ j\in I.$$

$(C)_{\{n_j\}}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Étant donnés un vecteur } \vec{f}(t)={}^t(f_1(t),\dots,f_N(t)) \text{ et un système de nombres} \\ \text{complexes } \Phi=\{\phi_{jk};\ 0\leqq k\leqq n_j-1,\ j\in I\}, \text{ trouver un vecteur } \vec{u}(t)={}^t(u_1(t), \\ \dots, u_N(t)) \text{ tel que l'on ait } A\left(t,\frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t) \text{ et que } \left(\frac{d}{dt}\right)^k u_j(0)=\phi_{jk}; \\ 0\leqq k\leqq n_j-1,\ j\in I.\end{array}\right.$

Or les données $\vec{f}(t)$ et Φ ne sont en general pas librement données. En effet, soient

$$(10) \qquad \tilde{n}_i=\inf_{j\in I}(n_j-n(ij)).$$

Alors nous avons:

$$n(ij)\leqq n_j-\tilde{n}_i;\ i,j\in I.$$

Différentions 0, 1,..., $\tilde{n}_i-1$ fois la $i^{\text{ème}}$ équation de $A\left(t,\frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ pour i tel que l'on ait $\tilde{n}_i\geqq 1$; $i\in I$, et y posons $t=0$. Alors nous avons:

$$\text{(EC)} \qquad \sum_{\substack{j\in I\\ 0\leqq k\leqq k(ij)\\ n(ijk)\leqq n}} C_n^l a_{ij}^{kn}\phi_{j\,l+k-n}=f_{il};\ 0\leqq l\leqq \tilde{n}_i-1,\ i\in I$$

relation à être satisfaite par des données $\vec{f}(t)$ et Φ.

Nous envisageons ainsi *le problème de Cauchy à données assujetties à la condition de compatibilité*:

$(CC)_{\{n_j\}}$ $\left\{\begin{array}{l}\textit{Étant donnés un vecteur } \vec{f}(t)={}^t(f_1(t),\dots,f_N(t)) \textit{ et un système de nombres} \\ \textit{complexes } \Phi=\{\phi_{jk};\ 0\leqq k\leqq n_j-1,\ j\in I\} \textit{ assujetties à (EC), trouver un} \\ \textit{vecteur } \vec{u}(t)={}^t(u_1(t),\dots,u_N(t)) \textit{ tel que l'on ait } A\left(t,\frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t) \textit{ et que} \\ \textit{l'on ait} \left(\frac{d}{dt}\right)^k u_j(0)=\phi_{jk};\ 0\leqq k\leqq n_j-1,\ j\in I.\end{array}\right.$

Soit $\tau=\{\mu_i, \nu_j\}_{i,j\in I}$ un système admissible pour l'ordre modifié R_m. Le problème de Cauchy $(CC)_{\{\nu_j\}}$ donne un exemple du problème de Cauchy à données assujetties à la condition de compatibilité où (EC) est donnée par (4): $Q_B^\tau U_B^\tau=F_B^\tau$.

La proposition suivante prétend que c'est en quelque sens le seule type du problème de Cauchy à données assujetties à la condition de compatibilité.

Proposition 8. *Pour que le problème de Cauchy $(CC)_{\{n_j\}}$ à données assujetties à la condition de compatibilité ait nne solution pour toutes les données $\vec{f}(t)$ et Φ assujetties à (EC), il faut que le système d'entiers $\{\tilde{n}_i, n_j\}_{i,j\in I}$ forme un système admissible pour l'ordre modifié R_m et que le* dét P_λ, *formé pour ce système admissible, ne s'annule pas pour $\lambda=0, 1, 2,\dots$.*

Preuve. Remarquons que l'on a, d'aprés (H), $\tilde{n}_i\geqq 0$; $i\in I$. Et différentions $\tilde{n}_i$ fois l'i^{ième} équation de $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)\vec{u}(t)=\vec{f}(t)$ et y posons $t=0$. Ce qui donne:

$$PU=F-W$$

où l'on a:

$$U={}^t(u_{1n_1},\dots, u_{Nn_N}),\ F={}^t\ (f_{1\tilde{n}_1},\dots, f_{N\tilde{n}_N})$$

$$P=(\sum_{\substack{k\\ k-n(ijk)=n_j-\tilde{n}_i}} C^{\tilde{n}_i}_{n(ijk)}a^{kn(ijk)}_{ij})_{i,j\in I}$$

et que W est un certain vecteur défini par des données Φ et f_{ik}; $0\leqq k\leqq \tilde{n}_i-1$, $i\in I$.

Si l'on fait varier $\vec{f}(t)$, le deuxième membre $F-W$ de cette égalité peut prendre toutes les valeurs de $\boldsymbol{C}^N$. Nous en concluons que l'on a: dét $P\neq 0$. Donc il existe une permutation π de I tel que l'on ait:

$$\sum_{\substack{k\\ k-n(i\pi(i)k)=n_{\pi(i)}-\tilde{n}_i}} C^{\tilde{n}_i}_{n(i\pi(i)k)}a^{kn(i\pi(i)k)}_{i\pi(i)}\neq 0;\ i\in I.$$

Par conséquent il existe des entiers k_i; $i\in I$, tels que l'on ait: $a^{k_in(i\pi(i)k_i)}_{i\pi(i)}\neq 0$ et $k_i-n(i\pi(i)k_i)=n_{\pi(i)}-\tilde{n}_i$; $i\in I$. Ceci donne par suite:

$$n(i\pi(i))\geqq n_{\pi(i)}-\tilde{n}_i;\ i\in I$$

qui donne:

$$R_m\geqq \sum_{j=1}^N n_j-\sum_{i=1}^N \tilde{n}_i.$$

Compte tenu de (10), on voit bien que $\{\tilde{n}_i, n_j\}_{i,j\in I}$ est un système admissible pour l'ordre modifié R_m. Le reste de la proposition est déjà clair. ■

Reprenons r_k; $k=1,\dots, r$, définis juste après la proposition 5. Et nous disons que les n_j; $j\in I$, sont *suffisamment grands* si l'on a:

$$\tilde{n}_i,\ n_j\geqq r_k+1;\ i\in I_k,\ j\in J_k,\ k=1,\dots, r.$$

Théorème 4. *Pour $A\left(t, \frac{d}{dt}\right)$ tel que l'on ait $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{R_f-R_m}\text{dét}\ \mathring{A}^{\sigma}(t)\right]_{t=0}\neq 0$, si les n_j; $j\in I$, sont suffisamment grands, alors pour que le problème de Cauchy $(CC)_{\{n_j\}}$ à données assujetties à la condition de compatibilité ait une et une seule solution pour toutes les données $\vec{f}(t)$ et Φ assujetties à (EC), il faut et il suffit que le système d'entiers $\{\tilde{n}_i, n_j\}_{i,j\in I}$ forme un système admissible pour l'ordre modifié R_m.*

Démonstration Si les n_j; $j\in I$, sont suffisamment grand le détP_λ, formé pour ce système admissible $\{\tilde{n}_i, n_j\}_{i,j\in I}$ ne s'annule pas pour $\lambda=0, 1, 2,\dots$. Donc compte tenu des théorèmes 1 et 3, le théorème-ci est clair. ■

7. Appendices.

I] Lemme de Volevič.

Lemme de Volevič. *Soient* q_{ij}; $i, j\in I$, *des nombres réels* (*rationnels*, *entiers*, *respectivement*) *ou* $-\infty$ *tels que l'on ait*:

1) $q_{ii}=0$; $i\in I$,

2) $\operatorname{Sup}_{\pi\in\Pi}\sum_{i=1}^{N} q_{i\pi(i)}\leqq 0$ (où *il est convenus* $-\infty+q=-\infty$).

Alors il existe un système de nombres réels (*rationnels*, *entiers*, *respectivement*) $\{q_i\}_{i\in I}$ *tel que l'on ait*:

$$q_{ij}\leqq q_j-q_i;\ i, j\in I.$$

Comme un corollaire de ce lemme, nous avons le lemme suivant dont nous recevons de l'aide.

Lemme *Soient* p_{ij}; $i, j\in I$, *des nombres réels* (*rationnels*, *entiers*, *respectivement*) *ou* $-\infty$ *tel que l'on ait*:

$$\operatorname{Sup}_{\pi\in\Pi}\sum_{i=1}^{N} p_{i\pi(i)}=m>-\infty.$$

Alors il existe un système de nombres réels (*rationnels*, *entiers*, *respectivement*) $\{s_i, t_j\}_{i,j\in I}$ *tel que l'on ait*:

$$p_{ij}\leqq t_j-s_i;\ i, j\in I$$

et

$$\sum_{j=1}^{N} t_j-\sum_{i=1}^{N} s_i=m.$$

Preuve.

i) *Cas spécial* où l'on a $\sum_{i=1}^{N} p_{ii}=m$.

Soient

$$q_{ij}=p_{ij}-p_{jj};\ i, j\in I$$

On peut alors appliquer le lemme de Volevič aux q_{ij}; $i, j\in I$. Soit $\{q_i\}_{i\in I}$ le systéme obtenu. Alors il suffit de prendre $s_i=q_i$, $t_j=q_j+p_{jj}$; $i, j\in I$.

ii) *Cas général.*

Il existe une permutation π de I telle que l'on ait:

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i\pi(i)}=m.$$

Soient

$$\tilde{p}_{ij}=p_{i\pi(j)};\ i, j \in I.$$

Alors on peut appliquer le cas spécial ci-haut aux $\tilde{p}_{ij}$; $i, j \in I$. Soit $\{\tilde{s}_i, \tilde{t}_j\}_{i,j\in I}$ le système obtenu. Alors il suffit de prendre $s_i=\tilde{s}_i$, $t_j=\tilde{t}_{\pi^{-1}(j)}$; $i, j \in I$. ∎

II] Preuve du lemme 2.

Soient I_1 et I_2 des sous-ensembles de I tels que l'on ait $|I_1|=|I_2|$, où $|I_i|$ est le cardinal de I_i; $i=1, 2$.

Définition A. Un sous-ensemble Σ de $I_1 \times I_2$ satisfait la condition (☆) dans $I_1 \times I_2$ si et seulement si, pour tout $(\alpha\beta) \in I_1 \times I_2$, il existe une bijection de I_1 sur I_2, soit π, telle que l'on ait $\pi(\alpha)=\beta$ et $(i\pi(i)) \in \Sigma$ pour tout $i \in I_1$, $i \neq \alpha$.

Nous admettons el lemme suivant démontré à l'appendice de K. Kitagawa-T. Sadamatsu [2].

Lemme A. *Il existe des permutations λ et μ et des nombres entiers $s_0 \equiv 0 < s_1 < s_2 <, \ldots, < s_r \equiv N$ tels que, en posant:*

$$\tilde{I}_k=\{s_{k-1}+1, \ldots, s_k\};\ k=1, \ldots, r,$$

il existe, pour toute permutation $\pi \in \Pi^m$, des permutations π_k de $\tilde{I}_k$; $k=1, \ldots, r$, tels que l'on ait:

$$\lambda\pi\mu^{-1}=\sum_{k=1}^{r} \pi_k \ (\textit{somme directe})$$

et que, si i'on pose:

$$\tilde{\Pi}_k=\{\pi_k;\ \pi \in \Pi^m\} \text{ et } \Sigma_k=\{(i\pi_k(i));\ i \in \tilde{I}_k,\ \pi_k \in \tilde{\Pi}_k\};\ k=1, \ldots, r,$$

alors Σ_k satisfait la condition (☆) dans $\tilde{I}_k \times \tilde{I}_k$; $k=1, \ldots, r$.

Lemme B. *Soient I_0 et J_0 des sous-ensembles de I tels que l'on ait$|I_0|=|J_0|$. Soit Σ un sous-ensemble de $I_0 \times J_0$. Si Σ satisfait la condition (☆), alors, en posant $S_i=\{j;\ (ij) \in \Sigma\} \subset J_0$; $i \in I_0$, nous avons que, pour tous $i \in I_0$ et $\bar{i} \in I_0$, il existe des $i_1, \ldots, i_h \in I_0$ tels que l'on ait:*

$$S_i \cap S_{i_1} \neq \emptyset, \quad S_{i_1} \cap S_{i_2} \neq \emptyset, \ldots, \quad S_{i_{h-1}} \cap S_{i_h} \neq \emptyset, \quad S_{i_h} \cap S_{\bar{i}} \neq \emptyset.$$

Preuve. Nous appelons, pour la simplicité de l'écriture, ce système de nombres $i_1, \ldots, i_h$ le pont unissant i à $\bar{i}$. Remarquons que, pour tout i, l'ensemble S_i n'est pas vide. Nous montrons le lemme par l'absurde. Nions la conséquence: Alors il existe des i_0 et $\bar{i}_0$ tels qu'il n'existe aucun pont unisant i_0 à $\bar{i}_0$. Soient $i_1, \ldots, i_p$ les i qui soient unis par des ponts à i_0 et $i_{p+1}, \ldots, i_q$ les i qui soient unis par des ponts à $\bar{i}_0$, et $i_{q+1}, \ldots, i_{N0}$ les i qui ne soient unis par des ponts ni à i_0 ni à $\bar{i}_0$, où$N_0=|I_0|$. Alors nous avons:

$$(S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_p}) \cap (S_{i_{p+1}} \cup \cdots \cup S_{i_q})=\emptyset$$

$$(S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_p}) \cap (S_{i_{q+1}} \cup \cdots \cup S_{i_{N0}})=\emptyset$$

$$(S_{i_{p+1}} \cup \cdots \cup S_{i_q}) \cap (S_{i_{q+1}} \cup \cdots \cup S_{i_{N0}}) = \emptyset.$$

Nous pouvons construire des bijections λ et μ de $\{1,\dots, N_0\}$ à I_0 et à J_0 respectivement telles que l'on ait:

$$\lambda(\{1,\dots, p\}) = \{i_1,\dots, i_p\},\ \lambda(\{p+1,\dots, q\}) = \{i_{p+1},\dots, i_q\},$$

$$\lambda(\{q+1,\dots, N_0\}) = \{i_{q+1},\dots, i_{N_0}\},$$

$$\mu(\{1,\dots, \tilde{p}\}) = \bigcup_{j=1}^{p} S_{i_j} \quad \text{avec } \tilde{p} = |\bigcup_{j=1}^{p} S_{i_j}|$$

$$\mu(\{\tilde{p}+1,\dots, \tilde{q}\}) = \bigcup_{j=p+1}^{q} S_{i_j} \quad \text{avec } \tilde{q} = |\bigcup_{j=p+1}^{q} S_{i_j}| + \tilde{p}$$

$$\mu(\{\tilde{q}+1,\dots, N_0\}) = J_0 - \bigcup_{j=1}^{q} S_{i_j}.$$

Soit

$$\Sigma^* = \{(ij);\ (\lambda(i)\mu(i)) \in \Sigma,\ i, j = 1,\dots, N_0\}.$$

Alors Σ^* satisfait, d'une part, la condition ($\star$) dans $\{1,\dots, N_0\} \times \{1,\dots, N_0\}$, et, d'autre part,:

$$\Sigma^* \cap \{(ij);\ i \in \{1,\dots, p\}, j \in \{\tilde{p}+1,\dots, N_0\}\} = \emptyset$$

$$\Sigma^* \cap \{(ij);\ i \in \{p+1,\dots, N_0\}, j \in \{1,\dots, \tilde{p}\}\} = \emptyset$$

Mais c'est une contradiction. Car, si l'on prend un $(\alpha\beta) \in \{(ij);\ i \in \{1,\dots, p\}, j \in \{\tilde{p}+1,\dots, N_0\}\}$, alors la permutation de $\{1,\dots, N_0\}$ passant par $(\alpha\beta)$ doit passer un des $(ij) \in \{(ij);\ i \in \{p+1,\dots, N_0\}, j \in \{1,\dots, \tilde{p}\}\} \cap \Sigma^*$. Mais ceci estimpossib le. ■

Preuve du lemme 2. La premiére partie du lemme 2 est déjà claire grâce au lemme A. Il suffit en effet de poser:

$$I_k = \mu^{-1}(\tilde{I}_k),\ J_k = \lambda^{-1}(\tilde{I}_k);\ k = 1,\dots, r$$

avec des écritures au lemme A.

Montrons la deuxième partie. Pour une permutation $\pi \in \Pi^m$, nous avons:

$$\nu_{\pi(i)} - \mu_i = \tilde{\nu}_{\pi(i)} - \tilde{\mu}_i;\ i \in I.$$

Nous avons donc pour tous $i \in I$ et $\pi \in \Pi^m$:

$$\nu_{\pi(i)} - \tilde{\nu}_{\pi(i)} = \mu_i - \tilde{\mu}_i.$$

Prenons un I_k au lemme A; $k = 1,\dots, r$. Et soient, pour $i \in I_k$,

$$S_i = \{j;\ (ij) \in \{(i\pi(i));\ i \in I_k,\ \pi \in \Pi^m\}\} \subset J_k.$$

Alors d'après le lemme A et le lemme B, il existe, pour tous i, $\bar{\imath} \in I_k$, un pont $i_1,\dots, i_h$ unissant i à $\bar{\imath}$, c'est-à-dire:

$$S_i \cap S_{i_1} \neq \emptyset,\ S_{i_1} \cap S_{i_2} \neq \emptyset,\dots, S_{i_{h-1}} \cap S_{i_h} \neq \emptyset,\ S_{i_h} \cap S_{\bar{\imath}} \neq \emptyset.$$

Or $S_i \cap S_{i_1} \neq \emptyset$ montre qu'il existe un l et des π, $\tilde{\pi} \in \Pi^m$ tels que l'on ait

$$(il) = (i\pi(i)) \quad et \quad (i_1 l) = (i_1 \tilde{\pi}(i_1))$$

et par conséquent que l'on ait:

$$\mu_i - \tilde{\mu}_i = \mu_{i_1} - \tilde{\mu}_{i_1} = \nu_l - \tilde{\nu}_l.$$

Nous avons donc:

$$\mu_i - \tilde{\mu}_i = \nu_j - \tilde{\nu}_j \equiv \gamma_k; \; i \in I_k, \, j \in J_k.$$

Et ceci pour tout k; $k = 1, \ldots, r$. ■

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES,
L'UNIVERSITÉ D'EHIME

Bibliographie

[1] G. Hufford, On the Characteristic *M*atrix of a *M*atrix of Differential Operators, J. diff. equations, **1** (1965), 27–38.

[2] K. Kitagawa and T. Sadamatsu, Sur le problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles, J. Math. Kyoto Univ., **21**-1 (1981), 85–103.

[3] M. Miyaké, Remarks on the formulation of the Cauchy problem for general system of ordinary differential equations, Tohoku Math. J., 2nd Ser., **32**-1, (1980), 79–89.

[4] L. R. Volevič, On general systems of differential equations, Dokl. Acad. Nauk SSSR = Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 458–461.

[5] C. Wagschal, Diverses formulations du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles, J. Math. pure et appl., **53** (1974), 51–70.