J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
24-1 (1984) 699-704

Sur la question d'existence de solutions d'une équation différentielle stochastique du type noncausal

Par

Shigeyoshi OGAWA

(Communiquée par Prof. M. Yamaguti le 4. Août 1983)

[1] Etant donnés le processus du mouvement brownien réel $\{B(x, w);\ x \geq 0\}$ et une variable aléatoire réelle $r(w)$, définis sur un espace probabilisé $(W, \mathscr{F}, P)$, on a à chercher l'existence de solutions du problème de Cauchy d'une équation différentielle stochastique du type noncausal comme suit,

$$
(1)\qquad \begin{cases} dX(x, w) = a(x, X)dx + b(x, X)dB(x) \\ X(0, w) = r(w),\ P\text{-}p.\ s., \end{cases}
$$

où $a(x, y)$ et $b(x, y)$ $((x, y) \in [0, 1] \times \boldsymbol{R}^1)$ sont des fonctions réelles quelconques.

Définition. Par la solution du problème (1), on entend un couple $(X, \{\varphi_n\})$ d'une fonction aléatoire $X(x, w)$ $((x, w) \in [0, 1] \times W)$ et une base orthonormale dans l'espace hilbertien réel $L^2(0, 1)$ satisfaisante à l'équation suivante,

$$
(2)\qquad X(x, w) - r(w) = \int_0^x a(y, X(y, w))dy + \int_0^x b(y, X(y, w))d_\varphi B(y),
$$

où le terme $\int b\, d_\varphi B(y)$ signifie l'integrale stochastique du type noncausal par rapport à la base $\{\varphi_n\}$, (voir [2], [3]).

Il n'est pas difficile de voir l'existence de solution si la donnée $r(w)$ est un nombre réel déterministe r (ou bien, une variable aléatoire indépendante du processus $\{B(x, w);\ x \geq 0\}$). En effet, prenons le système des foncitions trigonométriques $\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi nx, \sqrt{2}\sin 2\pi nx:\ n \geq 1\}$ pour la base $\{\varphi\}$ et considérons une solution $Y(x, w)$, à supposer qu'il existe, de l'équation integrale suivante,

$$
(3)\qquad Y(x, w) - r = \int_0^x a(y, Y(y, w))dy + \int_0^x b(y, Y(y, w))dB(y),
$$

où le terme $\int b\, dB(y)$ signifie l'integrale symetrique.

Alors d'après le Théorème 2 de [3] on confirme que le couple $(Y, \{\varphi\})$ est une solution du problème (1). Mais cet raisonnement ne marche plus si la donnée $r(w)$ est une variable aléatoire quelconque. Le principal but de la présente note est de montrer un résultat sur ce sujet.

Dans ce qui suit, on entendra par $\boldsymbol{H}$ la totalité de fonctions aléatoires réelles $f(x, w)$ telles que $P[\int_0^1 f^2(x, w)dx < \infty] = 1$ et par $\boldsymbol{M}$ la sous-classe de fonctions de $\boldsymbol{H}$ qui soient adaptées à la famille des tribus $\mathscr{F}_x = \sigma(B(y, w):\ 0 \leq y \leq x)\ (x \geq 0)$. On dit que la fonction $f(x, w)$ de la classe $\boldsymbol{M}$ est une quasi-martingale pourvu qu'il existe une fonction $g(x, w)\ (\in \boldsymbol{M})$ qui soit à variation bornée sur l'intervalle $[0, 1]$ pour presque tout w et une fonction $h(x, w)\ (\in \boldsymbol{M})$ telles que l'on ait l'égalité

$$(4) \quad f(x, w) - f(y, w) = g(x, w) - g(y, w) + \int_y^x h(u, w) d^\circ B(u), \quad (x \geq y),$$

où on entend par $\int h\ d^\circ B(u)$ l'integrale d'Ito. En outre, si la fonction $g(x, w)$ possède la densité: $g(x, w) = \int^x g'(y, w)dy$ $(g'(x, w) \in \boldsymbol{M})$, alors la fonction $f(x, w)$ est appelée la quasi-martingale régulière. Ceci posé, on va répéter ci-dessous le Théorème cité en haut, parce qu'li fait des rôles fondamentaux dans toute discussion.

Théorème 1. ([3]). (i) *Toute quasi-martingale $f(x, w)$ est integrable par rapport au système des fonctions trigonométriques et dant ce cas l'integrale $\int f(x, w) d_\varphi B(x)$ est identique à l'integrale symetrique $\int f(x, w) dB(x)$ $\left(= \frac{1}{2}\int h dx + \int f d^\circ B(x)\right)$.*

(ii) *Soit $f(x, w)$ une quasi-martingale telle que la fonction $h(x, w)$ dans la décomposition* (4) *soit encore une quasi-martingale. Alors la fonction $f(x, w)$ est u-integrable, c'est-à-dire que: elle est integrable par rapport à n'importe quelle base $\{\varphi\}$ et la valeure de l'integrale $\int f d_\varphi B$ ne dépend pas du choix de la base, (donc dans ce cas, identique à l'integrale symetrique).*

Remarque. Les conclusions de l'énoncé restent encore vrais même si la fonction $g(x, w)$ dans l'expression (4) de "quasi-martingale" $f(x, w)$ était de la classe $\boldsymbol{H}$. On appellerait une telle fonction "la pseudo-martingale". C'est sans doute un usage abusif du mot, mais quelque fois utile.

[2] Pour simplicité de discussions on suppose dorénavant que les fonctions $a(x, y)$ et $b(x, y)$ satisfont aux deux conditions suivantes;

(H, 1) Les fonctions $a(x,y)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2} b(x,y)$ sont de la classe C^1.

(H, 2) De plus, elles sont suffisamment régulières en ce sens que pour tout nombre réel r l'equation integrale (3) possède une telle solution, disons $Y(x, w; r)$ dont presque toute trajectoire soit continue en $(x, r)\in[0, 1]\times \boldsymbol{R}^1$ et continuellement différentiable en r.

Remarque 2. La condition (H, 2) est satisfaite si, par exemple, les fonctions $a(x,y)$, $b(x,y)$ sont de la classe C^3 en y et toutes leures derivées sont bornées sur $[0, 1]\times \boldsymbol{R}^1$ (cf. [4]).

Grâce à l'hypothèse (H, 2), on peut considérer la fonction composée $X(x, w)=Y(x, w; r(w))$ comme une fonction aléatoire, où $r(w)$ est la donnée initiale. On a à démotrer que le couple $(X, \{\varphi\})$ de cette fonction et une base convenablement choisie devient une solution du problème (1). Notamment, on va établir le

Théorème 2. (i) *Si l'on prend le système des fonctions trigonométriques pour la base* $\{\varphi\}$, *alors le couple* $(X, \{\varphi\})$ *devient une solution du problème* (1).
(ii) *Si, en outre, la fonction* $b(x, y)$ *est de la classe* C^4 *en* y, *alors pour n'importe quelle base* $\{\varphi\}$ *le couple* $(X, \{\varphi\})$ *l'est aussi.*

Pour vérifier cet énoncé, on va préparer des deux propositions.

Soit $\{f(x, w; r): r\in A\}$ $(A\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^1))$ une famille des quasi-martingales régulières, c'est-à-dire que: pour chaque r fixé il existe des deux fonctions $g(x, w; r)$ et $h(x, w; r)$, apartenant à la classe $\boldsymbol{M}$, telles que:

$$df(x, w; r)=g(x, w; r)dx+h(x, w; r)d^{\circ}B(x). \tag{5}$$

On suppose que les fonctions $g(x, w; r)$ et $h(x, w; r)$ sont mesurables en (x, w, r) et satisfont à la condition,

$$P\Big[\int_A dr\int_0^1\{g^2(x, w; r)+h^2(x, w; r)\}dx<\infty\Big]=1. \tag{6}$$

On se donne ensuite une base $\{\varphi_n\}$ et on forme la suite des integrales de Stieltjes: $\int_0^1 f(x, w; r)dB_\varphi^n(x)$ où $B_\varphi^n(x, w)=\sum_{k=0}^n(\varphi_k, \dot{B})\int_0^x\varphi_k(y)dy$. Il est utile de se rappeler que le Théorème de Nishio-Ito ([1]) implique que:

$$P[\lim_{n\to\infty}\sup_{0\le x\le 1}|B_\varphi^n(x, w)-B(x, w)|=0]=1.$$

D'autre part, pour une base convenablement choisie, on obtient par le Théorème 1 l'égalité:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x, w; r)dB_\varphi^n(x)=\int_0^1 f(x, w; r)d_\varphi B(x)\quad\text{(en probabilité).}$$

De plus, en éxaminant le détail de la démonstration du Théorème (donnée dans l'article [3]), on peut obtenir un résultat plus précis comme suit,

Proposition 1. (i) *Pour le système des fonctions trigonométriques, on a* *l'égalité,*

(7) $\lim_{n\to\infty}\int_A dr\left[\int_0^1 f(x,\ w;\ r)\ \{d_\varphi B(x)-dB_\varphi^n(x)\}\right]^2=0$ *(en probabitité),*

dans ce cas, on entend par $B_\varphi^n(x,\ w)$ *le processus:*

$B_\varphi^n(x,\ w)=\sum_{k=0}^n\sum_{i=1}^2 Z_{i,k}\int_0^x\varphi_{i,k}(y)dy,$ *où* $Z_{i,k}=\int_0^1\varphi_{i,k}(y)dB(y)$ *et* $\varphi_{i,k}(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi kx,$ $\varphi_{2,k}(x)=\sqrt{2}\sin 2\pi kx\ \ (k\neq 0),\ \ \varphi_{1,0}(x)=1,\ \ \varphi_{2,0}(x)=0$ *(pour la convenance de notations).*

(ii) *Si la fonction* $h(x,\ w;\ r)$ *dans l'expression* (5) *est encore une quasi-martingale régulière satisfaisante à la même condition que* $f(x,\ w;\ r)$. *Alors, quelque soit la base* $\{\varphi\}$, *l'égalité* (7) *est encore valide.*

Preuve. Comme cet énoncé peut être vérifié d'une même façon que la démonstration du Théorème 1, on va démontrer seulement la première partie (i).

Posons, $f_1(x,\ w\ ;\ r)=f(0,\ w\ ;\ r)+\int_0^x g(y,\ w;\ r)dy$ et $f_2(x,\ w\ ;\ r)=\int_0^x h(y,\ w\ ;\ r)d^\circ B(y)$. Alors, par integration par partie, on obtient: $\int_0^1 f_1(x,\ w\ ;\ r)\ [d_\varphi B(x)-dB_\varphi^n(x)]=f_1(1,\ w\ ;\ r)\ [B(1)-B^n(1)]-\int_0^1[B(x)-B_\varphi^n(x)]g(x,\ w\ ;\ r)dx$, d'où, à l'aide du Théorème de Nishio-Ito, on confirme que $\lim_{n\to\infty}\int_A dr\left[\int_0^1 f_1(x,\ w\ ;\ r)\ \{d^\varphi B(x)-dB_\varphi^n(x)\}\right]^2=0$ (en probabilité) indépendamment du choix de la base.

Quant au terme qui reste, on obtient par la fofmule d'Ito l'égalité; $\int_0^1 f_2(x,\ w;\ r)\,[d_\varphi B(x)-dB_\varphi^n(x)]=\sum_{j=1}^4 I_{j,n}(r),$

où
$$I_{1,n}(r)=\sum_{k=n+1}^\infty\sum_{i=1}^2 f_2(1,w;\ r)\tilde\varphi_{i,k}(1)Z_{i,k}\quad \left(\tilde\varphi_{i,k}(x)=\int_0^x\varphi_{i,k}(y)dy\right),$$
$$I_{2,n}(r)=\sum_{k=n+1}^\infty\sum_{i=1}^2\int_0^1\tilde\varphi_{i,k}(x)\varphi_{i,k}(x)h(x,\ w;\ r)dx$$
$$I_{3,n}(r)=\sum_{k=n+1}^\infty\sum_{i=1}^2\int_0^1\varphi_{i,k}(x)d^\circ B(x)\int_0^x\tilde\varphi_{i,k}(y)h(y,\ w;\ r)d^\circ B(y)$$
$$I_{4,n}(r)=\sum_{k=n+1}^\infty\sum_{i=1}^2\int_0^1\tilde\varphi_{i,k}(x)h(x,\ w;\ r)d^\circ B(x)\int_0^x\varphi_{i,k}(y)d^\circ B(y).$$

Il suffit de démontrer que $\lim_{n\to\infty}\int_A I_{i,n}^2(r)dr=0\ \ (i=1,\dots,4)$ en probabilité. Or, d'après le Théorème de Nishio-Ito, il est immédiate de voir que $\lim_{n\to\infty}\int_A I_{1,n}^2(r)dr=0\ \ P-p.s.$. Pour vérifier les égalités $\lim_{n\to\infty}\int_A I_{i,n}^2(r)dr=0$ $(i=3,\ 4)$, on n'a qu'à suivre une même discussion donnée dans la preuve du Théorème 1 ([3]). Il est à remarquer que le raisonnement utilisé jusqu'ici ne nécessite pas des propriétés particulières de la base choisie.

Pour le terme $I_{2,n}$, on a

$$\int_A I_{2,n}^2(r)dr=\int_A dr\left[\sum_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k\pi}\int_0^1 h(x,\ w;\ r)\sin 2\pi kx\,dx\right]^2$$
$$\leq\frac{1}{\pi^2}\left[\sum_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k^2}\right]\int_A dr\int_0^1 h^2(x,\ w;\ r)dx,$$

donc d'après la condition (6) on obtient la conclusion.

Considérons la suite des fonctions aléatoires $\{X_n^\varphi(x, w; r)\}$ déterminées par la formule

$$(8)\qquad X_n^\varphi(x, w; r) = r + \int_0^x a(y, Y(y, w; r))dy + \int_0^x b(y, Y(y, w; r))dB_\varphi^n(y),$$

où Y *est la solution de l*'équation (3) exprimée dans l'hypothèse (H, 2). Alors, d'après le Théorème 1, on a pour chaque x, r fixés l'égalité: $\lim_{n\to\infty} X_n^\varphi(x, w; r) = Y(x, w; r)$ en probabilité.

Proposition 2. (i) *Si l'on prend le systeme des fonctions trigonometriques pour la base. Alors, pour chaque x fixé, la suite converge à Y en probabilité, uniformément en r sur tout ensemble compact lorsque n tend vers l'infini.*
(ii) *Si la fonction $b(x, y)$ est de la classe C^4 en y, alors quelque soit la base, la conclusion de* (i) *reste encore vrais.*

Preuve. On fixe des nombres positifs ε et N d'une façon arbitraire et on va démontrer l'égalité

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} P[\sup_{|r|\le N} |X_n^\varphi(x, w; r) - Y(x, w; r)| > \varepsilon] = 0.$$

Grâce aux hypothèses (H, 1) et (H, 2) on voit que les fonctions $X_n^\varphi(x, w; r)$ et $Y(x, w; r)$ sont différentiables en r pour presque tout w et que les derivées deviennent satisfaire aux équations suivantes.

$$(10)\text{-(i)}\qquad Y'(x, w; r) = 1 + \int_0^x a'(u, Y(u, w; r))Y'(u, w; r)du + \int_0^x b'(u, Y(u, w; r))Y'(u, w; r)dB(u),$$

$$(10\text{-(ii)}\qquad \frac{\partial}{\partial r} X_n^\varphi(x, w; r) = 1 + \int_0^x a'(u, Y(u, w; r))Y'(u, w; r)du + \int_0^x b'(u, Y(u, w; r))Y'(u, w; r)dB_\varphi^n(u),$$

où $Y'(x, w; r) = \frac{\partial}{\partial r} Y(x, w; r)$ et $a'(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} a(x,y)$, $b'(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} b(x,y)$.

Il résulte de l'equation (10)-(i) que pour chaque r fixé la fonction $Y'(x, w; r)$ est une quasi-martingale régulière et donc, d'après l'hypothèse (H, 1), la fonction $b'(x, Y(x, w; r))Y'(x, w; r)$ l'est aussi qui satisfait aux conditions exprimées dans la Proposition 1. Par conséquant, on obtient l'égalité:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-N}^N dr\Big[\frac{\partial}{\partial r}\{Y(x, w; r) - X_n^\varphi(x, w; r)\}\Big]^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-N}^N \Big[\int_0^x b'(u, Y(u, w; r))Y'(u, w; r)\,\{d_\varphi B(u) - dB_\varphi^n(u)\}\Big]^2 dr$$

$= 0$ (en probabilité), d'où on obtient; $\sup_{|r|\le N} |Y(x, w; r) - X_n^\varphi(x, w; r)|$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{|r'|\leq N} \left| \int_{-N}^{r'} \frac{\partial}{\partial r}[Y(x,w;r) - X_n^\varphi(x,w;r)]dr \right. \\
&\qquad\qquad \left. + [Y(x,w;-N) - X_n^\varphi(x,w;-N)] \right| \\
&\leq (2N)^{1/2} \left[\int_{-N}^{N} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}[Y(x,w;r) - X_n^\varphi(x,w;r)] \right\}^2 dr \right]^{1/2} \\
&\qquad\qquad + |Y(x,w;-N) - X_n^\varphi(x,w;-N)|.
\end{aligned}
$$

Puisque les deux dernières quantités tendent vers zéros en probabilité lorsque n tend vers l'infini, celle-ci démontre l'énoncé.

Preuve du Théorème 2. Remarquons que la Proposition 2 implique que $\lim_{n\to\infty} X_n^\varphi(x,w;r(w)) = X(x,w)$ $(=Y(x,w;r(w)))$ pour chaque x fixé, où $\{\varphi\}$ est une base convenablement choisie suivant les cas exprimés dans la Proposition 2. Considérons tout d'abord le cas (i), où le système des fonctions trigonométriques est pris pour la base. Alors la conclusion s'en suit aussitôt de la première partie (i) de la Proposition 2 et de l'inégalité suivante;

$$
\begin{aligned}
P[|X(x,w) - X_n^\varphi(x,w;r(w))| > \varepsilon] &\leq P[|r(w)| > N] \\
&\quad + P[|Y(x,w;r_N(w)) - X_n^\varphi(x,w;r_N(w))| > \varepsilon]
\end{aligned}
$$

où ε et N sont des nombres positifs arbitraires et $r_N(w) = r(w)1_{(-N,N)}(r(w)) + N\cdot 1_{[N,\infty)}(r(w)) - N\cdot 1_{(-\infty,-N]}(r(w))$. Par l'égalité (8) on voit que la suite $\int_0^x b(y,Y(y,w;r(w))dB_\varphi^n(y)$ $(n\geq 1)$ converge en probabilité lorsque n tend vers *l*'infini et que la limite doit être égale à l'integrale $\int_0^X b(y, Y(y,w;r(w))d_\varphi B$, d'après la définition de l'integrale stochastique du type noncausal. Ce fait démontre la première partie (i) de l'énoncé. Suivant la même discussion basée sur la Proposition 2, on peut vérifier la deuxième partie (ii).

FACULTY OF TEXTILE SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY OF INDUSTRIAL ARTS &
TEXTILE FIBRES

Références

[1] M. Nishio & K. Ito, On the convergence of sums of independent Banacha space valued random varibles, Osaka J. Math., **5** (1968), 35-48.

[2] S. Ogawa, Sur le produit direct du bruit blanc par lui-même, C. R. Acad. Sc. Paris, **288** (1979), Série A, 359-362.

[3] S. Ogawa, Quelques propriétés de l'integrale stochatique du type noncausal. (1981, à paraître).

[4] H. Tanaka & M. Hasegawa, KAKURITSU BIBUN HOTEISHIKI, Seminar on Probability vol **19** (1964), JAPAN.