J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
25-2 (1985) 221-253

Solution holomorphe pour des équations du premier ordre à symboles principaux dégénérés

Par

Akira NAKAOKA

(Communicated by Prof. S. Mizohata, December 15, 1983)

1. Introduction. Dans cet article, on considére l'existence de la solution holomorphe pour l'équation suivante:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, \cdots, x_n)\partial u/\partial x_j = u \qquad (n \geqq 2) \tag{1.1}$$

où tous les coefficients sont holomorphes et s'annullent à l'origine de $\mathbf{C}^n$. Le terme "solution holomorphe" ou simplement "solution" signifie partout dans cet article "la solution holomorphe non-triviale".

Tout d'abord, on note que la condition nécessaire pour l'existence de solution est facilement obtenue. A l'ennoncer, on introduit une matrice

$$\mathcal{A} = \partial(a_1, \cdots, a_n)/\partial(x_1, \cdots, x_n)|(0, \cdots, 0) \tag{1.2}$$

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\mathcal{A}$, alors on voit facilement qu'il est nécessaire pour l'existence de solution que la relation suivante est satisfait par certain multi-indice $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \bar{\mathbf{N}}^n$, où $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j = 1. \tag{1.3}$$

Mais, comme on le voit facilement, (1.3) n'est pas suffisante en général. Un contre-exemple est donné dans [4].

Par ailleurs, dans un certain cas, (1.3) donne la suffisance. Soit Λ l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$. Introduissons une condition sur Λ:

$$\Lambda \not\ni 0 \qquad \textit{(la condition de Poincaré)}. \tag{P}$$

Le théorème suivant est bien connu.

Théorème A. *Sous la condition* (*P*), (1.3) *donne la suffisance pour l'équation* (1.1) *à admettre au moins une solution.*

La condition (*P*) nous apporte

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i - 1\right| \geqq c|\alpha|, \tag{1.4}$$

pour une certaine constante $c>0$, quand $|\alpha|$ est assez grand, ce qui permet de démontrer le théorème de la méthode de séries majorantes. Sans la condition (P), on rencontrera le problème du petit diviseur, ou encore les autres difficultés. Cependant, de toute façon, le cas sans la condition (P) sera à considérer. Ici on se limite au cas où quelques-uns de $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ sont nuls et les autres se situent d'un côté d'une droite passant par l'origine, c'est-à-dire, par exemple, $\lambda_1=\cdots=\lambda_p=0$ et $\tilde{\Lambda}\not\ni 0$, $\tilde{\Lambda}$ étant l'enveloppe convexe de $\{\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n\}$. Les autres cas seront fondamentalement lié au problème qu'on appelle l'approximation de Diophantine.

Quand on étudie l'équation (1.1), la méthode de caractéristiques serait efficace ; soient $\phi_i(x_1, \cdots, x_n, u)=c_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ les integrales de

$$\frac{dx_1}{a_1}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{-1}, \tag{1.5}$$

et alors une fonction $u(x_1, \cdots, x_n)$ satisfaisant à (1.1) serait déterminée par $\Phi(\phi_1, \cdots, \phi_n)=0$, Φ étant une fonction arbitraire. Mais, je crois qt'il est très difficile de trouver une condition sur $a_1, \cdots, a_n$ et Φ pour que $u(x_1, \cdots, x_n)$ se trouve holomorphe. Donc, on prend la méthode du développement de Taylor. A mon regret, je n'ai pu obtenir que des résultats pour les cas où $n=2$ et $n=3$, et ce, pour ceux du type spéciale.

On donne ici le plan de cet article. Dans le paragraphe 2, on transforme l'équation (1.1) à la forme la plus convenable possible par un changement de variables. Dans le paragraphe 3, on étudie une certaine équation différentielle ordinaire, ce qui est fondamentale dans cet article. On étudie le cas de deux variables dans le pargraphe 4, et puis celui de trois variables dans les paragraphes 5 et 6.

On remarque que le contenu, sauf celui des pargraphe 2, 5 et 6, est déjà énoncé dans [7], mais sans démonstration. Ici on va donner la démonstration complète. Et l'étude du cas de trois variables, je l'espère, ouvre une voie au cas général.

2. Préliminaire I-Transformation d'équation. Il est bien connu que l'on peut toujours supposer, sans perdre la généralité, que les fonctions $a_1, \cdots, a_n$ sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_j=\lambda_j x_j+\varepsilon_j x_{j+1}+A_j & (j=1, 2, \cdots, n-1) \\ a_n=\lambda_n x_n+A_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $A_j (j=1, \cdots, n)$ s'annulent à l'origine avec un ordre $\geqq 2$, et $\varepsilon_j=1$ ou 0. En effet, il suffit de prendre la transformation linéaire

$${}^t(x_1, \cdots, x_n)=P\,{}^t(\xi_1, \cdots, \xi_n) \tag{2.2}$$

telle que $P^{-1}AP$ se réalise de la forme canonique de Jordan.

On suppose donc que $\mathrm{Re}\,\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0$ $(i=p+1, \cdots, q)$ et $\lambda_{q+1}=\cdots=\lambda_n=0$. On considère le cas où les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont généralement distribués dans ce paragraphe. On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.1. *On peut supposer que*

$$A_i(x_1, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0)=0 \qquad (i=p+1, \cdots, n), \tag{2.3}$$

en prennant quelque changement de variables, s'il est nécessaire.

On prend le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} \xi_i = x_i & (i=1, 2, \cdots, p) \\ \eta_k = x_k - f_k(x_1, \cdots, x_p) & (k=p+1, \cdots, n), \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f_k(k=p+1, \cdots, n)$ étant holomorphe et s'annulant à l'origine, qui sont à être déterminées. Avec ces nouvelles variables $(\xi, \eta)=(\xi_1, \cdots, \xi_p, \eta_{p+1}, \cdots, \eta_n)$, l'opérateur $\sum_{j=1}^{n} a_j\partial/\partial x_j$ se transforme en

$$\sum_{i=1}^{p} a_i\partial/\partial\xi_i + \sum_{k=p+1}^{n}\left(a_k - \sum_{i=1}^{p} a_i\partial f_k/\partial\xi_i\right)\partial/\partial\eta_k. \tag{2.5}$$

Donc, il suffit de déterminer $f=(f_{p+1}, \cdots, f_n)$ comme la solution de

$$\sum_{i=1}^{p}\{\lambda_i\xi_i+\varepsilon_{i+1}\xi_{i+1}+A_i(\xi, f(\xi))\}\partial f_k/\partial\xi_i=\lambda_k f_k+\varepsilon_{k+1}f_{k+1}+A_k(\xi, f(\xi)) \tag{2.6}$$
$$(k=p+1, \cdots, n, \ \varepsilon_{p+1}=\varepsilon_{n+1}=0).$$

On va vérifie son existence de la méthode de séries majorantes. Pour le réaliser, il nous faudra quelques lemmes.

Lemme 2.1. *Dans l'expression* (2.6), *on peut ramplacer* ε_j, *si* $\varepsilon_j\neq 0$, *par* ε, *un nombre arbitraire.*

Démonstration. Par exemple, supposons que $\lambda_1=\cdots=\lambda_s=\lambda$ et que la cellule associée de Jordan est donné par

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix},$$

alors il suffit d'introduire les nouvelles variables $x'_1, \cdots, x'_s$ par $x'_i=\varepsilon^{s-i}x_i$ $(i=1, 2, \cdots, s)$. c. q. f. d.

Soit $(x_1, \cdots, x_n)=(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_r)=(x, y)$. Soit Λ_+ l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ et $c=\text{dis}\ \{0, \Lambda_+\}$. On prend les séries majorantes de $A_i(x, y)$ comme suit:

$$M'(|x|+|y|)^2/\{1-(|x|+|y|)/\rho\} \qquad 1\leqq i\leqq p$$

$$M(|x|+|y|)^2/\{1-(|x|+|y|)/\rho\} \qquad p+1\leqq i\leqq n,$$

ou M, M' p et ρ sont des nombres positifs et $|x|=\sum_{i=1}^{p} x_i$, $|y|=\sum_{i=1}^{r} y_i$.

On considère ici l'équation auxilliaire suivante:

$$\left\{cz-\frac{M'(z+r\Phi)^2}{1-(z+r\Phi)/\rho}\right\}\frac{d\Phi}{dz}=c\Phi+\frac{M(z+r\Phi)^2}{1-(z+r\Phi)/\rho} \tag{2.7}$$

avec $M=M'/r$. Quant a l'existence de la solution de (2.7), on a

Lemme 2.2. *Quel que soit a dans $\mathbf{C}$, l'équation* (2.7) *admet une solution $\Phi(z)$ holomorphe à l'origine satisfaisant à $\Phi(0)=0$ et $\Phi'(0)=a$. En plus, tout les coefficients, sauf $\Phi(0)$, du développement de $\Phi(z)$ sont positifs pour a convenablement choisi.*

Démonstration. Posons $\phi(z)=z+r\Phi(z)$ et $\gamma=c/r$, alors on a

$$\left(\gamma z-\frac{M\phi^2}{1-\phi/\rho}\right)\frac{d\phi}{dz}=\gamma\phi, \tag{2.8}$$

et l'équation (2.8) se transforme à l'équation pour ψ definie par $\phi=z\psi$,

$$\left(\gamma-\frac{Mz\psi^2}{1-z\psi/\rho}\right)\frac{d\psi}{dz}=\frac{M\psi^3}{1-z\psi/\rho}. \tag{2.9}$$

Comme on le voit facilement, l'équation (2.9) admet une solution holomorphe $\psi(z)$ telle que $\psi(0)=a'$ pour un nombre complexe a' arbitraire. De plus, tous les coefficients du développement de $\psi(z)$ sont positifs, si $\psi(0)>0$. Vu que $\psi(0)=1+r\Phi'(0)$, on voit que la fonction $\Phi(z)$ avec $a'>1$ est l'une demandée. c.q.f.d.

Mettons $\Psi(z)=r\Phi(z)$ et soit

$$\Psi(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\Psi_j z^j \tag{2.10}$$

son développement de Taylor. En posant

$$\frac{M(z+\Psi)^2}{1-(z+\Psi)/\rho}\left(1+\frac{d\Psi}{dz}\right)=\sum_{j=2}^{\infty}\omega_j z^j, \tag{2.11}$$

on a

$$(j-1)\gamma\Psi_j=\omega_j \qquad (j=2,3,\cdots), \tag{2.12}$$

vu (2.7).

Lemme 2.3. *Soit ${}_{|\alpha|}C_\alpha=|\alpha|!/\alpha_1!\cdots\alpha_n!$, où α étant un multi-induce $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ on a alors*

$$\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_{i}\,{}_{|\alpha|}C_{\beta_i}\leqq|\alpha|\,{}_{|\alpha|}C_\alpha \qquad (p\geqq 2), \tag{2.13}$$

où $\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i+1,\alpha_{i+1}-1,\alpha_{i+2},\cdots,\alpha_n)$.

Démonstration. En effet, on a

$$\sum_{i=1}^{p=1}\alpha_{i}\,{}_{|\alpha|}C_{\beta_i}={}_{|\alpha|}C_\alpha\sum_{i=1}^{p=1}\alpha_{i+1}\alpha_i/(\alpha_i+1)\leqq|\alpha|\,{}_{|\alpha|}C_\alpha.$$

c.q.f.d.

Soit $f(x_1, \cdots, x_n)$ une fonction holomorphe et $\sum f_{\alpha_1\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, ou simplement $\sum f_\alpha x^\alpha$ son développement de Taylor. On introduit les notations suivantes ;

(2.14) $$f(x\,;j)=\sum_{|\alpha|=j} f_\alpha x^\alpha,$$

(2.15) $$A_i(x_1, \cdots, x_p, f_{p+1}, \cdots, f_n)=\sum A_i(f)_\alpha x^\alpha, \qquad (i=1, \cdots, p)$$

où $f_{p+1}, \cdots, f_n$ étant fonctions holomorphes à l'origine, et

(2.16) $$l_k(\alpha)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\lambda_i-\lambda_k \qquad (k=p+1, \cdots, n),$$

où $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est un multi-indice dans $\bar{\mathbf{N}}^n$. On a immédiatement

(2.17) $$|l_k(\alpha)|\geqq c|\alpha|,$$

vu que $\mathrm{Re}\,\lambda_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, p)$ et $\mathrm{Re}\,\lambda_k<0$. Et, de (2.6), on obtient

(2.18) $$|l_n(\alpha)f_{n,\alpha}|\leqq\varepsilon\left|\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i f_{n,\beta_i}\right|+|A_n(f)_\alpha| \qquad (|\alpha|\geqq 2),$$

où $\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i f_{n,\beta_i}=0$, si β_i n'a pas de sens comme un multi-indice.

Tout d'abord, on va étudier $f_n(x\,;2)$. Rangeons les multi-indices de hauteur 2 lexicographiquement : $\alpha(1)=(2, 0, \cdots, 0)$, $\alpha(2)=(1, 1, 0, \cdots, 0)$ etc. Vu (2.17) et (2.18), on obtient

(2.19) $$|f_{n,\alpha(1)}|\leqq|A_n(f)_{\alpha(1)}|/c|\alpha(1)|.$$

D'autre part, il se fait, en general, que

(2.20) $$|A_k(f)_\alpha|\leqq{}_2C_\alpha\omega_2 \qquad (|\alpha|=2),$$

donc on a

(2.21) $$|f_{n,\alpha(1)}|\leqq\frac{b}{2}\,{}_2C_{\alpha(1)}\Psi_2,$$

en vertue de (2.12), où $b=\dfrac{\gamma}{c}$. De même, on a

(2.22) $$|f_{n,\alpha}|\leqq\frac{b}{2}\,{}_2C_\alpha\Psi_2 \qquad (|\alpha|=2),$$

ce qui donne

(2.23) $$f_n(x\,;2)\ll\frac{b}{2}\Psi_2(x_1+\cdots+x_p)^2,$$

Ensuite on va étudier $f_{n-1}(x\,;2)$. De (2.6), on a

(2.24) $$|l_{n-1}(\alpha)f_{n-1,\alpha}|\leqq\varepsilon\left(\left|\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i f_{n-1,\beta_i}\right|+|f_{n,\alpha}|\right)+|A_{n-1}(f)_\alpha| \qquad (|\alpha|=2).$$

Pour $\alpha=\alpha(1)$ on a

(2.25) $$|f_{n-1,\alpha(1)}|\leqq\frac{b}{2}(1+\varepsilon/2c)\,{}_2C_{\alpha(1)}\Psi_2,$$

car $\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i(1)f_{n-1,\beta_i(1)}=0$. Donc, de la méthode d'induction mathémotiques, on obtient

$$|f_{n-1,\alpha}| \leqq \frac{b}{2}(1-\mu)^{-1}{}_2C_\alpha \Psi_2 \qquad (\mu=\varepsilon/2c), \tag{2.26}$$

oú ε étant pris assez petit tel que $\mu<1$. Ce raisonnement nous ramène à

Lemma 2.4. *Il se réalise que*

$$f_k(x\,;2) \ll a^{n-k} b\Psi_2 |x|^2/2 \qquad (k=p+1, \cdots, n), \tag{2.27}$$

où $a=(1-\mu)^{-1}$.

Démonstration. Soit $k=n-2$. De (2.6), on obtient

$$|l_{n-2}(\alpha)f_{n-2,\alpha}| \leqq \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i|f_{n-2,\beta_i}|+|f_{n-1,\alpha}|\Big)+|A_{n-2}(f)_\alpha|, \tag{2.28}$$

et, en particulier pour $\alpha=\alpha(1)$,

$$|l_{n-2}(\alpha(1))f_{n-2,\alpha(1)}| \leqq \varepsilon|f_{n-1,\alpha(1)}|+|A_{n-2}(f)_{\alpha(1)}|. \tag{2.29}$$

Donc, vu que (2.12), (2.20) et (2.26), il se fait

$$|f_{n-2,\alpha(1)}| \leqq ab_2C_{\alpha(1)}\Psi_2/2. \tag{2.30}$$

Ici, supposons que

$$|f_{n-2,\alpha(j)}| = ab(1+\mu+\cdots+\mu^{j-1})_2C_{\alpha(j)}\Psi_2/2, \qquad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{2.31}$$

alors de (2.13), (2.20), (2.26) et (2.31), il se fait

$$|f_{n-2,\alpha(m+1)}| \leqq a^2b_2C_{\alpha(m+1)}\Psi_2/2. \tag{2.32}$$

Pour k général, en considérant

$$|l_k(\alpha)f_{k,\alpha}| \leqq \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{p-1}\alpha_i|f_{k,\beta_i}|+|f_{k+1,\alpha}|\Big)+a^{n-k-1}|A_k(f)_\alpha|, \tag{2.33}$$

au lieu de (2.28), on peut avoir (2.27) par le même raisonnement. c. q. f. d.

Si l'on prend $\varepsilon>0$ assez petit, on peut supposer que $\dfrac{a^{n-p-1}}{2}<1$. Alors, on obtient

$$f_k(x\,;2) \ll b\Psi_2(x_1+\cdots+x_p)^2 \qquad (k=p+1, \cdots, n). \tag{2.34}$$

Compte tenu du

$$\Big(A_k(f)-\sum_{i=1}^{p}A_i(f)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\Big)(x\,;3) \ll \frac{M(|x|+\Psi(|x|))^2}{1-(|x|+\Psi(|x|))/\rho}(1+\Psi'(|x|))(x\,;3), \tag{2.35}$$

on obtient

$$\begin{aligned} f_k(x\,;3) &\ll a^{n-p-1}b\Psi_3(x_1+\cdots+x_p)^3/3 \\ &\ll b\Psi_3(x_1+\cdots+x_p)^3 \qquad (k=p+1, \cdots, n), \end{aligned} \tag{2.36}$$

par le même raisonnement que celui pour $f_k(x\,;2)$. En répétant ce processus, on obtient

$$(2.37)\qquad f_k(x\,;j)\ll b\Psi_j(x_1+\cdots+x_p)^j \qquad (k=p+1,\cdots,n,\ j\in\mathbf{N}),$$

ce qui démontre Théorème 2.1.

Remarque: soient $\mathscr{D}_\pm$ deux domaines divisées par une droite passant par l'origine. Supposons que $\lambda_i\in\mathscr{D}_+$ $(i=1,\cdots,p)$, $\lambda_i\in\mathscr{D}_-$ $(i=p+1,\cdots,q)$ et $\lambda_{q+1}=\cdots=\lambda_n=0$. Alors on peut avoir le même résultat que celui du Théorème 2.1.

Ensuite on va faire A_i $(i=1,\cdots,p)$ s'annuler modulo $x_{p+1},\cdots,x_n$ par le changement de variables conservant l'origine défini par

$$(2.38)\qquad \begin{cases}\xi_i=\phi_i(x_1,\cdots,x_p) & (i=1,2,\cdots,p)\\ \xi_k=x_k & (k=p+1,\cdots,n).\end{cases}$$

Les fonctions $\phi_1,\cdots,\phi_p$ holomorphes satisfaisant à $\partial(\phi_1,\cdots,\phi_p)/\partial(x_1,\cdots,x_p)\neq 0$ à l'origine doivent être déterminé par le système d'équations suivant.

$$(2.39)\qquad \sum_{i=1}^{p}(\lambda_i x_i+\varepsilon_i x_{i+1}+\tilde{A}_i(x_1,\cdots,x_p))\partial\phi_j/\partial x_i=\lambda_j\phi_j+\varepsilon_j\phi_{j+1}$$
$$(j=1,2,\cdots,p \text{ et } \phi_{p+1}=0),$$

où $\tilde{A}_i(x_1,\cdots,x_p)=A_i(x_1,\cdots,x_p,0\cdots0)$ $(i=1,2,\cdots,p)$.

Quant à l'existence de $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_p)$, on a

Théorème 2.2. *Le système d'equations* (2.39) *admet toujours une solution* ϕ *de la forme de* $\phi_j=x_j+\varphi_j$ $(j=1,2,\cdots,p)$, *où chaque* φ_j *est une fonction holomorphe à l'origine dont le développement de Taylor commence par les termes d'ordre* $\geqq 2$.

La démonstration du Théorème 2.2. est accomplié de la presque même, plutôt facile, manière que celle de Théoème 2.1.

3. Preliminaire II—De quelque équation différentielle ordinaire à singularité. Dans ce paragraphe, on considère l'équation suivante;

$$(3.1)\qquad z^{m+1}du/dz+(\gamma+\alpha z^m)u=f(z),$$

où $m\in\mathbf{N}$, $\gamma(\neq0)$, $\alpha\in\mathbf{C}$, et $f(z)$ est une fonction holomorphe à l'origine.

Tout d'abord, on remarque que l'équation générale

$$(3.2)\qquad z^{m+1}du/dz+a(z)u=f(z),$$

où $a(z)$ est holomorphe à l'origine avec $a(0)\neq0$, se ramène à (3.1) par un changement de variables. En effet, on introduit une fonction $\phi(z)$ par

$$(3.3)\qquad \frac{z^{m+1}\phi'(z)}{a(z)}=\frac{\phi(z)^{m+1}}{a_0+a_m\phi(z)^m},$$

où $a(z)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i z^i$. On voit facilement que $\phi(z)$ est déterminée comme une fonction holomorphe telle que $\phi\neq0$. En introduissant la nouvelle variable $\xi=\phi(z)$, (3.2) s'ecrit comme (3.1).

Ici, on se propose le

Problème: *chercher la condtion nécessaire et suffisante sur $f(z)$ pour que* (3.1) *admette une solution $u(z)$ étant holomorphe à l'origine.*

Remarque: la solution holomorphe de (3.1) est unique.

Supposons que $\gamma>0$ pour la simplicité. Alors, on voit que la solution de (3.1) est donnée par

$$u(z)=z^{-\alpha}e^{\gamma/mz^m}\int_0^z t^{\alpha-m-1}e^{-\gamma/mt^m}f(t)dt \qquad (z>0). \tag{3.4}$$

En prenant le nouveau variable $y(>0)$:

$$y=\gamma(t^{-m}-z^{-m})/m, \tag{3.5}$$

on a

$$u(z)=\gamma^{-1}\int_0^\infty e^{-y}(1+mz^m y/\gamma)^{-\alpha/m}f(z(1+mz^m y/\gamma)^{-1/m})dy. \tag{3.6}$$

Soit $f(z)=\sum_{n=0}^\infty f_n z^n$ et c le rayon de convergence, alors on a

Lemme 3.1. *Il se réalise*

$$u(z)=\gamma^{-1}\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty e^{-y}f_n z^n(1+mz^m y/\gamma)^{-(n+\alpha)/m}dy \qquad (0\leqq z<c), \tag{3.7}$$

où la série est convergente absoluement et uniformément dans $[0, c']$ $(0\leqq c'<c)$.

Démonstration. Il suffit de noter que $z(1+mz^m y/\gamma)^{-1}\leqq z$. c.q.f.d.

Etudions le problème en cas suivants:

I. Le cas où $\alpha=0$.
II. Le cas où $\alpha\neq 0$ et, $k+\alpha+jm\neq 0$ pour tout $k\in\{0, 1, \cdots, m-1\}$ et tout $j\in\bar{\mathbf{N}}$.
III. Le cas où $\alpha\neq 0$ et $k_0+\alpha+j_0m=0$ pour $k_0\in\{0, 1, \cdots, m-1\}$ et pour certain $j_0\in\bar{\mathbf{N}}$.

Tout d'abord, plaçons-nous dans le cas *I*. En définissant $\theta_k(z)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$ par

$$\theta_k(z)=z^k\int_0^\infty e^{-y}(1+mz^m y/\gamma)^{-k/m}dy, \tag{3.8}$$

Lemme 3.2. *Il se réalise*

$$\theta_k(z)=z^k-k\gamma^{-1}\theta_{k+m}(z). \tag{3.9}$$

Démonstration. De l'integration par partie. c.q.f.d.

Le lemme suivant est aussi facile à démontrer.

Lemme 3.3. *Il se rélise*

$$\theta_{k+sm}(z)=(-\gamma)^s\Big(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}\theta_k(z)$$
$$+\gamma z^k\sum_{j=1}^{s}(-\gamma)^{s-j}\Big(\prod_{i=j-1}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-z}z^{(j-1)m}$$
$$(k=1,\,2,\,\cdots,\,m,\ s=2,\,3,\,4\cdots), \tag{3.10}$$

où $\sigma(k\,;\alpha,\,j)=k+\alpha+jm$.

Démonstration. C'est immédiat de (3.9). c. q. f. d.

Posons ici

$$u_k(z)=\gamma\sum_{s=1}^{\infty}f_{k+sm}\sum_{j=1}^{s}(-\gamma)^{j-1}\Big(\prod_{i=j-1}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}z^{k+(s-j)m}\qquad(k=1,\,\cdots,\,m), \tag{3.11}$$

alors on a

Lemme 3.4. *Chaque* $u_k(z)$ *est holomorphe à l'origine.*

Démonstration. Notons que

$$u_k(z)=\gamma\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}f_{k+sm}\sum_{j=1}^{s}(-\gamma)^{s-j}c_jz^{k+(j-1)m}, \tag{3.12}$$

où $c_j=\prod_{i=0}^{j-2}\sigma(k\,;0,\,i)$ avec $\prod_{i=0}^{-1}\sigma(k\,;0,\,i)=1$. On voit facilement que

$$\Big(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}\leqq m^{1-s}\{(s-1)\,!\}^{-1}. \tag{3.13}$$

D'autre part, on a pour $j\geqq 3$

$$\prod_{i=0}^{j-2}\sigma(k\,;0,\,i)=(j-2)\,!\,m^{j-2}k\prod_{i=1}^{j-2}(1+k/mi)$$
$$\leqq(j-2)\,!\,m^{j-2}ke^{k\left(\sum_{p=1}^{j-2}p^{-1}\right)/m}\leqq(j-2)\,!\,m^{j-2}k(j-2)^{k/m}e^{k/m}. \tag{3.14}$$

Donc, on a

$$\Big|\gamma\sum_{j=1}^{s}(-\gamma)^{s-j}\prod_{i=0}^{j-2}\sigma(k\,;0,\,i)z^{k+(j-1)m}\Big|$$
$$\leqq|z|^k\gamma^s\Big\{1+k|z|^m/\gamma e^{k/m}k\sum_{j=3}^{s}(j-2)\,!\,m^{j-2}(j-2)^{k/m}(|z|^m/\gamma)^{j-1}\Big\}$$
$$\leqq|z|^k\gamma^sk(s-2)\,!\,m^{s-2}(s-2)^{k/m}e^{k/m}\{1+|z|^m/\gamma^{s-1}\}, \tag{3.15}$$

ce qui nous montre, en vertue de (3.13), que le rayon de convergence de $u_k(z)$ est plus grand que $m\sqrt{\gamma}c$. c. q. f. d.

Or, de (3.7) il se réalise

$$u(z)=\sum_{k=1}^{m}\Big\{\sum_{s=0}^{\infty}f_{k+sm}(-\gamma)^s\Big(\prod_{i=0}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}\Big\}\theta_k(z)+\sum_{k=1}^{m}u_k(z). \tag{3.16}$$

On énonce, ici, la réponse au problème pour le cas *I*.

Théorème 3.1. *Supposons que* $\alpha=0$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équations* (3.1) *admette une solution holomorphe à l'origine est*

$$\sum_{s=0}^{\infty} f_{k+sm}(-\gamma)^s\Big(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}=0 \qquad (k=1,\,\cdots,\,m). \tag{3.17}$$

Démonstration. Suffisance: il est évident de (3.16). Nécessité: soit $u(z)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ une solution holomorphe de (3.1), alors on a

$$\begin{cases}\gamma u_k=f_k \\ \sigma(k\,;0,\,u)u_{k+nm}+\gamma u_{k+(n+1)m}=f_{k+(n+1)m} \qquad (k=1,\,2,\,\cdots,\,m).\end{cases} \tag{3.18}$$

Donc on a immédiatement

$$\gamma^{n+1}u_{k+nm}=\prod_{j=0}^{n}\sigma(k\,;0,\,j)\sum_{s=0}^{n} f_{k+sm}(-\gamma)^s\Big(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}. \tag{3.19}$$

D'autre part, on a, vu que (3.13)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{j=0}^{n}\sigma(k\,;0,\,j)\Big)^{-1}\gamma^{n+1}u_{k+nm}=0, \tag{3.20}$$

car $u(z)$ est holomorphe, ce qui démontre (3.17). c.q.f.d.

Ensuite, dans le cas *II*, si l'on prend $\sigma(k\,;\alpha,\,j)$ au lieu de $\sigma(k\,;0,\,j)$ avec $k\in\{0,\,1,\,\cdots,\,m-1\}$, le raisonnement complètement même que celui pour le cas *I* est applicable. Dans le cas *III*, on voit que les fonctions $\theta_{k_0}(z),\,\cdots,\,\theta_{k_0+j_0m}(z)$ deviennent holomorphes pour $(k_0,\,j_0)$ tel que $\sigma(k_0\,;\alpha,\,j_0)=0$. Donc, il suffit de prendre $\theta_{k_0+(j_0+1)m}(z)$ à la place de $\theta_{k_0}(z)$. On résume des résultats dans le théorème suivant:

Théorème 3.2. *Plaçon-nous dans le cas II. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (3.1) *admette une solution holomorphe à l'origine est*

$$\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\prod_{j=0}^{s-1}\sigma(k\,;\alpha,\,j)\Big)^{-1}(-\gamma)^s f_{k+sm}=0 \qquad k=0,\,\cdots,\,m-1). \tag{3.21}$$

Théorème 3.2. *Dans le cas III, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (3.1) *admette une solution holomorphe à l'origine est*

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\Big\{\prod_{j=j_0+1}^{s+j_0}\sigma(k_0:\alpha,\,j)\Big\}^{-1}(-\gamma)^s f_{k_0+(s+j_0+1)m}=0 \ \textit{pour}\ k_0\in\{0,\,1,\,\cdots,\,m-1\}\ \textit{et} \\ j_0\in\mathbf{N}\ \textit{tels que}\ \sigma(k_0\,;\alpha,\,j_0)=0,\ \textit{pour les autres}\ k\in\{0,\,1,\,\cdots,\,m-1\},\ (3.21).\end{cases} \tag{3.22}$$

4. Cas de deux variables. Dans ce paragraphe, on considère le cas où $n=2$, c'est-à-dire l'équation suivante;

$$(\lambda x+a(x,\,y))u_x+b(x,\,y)u_y=u\,, \tag{4.1}$$

où $a(x, y)$ et $b(x, y)$ s'annulent à l'origine avec un ordre $\geqq 2$. Compte tenu de (1.3), il est nécessaire que

$$\lambda^{-1} \in \mathbf{N}, \tag{4.2}$$

pour l'existence de solution. Alors, il nous suffit de considérer

$$(x+a(x, y))u_x+b(x, y)u_y=ku \tag{4.3}$$

à la place de (4.1), où $k=\lambda^{-1}$.

Premièrement, on prend le cas très particulier suivant,

$$(x+a(x, y))u_x=ku. \tag{4.4}$$

Dans ce cas, par le changement de variables défini par

$$\begin{cases} \xi=x+a(x, y) \\ \eta=y, \end{cases}$$

l'équation (4.4) se ramène à

$$(x+xA(x, y))u_x=ku. \tag{4.5}$$

Thèorème 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (4.5) *admette au moins une solution est* $A(0, y)=0$.

Démonstration. Suffisance: soit $A(x, y)=xB(x, y)$, alors

$$u(x, y)=\phi(y)x^k e^{-k\int^x B(\xi, y)(1+A(\xi, y))^{-1}d\xi}$$

est une solution, $\phi(y)$ étant une fonction holomorphe.

Nécessité: dans un voisinage assez petit de l'origine, on a

$$\frac{u_x}{u}=\frac{k}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A(0, y)^n+H(x, y),$$

où $H(x, y)$ est holomorphe, ce qui nous donne

$$u(x, y)=G(x, y)x^{k(1+A(0, y))^{-1}}, \qquad (G(x, y)\text{: holomorphe}).$$

D'où, $u(x, y)$ ne saurait être holomorphe. c.q.f.d.

Ensuite on considère le cas où $b(x, y)\not\equiv 0$. Posons

$$\begin{cases} a(x, y)=\sum_{i=2}^{\infty} a_i(x, y) \\ b(x, y)=\sum_{i=2}^{\infty} b_i(x, y), \end{cases} \tag{4.6}$$

où a_i et b_i expriment les parties homogènes de degré i. En vertue de Théorème 2.1, on peut supposer que $a_i(x, 0)=b_i(x, 0)=0$ pour tout i. Dans cet article, je n'ai étudié que les très particuliers—le cas où $a=a_2$ et $b=b_2$. On pose ici

$$\begin{cases} a_2(x, y)=A_1xy+A_2y^2 \\ b_2(x, y)=B_1xy+B_2y^2. \end{cases} \tag{4.7}$$

On obtient la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solution, si $A_2=0$. Autrement, il nous reste encore à étudier. On y reviendra à la fin de paragraphe. On étudie le problème en cas suivants:

I. Le cas ou $A_1=0$.
II. Le cas ou $A_1\neq 0, B_2=0$.
III. Le cas ou $A_1B_2\neq 0,\ B_1=0$.
IV. Le cas ou $A_1B_1B_2\neq 0$.

Le cas IV est le plus important dans ce paragraphe.

Dans le cas I, on voit facilement que $u(x, y)=x^k$ est une solution.

Dans le cas II, la solution $u(x, y)$, si elle existe, peut être divisée par x. Posons ici

$$(4.8)\qquad u(x, y)=x^m v(x, y) \qquad (m\in\mathbf{N} \text{ et } v(0, y)\not\equiv 0),$$

alors, $v(x, y)$ doit satisfaire à

$$(4.9)\qquad (x+A_1xy(v_x+B_1xyv_y=\{(k-m)-mA_1y\}v.$$

Donc $v(x, y)$ peut être divisée par x, ce qui nous conduit à une contradiction.

Ensuite on va aborder le cas III. Considérons la solution formelle de la forme suivante:

$$(4.10)\qquad u(x, y)\sim\sum u_n(y)x^n.$$

Les coefficients $u_n(y)$ $(n\in\bar{\mathbf{N}})$ doivent être déterminé par

$$(4.11)\qquad B_2y^2du_n/dy+n(1+A_1y)u_n=ku_n \qquad (n\in\mathbf{N},\ u_{-1}=0).$$

Comme on le voit facilement, $u_n=0$ $(n\neq k)$, et pour $n=k$, on a

$$(4.12)\qquad B_2ydu_k/dy+kA_1u_k=0.$$

Il est facile de voir que l'équation (4.12) admet une solution si et seulement si $-kA_1/B_2\in\mathbf{N}$.

Enfin, on se place dans le dernier cas. Dans ce cas, en prenant la solution formelle donnée par (4.10), on a

$$(4.13)\qquad B_2y^2du_n/dy=n(1+A_1y)u_n+B_1ydu_{n-1}/dy=ku_n \qquad (n\in\bar{\mathbf{N}},\ u_{-1}=0).$$

On voit facilement que $u_i=0$ $(i=0, \cdots, k-1)$ et qu'il n'existe aucune solution, si $u_k=0$. Pour u_k, on obtient aussi l'équation (4.12), donc il faut $-kA_1/B_2\in\mathbf{N}$ pour l'existence de solution. En mettant $l=-kA_1/B_2$, on a

$$(4.14)\qquad u_k(y)=C_ky^l \qquad (C_k\neq 0).$$

Lemme 4.1. *Pour l'existence de la solution formelle, il est nécessaire et suffisante que*

$$(4.15)\qquad -A_1/B_2\in\mathbf{N}.$$

Démonstration. Necessité: d'après (4.13), on voit que u_{k+1} doit satisfaire à

$$B_2 y^2 du_{k+1}/dy + \{1+(k+1)A_1 y\} u_{k+1} = -lB_1 C_k y^l. \tag{4.16}$$

Donc, vu Théorème 3.2 et Théorème 3.3, il faut que $-(k+1)A_1/B_2 \in \mathbf{N}$ et $-(k+1)A_1/B_2 \geqq l$ pour que u_{k+1} existe, car $lB_1C_k \neq 0$, ce qui montre (4.15).

Suffisance: soit $m=-A_1/B_2 \in \mathbf{N}$, alors u_{k+1} existe comme un polynôme de degré $l+m$, plus concrètement on a

$$u_{k+1}(y) = -lB_1 C_k y^l \int_0^\infty e^{-t}(1+B_2 yt)^m dt. \tag{4.17}$$

Alors, on voit que $u_{k+s}(y)$ $(s \in \mathbf{N})$ sont déterminées successivement par (4.13) et données par

$$u_{k+s}(y) = \frac{B_2}{s}\int_0^\infty e^{-t} g_{k+s-1}(y(1+B_2 yt/s)^{-1})(1+B_2 yt/s)^{l+ms} dt \tag{4.18}$$

où $g_{k+s-1}(y) = y du_{k+s-1}(y)/dy$. c. q. f. d.

Ensuite étudions la convergence de la solution formelle. Pour cela, il suffirait de considérer le cas où $B_2=1$ et $-B_1C_k/B_2=1$. Par le Lemme 4.1, on voit que chaque $u_{k+s}(y)$ est de la forme suivante;

$$u_{k+s}(y) = y^l \sum_{j=0}^{sm} P_{k+s}^j y^j \qquad (P_{k+s}^j \geqq 0). \tag{4.19}$$

Lemme 4.2. *Posons $Q_{k+s}^j = P_{k+s}^j/m^j$, alors il se réalise*

$$\begin{cases} Q_{k+s+1}^r \leqq l \sum_{j=0}^{r} Q_{k+s}^j & (0 \leqq r \leqq sm) \\ Q_{k+s+1}^{ms+i} \leqq l \sum_{j=0}^{sm} Q_{k+s}^j & (1 \leqq i \leqq m). \end{cases} \tag{4.20}$$

Démonstration. De (4.18) et (4.19), on obtient

$$u_{k+s+1}(y) = y^l \sum_{j=0}^{sm} (j+l) P_{k+s}^j \sum_{p=0}^{m(s+1)-j} p!\,(s+1)^{-(p+1)}\, {}_{m(s+1)-j}C_p\, y^{j+p} \tag{3.21}$$

Vu que $l+j \leqq l(s+1)$ et ${}_{m(s+1)-j}C_p \cdot p! \leqq \{m(s+1)\}^p$, on a

$$u_{k+s+1}(y) \ll l \sum_{j=0}^{sm} \sum_{p=0}^{m(s+1)-j} P_{k+s}^j y^j (my)^p. \tag{4.22}$$

Donc, par la substitution $\eta = my$, on obtirnt

$$\sum_{j=0}^{m(s+1)} Q_{k+s+1}^j \eta^j \ll l \sum_{j=0}^{ms} \sum_{p=0}^{m(s+1)-j} Q_{k+s}^j \eta^{j+p}, \tag{4.23}$$

ce qui démontre (4.20). c. q. f. d.

Ici, on introduit $\mu_q(s)$ $(q,\ s \in \bar{\mathbf{N}})$ défini par

$$\mu_0(s) = 1, \quad \mu_q(s) = \sum_{i=1}^{s} \mu_{q-1}(i) \qquad (\mu_q(0)=0, \text{ si } q \neq 0). \tag{4.24}$$

Le lemme suivant est facile à voir:

Lemme 4.3. *Il se réalise*

$$(4.25)\qquad \sum_{i=0}^{j}\mu_i(s-1)=\mu_j(s)\qquad (j,\ s\in\mathbf{N}).$$

On a ensuite le

Lemme 4.4. *Il se réalise*

$$(4.26)\qquad Q^j_{k+s+1}\leqq l^s\mu_j(s+1)\qquad (0\leqq j\leqq ms)$$

$$(4.27)\qquad Q^j_{k+s+1}\leqq l^s\mu_{ms}(s+1)\qquad (ms\leqq j\leqq m(s+1)).$$

Démonstration. Premièrement, on va démontrer (4.26) par la méthode d'induction mathématique en s. Notons que

$$(4.28)\qquad Q^j_{k+1}\leqq 1\qquad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$$

$$(4.29)\qquad Q^{ms+i}_{k+s+1}\leqq Q^{ms}_{k+s+1}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

$$(4.30)\qquad Q^0_{k+s+1}\leqq lQ^0_{k+s}\qquad (s\in\mathbf{N}).$$

Pour $s=1$, on voit facilement que (4.26) se réalise de (4.20) et (4.29). Supposons que (4.26) soit vérifié pour $s\leqq t$, alors on a

$$(4.31)\qquad Q^j_{k+t+1}\leqq l\sum_{i=0}^{j}l^{t-1}\mu_i(t)=l^t\sum_{i=0}^{j}\mu_i(t)=l^t\mu_j(t+1)$$

de (4.25). La démonstration de (4.27) est accomplie de la même façon.

Lemme 4.5. *Il se réalise*

$$(4.32)\qquad \mu_p(s)={}_{s+p-1}C_p\qquad (p\in\bar{\mathbf{N}},\ s\in\mathbf{N}).$$

Démonstration. Pour $p=0$, il est évident. D'autre part, compte tenu de $\mu_{p+1}(s)=\sum_{r=1}^{s}\mu_p(r)$, il suffit de vérifier

$$(4.33)\qquad {}_{s+p}C_{p+1}=\sum_{r=1}^{s}{}_{r+p-1}C_p$$

pour chaque p. On peut le vérifier par la méthode d'induction mathématique en s. c. q. f. d.

On est prêt à démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Dans le cas IV, la condition nécessaire et suffisante pour que la solution existe est donnée par* (4.15).

Démonstration. Nécessité: ce n'est rien d'autre que le Lemme 4.1.

Suffisance: il suffit de démontrer la convergence de la solution formelle. En vertue de Lemme 4.3 et Lemme 4.4, on a

$$(4.34)\qquad P^j_{k+s+1}\leqq l^s m^j\mu_{ms}(s+1),$$

puis d'après Lemme 4.5 on obtient

(4.35) $$P^j_{k+s+1} \leqq l^s m^j {}_{(m+1)s}C_{ms}.$$

Donc on a

(4.36) $$u_{k+s+1}(y) \ll l^s {}_{(m+1)s}C_{ms} y^l \sum_{j=0}^{ms} (my)^j \ll (2^{m+1}l)^s y^l \sum_{j=0}^{ms} (my)^j$$

et

(4.37) $$u_{k+s+1}(y) x^{k+s+1} \ll (2^{m+1}lx)^s (1-my)^{-1} x^{k+1} y^l,$$

ce qui nous montre que la solution formelle converge absoluement quand $|x|+|y|$ assez petit. c.q.f.d.

Pour terminer ce paragraphe, on donne un résultat concernant le cas où $A_2 \neq 0$.

Théoèrme 4.3. *Soit* $A_2B_2 \neq 0$, *alors l'équation*

(4.38) $$(x+A_1xy+A_2y^2)u_x+B_2y^2u_y=ku$$

n'admet aucune solution.

Remarque: quand $B_2=0$, l'équation (4.38) admet une solution si et seulement si $A_1=0$, vu que Théorème 4.1.

Or, soit $f(y)$ une fonction holomorphe à l'origine. On note $\tau(f)=p$, si $f(y) = y^p f_0(y)$ avec $f_0(0) \neq 0$. Quand $f=0$, on note $\tau(f)=-\infty$.

Lemme 4.6. *Soit* $\tau(f)=p$, *alors pour la solution* u *de* (3.1) *on a* $\tau(u)=p$.

Démonstration. C'est évident. c.q.f.d.

Pour l'équation (4.38), on prend aussi la solution formelle de la forme de (4.10). Alors on obtient

(4.39) $$B_2y^2du_n/dy + \{(n-k)+nA_1y\}u_n+(n+1)A_2y^2u_{n+1}=0.$$

Donc on a

(4.40) $$\tau(u_{k+r+1})=2+\tau(u_{k+r+2}) \qquad (r \in \bar{\mathbf{N}}),$$

ce qui nous donne

(4.41) $$\tau(u_{k+1}) \geqq 2r,$$

d'où $u_{k+1}=0$. Ensuite on a $u_{k+s}=0$ ($s \in \mathbf{N}$). Donc u_k satisfait a

(4.42) $$B_2y^2du_k/dy+kA_1u_k=0.$$

L'équation (4.42) admet une solution si et seulement si $-kA_1/B_2$ $(=l) \in \bar{\mathbf{N}}$, alors $u_k=C_ky^l$. Donc, u_{k-1} doit satisfaire à

(4.43) $$y^2du_{k-1}/dy + \{-1/B_2-(l+A_1/B_2)y\}u_{k-1} = -kA_2C_ky^l/B_2,$$

mais, compte tenu du résulttat du paragraphe 3, l'équation (4.43) n'admet aucune solution, ce qui complète la démonstration du Théorème 4.3. c. q. f. d.

Si l'on se limite à l'équation

$$(4.44)\qquad (x+A_1xy+A_2y^2)u_x+(B_1xy+B_2y^2)u_y=ku\,, \qquad (A_2\neq 0)$$

la solution n'existe pas, je pense. Mais il n'est pas forcément nécessaire pour l'existence de solution que $a(0, y)=0$ dans (4.3). En effet, l'équation suivante;

$$(4.45)\qquad \{x-xy+\alpha(y^2-3y^3)\}\,u_x+y^2u_y=u$$

admet la solution $u=\alpha y^3+xy$.

5. Cas de trois variables I. Dans ce paragraphe et dans le prochain, on considére le cas de trois variabes, parce qu'il se pourrait sembler que le cas de deux variables est trop particulier.

Soient λ, μ et υ les valeur propres de $\mathcal{A}$. On divise son étude aux cas suivants:

Cas I. le cas où λ, $\mu\neq 0$ *et* $\upsilon=0$.
Cas II. le cas où $\lambda\neq 0$ *et* $\mu=\upsilon=0$.

Suivant à chaque cas, on considère réspectivement

$$(I)\quad \{(\lambda x+\varepsilon y)+(Ax+\alpha y)z\}\,u_x+\{\mu y+(\beta x+By)z\}\,u_y+\{cz^2-(ax+by)z\}\,u_z=u\,,$$

et

$$(II)\quad \{A(x, y)-(px+qy)z\}\,u_x+\{B(x, y)-(rx+sy)z\}\,u_y+\{\lambda z-(ax+by)z\}\,u_z=u\,.$$

Remarques: 1. on peut supposer que $\varepsilon=0$, si $\lambda\neq\mu$ dans (I).
2. $A(x, y)$ et $B(x, y)$ sont des formes quadratiques en (x, y).
3. on peut supposer que $a=1$, $b=0$ dans (II).

Dans ce paragraphe, on étudie seulement le cas I. Le cas II est étudié dans le paragraphe suivant. Soit $\tilde{\Lambda}$ l'enveloppe convexe de $\{\lambda, \mu\}$. On impose l'hypothèse suivant à $\tilde{\Lambda}$ tout dans ce paragraphe:

$$\tilde{\Lambda}\not\ni 0,$$

et, de plus, on suppose que $c\neq 0$.

Considérons la solution formelle u de (I) à la forme suivante:

$$(5.1)\qquad u\sim\sum u_k^{j+k}(z)x^jy^k\,,$$

alors, pour chaque $N\in\mathbf{N}$, on obtient

$$(5.2)\qquad cz^2\frac{dU_N}{dz}+\Lambda_NU_N+zA_NU_N=zB_N\frac{dU_{N-1}}{dz}\,,$$

où $U_N={}^t(u_0^N, \cdots, u_N^N)$ avec $U_0=0$, Λ_N et A_N étant les $(N+1)\times(N+1)$ matrices données par

$$\Lambda_N=\begin{bmatrix} \sigma_0^N & & & 0 \\ N\varepsilon & \sigma_0^N & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon & \sigma_N^N \end{bmatrix}, \qquad A_N=\begin{bmatrix} \tau_0^N & \beta & & 0 \\ N\alpha & \tau_1^N & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & N\beta \\ 0 & & \alpha & \tau_N^N \end{bmatrix},$$

où $\sigma_j^N=(N-j)\lambda+j\mu-1$ et $\tau_j^N=(N-j)A+jB$, et B_N la $N\times(N+1)$ matrice donnée par

$$B_N=\begin{bmatrix} a & & 0 \\ b & \ddots & \\ & \ddots & a \\ 0 & & b \end{bmatrix}.$$

On commence par le

Lemme 5.1. *Si l'équation suivante:*

$$cz^2\frac{dU_N}{dz}+\Lambda_N U_N+zA_N U_N=0 \tag{5.3}$$

admet une solution $U_N\not\equiv 0$, alors il se fait $d\acute{e}t\,\Lambda_N=0$.

Démonstration. Il se réalise que $U_N^{(k)}(0)=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$, si $d\acute{e}t\,\Lambda_N=0$.
c. q. f. d.

On divise ici son étude de la façon suivante:

(I.1) *le cas où* $\lambda\neq\mu$ $(\varepsilon=0)$
(I.2) *le cas où* $\lambda=\mu$ *et* $\varepsilon=0$
(I.3) *le cas où* $\lambda=\mu$ *et* $\varepsilon\neq 0$,

et on se limite son étude au cas où $\beta=0$. Tout d'abord, on considère le cas (I.1). Soit $N\in\mathbf{N}$ un nombre tel que $d\acute{e}t\,\Lambda_N=0$. Alors il existe un $k\in\bar{\mathbf{N}}$ $(k\leqq N)$ tel que l'on ait $\sigma_k^N=0$. En mettant $U_N={}^t(u_0, \cdots, u_N)$, on obtient

$$\begin{cases} cz^2\dfrac{du_j}{dz}+\sigma_j^N u_j+(N+1-j)\alpha z u_{j-1}+\tau_j^N z u_j=0 \quad (j=0, 1, \cdots N,\ j\neq k) \\ cz\dfrac{du_k}{dz}+(N+1-k)\alpha u_{k-1}+\tau_k^N u_k=0, \end{cases} \tag{5.4}$$

où $u_{-1}=0$. Comme $\sigma_j^N\neq 0$ $(j\neq k)$, on a immédiatement $u_j(0)=0$ $(j\neq k)$. Donc il existent $\rho_j\in\tilde{\Lambda}$ $(j\neq k)$ telsque $u_j(z)=z^{\rho_j}v_j(z)$, où $z_j(0)\neq 0$ si $u_j\not\equiv 0$. Quand $u_j\equiv 0$, on pose $\rho_j=+\infty$. On voit facilement que $\rho_j=0$ $(j=0, 1, \cdots, k-1)$ et

$$\rho_j=\begin{cases} +\infty \quad (\alpha=0) \\ \rho_{j-1}+1 \quad (\alpha\neq 0) \end{cases} \qquad (j=k+1, \cdots, N), \tag{5.5}$$

avec $u_k=z^{\rho_k}v_k$ $(\rho_k\in\mathbf{N})$. Donc on a pour v_k

$$cz^{\rho_k+1}\frac{dv_k}{dz}+(c\rho_k+\tau_k^N)z^{\rho_k}v_k=0. \tag{5.6}$$

Si $v_k\equiv 0$, on a $U_N=0$, ce qui nous montre que $u\equiv 0$ dans (I). Donc il faut

$$c\rho_k+\tau_k^N=0 \tag{5.7}$$

pour que l'équation (I) admette au moins une solution.

En moyennant de $v_1, \cdots, v_N$, on peut représenter (5.4) comme suit:

$$\begin{cases} v_j=0 \qquad (j=0,1,\cdots,k-1) \\ \dfrac{dv_k}{dz}=0 \\ cz^2\dfrac{dv_j}{dz}+\{\sigma_j^N+(c\rho_j+\tau_j^N)z\}v_j+(N+1-j)\alpha v_{j-1}=0 \qquad (j=k+1,\cdots,N). \end{cases} \tag{5.8}$$

Quant à l'existence de solution de (5.8), on obtient le

Lemma 5.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que* (5.8) *admette au moins une solution est donnée par*

$$\begin{cases} c\rho_k+\tau_k^N=0, \qquad \textit{quand } \alpha=0 \\ c\rho_k+\tau_k^N=0 \quad \textit{et} \quad m=-1+(A-B)/c\in\bar{\mathbf{N}}, \qquad \textit{quand } \alpha\neq 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Démonstration. Quand $\alpha=0$, on a immédiatement $v_j=0$ $(j\neq k)$ et $v_k=C_k$ (*constante*). Quand $\alpha\neq 0$, en notant que

$$c\rho_{k+s}+\tau_{k+s}^N=s(c+B-A) \qquad (s=0,1,\cdots,N-k), \tag{5.10}$$

on voit qu'il faut $m\in\bar{\mathbf{N}}$, vu le Théorème 3.2. La suffisance est aussi assurée par le Théorème 3.2. c.q.f.d.

Remarque: quand $\alpha=0$, on a $u_k=C_kz^{\rho_k}$ et $u_j=0$ $(j=k)$. Quand $\alpha\neq 0$, on obtient $u_0=\cdots=u_{k-1}=0$, $u_k=C_kz^{\rho_k}$ et $u_{k+s}=C_k\theta_s z^{\rho_{k+s}}P_{ms}(z)$ $(\theta_s\neq 0)$, $P_j(z)$ étant un polynôme de degré j.

Ensuite on considère l'existence de solution formelle. On étudie premièrement le cas où $\alpha=0$. On pose $U_{N+1}={}^t(u_0,\cdots,u_N)$, voit $u_j=0$ $(j\neq k, k+1)$ et on obtient

$$\begin{cases} cz^2\dfrac{du_k}{dz}+(\sigma_k^{N+1}+\tau_k^{N+1}z)u_k=aC_k\rho_kz^{\rho_k} \\ cz^2\dfrac{du_{k+1}}{dz}+(\sigma_{k+1}^{N+1}+\tau_{k+1}^{N+1}z)u_{k+1}=bC_k\rho_kz^{\rho_k}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Donc, si $\rho_k\neq 0$, on voit qu'il faut, vu le Théorème 3.2,

$$\begin{cases} -\dfrac{\tau_k^{N+1}}{c}\in\bar{\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad -\dfrac{\tau_k^{N+1}}{c}\geqq\rho_k \\ -\dfrac{\tau_{k+1}^{N+1}}{c}\in\bar{\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad -\dfrac{\tau_{k+1}^{N+1}}{c}\geqq\rho_k, \end{cases} \tag{5.12}$$

pour que u_k et u_{k+1} existent pour a, b arbitraires. En joignant (5.7) et (5.12), on voit qu'il faut

$$-\frac{A}{c},\quad -\frac{B}{c}\in\bar{\mathbf{N}} \tag{5.13}$$

en conséquence. Quand $\rho_k=0$, c'est-à-dire $\tau_k^N=0$, on peut voir facilement que

$U_{N+s}=0$ $(s=1, 2, \cdots)$, ce qui garantit l'existence de solution de (I). Pour le cas où $\rho_k \neq 0$, on peut démontrer la proposition suivante par la méthode d'induction mathématique.

Proposition 5.1. *Soit* $\alpha=0$. *Supposons que* (5.7) *et* (5.13) *se réalisent, alors* $U_p(z)$ $(p=1, 2, \cdots)$ *est successivement déterminée par* (5.2).

Remarque: posons $U_{N+s}={}^t(u_0^{N+s}, \cdots, u_{N+s}^{N+s})$, alors on voit que $u_0^{N+s}=\cdots=u_{k-1}^{N+s}=0$ et que u_{k+p}^{N+s} est un polynôme de degré $\rho_k-\tau_p^s/c$ $(0\leqq p\leqq N-k-s)$.

Ensuite on étudie la convergence de la solution formelle obtenue en haut. Comme un modèle, il suffirait de considérer le cas où $a=b=c=C_k=\rho_k=-A=B=\lambda=\mu=1$.

Remaque: nous avons supposé que $\lambda=\mu$, mais nous serions permi de supposer que $\lambda=\mu$, car le problème de la convergence concerne seulement l'estimation de la solution formelle.

En posant $U_{N+s}={}^t(0, \cdots, 0, u_k^{N+s}, \cdots, u_{N+s}^{N+s})$ $(s=1, 2, \cdots)$, on considére l'équation suivante:

$$z^2\frac{du_{k+t}^{N+s+1}}{dz}+\{(s+1)-(s+2)z\}u_{k+t}^{N+s+1}=z\left(\frac{du_{k+t}^{N+s}}{dz}+\frac{du_{k+t-1}^{N+s}}{dz}\right), \tag{5.14}$$
$$(k+t\leqq N+s+1)$$

avec $U_N=(0, \cdots, 0, z, 0, \cdots, 0)$ (z étant le $(k+1)$-ième composant). En mettant

$$u_{k+t}^{N+s+1}=z\sum_{r=0}^{s+1}P_{s+1,t}^r z^r, \tag{5.15}$$

on obtient

$$P_{s+1,t}^r\leqq\sum_{j=0}^{r}P_{s,t}^j+\sum_{j=0}^{r}P_{s,t-1}^j \qquad (r\leqq s+1), \tag{5.16}$$

où $P_{s+1,t}^r=0$, si $r>s+1$ ou $t+k>N+s+1$.

Lemma 5.3. *Il se réalise*

$$P_{s+1,0}^r\leqq\mu_r(s+1) \tag{5.17}$$

$$P_{s+1,t}^r\leqq\mu_t(r)\mu_{r+t}(s)+\mu_{t-1}(r+1)\mu_{r+t}(s+1) \qquad (t\geqq 1). \tag{5.18}$$

Démonstration. Vu (4.25), l'inégalité (5.17) est facilement démontrée par la méthode d'induction mathématique. L'inégalité (5.18) est aussi démontrée par la méthode d'induction. Soit $t=1$, alors l'inégalité suivante doit être démontrée:

$$P_{s+1,1}^r\leqq\mu_1(r)\mu_{r+1}(s)+\mu_0(r+1)\mu_{r+1}(s+1). \tag{5.19}$$

En notant (4.24), (5.17) et $P_{1,1}^0=1$, on peut vérifier (5.19) pour $r=0$. Puis, supposons que (5.19) se réalise pour $r=0, 1, \cdots, p$ et l'inégalité suivante se réalies:

(5.20) $$\sum_{j=0}^{r-1} P_{s,1}^{j} \leqq \mu_1(r)\mu_r(s) \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ p),$$

alors on a

(5.21) $$\sum_{j=0}^{p} P_{s,1}^{j} \leqq \mu_1(p+1)\mu_{p+1}(s),$$

car

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p} P_{s,1}^{j} &\leqq \mu_1(p)\mu_p(s)+\mu_1(p)\mu_{p+1}(s-1)+\mu_{p+1}(s)\\ &=\mu_1(p)\mu_{p+1}(s)+\mu_{p+1}(s)=\mu_1(p+1)\mu_{p+1}(s).\end{aligned}$$

Donc on a

(5.22) $$\begin{aligned}P_{s+1,1}^{p+1} &\leqq P_{s,1}^{p+1}+\sum_{j=0}^{p} P_{s,1}^{j}+\mu_{p+1}(s+1)\\ &\leqq P_{s,1}^{p+1}+\mu_1(p+1)\mu_{p+1}(s)+\mu_{p+1}(s+1),\end{aligned}$$

ce qui démontre

(5.23) $$P_{s+1,1}^{p+1} \leqq \mu_1(p+1)\mu_{p+2}(s)+\mu_{p+2}(s+2).$$

Ici on suppose que

(5.24) $$\sum_{j=0}^{r} P_{s,t-1}^{j} \leqq \mu_{t-1}(r+1)\mu_{t+r-1}(s),$$

pour tout $r \in \bar{\mathbf{N}}$ et pour $t=1,\ 2,\ \cdots,\ \tau$, et que

(5.25) $$\sum_{j=0}^{r} P_{s,\tau}^{j} \leqq \mu_\tau(r+1)\mu_{\tau+r}(s) \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ p)$$

et

(5.26) $$P_{s+1,\tau}^{r} \leqq \mu_\tau(r)\mu_{\tau+s}(s)+\mu_{\tau-1}(r+1)\mu_{r+\tau}(s+1). \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ p)$$

Alors, on a

(5.27) $$\begin{aligned}P_{s+1,\tau}^{p+1} &\leqq P_{s,\tau}^{p+1}+\sum_{j=0}^{p} P_{s,\tau}^{j}+\sum_{j=0}^{p+1} P_{s,\tau-1}^{j}\\ &\leqq P_{s,\tau}^{p+1}+\mu_\tau(p+1)\mu_{\tau+p}(s)+\mu_{\tau-1}(p+2)\mu_{\tau+p}(s).\end{aligned}$$

Donc, en faisant la sommation de deux côtés de (5.27) en s, on obtient

(5.28) $$\begin{aligned}P_{s+1,\tau}^{p+1} &\leqq \mu_\tau(p+1)\mu_{\tau+p+1}(s)+\mu_{\tau-1}(p+2)\mu_{\tau+p+1}(s)\\ &\leqq \mu_\tau(p+1)\mu_{\tau+p+1}(s)+\mu_{\tau-1}(p+2)\mu_{\tau+p+1}(s+1).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

(5.29) $$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p+1} P_{s,\tau}^{j} &\leqq \mu_\tau(p+1)\mu_{\tau+p}(s)+\mu_\tau(p+1)\mu_{\tau+p+1}(s)+\mu_{\tau-1}(p+2)\mu_{\tau+p+1}(s)\\ &\leqq \mu_\tau(p+1)\mu_{\tau+p+1}(s)+\mu_{\tau-1}(p+2)\mu_{\tau+p+1}(s)\\ &=\mu_\tau(p+2)\mu_{\tau+p+1}(s),\end{aligned}$$

ce qui démontre (5.18). c.q.f.d.

Maintenant, on est prêt à démontrer la proposition suivante ;

Proposition 5.2. *La solution formelle obtenue en haut converge dans un voisinage de l'origine de* $\mathbf{C}^3$.

Démonstration. D'apres (4.32) et (5.18), on a

$$P_{s+1,t}^{r} \leqq 2^{2r+2t+s}, \tag{5.30}$$

ce qui garantit la convergence de la solution formelle. c.q.f.d.

Ensuite, on va aborder l'étude du cas où $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, il s'entend facilement que (5.13) est aussi nécessaire pour l'existence de solution formelle. Au fait, (5.13) est suffisant pour avoir une solution formelle. Donc, il ne reste qu'à étudier se convergence. Il suffirait de considérer le mo èle suivant:

$$(5,31) \quad z^2 \frac{du_{k+t}^{N++1}}{dz} + \{(s+1)-(2s+3)z\}\, u_{k+t}^{N+s+1}$$

$$= K\left\{\frac{(s+1)}{2}\, u_{k+t-1}^{N+s+1} + \frac{d}{dz}\left(\frac{u_{k+t-1}^{N+s}}{2} + u_{k+t}^{N+s}\right)\right\} \quad (K>0),$$

$$(s,\ t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t+k \leqq N+s+1)$$

avec $U_{N+s} = {}_t(0 \cdots 0,\ u_k^{N+s},\ \cdots,\ u_{N+s}^{N+s})$ et $U_{k+t}^{N} = z(1+z+\cdots+z^t)$ $(t=0,\ 1,\ \cdots,\ N-\alpha)$. Sous les hypothèses (5.9) et (5.13), on peut avoir au fait une solution formelle, et par le raisonnement presque même que celui dans le cas où $\alpha=0$, peut démontrer la convergence de la solution formelle. Résumons les résultats obtenus en haut comme un théorème:

Théorème 5.1. *Soit* $\lambda \neq \mu$ *(donc* $\varepsilon=0$*). La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (I) admette au moins une solution est*

(1) *il existe un* $(N,\ k) \in \mathbf{N} \times \bar{\mathbf{N}}$ $(k \leqq N)$ *tel que* $(N-k)\lambda + k\mu = 1$

(2) (5.9) *se réalise, si* $(N-k)A+kB=0$

(3) (5.13) *se réalise, si* $(N-k)A+kB \neq 0$.

Considérons le cas (*I*.2). Dans ce cas, on peut supposer que $\beta=0$ sans perdre la généralité. Il faut qu'il existe un $(N,\ k) \in \mathbf{N} \times \bar{\mathbf{N}}$ $(k \leqq N)$ tel que dét $\Lambda_N=0$ et $\rho = -\{(N-k)A+kB\}/c \in \bar{\mathbf{N}}$ pour que l'équation (*I*) admette au moins une solution.

On se limite d'abord au cas suivant:

(*I*,2,*A*) $A=B$.

Alors, l'équation suivante est a résoudre:

$$cz\frac{dU_N}{dz} + A_N U_N = 0. \tag{5.32}$$

cette équation admet une solution comme suit:

$$U_N = {}^t(0,\ \cdots,\ 0,\ z^\rho). \tag{5.33}$$

Remarque: quand $\rho=0$, l'équation (*I*) admet toujours une solution.

Quand $\rho \neq 0$, on voit qu'il est nécessaire que

(5.34) $$-\frac{A}{c}\in\bar{\mathbf{N}},$$

pour que U_{N+1} existe pour a, b quelconques. Au fait, cette condition (5.34) assure l'existence de U_{N+1}. Il est de même que $U_{+s}(s=2, 3, \cdots)$ sont déterminés successivement par (5.2) sous la condition (5.34). La convergence de la solution formelle est aussi démontrée de la manière complètement pareille que pour la démonstration du Théorème 5.1.

Puis, on va étudier le cas suivant:

$(I,2,B)$ $A\neq B$.

Dans ce cas, on note que l'on peut supposer que $\alpha=0$. Il faut aussi qu'il existe un $(N, k)\in\mathbf{N}\times\bar{\mathbf{N}}$ tel que dét $A_N=0$ et $-\{(N-k)A+kB\}/c\in\bar{\mathbf{N}}$. D'abord, on prend le premier k tel que $\rho=-\{(N-k)A+kB\}/c\in\bar{\mathbf{N}}$. On a alors U_N, une solution de (5.3), de la forme de

(5.35) $$U_N=(0, \cdots, 0, z^\rho, u^N_{k+1}, \cdots, u^N_N).$$

Quand $u^N_{k+1}=0$, compte tenu de l'existence de U_{N+1}, on obtient immédiatement

(5.36) $$-\frac{A}{c},\quad -\frac{B}{c}\in\bar{\mathbf{N}}$$

comme une condition nécessaire. Quand $u^N_{k+1}\neq0$, on voit d'abord qu'il est nécessaire que $-A/c\in\mathbf{N}$ pour l'existence de u^{N+1}_k. Notons ici que $u^N_{k+1}=z^{\rho'}$ ($\rho'=-\{(N-k-1)A+(k+1)B\}/c=\rho+(A-B)/c\leqq\rho-B/c$), quand $u^N_{k+1}=0$. Ensuite u^{N+1}_{k+1} doit satisfaire à

(5.37) $$cz^2\frac{du^{N+1}_{k+1}}{dz}+\left\{\frac{1}{N}-(c\rho-B)z\right\}u^{N+1}_{k+1}=b\rho z^\rho+a\rho' z^{\rho'}.$$

Or, on voit qu'il faut qu'on ait $-B/c\in\bar{\mathbf{N}}$ pour l'existence de u^{N+1}_{k+1}. Prenons le dernier k tel que $\rho=-\{(N-k)A+kB\}/c\in\bar{\mathbf{N}}$. Alors, pour ce k, on peut avoir

(5.38) $$U_N={}^t(0, \cdots, 0, z^\rho, 0\cdots 0).$$

Sous la condition (5.36), on peut démontrer $U_{N+s}(s=1, 2, \cdots)$ successivement, et aussi démontrer la convergence de la solution formelle, c'est-à-dire on a le

Théorème 5.2. *Dans le cas $(I,2)$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (I) admette au moins une solution est donnée par*

(1) *il existe un $N\in\mathbf{N}$ tel que $\lambda(=\mu)=1/N$*
(2) *il existe un $k\in\bar{\mathbf{N}}$ $(k\leqq N)$ tel que $-\{(N-k)A+kB\}/c\in\bar{\mathbf{N}}$*
(3) *il se réalise* (5.36), *si* $(N-k)A+kB\neq0$.

On étudie le cas $(I.3)$. Par le Lemme 5.1, il faut qu'il existe un $N\in\mathbf{N}$ tel qu'on ait $\lambda=N^{-1}$ pour l'existence de solution de (I). D'après (5.3), on voit que $n^N_0(0)=\cdots=u^N_{N-1}(0)=0$, où $U_N=(u^N_0, \cdots, u^N_N)$, donc on a

(5.39) $$u^N_i=z^{\rho_i}v_i\quad(i=0, 1, \cdots, N)\qquad(\rho_i\in\mathbf{N}\ (i\neq N)\ \text{et}\ \rho_N\in\bar{\mathbf{N}}),$$

où on suppose que $v_i(0)\neq0$, quand $u^N_i\not\equiv0$. En substituant $z^{\rho_j}v_j$ à u^N_j $(j=0, 1, \cdots, N)$

dans (5.3), on obtient

$$(5.40)\qquad \begin{cases} cz\dfrac{dv_0}{dz}+(c\rho_0+NA)v_0=0 \\ cz^{\rho_j+2}\dfrac{dv_i}{dz}+\{j\varepsilon+(N-j+1)\alpha z\}z^{\rho_{j-1}}v_{j-1}+\{c\rho_j+(N-j)A+jB\}z^{\rho_j+1}v_j=0. \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'il faut qu'il existe un $j\in\bar{\mathbf{N}}$ $(j\leqq N)$ tel que $-\{N-j)A+jB\}/c\in\bar{\mathbf{N}}$ pour l'existence de solution de (5.40). Soit j_0 le premier nombre dans $\bar{\mathbf{N}}$ tel que $\rho_{\rho_0}=-\{(N-j_0)A+j_0B\}/c\in\bar{\mathbf{N}}$. Alors, on voit que $v_0=\cdots=v_{j_0-1}=0$ et $v_{j_0}=C_{j_0}$ (constante).

Lemme 5.4. *Soient* $\alpha=0$ *et* $j_0\neq N$, *alors la condition nécessaire et suffisante pour que* (5.40) *admette une solution avec* $u_{j_0}\neq 0$ *set*

$$(5.41)\qquad (B-A)/c\neq 1 \quad et \quad \rho_{j_0}\geqq N-j_0.$$

Démonstration. Nécessité: de (5.40), on a pour v_{j_0+1}

$$(5.42)\qquad cz^{\rho_{j_0+1}+2}\frac{dv_{j_0+1}}{dz}+(j_0+1)\varepsilon z^{\rho_{j_0}}C_{j_0}+c\{\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+(B-A)/c\}z^{\rho_{j_0+1}+1}v_{j_0+1}=0.$$

Supposons que $(B-A)/c=1$. En tenant compte de $C_{j_0}\neq 0$ et $v_{j_0+1}(0)\neq 0$, on voit que $\rho_{j_0}\geqq\rho_{j_0+1}+2$, si $\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+1=0$, et que $\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+1=0$, si $\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+1\neq 0$, ce qui est une contradiction. Ensuite, de (5.40), on voit facilement que

$$(5.43)\qquad \begin{cases} \rho_j=\rho_{j+1}+1, & \text{si} \quad c\rho_j+(N-j)A+jB\neq 0 \\ \rho_j\geqq\rho_{j+1}+2, & \text{is} \quad c\rho_j+(N-j)A+jB=0. \qquad (j\geqq j_0) \end{cases}$$

Donc, on obtient

$$(5.44)\qquad \rho_{j_0}\geqq N-j_0.$$

Suffisance: en prenant $\rho_{j_0+s-1}=\rho_{j_0+s}+1$ $(s=1, 2, \cdots, N-j_0)$, on peut avoir une solution constante: tous les $v_{j_0+s}=$constante. c. q. f. d.

Lemma 5.5. *Supposons que* $\alpha\neq 0$ *et* $j_0\neq N$, *alors la condition nécessaire et suffisante pour que* (5.40) *admette une solution avec* $u_{j_0}\neq 0$ *est*

$$(5.45)\qquad (A-B)/c+1\neq q/p \quad (p=1, 2, \cdots, N,\ q=0, 1, \cdots, p) \quad et \quad \rho_{j_0}\geqq N-j_0.$$

Démonstration. Nécessité: on obtient pour v_{j_0+1}

$$(5.46)\qquad \begin{aligned} &cz^{\rho_{j_0+1}+2}\frac{dv_{j_0+1}}{dz}+\{(j_0+1)\varepsilon+(N-j_0)\alpha z\}z^{\rho_{j_0}}C_{j_0} \\ &\qquad +c\{\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+(B-A)/c\}z^{\rho_{j_0+1}+1}v_{j_0+1}=0, \end{aligned}$$

et

$$(5.47)\qquad \begin{cases} \rho_{j_0}=\rho_{j_0+1}+1, & \text{si} \quad \rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+(B-A)/c\neq 0 \\ \rho_{j_0}\geqq\rho_{j_0+1}+2, & \text{si} \quad \rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+(B-A)/c=0. \end{cases}$$

On voit aussi que (5.40) n'admet pas de solution, si $(A-B)/c+1=0$. Supposons que $(A-B)/c+1=q/p$ pour un certain p $(1\leqq p\leqq N)$ et un q $(1\leqq q\leqq p)$, alors il se fait $\rho_{j_0+1}-\rho_{j_0}+(B-A)/c\neq 0$. Donc, on a $\rho_{j_0}=\rho_{j_0+1}+1$ et

$$\rho_{j_0+k-1}=\rho_{j_0+k}+1 \qquad (k=1, 2, \cdots, p-1), \tag{5.48}$$

en général. Alors, chaque v_{j_0+k} $(k=1, 2, \cdots, p-1)$ est déterminé comme un polynôme de degré k et v_{j_0+p} doit satisfaire à

$$\begin{aligned} cz^{\rho_{j_0+p}+2}\frac{dv_{j_0+p}}{dz}+\{(j_0+p)\varepsilon+(N-j_0-p+1)\alpha z\}z^{\rho_{j_0+p-1}}v_{j_0+p-1} \\ +c(\rho_{j_0+p}-\rho_{j_0}+p-q)z^{\rho_{j_0+p}+1}v_{j_0+p}=0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Si $\rho_{j_0+p}-\rho_{j_0}+p-q=0$, alors c'est en contradiction avec l'inégalité $\rho_{j_0}\geqq\rho_{j_0+p}+p$. Si $\rho_{j_0+p}-\rho_{j_0}+p-q\neq 0$, on a alors, $\rho_{j_0+p-1}=\rho_{j_0+p}+1$. Alors, (5.49) se ramène à

$$cz\frac{dv_{j_0+p}}{dz}+\{(j_0+p)\varepsilon+(N-j_0-p+1)\alpha z\}v_{j_0+p-1}=cqv_{j_0+p}. \tag{5.50}$$

Il faut que la condition de compatibilité soit satisfaite:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^q[\{(j_0+p)\varepsilon+(N-j_0-p+1)\alpha z\}v_{j_0+p-1}](0)=0, \tag{5.51}$$

pour que (5.50) admette une solution, mais la condition (5.51) nous apporte $C_{j_0}=0$, ce qui est une contradiction. c. q. f. d.

Remarque: si $-NB/c\in\bar{\mathbf{N}}$ l'équation (5.40) admet une solution telle que $v_0=\cdots=v_{N-1}=0$, $v_N=$constante.

On étudie encore le cas où $\alpha=0$. D'apres le Lemme 5.4, on peut avoir une solution constante de (5.40), si (5.41) est satisfait. Ici, on suppose que $j_0=0$ et $\rho_0=N$ pour fixer les idées. De plus, on suppose que $U_N=(z^N, z^{N-1}, \cdots, 1)$. Comme on le voit, la condition suivante

$$-\frac{A}{c},\quad -\frac{B}{c}\in\bar{\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{c}\geqq-\frac{A}{c}, \tag{5.52}$$

est necessaire et suffisante pour que U_{N+s} $(s=1, 2, \cdots)$ existent.

Remarque: on voit que $-NB/c\in\bar{\mathbf{N}}$ en conséquence. Donc, on peut voir que $U_N=(0, \cdots, 0, 1)$ est aussi une solution de (5.40). Cependent, si $B\neq 0$, la condition (5.52) ne se simplifie pas pour cette solution apparement si simple. Quand $B=0$, on peut avoir facilement une solution de (I).

Pour le cas où $\alpha\neq 0$ et $B\neq 0$, on a la condition nécessaire et suffisante qui garantit l'existence de $U_{N+s}(s=1, 2, \cdots)$ comme suit:

$$-\frac{A}{c},\quad -\frac{B}{c} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{c}\geqq-\frac{A}{c}+1. \tag{5.53}$$

Remarque: si $B=0$, on peut avoir aussi une solution de (I).

En répétant presque le même raisonnement que celui pour la démonstration des Théorème 5.1 et Théorème 5.2, on peut démontrer le

Théorème 5.3. *Dans le cas* (I.3) *avec* $B\neq 0$, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (I) *admette au moins une solution est donnée par*

(1) *il existe un* $N\in\mathbf{N}$ *tel que* $\lambda(=\mu)=\dfrac{1}{N}$

(2) $-\dfrac{A}{c},\ -\dfrac{B}{c}\in\bar{\mathbf{N}}$ *et* $\begin{cases} -\dfrac{B}{c}\geqq-\dfrac{A}{c} & (\alpha=0) \\ -\dfrac{B}{c}\geqq-\dfrac{A}{c}+1 & (\alpha\neq 0). \end{cases}$

6. Cas de trois variables II. Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier le problème suivant pour l'équation (II) donnée au paragraphe 5:

Problème: *chercher la condition pour que l'équation* (II) *admette au moins une solution pour* p, q, r, s, a *et* b *quelsconques.*

Il est facile de voir que la condition $\lambda^{-1}(=k)\in\mathbf{N}$ et nécessaire pour l'existence de solution, donc on considère

(6.1) $\{A(x, y)-(px+qy)z\}\,u_x+\{B(x, y)-(rx+sy)z\}\,u_y+\{z-(ax+by)z\}\,u_z=ku$

au lieu de (II). Em prenant la solution formelle suivante:

$$u\sim\Sigma u^n(x, y)z^n, \tag{6.2}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &A(x, y)u_x^n+B(x, y)u_y^n+n\{1-(ax+by)\}\,u^n \\ &\quad=(px+qy)u_x^{n-1}+(rx+sy)u_y^{n-1}+ku^n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned} \tag{6.3}$$

avec $u^{-1}=0$. On peut supposer que $a=1$ et $b=0$ sans perdre la généralité, par un changement de variables s'il est nécessaire. On voit facilement que $u^0=\cdots=u^{k-1}=0$. Pour u^k on a

$$A(x, y)u_x^k+B(x, y)u_y^k=kxu^k. \tag{6.4}$$

Il est nécessaire que l'éqation (6.4) admette une solution pour l'existence de solution de (6.1). Ici, la situation se divise aux deux cas suivants:

Cas I. $A(x, y)\equiv 0\ (x)$ *et* $B(x, y)\equiv 0\ (x)$, *c'est-à-dire* $A(x, y)=x(\alpha x+\beta y)$ *et* $B(x, y)=x(\gamma x+\delta y)$.

Cas II. $A(x, y)\not\equiv 0\ (x)$ *ou* $B(x, y)\not\equiv 0\ (x)$.

D'abord, on étudie le cas I. On commence par le

Lemme 6.1. *Supposons que* $\beta\neq 0$ *ou* $\alpha\neq\delta$, *alors on peut suposer que* $\gamma=0$ *par un changement de variables.*

Démonstration. Prenons le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} \beta = x \\ \eta = cx + dy \qquad (d \neq 0) \\ \zeta = z, \end{cases}$$

alors, quand on représente (6.2) en nouvaux variables (ξ, η, ζ), le coefficient de u_η se fait $\{-\beta c^2/\alpha + (\alpha-\delta)c + d\gamma\}\xi^2 + \cdots$. Donc, si $\beta \neq 0$, on peut choisir c tel que $-\beta c^2/\alpha + (\alpha-\delta)c + d\gamma = 0$, et si $\beta = 0$ et $\alpha \neq \delta$, on peut choisir c tel que $(\alpha-\delta)c + d\gamma = 0$, ce qui démontre le lemme. c. q. f. d.

Puis, considérons le cas où $\beta = 0$ et $\alpha = \delta$. Pour ce cas, on obtient le

Lemme 6.2. *Soit $\beta = 0$ et $\alpha = \delta$, alors il est nécessaire que $\gamma = 0$ pour que l'équation* (6.4) *admette une solution.*

Démonstration. On note que l'équation (6.4) se fait

$$\alpha x u_x^k + (\gamma x + \alpha y) u_y^k = k u^k$$

dans ce cas. On voit facilement qu'il faut $\alpha = k/l$ avec un certain $l \in \mathbf{N}$ pour l'existence de u^k. Donc, il suffit d'étudier l'équation suivante:

$$x u_x^k + (l\gamma x + y) u_y^k = l u^k.$$

On suppose ici que $\gamma \neq 0$, alors on a $u^k = C_k x^l$ $(C_k \neq 0)$. Supposons que $C_k = 1$, ce qui ne fait perdre aucunement généralité, alors on obtient de (6.3)

$$k x^2 \frac{d u_0^{k+1}}{dx} + l\{1-(k+1)x\} u_0^{k+1} + l\gamma x^2 u_1^{k+1} = l p x^l$$

$$k x^2 \frac{d u_1^{k+1}}{dx} + \{l-(lk+l-k)x\} u_1^{k+1} + 2l\gamma x^2 u_2^{k+1} = l q x^{l-1}$$

$$k x^2 \frac{d u_j^{k+1}}{dx} + \{l-(lk+l-jk)x\} u_j^{k+1} + (j+1) l\gamma x^2 u_{j+1}^{k+1} = 0 \qquad (j = 2, 3, \cdots)$$

où $u^{k+1} = \sum u_j^{k+1}(x) y^j$. Donc on a $\tau(u_j^{k+1}) = 2 + \tau(u_{j+1}^{k+1})$ $(i = 2, 3, \cdots)$ par le Lemme 4.6, ce qui nous montre que $u_j^{k+1} = 0$ $(j = 2, 3, \cdots)$. Ensuite, on voit que u_1^{k+1} existe comme un polynôme de degré $l-1+l/k$ si et seulement si $l/k \in \mathbf{N}$. Donc, on obtient pour u_0^{k+1}

$$k x^2 \frac{d u_0^{k+1}}{dx} + l\{1-(k+1)x\} u_0^{k+1} = P_{l+1+l/k},$$

$P_{l+1+l/k}$ étant un polynôme de degré $l+1+l/k$. Mais, cette équation n'a aucune solution holomorphe. c. q. f. d.

Théorème 6.1. *Soit $\beta = 0$ et $\alpha = \delta$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (6.4) *admette au moins une solution est que:*

(1) *il existe un $l \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha = \delta = k/l$ et de plus $k/l (= m) \in \mathbf{N}$*
(2) $\gamma = 0$.

Démonstration. La nécessité est déjà démontrée. On va démontrer la suffisance. On suppose que $u^k=y^l$. En prenant $u^{k+1}=\sum u_j^{k+1}(x)y^k$, on obtient $u_0^{k+1}=\cdots=u_{l-2}^{k+1}=0$ et

$$\text{(6.5)}\qquad \begin{cases} \alpha x^2 \dfrac{du_{l-1}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-(l-1)\alpha\}x]u_{l-1}^{k+1}=rlx \\ \alpha x^2 \dfrac{du_l^{k+1}}{dx}+[1-(k+1-l\alpha)x]u_l^{k+0}=sl. \end{cases}$$

De plus, on voit que $u_{l+j}^{k+1}=0$ $(j=1, 2, \cdots)$. Donc, u^{k+1} existe comme un polynôme en (x, y):

$$\text{(6.6)}\qquad u^{k+1}=\langle m+1\rangle y^{l-1}+\langle m\rangle y^l,$$

où $\langle j\rangle$ $(j\in\mathbf{N})$ représente un polynôme de degré j. On voit que u^{k+j} $(j=2, 3, \cdots)$ sont déterminés successivement et que u^{k+j} $(j=2, 3, \cdots)$ sont de la forme suivante:

$$\text{(6.7)}\qquad u^{k+j}=\sum_{i=0}^{2j-1}\langle mj-j-i\rangle y^{l-j+i}.$$

Pour vérifier la convergence de la solution formelle obtenue en haut, il suffit de prendre, comme un modèle, l'équation suivante:

$$\text{(6.8)}\qquad x(x-\varepsilon y)u_x^j+xyu_y^j+\{j-(j+1)x\}u^j=(x+y)(u_x^{j-1}+u_y^{j-1}) \qquad (j=1, 2, \cdots),$$

avec $u^0=y$ à la place de (6.3). D'après (6.8), u^j se fait comme sut:

$$\text{(6.9)}\qquad u^j=\sum_{i=0}^{j}P_{j,j+1-i}(x)y^i,$$

$P_{j,j+1-i}(x)$ étant un polynôme de degré $j+1-i$. En posant

$$\text{(6.10)}\qquad P_{j,j+1-i}(x)=\sum_{h=0}^{j+1-i}P_{j,j+1-i}^h x^h,$$

avec $P_{1,0}=1$, $P_{1,1}(x)=1+x$ et $P_{1,2}(x)=1+x+x^2$. D'après (6.10), on obtient

$$\text{(6.11)}\qquad P_{j,j+1-i}^h\leqq\sum_{t=0}^{h}(P_{j-1,j-i-1}^t+P_{j-1,j-i}^t+P_{j-1,j-i+1}^t),$$

où $P_{j,i}^t=0$ $(i<0$ ou $t>j+1$ ou $t>i)$. Alors, on obtient

$$\text{(6.12)}\qquad P_{j,i}^t\leqq 2\mu_i(t)\mu_{i+t}(j-1)+2\mu_{i-1}(t+1)\mu_{i+t}(j),$$

par le raisonnement presque pareil que celui pour démontrer le Lemme 5.3, ce qui garantit la convergence de la solution formelle. c.q.f.d.

On revient au cas où $\beta\neq 0$ ou $\alpha\neq\delta$. On suppose naturellement que $\gamma=0$, donc l'équation (6.4) se fait

$$\text{(6.13)}\qquad (\alpha x+\beta y)u_x^k+\delta y u_y^k=ku^k.$$

Il est facile de voir qu'il faut exiter un $L\in\mathbf{N}$ et un $l(\leqq L)\in\mathbf{N}$ tels que

$$\text{(6.14)}\qquad \alpha(L-l)+\delta l=k,$$

pour que l'équation (6.13) admette une solution. Ici on se limite au cas où $\alpha\neq 0$. Supposons que $\beta\neq 0$, alors la solution de (6.13) est donnée par

(6.15) $$u^k=\sum_{i=l}^{L} a_i x^{L-i} y^i,$$

où a_{l+i} $(i=1, 2, \cdots, L-l)$, si $l \neq L$. On peut supposer que $a_l=1$ sans perdre la généralité. En posant $u^{k+1}=\sum u_i^{k+1}(x)y^i$, on obtient $u_0^{k+1}=\cdots=u_{l-2}^{k+1}=0$ et

(6.16) $$\begin{cases} \alpha x^2 \dfrac{du_{l-1}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-(l-1)\delta\}x]u_{l-1}^{k+1}=rlx^{L-l+1} & (l \neq 0) \\ \alpha x^2 \dfrac{du_0^{k+1}}{dx}+\{1-(k+1)x\}u_0^{k+1}=(pL+a_1 r)x^L. & (l=0) \end{cases}$$

Donc, on voit qu'il est nécessaire que

(6.17) $$\begin{cases} (1+\delta)/\alpha \in \mathbf{N} & (l \neq 0) \\ 1/\alpha \in \mathbf{N} & (l=0) \end{cases}$$

pour l'existence de u^{k+1}. Ensuite, on a

(6.18) $$\begin{cases} \alpha x^2 \dfrac{du_l^{k+1}}{dx}+\{1-(k+1-\delta l)x\}u_l^{k+1}=\langle L-l+(1+\delta)/\alpha\rangle & (l \neq 0) \\ \alpha x^2 \dfrac{du_1^{k+1}}{dx}+\{1-(k+1-\delta)x\}u_1^{k+1}=\langle L+1/\alpha\rangle, & (l=0) \end{cases}$$

ce qui nous montre qu'il faut $-\delta/\alpha \in \bar{\mathbf{N}}$ pour l'existence de u^{k+1}. De plus, on voit que chaque u_j^{k+1} est successivement déterminé de (6.3), si $-\delta/\alpha \in \bar{\mathbf{N}}$. En particulier, on a

(6.19) $$\alpha x^2 \frac{du_{L+j}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-\delta(L+j)\}x]u_{L+j}^{k+1}=-\beta \frac{du_{L+j-1}^{k+1}}{dx}, \qquad (j=1, 2, \cdots)$$

ou $u_{l+j}^{k+1}=\langle L-l+(1-j\delta)/\alpha\rangle$ $(j=-1, 0, 1, 2, \cdots)$. On remarque qu'on peut supposer que β soit positif et aussi petit qu'on voudra, par un changement de variables.

Lemma 6.3. *Soit $l \neq L$, alors on peut supposer dans* (6.15) *que $a_{l+1}, \cdots, a_L>0$ sous la condition*:

$$1/\alpha \in \mathbf{N}, \quad -\delta/\alpha \in \bar{\mathbf{N}} \quad \textit{et} \quad \beta>0.$$

Démonstration. Evident. c. q. f. d.

Par le Lemme 6.3, en prenant p, q, r, s positifs et assez grands et β assez petit, on peut supposer que tous les coefficients de $u_l^{k+1}, \cdots, u_L^{k+1}$ sont positifs. De plus, on voit que la signature de tous les coefficients de u_{L+j}^{k+1} $(j=1, 2, \cdots)$ est positive, si j est pair, et négative, si j est impair.

Posons ici

(6.20) $$u_{L+j}^{k+1}=\sum_{i=0}^{\rho+mj} P_{j,i} x^i,$$

où $\rho=L-l+(1-\delta)/\alpha$ et $m=-\delta/\alpha$. Il suffit de considérer le cas où $\beta=1$. D'après

(6.21) $$|P_{j+1\ \rho+m(j+1)}| \geqq \{\rho+m(j+1)\}!|P_{j,1}|.$$

D'autre part, on obtient, d'après (6.19) également

(6.22) $$|P_{j,1}| \geqq (\rho+mj)|P_{j-1,1}|,$$

donc on a

(6.23) $$|P_{j+1,\rho+m(j+1)}| \geqq \{\rho+m(j+1)\}!\prod_{i=1}^{j}(\rho+mi),$$

ce qui nous montre la divergence de $\sum u_i^{k+1}y^i$.

Proposition 6.1. *Considérons le cas I avec $\gamma=0$. Il est nécessaire que $\beta=0$ pour que l'équation* (6.1) *admette une solution pour p, q, r, s arbitraires.*

Il ne reste à considérer que le cas où $\beta=\gamma=0$ et $\alpha\neq\delta$. Dans ce cas, la solution de (6.13) est donnée par $x^{L-l}y^l$. On divise son étude en deux cas suivants:

(1) *le cas où $l=0$*
(2) *le cas ou $l\neq 0$.*

On considère le cas (1) d'abord. En prenant $u^{k+1}=\sum u_i^{k+1}y^i$, on voit que $u_j^{k+1}=0$ ($j=2, 3, \cdots$) et on obtient

(6.24) $$\begin{cases} \alpha x^2 \dfrac{du_0^{k+1}}{dx} + \{1-(k+1)x\}u_0^{k+1} = pLx^L \\ \alpha x^2 \dfrac{du_1^{k+1}}{dx} + [1-\{(k+1)-\delta\}x]u_1^{k+1} = qLx^{L-1}, \end{cases}$$

où $\alpha=k/L$. Donc on a la condition nécessaire pour l'existence de solution de u^{k+1} comme suit:

(6.25) $$1/\alpha\in\mathbf{N} \quad \text{et} \quad (1-\delta)/\alpha\in\mathbf{Z} \text{ avec } (1-\delta)/\alpha\geqq -1.$$

On voit que la solution formelle existe sous la condition (6.25) et, de plus, on peut démontrer la convergence.

Ensuite, on considère le cas (2). Dans ce cas, on obtient la condition nécessaire suivante:

(6.26) $$1/\alpha\in\mathbf{N}, \quad (1+\delta)/\alpha\in\mathbf{N} \text{ et } (1-\delta)/\alpha\in\mathbf{Z} \text{ avec } (1-\delta)/\alpha\leqq -1,$$

pour l'existence de solution formelle dont on peut démontrer la convergence également.

Théorème 6.2. *Considérons le cas I avec $\beta=\gamma=0$ et $\alpha\neq\delta$ ($\alpha\neq 0$). La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (6.1) *admette une solution quels que soient p, q, r, s est que*

(1) *il existe uu $L\in\mathbf{N}$ et un $l\in\overline{\mathbf{N}}$ ($l\leqq L$) tels que $\alpha(L-l)+\delta l=k$*
(2) *$1/\alpha\in\mathbf{N}$ et $(1-\delta)/\alpha\in\mathbf{Z}$ avec $(1-\delta)/\alpha\geqq -1$*
(3) *$(1+\delta)/\alpha\in\overline{\mathbf{N}}$, si $\alpha=k/L$.*

La démonstration du Théorème 6.2 est accomplie par la manière complètement pareille que celle du Théorème 6.1.

Remarque: le cas où $\alpha=0$ est un problèm prochain.

On va étudier maintenant le cas *II*. Dens ce cas, l'équation (6.4) doit être "triangularizable" (voir [5]) pour qu'elle admette une solution. Donc on suppose que

$$\begin{cases} A(x,\ y)=A_0x^2+A_1xy+A_2y^2 \\ B(x,\ y)=B_1xy+B_2y^2. \end{cases} \tag{6.30}$$

Soit v^N la partie homogène de degré N de la solution de (6.4), alors chaque v^N doit satisfaire à

$$(A_0x^2+A_1xy+A_2y^2)v_x^N+(B_1xy+B_2y^2)v_y^N=kxv^N. \qquad (N=1,\ 2,\ \cdots) \tag{6.31}$$

Remarque: on obtient $v^0=0$.

En posant $v^N=\sum_{i=0}^{N} v_i^N x^{N-i}y^i$, on a

$$\sum_{i=0}^{N}\{(N-i)A_0+iB_1-k\}v_i^N+\sum_{i=0}^{N+1}\{(N+1-i)A_1+(i-1)B_2\}v_{i-1}^N + \sum_{i=0}^{N+2}(N+2-i)A_2v_{i-2}^N=0, \tag{6.32}$$

avec $v_{-1}^N=v_{-2}^N=0$. En introduisant les notations suivantes:

$$\alpha_i^N=(N-i)A_0+iB_1-k \qquad (0\leqq i\leqq N)$$
$$\beta_i^N=(N+1-i)A_1+(i-1)B_2 \quad (1\leqq i\leqq N+1)$$
$$\gamma_i^N=(N+2-i)A_2 \qquad (2\leqq i\leqq N+1),$$

on obtient

$$\Omega_N V_N=0, \tag{6.33}$$

V_N étant ${}^t(v_0^N,\ \cdots,\ v_N^N)$ et Ω_N une $(N+2)\times(N+1)$ matrice definie par

$$\Omega_N=\begin{bmatrix} \alpha_0^N & & & 0 \\ \beta_1^N & \ddots & & \\ \gamma_2^N & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \alpha_N^N \\ 0 & & \gamma_{N+1}^N & \beta_{N+1}^N \end{bmatrix}.$$

Proposition 6.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (6.4) *admette une solution est qu'il existe un* $N\in\mathbf{N}$ *tel que rank* $\Omega_N\leqq N$.

Démonstration. Evident. c. q. f. d.

Comme on le voit immédiatement, il faut que

$$\alpha_l^N=0 \tag{6.34}$$

pour certain $l\in\bar{\mathbf{N}}$ $(l\leqq N)$ pour que *rank* $\Omega_N\leqq N$. A son grand regret, on se limite son étude seulement aux cas suivants:

$(II,1)$ *le cas où* $A_0=B_1$

$(II,2)$ *le cas où* $A_2=0$ *et* $A_0 \neq 0$.

D'abord, on prend le cas $(II,1)$. Dans ce cas, on a $A_0=B_1=k/N$ de (6.34). De plus, on voit qu'il faut $\beta_i^N=0$ pour certain i $(1\leqq i\leqq N+1)$ pour que $rank\,\Omega_N\leqq N$. S'il y existe au moins deux i et j $(i\neq j)$ tels que $\beta_i^N=\beta_j^N=0$, il se fait $\beta_m^N=0$ $(m=1, 2, \cdots, N+1)$, c'est-à-dire $A_1=B_2=0$. Donc, on divise la situation aux deux cas suivants:

$(II,1,A)$ $A_1=B_2=0$

$(II,1,B)$ $A_1\neq 0$ ou $B_2\neq 0$.

Considérons le cas $(II,1,A)$. Dans ce cas, on suppose que $A_2\neq 0$, parce que l'on considére le cas où $A\not\equiv 0$ (x) ou $B\not\equiv 0$ (x). On obtient $u^k=y^N$ et en posant $u^{k+1}=\sum u_i^{k+1}y^i$, on a

$$(6.35)\quad \begin{cases} A_0x^2\dfrac{du_{N-1}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-(N-1)B_1\}\,x]u_{N-1}^{k+1}=\langle 1\rangle \\ A_0x^2\dfrac{du_N^{k+1}}{dx}+[1-(k+1-NB_1)x]u_N^{k+1}=\langle 0\rangle \\ A_0x^2\dfrac{du_{N+j}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-(N+1)B_1\}\,x]u_{N+j}^{k+1}+A_2\dfrac{du_{N+j-2}^{k+1}}{dx}=0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=1, 2, \cdots) \end{cases}$$

Donc il faut $1/A_0\in\mathbf{N}$ pour l'existence de u^{k+1}, car $A_0=B_1+k/N$. Quand $1/A_0\in\mathbf{N}$, on obtient $u_{N-1}^{k+1}=\langle 1/A_0+1\rangle$ et $u_N^{k+1}=\langle 1/A_0\rangle$. Ensuite, on voit qu'il faut $1/A_0-1\in\mathbf{N}$ et $1/A_0-1\geqq 1/A_0$ pour l'existence de u_{N+1}^k, mais c'est impossible. Donc la solution n'existe pas dans le cas $(II,1,A)$ avec $A_2\neq 0$.

Prenons le cas $(II,1,B)$. Dans ce cas, on obtient

$$(6.36)\quad \begin{cases} A_0x^2\dfrac{du_{N-1}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-(N-1)B_1\}\,u_{N-1}^{k+1}=\langle 1\rangle \\ A_0x^2\dfrac{du_N^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-NB_1\}\,x]u_N^{k+1}+A_1x\dfrac{du_{N-1}^{k+1}}{dx}+(N-1)B_2u_{N-1}^{k+1}=\langle 0\rangle \\ A_0x^2\dfrac{du_{N+j}^{k+1}}{dx}+[1-\{k+1-(N+j)B_1\}\,x]u_{N+j}^{k+1}+A_1x\dfrac{du_{N+j-1}^{k+1}}{dx}+A_2\dfrac{du_{N+j-2}^{k+1}}{dx} \\ \qquad +(N+j-1)B_2u_{N+j-1}^{k+1}=0. \qquad (j=1, 2, \cdots) \end{cases}$$

Si l'on choisit p, q, r et s proprement, on peut supposer que

$$A_1\frac{du_{N+j-1}^{k+1}}{dx}+(N+j-1)B_2u_{N+j-1}^{k+1}+A_2\frac{du_{N+j-2}^{k+1}}{dx}\not\equiv 0$$

pour assez grand j tel que $1/A_0-j<0$. Alors, u_{N+j}^{k+1} ne peut pas être holomorphe, même si u_{N+l-1}^{k+1} $(l=0, 1, \cdots, j)$ sont holomorphes. Donc on voit que l'équation (6.1) n'admet aucune solution dans le cas $(II,1)$.

On va étudier le cas $(II,2)$. Dans ce cas, on peut supposer que α_0^N seule s'annule sans perdre la généralité. Pour que u^{k+1} existe, β_j^N doit s'annuler pour un certain j (il n'y a qu'un j comm tel). Soit $\beta_j^N=0$, alors on a

$$u^{k}=\langle N\rangle+\langle N-1\rangle y+\cdots+\langle N-j+1\rangle y^{j-1}. \tag{6.37}$$

On divise ici la situation aux deux cas suivants :

$(II,2,A)$ *le cas où* $j=1$
$(II,2,B)$ *le cas où* $j\neq 1$.

Prenons, d'abord, le cas $(II,2,A)$. Dans ce cas, on voit que $A_1=0$ et en posant $u^{k+1}=\sum u_i^{k+1}y^i$, on obtient

$$\begin{cases} A_0x^2\dfrac{du_0^{k+1}}{dx}+\{1-(k+1)x\}\,u_0^{k+1}=\langle N\rangle \\ A_0x^2\dfrac{du_1^{k+1}}{dx}+\{1-(k+1-B_1)x\}\,u_1^{k+1}==\langle N-1\rangle \\ A_0x^2\dfrac{du_j^{k+1}}{dx}+\{1-(k+1-jB_1)x\}\,u_j^{k+1}+(j-1)B_2u_{j-1}^{k+1}=0. \end{cases} \tag{6.38}$$

Donc, pour l'existence de u^{k+1}, on voit qu'il faut

$$1/A_0\in\mathbf{N} \quad \text{et} \quad -B_1/A_0\in\bar{\mathbf{N}}. \tag{6.39}$$

On peut voir que la condition (6.39) est aussi nécessaire dans le cas $(II,2,B)$ pour l'existence de u^{k+1}. De plus, on peut démontrer que chaque u_j^{k+1} $(j=0,1,\cdots)$ est successivement déterminé comme un polynôme de degré $N+(1-jB_1)/A_0$ sous la condition (6.39), que l'on prenne le cas $(II,2,A)$ ou $(II,2,B)$.

La convergence de solution formelle est maintenant à considérer. On prend le cas $(II,2,A)$. On remarque que l'on peut supposer que tous les coefficients de $-B_2u_1^{k+1}$ sont positifs par un choix convenable p et q. Alors, ceux de $-B_2u_j^{k+1}$ $(j=2,3,\cdots)$ le sont aussi. Ensuite on obtient d'après (6.38),

$$u_{j+1}^{k+1}\gg Cj\,!\,|B_2/A_1|^j \qquad (C>0), \tag{6.40}$$

ce qui nous montre que u^{k+1} ne peut pas être holomorphe.

Dans le cas $(II,2,B)$, on peut également démontrer que u^{k+1} ne peut pas être holomorphe par la manière complètement pareille que dans le cas $(II,2,A)$.

En conclusion, je conjecture qu'il est nécessaire que $A\equiv 0$ (x) et $B\equiv 0$ (x) pour que l'équation (6.1) avec $b=0$ admette au moins une solution quels que soient p, q, r, s.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES
TECHNIQUES DE KYOTO

Références

[1] H. Dulac, Solution d'un système d'équations differentielles dans le voisinage de valeurs singulières, Bull. soc. math. France, **40** (1912), 324-383.
[2] G. H. Hardy, Divergence series, Oxford Express (1956).
[3] P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley and Sons (1964).
[4] A. Nakaoka, On uniqueness of analytic solution for first order partial differential equations with degenerate principal symbols, J. Math. Kyoto Univ., **15** (1975), 401-421.

[5] A. Nakaoka, On uniqueness of analytic solution for first order partial differential equations with degenerate principal symbols II, ibid., **17** (1977), 69-90.

[6] A. Nakaoka, Exposé au Séminaire Vaillant, Univ. de Paris VI (1979).

[7] A. Nakaoka, Solutions analytiques et non-analytiques pour des équations du premier ordre à symboles principaux dégénérés, Proc. Japan Acad., **57** (1981), 201-204.