

Sur la densité de la distribution du maximum d'un processus gaussien

Par

Michel WEBER

(Communicated by Prof. Watanabe June 15, 1984)

0. Dans un article récent [2], L. Pitt a publié une démonstration simple de l'existence et de la bornitude de la densité de la distribution du maximum d'un processus gaussien à trajectoires presque sûrement majorées. En suivant son idée, nous sommes parvenus à majorer efficacement cette même densité. C'est la raison de cet article.

I. Résultats—démonstrations.

Théorème 1. Soit $X: \Omega \rightarrow R^T$ un vecteur gaussien centré défini sur un ensemble arbitraire T ; notons R sa covariance et d_x l'écart induit sur T par la norme dans $L^2(\Omega)$ de X . On suppose

- (1) (T, d_x) est quasi-compact et X est d_x -séparable, presque sûrement borné sur T .

Dans ces conditions

i) (L. Pitt, [2]), si $\gamma^2 = \inf \{R(t, t), t \in T\} > 0$, la densité de la distribution de maximum de X sur T existe et est uniformément bornée.

ii) Soit S une partie de T vérifiant

- (2) il existe t_1 dans S tel que $p = p_S(t_1) = \sup \left\{ \left| \frac{R(t, t_1)}{R(t_1, t_1)} - 1 \right|, t \in S \right\} \leq \frac{1}{2}$.

Notons pour tout élément t de T , $Y(t) = X(t) - E(X(t)|X(t_1))$, et $g_{t_1}(\cdot)$ la densité de X_{t_1} . Alors la densité $g_S(\cdot)$ de la distribution du maximum de X sur S vérifie

- (3) $\forall x \in R, g_S(x) \leq \frac{1}{1-p} E(g_{t_1}((x - \sup_S Y)(1+p)^{-1}))$.

Corollaire 2. Soit $X: \Omega \rightarrow R^T$ un vecteur gaussien centré vérifiant (1). Soient t_1 un élément de T , $0 < \varepsilon < 1$, et $0 < \rho^2 \leq R = R(t_1, t_1)$. Notons

- (4) $S = B_{d_x}(t_1, \varepsilon \rho)$,
 $p = \sup \left\{ \left| 1 - \frac{R(t, t_1)}{R(t_1, t_1)} \right|, t \in S \right\}$, et
 $\mu = E \sup_{s \in S} |X(s) - X(t_1)|$.

Dans ces conditions pour tout $x \geq 0$,

$$(5) \quad g_S(x) \leq \frac{3}{2(1-\varepsilon)} g_{t_1}(x) \exp \left\{ \frac{x^2}{\rho^2} \left(\varepsilon^2 + \frac{3p}{2} \right) + \frac{2x}{\rho^2} \left(\mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon \rho \right) \right\}.$$

D'autre part, $p \leq \varepsilon$ et si $R(t, t) \equiv R$ alors $p \leq \varepsilon^2/2$. Enfin $\mu \geq \sqrt{2/\pi} \varepsilon \rho$ si $\varepsilon \rho = \{\sup d_x(s, t_1), s \in S\}$.

Au cours de la démonstration du corollaire 2, nous utiliserons le lemme suivant dû à C. Borell ([1]).

Lemme 3. Soit $Y: \Omega \rightarrow R^T$, T quelconque, un vecteur gaussien centré, notons $\sigma(Y) = \sup(\|Y(t)\|_2, t \in T)$. On suppose $\sigma(Y) < \infty$ et

$$(6) \quad P\{\sup_T Y > a\} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-u^2/2} du = F(b).$$

Dans ces conditions, pour tout nombre $t \geq a$

$$(7) \quad P\{\sup_T Y > t\} \leq F\left(\frac{t-a}{\sigma(Y)} + b\right).$$

Démonstration du théorème 1. Il suffit d'établir ii). En effet, dans ce cas, puisque (T, d_x) est quasi-compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\gamma/2$. Dans chacune de ces boules, la condition (2) est vérifiée de sorte que (3) est réalisé. La densité de la distribution du maximum de X sur chacune de ces boules est donc bornée. Le résultat s'en déduit par sous-additivité de P . Montrons donc ii). Posons pour tout réel x

$$(8) \quad F_Y(x) = \sup \left\{ x \frac{R(t, t_1)}{R(t_1, t_1)} + Y_t, t \in S \right\}.$$

Puisque X (et donc Y) est presque sûrement majoré, il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout ω n'appartenant pas à N , la fonction $x \rightarrow F_{Y_\omega}(x)$ est à valeur dans R , convexe croissante; elle est aussi bijective. Il suffit de montrer qu'elle est injective: soit $F_{Y_\omega}(x) = x + \phi_{Y_\omega}(x)$; alors pour tout ω en dehors de N ,

$$(9) \quad |\phi_{Y_\omega}(x) - \phi_{Y_\omega}(x')| \leq |x - x'| p_S(t_1) \leq \frac{1}{2} |x - x'|,$$

ce qui permet de conclure. Notons alors J_{Y_ω} son inverse et

$$J'_{Y_\omega}(x) = \frac{1}{2} (J'_{Y_\omega}(x-0) + J'_{Y_\omega}(x+0)).$$

Alors on déduit de (9) pour tous réels z_1, z_2 distincts et $\omega \notin N$,

$$(10) \quad \frac{1}{1+p} \leq \left| \frac{J_{Y_\omega}(z_1) - J_{Y_\omega}(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{1}{1-p},$$

d'où en particulier, quel que soit z réel,

$$(11) \quad |J'_{Y_\omega}(z)| \leq \frac{1}{1-p} \quad \text{et} \quad |J_Y(z)| \geq \frac{1}{1+p} |z - \sup_{t \in S} Y_\omega(t)|.$$

Soient alors $x_0 \in R$, $h > 0$ et $V =]x_0 - h, x_0 + h[$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} P\{\sup_T X \in V\} &= \frac{1}{2h} P\{X(t_1) \in J_V(V)\}, \\ &= E\left\{\frac{1}{2h} \int_{J_V(V)} g_{t_1}(x) dx\right\} = E\left\{\frac{1}{2h} \int_V g_{t_1}(J_V(v)) J'_V(v) dv\right\}. \end{aligned}$$

Pour tout ω n'appartenant pas à N , J_{V_ω} est continue; de plus sa dérivée à droite (respectivement à gauche) est continue à droite (respectivement à gauche), donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_V g_{t_1}(J_{V_\omega}(v)) J'_{V_\omega}(v) dv = g_{t_1}(J_{V_\omega}(x_0)) J'_{V_\omega}(x_0).$$

D'autre part,

$$\sup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2h} \int_V g_{t_1}(J_V(v)) J'_V(v) dv \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi R(t_1, t_1)}},$$

le théorème de convergence dominée montre donc pour tout x_0 ,

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} P\{\sup_S X \in V\} = g_S(x_0) = E\{g_{t_1}(J_V(x_0)) J'_V(x_0)\},$$

et en utilisant (11),

$$(13) \quad \forall x \in R, \quad g_S(x) \leq \frac{1}{1-p} E\left\{g_{t_1}\left(\frac{1}{1+p}(x - \sup_S Y)\right)\right\},$$

d'où le théorème 1.

Démonstration du corollaire 2. Ici $S = B_{a_x}(t_1, \varepsilon \rho)$ satisfait la condition 2, donc (3) est vrai. De (13) on tire, en développant $(x_0 - \sup_S Y)^2$,

$$(14) \quad \forall x \in R, \quad g_S(x) \leq \frac{1}{1-p} g_{t_1}\left(\frac{x}{1+p}\right) E\left(\exp \frac{x}{R(1+p)^2} \sup_S Y\right),$$

$$\text{où } R = R(t_1, t_1).$$

Le lemme 3 permet d'évaluer pour tout $\alpha > 0$, $E(\exp \alpha \sup_S Y)$. Soit $a = 2E \sup_S |Y_t|$ et $\sigma_Y = \sup_{t \in S} (E Y_t^2)^{1/2}$. Alors,

$$(15) \quad E\{e^{\alpha \sup_S Y_t}\} \leq \frac{3}{2} e^{\alpha a + 1/2(\alpha \sigma_Y)^2}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 &= \sup_{t \in S} R(t, t) \left| 1 - \frac{R^2(t, t_1)}{R(t, t) R(t_1, t_1)} \right| \\ &\leq \sup_{t \in S} 2R(t, t) \left(1 - \frac{R(t_1, t)}{\sqrt{R(t, t) R(t_1, t_1)}} \right) \\ &\leq \sup_{t \in S} \sqrt{\frac{R(t, t)}{R(t_1, t_1)}} \sigma_x^2(t_1, t) \leq 2\varepsilon^2 \rho^2. \end{aligned}$$

d'où,

$$(16) \quad \sigma_Y^2 \leq 2\varepsilon^2 \rho^2, \quad \text{et aussi } p \leq \varepsilon.$$

D'autre part,

$$E \sup_s |Y| \leq \mu + \sqrt{\frac{2R}{\pi}} p \leq \mu + \sqrt{\frac{2R}{\pi}} \varepsilon,$$

d'où, $a \leq 2(\mu + \sqrt{2R/\pi} \varepsilon)$, mais, $\mu \geq \sup_{s \in S} E |X_s - X_{t_1}| = \sqrt{2/\pi} \sup_{s \in S} d_x(s, t_1)$. Donc $\mu \geq \sqrt{2/\pi} \varepsilon \rho$, si $Fr(S) \neq \emptyset$. Par conséquent,

$$(17) \quad E \left(\exp \frac{x}{(1+p)^2 R} \sup Y \right) \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ \frac{x^2 \varepsilon^2}{\rho^2} + \frac{2x}{\rho^2} \left(\mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon \rho \right) \right\}.$$

Comme en outre

$$g_{t_1} \left(\frac{x}{1+p} \right) \leq g_{t_1}(x) \exp \frac{3px^2}{2R},$$

on obtient finalement,

$$g_s(x) \leq \frac{3}{2(1-\varepsilon)} g_{t_1}(x) \exp \left(\frac{x^2}{\rho^2} \left(\frac{3p}{2} + \varepsilon^2 \right) + \frac{2x}{\rho^2} \left(\mu + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varepsilon \rho \right) \right).$$

Remarques. Soit $T' = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow T_n$, T_n finis, une suite dense dans T , soit μ_n (respectivement μ) la loi image de $\sup_{T_n} X$ (respectivement $\sup_T X$) et soit g_{T_n} (resp. g_T) la densité de μ_n (respectivement de μ). Pour tout ouvert O on a l'inclusion suivante $\{\sup_{T'} X \in O\} \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\sup_{T_n} X \in O\}$ qui conduit à

$$(18) \quad \mu(O) \leq \int_O \limsup_{n \rightarrow \infty} g_{T_n}(x) dx = \nu(O)$$

Le théorème 1 montre que $\sup_n g_{T_n} \in L^1_{loc}(R)$, donc ν est une mesure positive localement bornée. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact non vide de R ; la relation (18) montre que les restrictions de μ et ν à I vérifient en fait $\mu \leq \nu$ et donc $\mu \ll \nu$. En vertu du théorème de Radon-Nicodým, il existe une fonction ϕ_I mesurable positive ν -intégrable sur I , telle que

$$\mu(B) = \int_B \phi(x) \limsup_{n \rightarrow \infty} g_{T_n}(x) dx < \infty.$$

En fait, on vérifie que la classe d'ensembles

$$\mathcal{W} = \{B \in \mathcal{B} \cap I : \int_B \limsup_{n \rightarrow \infty} g_{T_n}(x) (1 - \phi(x)) dx \geq 0\},$$

coïncide avec la tribu trace $\mathcal{B} \cap I$, si bien que par recollement, il existe une application mesurable $\phi : R \rightarrow R_+$ localement ν -intégrable vérifiant

$$(19) \quad g_T(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} g_{T_n}(x) \phi(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq \phi \leq 1$$

presque partout ce qui établit le lien entre la suite $(g_{T_n}, n \geq 1)$ et g_T .

Le théorème 1 montre que $g_T(x)$ se majore sur R^- à partir $E \exp(-|x| \sup X)$, d'après le théorème 1, c'est immédiat. En effet $\forall x \in R$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad g_s(x) &\leq (1-p) E \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \sup_s Y)^2 \frac{1}{(1+p)^2 R}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \\
 &\leq \frac{1-p}{\sqrt{2\pi R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1+p)^2 R}\right) E \exp\left(-\frac{|x| \sup_s Y}{(1+p)^2 R}\right)
 \end{aligned}$$

d'où $g_T(x)$ se majore à partir de $E e^{-|x| \sup X}$ sur R^- .

Corollaire 3. Soit T un ensemble arbitraire et soit $X: \Omega \rightarrow R^T$ un vecteur gaussien centré. On suppose que X et T vérifient (1) et de plus

$$(20) \quad \gamma^2 = \inf \{R(t, t), t \in T\} > 0.$$

Notons $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(21) \quad \mu(\varepsilon) = \sup \left\{ E \sup_{s \in B(t, \varepsilon)} |X(t) - X(s)|, t \in T \right\}.$$

Dans ces conditions, pour tout $x > 0$, tout $0 < \eta < 1$,

$$\begin{aligned}
 (22) \quad g_T(x) &\leq \frac{3}{2(1-\eta)} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\sup_T R(t, t)}}\right) \\
 &\quad \times \inf \{N_{d_x}(T, \varepsilon \gamma) e^{(3x^2 \varepsilon^2 / \gamma^2) + (2x / \gamma^2)(\mu(\varepsilon \gamma) + \varepsilon \gamma)}, 0 < \varepsilon \leq \eta\},
 \end{aligned}$$

où $N_{d_x}(T, \alpha)$ est le cardinal minimal d'un recouvrement de (T, d_x) par des boules ouvertes de rayon α .

Corollaire 4. Sous les mêmes hypothèses, si de plus $EX_i^2 \equiv R^2 > 0$, alors, pour tout $x \geq 0$, tout $0 < \eta < 1$,

$$\begin{aligned}
 (23) \quad g_T(x) &\leq \frac{3}{2(1-\eta)} \phi\left(\frac{x}{R}\right) \inf \{N_{d_x}(T, \varepsilon R) e^{(3x^2 \varepsilon^2 / R^2) + (2x / R^2)(\mu(\varepsilon R) + \varepsilon R)}, \\
 &\quad 0 < \varepsilon < \eta\}.
 \end{aligned}$$

b) Si de plus, il existe un nombre $0 < M < \infty$ tel que pour tout $\rho \geq 0$, $\mu(\rho) \leq M\rho$, alors pour tout $\alpha > 0$, tout $0 < \eta < 1$ et tout $x \geq \alpha/\eta$,

$$(24) \quad g_T(x) \leq C \phi\left(\frac{x}{R}\right) N_{d_x}\left(T, \frac{R\alpha}{x}\right),$$

avec

$$C = \frac{3}{2(1-\eta)} \exp\left(\frac{3\alpha^2}{R^2} + \frac{2\alpha}{R^2}(MR+1)\right).$$

Démonstration des corollaires 3 et 4. Ceux-ci résultent immédiatement du corollaire 2 qu'on applique au maximum de X sur des d_x -boules de rayon $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon < \eta$, dont la réunion recouvre T . Comme la fonction $N_{d_x}(T, \cdot)$ ne prend au plus qu'une infinité dénombrable de valeurs, la densité $g_T(x)$ se majore par l'infimum de la famille dénombrable des bornes obtenues en faisant varier ε .

Le corollaire 4 n'est autre que le corollaire 3 traduit dans un cas particulier.

Remarques. Les énoncés précédents sont surtout intéressants lorsque

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\varepsilon) = 0$. C'est le cas si et seulement si X est à trajectoires continues. Cependant, dans le cas borné, ces énoncés restent significatifs.

La situation $\mu(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ est plutôt rare. En général, le contraire se produit ; en effet, si (T, d_x) est tel que toute boule non vide a une frontière non vide, on a $\mu(\varepsilon) \geq \varepsilon \sqrt{2/\pi}$.

Cependant, la situation $\mu(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ n'est pas inintéressante. Les processus gaussiens ayant cette propriété ont été intensément étudiés les quinze dernières années. Dans cette situation, la majoration (24) est la meilleure possible comme le montre l'exemple suivant : soit $T = [0, 1]$, $R = 1$, $d_x(s, t) = |s - t|^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$, alors (24) signifie pour tout $x \geq 0$,

$$g_T(x) \leq K e^{-x^{2/2} x^{1/\alpha}},$$

où K est un nombre positif dépendant des paramètres utilisés. D'où donc $P\{\sup X > x\} \leq K' e^{-x^{2/2} x^{1/\alpha-1}}$. Mais on sait bien (voir [4] p. 130 par exemple) que $P\{\sup X > x\} \leq K'' e^{-x^{2/2} x^{1/\alpha-1}}$ pour tout $x \geq 1$.

Dans le cas $d_x(s, t) = \left(\log \frac{1}{|s-t|}\right)^{-1/2} \left(\log_2 \frac{1}{|s-t|}\right)^{-\delta}$, $\delta > 1$ qui correspond à une situation limite pour la continuité des processus gaussiens, la majoration (22) reste précise et se contrôle de la même façon.

II. Extension.

Le problème étudié se généralise de la façon suivante : étant donnés (E, μ) un espace de Gauss, Q une semi-norme sur E , la loi de Q est-elle absolument continue ? Si oui, évaluer sa densité. Dans ce qui va suivre E est un espace de Banach séparable, sa norme est notée $\|\cdot\|$. De même, on note U la boule unité de E' , U muni de la topologie induite par la topologie faible $\sigma(E', E)$ est un espace métrique compact. Mais puisque μ est gaussienne, la topologie induite sur U par la topologie de $L^2(\mu)$ est équivalente à la précédente. Par conséquent, si $d^2(f, g) = \|f - g\|_{2, \mu}^2 = \int \langle f - g, x \rangle^2 d\mu(x)$, (U, d) est un espace métrique compact. On dira que μ a la propriété $M(\varepsilon)$ (M pour maillage) si $(M(\varepsilon))$ il existe $0 < \varepsilon < 1$, une partie finie $S = S(\varepsilon)$ de U tels que

$$\inf \left\{ \int f^2 d\mu, f \in S \right\} = \gamma^2(\varepsilon) > 0,$$

et

$$\bigcup_{f \in S} B_d(f, \varepsilon \gamma(\varepsilon)) = U.$$

On dira que μ a la propriété M si $M(\varepsilon)$ a lieu pour tout $0 < \varepsilon < 1$. On a alors l'énoncé suivant qui découle directement du théorème 1 ainsi que du corollaire 2.

Théorème 2. Soit (E, μ) un espace de Gauss tel que E soit un espace de Banach séparable de norme $\|\cdot\|$. On note

$$U = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}.$$

Si μ a la propriété $M(\varepsilon)$, alors la densité g de la norme de E existe et est uniformément bornée par $1/(1-\varepsilon) \text{Card}(S(\varepsilon)) (2\pi\gamma^2(\varepsilon))^{-1/2}$. Elle vérifie de plus pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \text{Card}(S(\varepsilon)) \phi\left(\frac{x}{\gamma(\varepsilon)}\right) e^{3\varepsilon x^2 \gamma(\varepsilon)^{-2} + 2x\gamma(\varepsilon)^{-2} \int \|x\|^2 d\mu(x)}.$$

Remarque. L'étude de la vitesse de convergence dans le théorème de la limite centrale pour des variables aléatoires X_i , i.i.d. à valeurs dans un espace de Banach fait intervenir la densité de la norme gaussienne $\|\cdot\|$ de B , on vérifie en effet facilement que si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, et G une variable aléatoire gaussienne à valeur dans B de même covariance que X_1

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= \left| P\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\| > x\right\} - P\{\|G\| > x\} \right| \\ &\leq \inf_{h>0} \left[P\left\{\left\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\| - \|G\| > h\right\} + P\{x-h < \|G\| < x+h\} \right]. \end{aligned}$$

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE
AVANCÉE, RUE DU GÉNÉRAL ZIMMER,
67084—STRASBOURG

References

- [1] C. Borell, The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space, *Invent. Math.* **30** (1975), 207-216.
- [2] L. Pitt, Local sample paths properties of Gaussian fields, *Ann. of Prob.*, **7** (1979), 477-493.
- [3] V.S. Tsirelson, The density of the distribution of the maximum of a gaussian process, *Theory Prob. Applications*.
- [4] M. Weber, Analyse asymptotique de processus gaussiens stationnaires, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **16** (1980), 117-176.