J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
26-2 (1986) 157-175

Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs

Par

Tadayoshi KANO

SECONDE PARTIE

LE DÉVELOPPEMENT DE FRIEDRICHS ET LES ÉQUATIONS APPRCCHÉES

Notice préliminaire.

Nous étudions dans cet article l'évolution temporaire des ondes de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel irrotationnel.

Il s'agissait, en fait, d'étudier le problème non-dimensionnel suivant dépendant d'un paramètre non-dimensionnel $\delta\in[0, 1]$:

$$\delta^2(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})+\Phi_{zz}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega(t),$$

$$\Phi_z=0, \quad z=0, \quad (x, y)\in \boldsymbol{R}^2,$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta^2\left(\Phi_t+\dfrac{1}{2}(\Phi_x^2+\Phi_y^2)+z\right)+\dfrac{1}{2}\Phi_z^2=0 \\ \delta^2(\Gamma_t+\Gamma_x\Phi_x+\Gamma_y\Phi_y)-\Phi_z=0\end{array}\right\} z=\Gamma(t, x, y),$$

avec des données de Cauchy

$$\Phi(0, x, y, z)=\Phi_0(x, y, z), \quad \Gamma(0, x, y)=\Gamma_0(x, y)>0.$$

Dans la première partie de cet article (numéro précédent), nous avons démontré, localement par rapport au temps, l'existence de solution de ce problème dans une échelle d'espaces de Banach de fonctions analytiques (§§ 3-4).

Nous y avons également démontré que cette solution était en fait, sur la surface, indéfiniment différentiable par rapport à ce paramètre δ dans cette échelle d'espaces de Banach, § 5. Ce qui donne une justification mathématique du développement de Friedrichs sur la surface comme développement asymptotique.

Dans la présente seconde partie, tout d'abord, on procède effectivement ce développement de Friedrichs sur la surface de l'eau, pour donner ainsi une justification mathématique pour les équations des ondes de surface en eau peu profonde en cas de l'écoulement trois-dimensionnel, § 6.

Communiqué par Prof. Mizohata, le 8 Octobre, 1984.

Ensuite, dans le paragraphe 7, on montrera que notre solution est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ aussi pour tout z, $0<z<\Gamma(t, x, y)$. On en déduit ainsi une justification mathématique pour le développement de Friedrichs en cas de l'écoulement trois-dimensionnel.

Enfin, dans le dernier paragraphe, une appréciation sur la portée et les défauts de nos études dans cet article.

§ 6. Développement sur la surface: équations deux-dimensionnelles des ondes de surface en eau peu profonde.

6.1. D'après le résultat du paragraphe 5, on peut développer par rapport à $\delta \in [0, 1]$ dans B_ρ l'opération

(6.1) $$\phi_z|_{z=1} \longmapsto \{\phi_x|_{z=1}, \phi_y|_{z=1}\},$$

ce qui correspond dans les variables originales à

(6.1)′ $$\Phi_z|_{z=\Gamma} \longmapsto \{\Phi_x|_{z=\Gamma}, \Phi_y|_{z=\Gamma}\}.$$

Avant de donner le développement de Friedrichs, on obtiendra un développement pour les équations (2.18)-(2.19) par rapport à $\delta \in [0, 1]$ d'après ce développement de (6.1). D'où, on déduit, comme le premier terme, les équations deux-dimensionnelles des ondes de surface en eau peu profonde, ce qui est une généralisation du résultat de [14].

Dans le dernier numéro **6.4.** de ce paragraphe, on donnera également le développement de solution $\{\phi, \gamma\}$ par rapport à $\delta \in [0, 1]$ sur $z=1$. Et ainsi on obtiendra, pour ainsi dire, le développement de Friedrichs sur la surface.

Pour ce faire, il nous faut savoir le développement pour

$$\phi_z(1) = \phi_z(t, x, y, 1; \delta)$$

par rapport à $\delta \in [0, 1]$. On a la

Proposition 6.1. *On a le développement suivant pour le potentiel-solution* ϕ *dans* $S = \bigcup_{\rho>0} B_\rho$ *pour* $|t| < a(\rho_0 - \rho)$:[8)]

(6.2) $$\phi_z(1) = -\delta^2\gamma^2\Delta\phi(1) - \frac{\delta^4}{3}\gamma^2\Big\{3(\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma\gamma_{xx}+\gamma\gamma_{yy})\Delta\phi(1) + 6\gamma\gamma_x\Delta\phi_x(1) + 6\gamma\gamma_y\Delta\phi_y(1) + \gamma^2\Delta^2\phi(1)\Big\} + O(\delta^6),$$

où Δ *est laplacien dans* $\boldsymbol{R}^2$ *et* $O(\delta^6)$ *signifie que le reste est majoré dans* B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, *par* $Cte\cdot\delta^6$.

Preuve. Compte tenu de (3.5) avec g, (3.12), et $\phi_z(1) = -\phi_z(-1)$, on a

(6.3) $$\hat{\phi}_z(1) = \delta|\xi|\operatorname{th}(\delta|\xi|)\hat{\phi}(1) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|s)}{\operatorname{ch}(\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}(s)ds.$$

8) Données initiales sont dans B_{ρ_0}, voir § 4.

D'où, un assez long mais simple calcul nous donne (6.2).

Remarque 6.2. Il est claire que l'on peut continuer ce développement jusqu'a tout ordre qu'on voudra.

6.2. Développent des équations par rapport à $\delta \in [0, 1]$.

On s'arrête pour l'instant aux termes d'ordre $O(\delta^4)$.

En rapportant le développement (6.2) dans les équations (2.18)-(2.19), on obtient dans B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_t(1) + \frac{1}{2}(\phi_x(1)^2 + \phi_y(1)^2) + \gamma - \frac{\delta^2}{2}(\gamma \Delta \phi(1))^2 = O(\delta^4) \\ \gamma_t + (\gamma \phi_x(1))_x + (\gamma \phi_y(1))_y + \frac{\delta^2}{3} \Delta(\gamma^3 \Delta \phi(1)) = O(\delta^4). \end{array} \right. \tag{6.4}$$

Or, dans les variables originales, on avait

$$\Phi(t, x, y, \Gamma(t, x, y; \delta); \delta) = \phi(t', x', y', 1; \delta)$$

en restaurant le signe prime "$'$" pour les variables de $\{\phi, \gamma\}$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_t|_{z=\Gamma} = \phi_{t'}|_{z'=1} - \frac{\gamma_{t'}}{\gamma} \phi_{z'}|_{z'=1} \\ \Phi_x|_{z=\Gamma} = \phi_{x'}|_{z'=1} - \frac{\gamma_{x'}}{\gamma} \phi_{z'}|_{z'=1} \\ \Phi_y|_{z=\Gamma} = \phi_{y'}|_{z'=1} - \frac{\gamma_{y'}}{\gamma} \phi_{z'}|_{z'=1} \\ \Phi_z|_{z=\Gamma} = \frac{1}{\gamma} \phi_{z'}|_{z'=1}. \end{array} \right. \tag{6.5}$$

Soit maintenant

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(t, x, y; \delta) \overset{\text{déf}}{\equiv} \Phi(t, x, y, \Gamma(t, x, y; \delta); \delta), \tag{6.6}$$

alors on a

$$\overline{\Phi}_t = \phi_{t'}(1), \quad \overline{\Phi}_x = \phi_{x'}(1) \quad \text{et} \quad \overline{\Phi}_y = \phi_{y'}(1). \tag{6.7}$$

En effet

$$\overline{\Phi}_t = \Phi_t|_{z=\Gamma} + \Phi_z|_{z=\Gamma} \Gamma_t = \left(\phi_{t'}|_{z'=1} - \frac{\gamma_{t'}}{\gamma} \phi_{z'}|_{z'=1}\right) + \frac{1}{\gamma} \phi_{z'}|_{z'=1} \cdot \gamma_{t'} = \phi_{t'}(1)$$

par (6.2). De même pour le reste.

D'où,

Proposition 6.3. *Notre solution* $\{\Phi, \Gamma\}$ *du problème* (2.3)-(2.8) *a le développement suivant sur* $z = \Gamma(t, x, y; \delta)$ *dans* B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, *pour* $|t| < a(\rho_0 - \rho)$:

$$(6.8)\qquad \begin{cases} \overline{\Phi}_t+\dfrac{1}{2}(\overline{\Phi}_x^2+\overline{\Phi}_y^2)+\Gamma-\dfrac{\delta^2}{2}(\Gamma\Delta\overline{\Phi})^2=O(\delta^4) \\ \Gamma_t+(\Gamma\overline{\Phi}_x)_x+(\Gamma\overline{\Phi}_y)_y+\dfrac{\delta^2}{3}\Delta(\Gamma^3\Delta\overline{\Phi})=O(\delta^4), \end{cases}$$

où $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$.

Remarque 6.4. Dans le cas de l'écoulement deux-dimensionnel, on l'avait énoncé dans le théorème 3.3, (3.8), dans [14].

6.3. Equations deux-dimensionnelles des ondes de surface en eau peu profonde.

En passant à la limite $\delta\to 0$ dans (6.4), on a

$$(6.9)\qquad \begin{cases} \phi_t^0+\dfrac{1}{2}(\phi_x^0(1)^2+\phi_y^0(1)^2)+\gamma^0=0 \\ \gamma_t^0+(\gamma^0\phi_x^0(1))_x+(\gamma^0\phi_y^0(1))_y=0, \end{cases}$$

dans B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$ avec

$$(6.10)\qquad \left.\begin{aligned} \phi^0(t,x,y)&=\lim_{\delta\to 0}\phi(t,x,y,1;\delta) \\ \gamma^0(t,x,y)&=\lim_{\delta\to 0}\gamma(t,x,y;\delta) \end{aligned}\right\}\ \text{dans}\ B_\rho.$$

Ce qui correspond dans les variables originales:

$$(6.11)\qquad \begin{cases} \Phi_t^0+\dfrac{1}{2}(\Phi_x^{02}+\Phi_y^{02})+\Gamma^0=0 \\ \Gamma_t^0+(\Gamma^0\Phi_x^0)_x+(\Gamma^0\Phi_y^0)_y=0, \end{cases}$$

pour

$$(6.12)\qquad \left.\begin{aligned} \overline{\Phi}^0(t,x,y)&=\lim_{\delta\to 0}\overline{\Phi}(t,x,y;\delta) \\ \Gamma^0(t,x,y)&=\lim_{\delta\to 0}\Gamma(t,x,y;\delta) \end{aligned}\right\}\ \text{dans}\ B_\rho.$$

Nous avons ainsi obtenu les équations deux-dimensionnelles des ondes de surface en eau peu profonde, compte tenu du théorème suivant qui donne une justification mathématique pour ces équations:

Théorème 6.5. *Quel que soit* $\rho<\rho_0$, $\{\overline{\Phi}(t), \Gamma(t)\}$ *est approchée par* $\{\Phi^0(t), \Gamma^0(t)\}$, *la solution de* (6.11), *au sens suivant, pour* $|t|<a(\rho_0-\rho)$:

$$(6.13)\qquad \begin{aligned} &\|\Phi_x^0(t)-\overline{\Phi}_x(t)\|_\rho=O(\delta^2) \\ &\|\Phi_y^0(t)-\overline{\Phi}_y(t)\|_\rho=O(\delta^2) \\ &\|\Gamma^0(t)-\Gamma(t)\|_\rho=O(\delta^2). \end{aligned}$$

Preuve. Différentier (6.4) et (6.9) par rapport à (x, y). On a dans B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$:

$$
(6.14)\qquad \begin{cases} u_t+uu_x+vv_x+\gamma_x=O(\delta^2) \\ v_t+uu_y+vv_y+\gamma_y=O(\delta^2) \\ \gamma_t+(\gamma u)_x+(\gamma v)_y=O(\delta^2), \end{cases}
$$

pour $\{u, v, \gamma\}=\{\phi_x(1), \phi_y(1), \gamma\}$ et

$$
(6.15)\qquad \begin{cases} u_t^0+u^0u_x^0+v^0v_x^0+\gamma_x^0=0 \\ v_t^0+u^0u_y^0+v^0v_y^0+\gamma_y^0=0 \\ \gamma_t^0+(\gamma^0u^0)_x+(\gamma^0v^0)_y=0, \end{cases}
$$

pour $\{u^0, v^0, \gamma^0\}=\{\phi_x^0(1), \phi_y^0(1), \gamma^0\}$.

En appliquant le théorème abstrait non-linéaire de Cauchy-Kowalevski [13] à ces deux systèmes quasi-linéaires, la continuité par rapport au second membre montre

$$
(6.16)\qquad \|u^0(t)-u(t)\|_\rho, \quad \|v^0(t)-v(t)\|_\rho, \quad \|\gamma^0(t)-\gamma(t)\|_\rho=O(\delta^2),
$$

pour $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$. L'existence de solution $\{u^0, v^0, \gamma^0\}$ dans S est assurée bien entendu, par ce théorème de Cauchy-Kowalevski. D'où le théorème.

Q. E. D.

Remarque 6.6. Notons:

$$
(6.17)\qquad \Phi^0(t, x, y)=\lim_{\delta\to 0}\Phi(t, x, y, 0; \delta).
$$

En effet,

$$
\Phi(t, x, y, z; \delta)=\Phi(t, x, y, 0; \delta)+\frac{1}{2}\Phi_{zz}(t, x, y, 0; \delta)z^2+\cdots=
$$

$$
=\Phi(t, x, y, 0; \delta)-\frac{1}{2}(\delta z)^2\Delta\Phi(t, x, y, 0; \delta)+\cdots,
$$

d'où

$$
\Phi^0=\lim_{\delta\to 0}\Phi(t, x, y, \Gamma(t, x, y; \delta); \delta)=\lim_{\delta\to 0}\Phi(t, x, y, 0; \delta).
$$

6.4. Développement sur la surface.

Outre le développement d'équations (2.18)-(2.19), on va développer maintenant la solution $\{\phi, \gamma\}$ elle-même par rapport à $\delta\in[0, 1]$ dans $S=\bigcup_{\rho>0}B_\rho$:

$$
(6.18)\qquad \begin{cases} \phi(1)=\phi(t, x, y, 1; \delta)=\sum_{n=0}^{N}\phi_n(t, x, y)\delta^{2n}+O(\delta^{2N+2}) \\ \gamma=\gamma(t, x, y; \delta)=\sum_{n=0}^{N}\gamma_n(t, x, y)\delta^{2n}+O(\delta^{2N+2}), \end{cases}
$$

dans B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$, $\{\phi_n, \gamma_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ étant indépendantes de $\delta\in[0, 1]$.

En rapportant (6.18) dans (2.18)-(2.19), on obtiendra, pour les coefficients de δ^{2n}, $n=0, 1, 2, 3, \cdots$, une hiérarchie de systèmes d'équations hyperboliques, quasi-linéaire par rapport à $\{\phi_{0,x}, \phi_{0,y}, \gamma_0\}$ pour $n=0$, linéaires par rapport à $\{\phi_{n,x}, \phi_{n,y}, \gamma_n\}$ pour $n\geqq 1$:

$$(6.19)_0 \qquad \begin{cases} \phi_{0,t}+\dfrac{1}{2}(\phi_{0,x}^2+\phi_{0,y}^2)+\gamma_0=0 \\ \gamma_{0,t}+(\gamma_0\phi_{0,x})_x+(\gamma_0\phi_{0,y})_y=0\,, \end{cases}$$

puisque

$$\phi_0(t,\ x,\ y)=\phi^0(t,\ x,\ y,\ 1)\,,\quad \gamma_0(t,\ x,\ y)=\gamma^0(t,\ x,\ y)\,,$$

et aussi

$$(6.19)_n \qquad \begin{cases} \phi_{n,t}+\phi_{0,x}\phi_{n,x}+\phi_{0,y}\phi_{n,y}+\gamma_n=\alpha_{n-1} \\ \gamma_{n,t}+\{(\gamma_0\phi_{n,x})_x+(\gamma_0\phi_{n,y})_y\}+\{(\gamma_n\phi_{0,x})_x+(\gamma_n\phi_{0,y})_y\}=\beta_{n-1}\,, \end{cases}$$

où α_{n-1} et β_{n-1} sont des polynômes de $\{\phi_j,\ \gamma_j,\ 0\leqq j\leqq n-1\}$ et leurs dérivées par rapport à $(x,\ y)$.

Pour $n=1$, par exemple, on a le système suivant:

$$(6.19)_1 \qquad \begin{cases} \phi_{1,t}+\phi_{0,x}\phi_{1,x}+\phi_{0,y}\phi_{1,y}+\gamma_1=\dfrac{1}{2}(\gamma_0\Delta\phi_0)^2 \\ \gamma_{1,t}+(\gamma_0\phi_{1,x})_x+(\gamma_1\phi_{0,x})_x+(\gamma_0\phi_{1,y})_y+(\gamma_1\phi_{0,y})_y=-\dfrac{1}{3}\Delta(\gamma_0^3\Delta\phi_0)\,. \end{cases}$$

Pour calculer tous ces systèmes, on se servit de proposition 6.1, (6.2). Si on continue le développement (6.2) en ordre supérieur, il n'est pas difficile d'écrire explicitement les seconds membres α_{n-1} et β_{n-1} dans $(6.19)_n$. Mais ils deviennent de plus en plus compliqués. En effet, on a par exemple:

$$\begin{aligned} &\phi_{2,t}+\phi_{0,x}\phi_{2,x}+\phi_{0,y}\phi_{2,y}+\gamma_2= \\ &=-\frac{1}{2}(\phi_{1,x}^2+\phi_{1,y}^2)+\gamma_0(\gamma_1(\Delta\phi_0)^2+\gamma_0\Delta\phi_0\Delta\phi_1)+ \\ &\qquad\qquad +\frac{1}{3}\gamma_0\Delta\phi_0\cdot\Delta(\gamma_0^3\Delta\phi_0)-\frac{1}{2}\gamma_0^2(\gamma_{0,x}^2+\gamma_{0,y}^2)(\Delta\phi_0)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{2,t}+(\gamma_0\phi_{2,x})_x+(\gamma_2\phi_{0,x})_x+(\gamma_0\phi_{2,y})_y+(\gamma_2\phi_{0,y})_y= \\ &=-\{(\gamma_1\phi_{1,x})_x+(\gamma_1\phi_{1,y})_y\}-\frac{1}{3}\Delta(\gamma_0^3\Delta\phi_1+3\gamma_0^2\gamma_1\Delta\phi_0)- \\ &\qquad\qquad -(\gamma_{0,x}^2+\gamma_{0,y}^2)\left\{\frac{1}{3}\Delta(\gamma_0^3\Delta\phi_0)-\gamma_0(\gamma_{0,x}^2+\gamma_{0,y}^2)\Delta\phi_0\right\}. \end{aligned}$$

D'où, comme dans le numéro **6.3.**, on obtient le développement pour $\bar{\Phi}(t,\ x,\ y\,;\delta)$ et $\Gamma(t,\ x,\ y\,;\delta)$ comme suit:

$$(6.20) \qquad \begin{cases} \bar{\Phi}=\sum\limits_{n=0}^{N}\bar{\Phi}_n(t,\ x,\ y)\delta^{2n}+O(\delta^{2N+2}) \\ \Gamma=\sum\limits_{n=0}^{N}\Gamma_n(t,\ x,\ y)\delta^{2n}+O(\delta^{2N+2}) \end{cases}$$

dans B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$, $\{(\bar{\Phi}_n,\ \Gamma_n)(t,\ x,\ y)\}_{n=0,1,2,\dots}$ étant indépendantes de $\delta\in[0,\ 1]$. Notons en particulier

$$\overline{\Phi}_0=\Phi^0(t,\ x,\ y)\,,\quad \Gamma_0=\Gamma^0(t,\ x,\ y)\,.$$

On a donc

$$(6.21)_0\qquad \begin{cases} \overline{\Phi}_{0,t}+\dfrac{1}{2}(\overline{\Phi}^2_{0,x}+\overline{\Phi}^2_{0,y})+\Gamma_0=0 \\ \Gamma_{0,t}+(\Gamma_0\overline{\Phi}_{0,x})_x+(\Gamma_0\overline{\Phi}_{0,y})_y=0\,, \end{cases}$$

et

$$(6.21)_n\qquad \begin{cases} \overline{\Phi}_{n,t}+\overline{\Phi}_{0,x}\overline{\Phi}_{n,x}+\overline{\Phi}_{0,y}\overline{\Phi}_{n,y}+\Gamma_n=A_{n-1} \\ \Gamma_{n,t}+(\Gamma_0\overline{\Phi}_{n,x})_x+(\Gamma_n\overline{\Phi}_{0,x})_x+(\Gamma_0\overline{\Phi}_{n,y})_y+(\Gamma_n\overline{\Phi}_{0,y})_y=B_{n-1}\,, \end{cases}$$

A_{n-1} et B_{n-1} étant fonctions de $\{\overline{\Phi}_j,\ \Gamma_j\}$, $0\leqq j\leqq n-1$, et leurs dérivées par rapport à $(x,\ y)$.

Pour $n=1$, par exemple, on a

$$(6.21)_1\qquad \begin{cases} \overline{\Phi}_{1,t}+\overline{\Phi}_{0,x}\overline{\Phi}_{1,x}+\overline{\Phi}_{0,y}\overline{\Phi}_{1,y}+\Gamma_1=\dfrac{1}{2}(\Gamma_0\Delta\overline{\Phi}_0)^2 \\ \Gamma_{1,t}+(\Gamma_0\overline{\Phi}_{1,x})_x+(\Gamma_1\overline{\Phi}_{0,x})_x+(\Gamma_0\overline{\Phi}_{1,y})_y+(\Gamma_1\overline{\Phi}_{0,y})_y=-\dfrac{1}{3}\Delta(\Gamma_0^3\Delta\overline{\Phi}_0)\,. \end{cases}$$

§ 7. Développement de Friedrichs.

7.1. Avant de donner une justification mathématique du développement de Friedrichs, on étudie plus profondément notre solution $\{\phi,\ \gamma\}$ de (2.16)-(2.21).

S'appuyant sur le théorème d'existence du paragraphe 4 qui détermine les données de Dirichlet sur $z=\pm 1$, nous obtenons une solution unique analytique dans Ω_1 du problème aux limites:

(7.1) $\qquad L_\delta\phi=0\,,\quad \phi|_{z=\pm1}=\phi(1)$: obtenue dans le paragraphe 4,

l'opérateur L_δ étant défini dans (2.16).

Or, on a vu, (4.22), que $\phi_x(1)=\phi_x(t,\ x,\ y,\ 1\,;\delta)$ et $\phi_y(1)=\phi_y(t,\ x,\ y,\ 1\,;\delta)$ appartiennent à B_ρ, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, et en plus nous avons (4.22). Ainsi, on voit $\Lambda\phi(z)=\Lambda\phi(t,\ x,\ y,\ z\,;\delta)$ appartenir à $H^{7/2}(\Omega_1)$.

D'autre part, dans les paragraphes 5-6, on a vu que notre solution $\{\phi,\ \gamma\}$ était indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0,\ 1]$ dans $S=\bigcup_{\rho>0}B_\rho$ sur $z=1$.

On va voir maintenant que $\phi_x(z)$, $\phi_y(z)$ et $\phi_t(z)$ sont également indefiniment différentiables par rapport à $\delta\in[0,\ 1]$ dans S, quel que soit z, $|z|\leqq 1$. On peut le démontrer de la même manière que dans les paragraphes 5-6 en s'appuyant sur les estimations suivantes dans les lemmes 7.1-7.9, en outre que les estimations dans les paragraphes 3 et 5.

Lemme 7.1. *Pour R_0, une constante positive, suffisamment petite (comme dans les paragraphes 3 et 5), il existe une constante positive $C(R_0)$ indépendante de $\delta\in[0,\ 1]$ telle que l'on ait, si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, les inégalités suivantes:*

$$
(7.2)\qquad
\begin{aligned}
&\|\phi_x(z)\|_\rho,\ \|\phi_y(z)\|_\rho \leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)\\
&\|\phi_z(z)\|_\rho \leqq C(R_0)\cdot\delta\cdot E_{2,\rho}(\phi)\\
&\|\phi_{zx}(z)\|_\rho,\ \|\phi_{zy}(z)\|_\rho \leqq C(R_0)\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho\\
&\|\phi_{zz}(z)\|_\rho \leqq C(R_0)\cdot\delta\cdot\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho
\end{aligned}
$$

quel que soit z, $|z|\leqq 1$.

Preuve. Vu (3.37), par exemple, on a

$$
(7.3)\qquad \|\Lambda\phi_z(z)\|_\rho \leqq \|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho + C|||\delta g|||_\rho \leqq (1+C(R_0))\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho\,,
$$

compte tenu de (3.10)'. De même pour le reste en tenant compte des estimations dans le paragraphe 3. Q. E. D.

D'où, comme dans le paragraphe 5, on a la

Proposition 7.2. *Pour* R_0 *dans le lemme* 7.1 *et* Q_0 *positive* (*dans le paragraphe* 3), *si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$ *et* $E_{2,\rho}(\phi)<Q_0$, *quel que soit* $\rho<\rho_0$, $\phi_x(z)$, $\phi_y(z)$ *et* $\phi_z(z)$ *sont indéfiniment différentiables par rapport à* $\delta\in[0, 1]$ *dans l'échelle d'espaces de Banach* $S=\bigcup_{\rho>0} B_\rho$, *quel que soit* z, $|z|\leqq 1$.

En particulier, on retrouve (6.2) comme un corollaire.

On va démontrer maintenant que $\phi_t(z)$ est aussi indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$ dans S. Pour cela, on montre la proposition 7.3 cidessous et tout le reste de ce numéro **7.1.** est consacré pour la démonstration d'elle:

Proposition 7.3. *Pour* R_0 *positive précédemment choisie, il exiete une constante positive* $C(R_0)$ *indépendante de* $\delta\in[0, 1]$ *telle que l'on ait*

$$
(7.4)\qquad \|\phi_t(z)\|_\rho \leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)\,,
$$

quel que soit z, $|z|\leqq 1$, *et quel que soit* $\rho<\rho_0$, *pour* $|t|<a(\rho_0-\rho)$, *si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<$ $<R_0$, $\forall\rho<\rho_0$.

On voit tout d'abord:

$$
(7.5)\qquad
\begin{aligned}
\hat{\phi}_t(z)=\frac{\mathrm{ch}(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}(\delta|\xi|)}\hat{\phi}_t(1)+\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}_t(s)ds+\\
+\int_{1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}_t(s)ds\,,
\end{aligned}
$$

où

$$
(7.6)\qquad
\begin{aligned}
\delta^2 g_t(z)=&\left\{\delta p_t(z)\frac{\phi_{zz}}{\delta}(z)+\delta q_t(z)\frac{\phi_z}{\delta}(z)+\delta r_{1,t}(z)\phi_{zx}(z)+\delta r_{2,t}\phi_{zy}(z)\right\}+\\
&+\left\{p(z)\phi_{zzt}(z)+q(z)\phi_{zt}(z)+\delta r_1(z)\phi_{zxt}(z)+\delta r_2(z)\phi_{zyt}(z)\right\}\equiv\\
\equiv&\{\ \mathrm{I}\ \}+\{\ \mathrm{II}\ \}\,.
\end{aligned}
$$

Ceci dit, on voit que $\phi_t(z)$, (7.5), s'écrit comme suit:

$$\phi_t(z)=G(z)\phi_t(1)+R_{\mathrm{I}}+R_{\mathrm{II}}\,. \tag{7.5$'$}$$

Compte tenu de l'équation (2.18) et du théorème 4.3, (4.22), avec (3.21), il est évident qu'on a

$$\|G(z)\phi_t(1)\|_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)\,, \tag{7.7}$$

l'estimation pour la première partie du second membre dans (7.5) en haut.

Pour l'estimation de la seconde et la troisième partie du second membre de (7.5), commençons par le

Lemme 7.4. *Si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, $0<R_0<1$, *quel que soit* $\rho<\rho_0$, *on a*

$$\left\|\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)_t\right\|_\rho\leqq C(R_0)\|(\gamma-1)_t\|_\rho\,, \tag{7.8}$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, $C(R_0)$ *étant une constante positive indépendante de* $\delta\in[0,1]$.

Preuve. On voit d'abord:

$$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)_t=(\gamma-1)_t-(\gamma-1)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)_t-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)(\gamma-1)_t\,.$$

D'où, on a

$$\left\|\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)_t\right\|_\rho\leqq\frac{1+\left\|\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\right\|_\rho}{1-\|\gamma-1\|_\rho}\|(\gamma-1)_t\|_\rho\leqq\frac{\|(\gamma-1)_t\|_\rho}{(1-\|\gamma-1\|_\rho)^2}\,,$$

d'après (3.17).

On a d'autre part:

Lemme 7.5. *Si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, *quel que soit* $\rho<\rho_0$, *on a*

$$\|\delta(\gamma-1)_t\|_\rho\,,\quad\|\delta(\delta\gamma_x)_t\|_\rho\,,\quad\|\delta(\delta\gamma_y)_t\|_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)\,, \tag{7.9}$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, *pour* $|t|<a(\rho_0-\rho)$, $C(R_0)$ *étant une constante positive indépendante de* $\delta\in[0,1]$.

Preuve. Compte tenu de la proposition 3.17, (3.21), et de la proposition 3.19, (3.29), les équations (4.5), (4.13) et (4.14) montrent le lemme. Q. E. D.

En conséquence de ces deux lemmes 7.4-7.5, on a le

Corollaire 7.6. *Suivant les notations* (3.12), *on a pour tout* z, $|z|\leqq1$,

$$\|\delta p_t(z)\|_\rho\,,\quad\|\delta r_{j,t}(z)\|_\rho\,,\quad j=1,2\quad\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)\,, \tag{7.10}$$

quel que soit $\rho<\rho_0$, *si* $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$.

Les estimations pour R_{I} correspondant à { I } dans (7.6) au sens de $\|\cdot\|_\rho$, pour z, $|z|<1$, sauf $\delta q_t(z)\dfrac{\phi_z}{\delta}(z)$, sont des conséquences de la proposition 3.10, (3.10)′ et du corollaire 7.6, (7.10).

Pour ce qui est de $\delta q_t(z)\dfrac{\phi_z}{\delta}(z)$, on voit d'abord

$$\delta q_t(z)=-4z\delta\Big\{\Big(\frac{\delta\gamma_x}{\gamma}\Big)\Big(\frac{\delta\gamma_x}{\gamma}\Big)_t+\Big(\frac{\delta\gamma_y}{\gamma}\Big)\Big(\frac{\delta\gamma_y}{\gamma}\Big)_t\Big\}+$$
$$+z\delta\Big\{(\delta^2\gamma_{xt})_x-\Big(\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big)(\delta^2\gamma_{xt})_x-(\delta^2\gamma_{xx})\Big(\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big)_t\Big\}+$$
$$+z\delta\Big\{(\delta^2\gamma_{yt})_y-\Big(\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big)(\delta^2\gamma_{yt})_y-(\delta^2\gamma_{yy})\Big(\frac{\gamma-1}{\gamma}\Big)_t\Big\}.$$

Ainsi, la partie la plus délicate dans $\delta q_t(z)\dfrac{\phi_z}{\delta}(z)$ est

$$(z\delta(\delta^2\gamma_{xt})_x+z\delta(\delta^2\gamma_{yt})_y)\ \frac{\phi_z}{\delta}(z).$$

Or, on voit que:

$$\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{\delta(s\delta^2\gamma_{xt})_x\frac{\phi_z}{\delta}}(s)ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{\delta(s\delta^2\gamma_{xt})_x\frac{\phi_z}{\delta}}(s)ds\cong$$
$$\cong\Big\{\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{s(\delta^2\gamma_{xt})\frac{\phi_z}{\delta}}(s)ds+$$
$$(7.12)\qquad +\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{s(\delta^2\gamma_{xt})\frac{\phi_z}{\delta}}(s)ds\Big\}-$$
$$-\Big\{\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{(s\delta^2\gamma_{xt})\phi_{zx}}(s)ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{(s\delta^2\gamma_{xt})\phi_{zx}}(s)ds\Big\}\equiv$$
$$\equiv\{\widehat{Ⓐ}\}+\{\widehat{Ⓑ}\},\ \text{soit},$$

par l'intégration par partie par rapport à x.

On a d'abord:

$$(7.13)\qquad \|\{\widehat{Ⓐ}\}\|_\rho\leqq\tilde{N}_0\|\delta^2\gamma_{xt}\|_\rho\left\|\frac{\phi_z}{\delta}\right\|\leqq C(R_0)\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho,$$

d'après le lemme 7.5, (7.9), et (3.10)′.

Compte tenu du fait

$$z\delta^2\gamma_{xt}\phi_{zx}(z)=(z\delta^2\gamma_{xt}\phi_x(z))_z-\delta^2\gamma_{xt}\phi_x(z),$$

on voit ensuite, par l'intégration par partie de Ⓑ par rapport à s, que

$$\hat{\mathcal{B}}=\Big\{\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\mathrm{ch}(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{(s\delta^2\gamma_{xt}\phi_x(s))}ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\mathrm{ch}(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{(s\delta^2\gamma_{xt}\phi_x(s))}ds\Big\}+$$
$$+\Big\{\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{\delta^2\gamma_{xt}\phi_x}(s)ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{\delta^2\gamma_{xt}\phi_x}(s)ds\Big\}\equiv$$
$$\equiv\hat{\mathcal{B}}_1+\hat{\mathcal{B}}_2,\quad \text{soit.}$$

Et on a

$$\|\hat{\mathcal{B}}_1\|_\rho\leqq\tilde{N}_0\|\delta^2\gamma_{xt}\|_\rho|||\phi_x|||_\rho\leqq\tilde{N}_0\|\delta^2\gamma_{xt}\|_\rho\{\|\Lambda\phi(1)\|_\rho+C|||\delta g|||_\rho\}\leqq \tag{7.13$'$}$$
$$\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi),$$

d'après le lemme 7.5. De même pour $\hat{\mathcal{B}}_2$.

En résume, on obtient l'estimation suivante:

$$\Big\|\Big(\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\cdot\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{\delta q_t\frac{\phi_z}{\delta}}(s)ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\cdot\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\widehat{\delta q_t\frac{\phi_z}{\delta}}(s)\Big)^{\vee}\Big\|_\rho\leqq \tag{7.14}$$
$$\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi),$$

où $(\cdots)^{\vee}$ signifie la transformée inverse de Fourier de $(\cdots)$.

Ensuite, on va estimer la seconde et la troisième partie du second membre de $\hat{\phi}_t(z)$, (7.5), avec $\{\mathrm{II}\}$ dans $\delta^2 g_t$, (7.11). On a premièrement:

Lemme 7.7. *Si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour R_0 précédemment choisie, il existe une constante positive $C(R_0)$ indépendante de $\delta\in[0,1]$ telle que l'on ait*

$$\|\delta\Lambda\phi_t(1)\|_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi). \tag{7.15}$$

Preuve. En appliquant $\delta\Lambda$, $\Lambda=(-\Delta)^{1/2}$, à l'équation (2.18), on obtient le lemme, vu (3.29), la proposition 3.19. Q. E. D.

Ensuite, on montre le

Lemme 7.8. *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, on a*

$$|||\phi_{zt}|||_\rho+|||\delta\phi_{xt}|||_\rho+|||\delta\phi_{yt}|||_\rho\leqq C(R_0)E_{2,\rho}(\phi), \tag{7.16}$$

pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_0$, $C(R_0)$ étant une constante positive indépendante de $\delta\in[0,1]$.

Preuve. Voyons tout d'abord:

$$\hat{\phi}_{zt}(z)=\frac{\operatorname{sh}(\delta|\xi|z)}{\operatorname{ch}(\delta|\xi|)}\delta|\xi|\hat{\phi}_t(1)+$$

$$(7.17)\qquad +\int_{-1}^{z}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z-1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}_t(s)ds+$$

$$+\int_{z}^{1}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z+1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}_t(s)ds\,.$$

Vu, ensuite, que

$$(7.18)\qquad \begin{aligned} p\phi_{zzt}&=(p\phi_{zt})_z-p_z\phi_{zt}\,,\\ \delta r_1\phi_{zxt}&=(\delta r_1\phi_{xt})_z-\delta r_{1,z}\phi_{xt}\,,\\ \delta r_2\phi_{zyt}&=(\delta r_2\phi_{yt})_z-\delta r_{2,z}\phi_{yt}\,,\end{aligned}$$

on a, par l'intégration par partie par rapport à s:

$$R_{\mathrm{II},t}=\int_{-1}^{z}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z-1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\left\{\widehat{p\phi_{zzt}}(s)+\widehat{q\phi_{zt}}(s)+\widehat{\delta r_1\phi_{zxt}}(s)+\widehat{\delta r_2\phi_{zyt}}(s)\right\}ds+$$

$$+\int_{z}^{1}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z+1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\left\{\cdots\right\}(s)ds=$$

$$=-\left\{\int_{-1}^{z}\delta|\xi|\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z-1))\operatorname{ch}(\delta|\xi|(s+1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\widehat{p\phi_{zt}}(s)+\widehat{\delta r_1\phi_{xt}}(s)+\widehat{\delta r_2\phi_{yt}}(s)\right]ds+\right.$$

$$\left.+\int_{z}^{1}\delta|\xi|\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z+1))\operatorname{ch}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\cdots\right]ds\right\}-$$

$$-\left\{\int_{-1}^{z}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z-1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\widehat{(p_z-q)\phi_{zt}}(s)+\widehat{\delta r_{1,z}\phi_{xt}}(s)+\widehat{\delta r_{2,z}\phi_{yt}}(s)\right]ds+\right.$$

$$\left.+\int_{z}^{1}\frac{\operatorname{ch}(\delta|\xi|(z+1))\operatorname{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\operatorname{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\cdots\right]ds\right\}.$$

D'où, on a

$$(7.19)\qquad \begin{aligned}&|||R_{\mathrm{II},t}|||_\rho\leqq N_0\left\{\|p(1)\|_\rho|||\phi_{zt}|||_\rho+\|r_1(1)\|_\rho|||\delta\phi_{xt}|||_\rho+\|r_2(1)\|_\rho|||\delta\phi_{yt}|||_\rho\right\}+\\ &\quad+\tilde{N}_0\left\{(\|p_z(1)\|_\rho+\|q(1)\|_\rho)|||\phi_{zt}|||_\rho+\|r_{1,z}(1)\|_\rho|||\delta\phi_{xt}|||_\rho+\|r_{2,z}(1)\|_\rho|||\delta\phi_{yt}|||_\rho\right\},\end{aligned}$$

et par la suite, on obtient, en résumé, le

Lemme 7.9. *Si $E_{1,\rho}(\gamma-1)<R_0$, quel que soit $\rho<\rho_0$, on a*

$$(7.20)\qquad \begin{aligned}|||\phi_{zt}|||_\rho\leqq{}&C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+\\ &+\{N_0\|p(1)\|_\rho+\tilde{N}_0(\|p_z(1)\|_\rho+\|q(1)\|_\rho)\}|||\phi_{zt}|||_\rho+\\ &+\{N_0\|r_1(1)\|_\rho+\tilde{N}_0\|r_{1,z}(1)\|_\rho\}|||\delta\phi_{xt}|||_\rho+\\ &+\{N_0\|r_2(1)\|_\rho+\tilde{N}_0\|r_{2,z}(1)\|_\rho\}|||\delta\phi_{yt}|||_\rho\,.\end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\left.\begin{matrix}\delta\hat{\phi}_{xt}(z)\\ \delta\hat{\phi}_{yt}(z)\end{matrix}\right\}\sim\frac{\mathrm{ch}(\delta|\xi|z)}{\mathrm{ch}(\delta|\xi|)}\delta|\xi|\hat{\phi}_t(1)+$$
$$+\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}_t(s)ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\delta^2\hat{g}_t(s)ds\,,$$

on a de même le

Lemme 7.9′. *Sous les hypothèses du lemme* 7.9, *on a*

$$\|\!|\delta\phi_{xt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta\phi_{yt}|\!\|_\rho\leqq(\textit{le second membre de } (7.20)). \tag{7.21}$$

En conséquence, on obtient le lemme 7.8, d'après ces deux lemmes.

Q. E. D.

Revenons maintenant à (7.5)-(7.6) pour calculer $\|\phi_t(z)\|_\rho$.

Comme dans la démonstration du lemme 7.8, on a, vu (7.18), par l'intégration par partie par rapport à s:

$$R_{\mathrm{II}}=\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\left\{\widehat{p\phi_{zzt}}(s)+\widehat{q\phi_{zt}}(s)+\widehat{\delta r_1\phi_{zxt}}(s)+\widehat{\delta r_2\phi_{zyt}}(s)\right\}ds+$$
$$+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\left\{\cdots\right\}ds=$$
$$=-\left\{\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{ch}(\delta|\xi|(s+1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\widehat{p\phi_{zt}}(s)+\widehat{\delta r_1\phi_{xt}}(s)+\widehat{\delta r_2\phi_{yt}}(s)\right]ds+\right.$$
$$\left.+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{ch}(\delta|\xi|(s-1))}{\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\cdots\right]ds\right\}-$$
$$-\left\{\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z-1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s+1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\widehat{(p_z-q)\phi_{zt}}(s)+\widehat{\delta r_{1,z}\phi_{xt}}(s)+\widehat{\delta r_{2,z}\phi_{yt}}(s)\right]ds+\right.$$
$$\left.+\int_{z}^{1}\frac{\mathrm{sh}(\delta|\xi|(z+1))\,\mathrm{sh}(\delta|\xi|(s-1))}{\delta|\xi|\,\mathrm{sh}(2\delta|\xi|)}\left[\cdots\right]ds\right\}.$$

D'où, on a

$$\|R_{\mathrm{II}}\|_\rho\leqq\tilde{N}_0(\|\!|p\phi_{zt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta r_1\phi_{xt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta r_2\phi_{yt}|\!\|_\rho)+$$
$$+C(\|\!|p_z\phi_{zt}|\!\|_\rho+\|\!|q\phi_{zt}|\!\|_\rho+\|\!|r_{1,z}\delta\phi_{xt}|\!\|_\rho+\|\!|r_{2,z}\delta\phi_{yt}|\!\|_\rho)\,,$$

c'est-à-dire:

$$\|R_{\mathrm{II}}\|_\rho\leqq C(R_0)(\|\!|\phi_{zt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta\phi_{xt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta\phi_{yt}|\!\|_\rho)\,, \tag{7.22}$$

avec une constante dépendante de R_0 et indépendante de $\delta\in[0, 1]$.

Par la suite, on a, enfin:

$$\begin{aligned}\|\phi_t(z)\|_\rho&\leqq\|\phi_t(1)\|_\rho+C(R_0)E_{2,\rho}(\phi)+\\&+C'(R_0)\|\delta\Lambda^2\phi(1)\|_\rho\{\|\delta p_t(1)\|_\rho+\sum_{j=1}^{2}\|\delta r_{j,t}(1)\|_\rho\}+\\&+C''(R_0)\{\|\!|\phi_{zt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta\phi_{xt}|\!\|_\rho+\|\!|\delta\phi_{yt}|\!\|_\rho\}\,,\end{aligned} \tag{7.23}$$

en tenant compte de (7.7), (7.13)-(7.14), la proposition 3.10, (3.10)′ et de (7.22) ci-dessus.

Par conséquent, on obtient l'estimation (7.4) d'après le lemme 7.8, (7.16), le corollaire 7.6, (7.10) et de (7.23). Ce qui termine la démonstration de la proposition 7.3.

7.2. Développement de Friedrichs pour $\{\Phi, \Gamma\}$.

Retournons maintenant à la solution $\{\phi(t, x, y, z; \delta), \Gamma(t, x, y; \delta)\}$ de (2.3)-(2.10). Elle est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$ dans $S=\bigcup_{\rho>0} B_\rho$.

On voit, en effet, que

$$\Gamma(t, x, y; \delta)=\gamma(t', x', y'; \delta)$$

est indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$, puisque γ l'est. D'autre part, $\phi(t', x', y', z'; \delta)$ l'est aussi, comme on l'a vu en haut, quel que soit z', $|z'|<1$. D'où,

$$\Phi(t, x, y, z; \delta)=\phi\left(t', x', y', \frac{z}{\Gamma}; \delta\right) \tag{7.24}$$

avec $(t', x', y', z')=\left(t, x, y, \frac{z}{\Gamma}\right)$, est aussi indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$ dans $S=\bigcup_{\rho>0} B_\rho$ pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, $\forall\rho<\rho_0$.

De même pour Φ_t, Φ_x et Φ_y, compte tenu de

$$\begin{aligned}\Phi_t&=\Phi_{t'}(z')-z'\frac{\Gamma_t}{\Gamma}\phi_{z'}(z')\\ \Phi_x&=\phi_{x'}(z')-z'\frac{\Gamma_x}{\Gamma}\phi_{z'}(z')\\ \Phi_y&=\phi_{y'}(z')-z'\frac{\Gamma_y}{\Gamma}\phi_{z'}(z').\end{aligned} \tag{7.25}$$

D'après le théorème de Taylor, on a d'abord le développement suivant au sens $\|\cdot\|_\rho$, $\forall\rho<\rho_0$, quel que soit z, $|z|<1$:

$$\begin{aligned}\Lambda\Phi(t, x, y, z; \delta)&=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial z^{2n}}\Lambda\Phi(t, x, y, 0; \delta)z^{2n}+\\ &\quad+\frac{1}{(2N+1)!}\int_0^z\frac{\partial^{2(N+1)}}{\partial z^{2(N+1)}}\Lambda\Phi(t, x, y, \zeta; \delta)(z-\zeta)^{2N+1}d\zeta=\\ &=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\delta z)^{2n}(\Delta^n\Lambda\Phi(t, x, y, 0; \delta)+\\ &\quad+\frac{(-1)^{N+1}\delta^{2(N+1)}}{(2N+1)!}\int_0^z\Delta^{N+1}\Lambda\Phi(t, x, y, \zeta; \delta)(z-\zeta)^{2N+1}d\zeta,\end{aligned}$$

où $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, vu (2.3)-(2.4), $\Lambda\Phi$ pour Φ_x ou Φ_y.

En désignant le reste de développement ci-dessus par $R_{N+1}[\Phi]$, on note, d'après les estimations dans le paragraphe 3, que

(7.26) $\|R_{N+1}[\Phi]\|_{\rho'} \leqq C_{N+1}\delta^{2(N+1)}, \qquad N=0, 1, 2, \cdots,$

C_{N+1} étant une constante indépendante de $\delta \in [0, 1]$.

Rapportons dans le développement en haut le développement de

$$\underline{\Phi}(t, x, y; \delta) \overset{\text{déf}}{\equiv} \Phi(t, x, y, 0; \delta) \tag{7.27}$$

suivant:

$$\Lambda\underline{\Phi}(t, x, y; \delta) = \sum_{n=0}^{N} \Lambda\underline{\Phi}_n(t, x, y)\delta^{2n} + R_{N+1}[\underline{\Phi}], \tag{7.28}$$

où $\{\underline{\Phi}_n(t, x, y)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ sont indépendantes de $\delta \in [0, 1]$, avec

$$\|R_{N+1}[\underline{\Phi}]\|_{\rho} \leqq C'_{N+1}\delta^{2(N+1)}, \tag{7.29}$$

C'_{N+1} étant indépendante de $\delta \in [0, 1]$. On a alors:

$$\Lambda\Phi(t, x, y, z; \delta) = \sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}\Delta^k\Lambda\underline{\Phi}_{n-k}(t, x, y)\Big)\delta^{2n} + O(\delta^{2N+2}) \tag{7.30}$$

dans B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, pour $|t| < a(\rho_0 - \rho)$.

D'où, on a les développements suivants sur $z=\Gamma$ dans B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, pour $|t| < a(\rho_0 - \rho)$:

$$\begin{aligned}\Phi_t(t, x, y, z; \delta)|_{z=\Gamma} = \underline{\Phi}_{0,t} + \delta^2\Big[\underline{\Phi}_{1,t} - \frac{\Gamma^2}{2}\Delta\underline{\Phi}_{0,t}\Big] + \\ + \delta^4\Big[\underline{\Phi}_{2,t} - \frac{\Gamma^2}{2}\Delta\underline{\Phi}_{1,t} + \frac{\Gamma^4}{4!}\Delta^2\underline{\Phi}_{2,t}\Big] + O(\delta^6),\end{aligned} \tag{7.31}$$

de même pour (7.32): $\Phi_x|_{z=\Gamma}$ et (7.33): $\Phi_y|_{z=\Gamma}$ en remplaçant $\frac{\partial}{\partial t}$ par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, respectivement, dans le second membre; et enfin

$$\Phi_z|_{z=\Gamma} = -\delta^2\Gamma\cdot\Delta\underline{\Phi}_0 - \delta^4\Big[\Gamma\cdot\Delta\underline{\Phi}_1 - \frac{\Gamma^3}{3!}\Delta^2\underline{\Phi}_0\Big] + O(\delta^6). \tag{7.34}$$

En substituant le développement de $\Gamma(t, x, y; \delta)$ suivant:

$$\Gamma(t, x, y; \delta) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma_n(t, x, y)\delta^{2n}, \qquad \Gamma_n: \text{indépendantes de } \delta \in [0, 1], \tag{7.35}$$

dans les développements (7.31)-(7.34)[9], et compte tenu d'équations (2.5)-(2.6) sur $z=\Gamma(t, x, y; \delta)$, nous avons ainsi obtenu une série de systèmes d'équations aux dérivées partielles, hyperbolique quasi-linéaire par rapport à $\{\underline{\Phi}_{0,x}, \underline{\Phi}_{0,y}, \Gamma\}$ pour $n=0$, hyperbolique linéaire par rapport à $\{\underline{\Phi}_{n,x}, \underline{\Phi}_{n,y}, \Gamma_n\}$ pour $n \geqq 1$ sous la condition $\Gamma_0 > 0$:

$$\begin{cases}\underline{\Phi}_{0,t} + \frac{1}{2}(\underline{\Phi}_{0,x}^2 + \underline{\Phi}_{0,y}^2) + \Gamma_0 = 0 \\ \Gamma_{0,t} + (\Gamma_0\underline{\Phi}_{0,x})_x + (\Gamma_0\underline{\Phi}_{0,y})_y = 0,\end{cases} \tag{7.36$_0$}$$

[9] (7.32) pour le développement du type (7.31) pour $\Phi_x|_{z=\Gamma}$, (7.33) pour $\Phi_y|_{z=\Gamma}$.

$$(7.36)_n \qquad \begin{cases} \underline{\Phi}_{n,t}+\underline{\Phi}_{0,x}\underline{\Phi}_{n,x}+\underline{\Phi}_{0,y}\underline{\Phi}_{n,y}+\Gamma_n=F_{n-1} \\ \Gamma_{n,t}+(\Gamma_0\underline{\Phi}_{n,x})_x+(\Gamma_0\underline{\Phi}_{n,y})_y+(\Gamma_n\underline{\Phi}_{0,x})_x+(\Gamma_n\underline{\Phi}_{0,y})_y=G_{n-1}, \end{cases}$$

où F_{n-1} et G_{n-1} sont des fonctions de $\{\underline{\Phi}_j, \Gamma_j\}$, $0\leq j\leq n-1$, et leurs dérivées par rapport à (x, y).

Il est à noter que $(7.36)_0$ n'est autre que les équation des ondes en eau peu profonde déjà obtenues dans le paragraphe 6, puisque, pour $n=0$, on a

$$\underline{\Phi}_0(t, x, y)=\overline{\Phi}_0(t, x, y)=\Phi^0(t, x, y),$$

voir (6.21).

Pour $n=1$, par exemple, on a[10]

$$\begin{cases} \underline{\Phi}_{1,t}+\underline{\Phi}_{0,x}\Phi_{1,x}+\underline{\Phi}_{0,y}\underline{\Phi}_{1,y}+\Gamma_1=\frac{1}{2}(\Gamma_0)^2\{\Delta\underline{\Phi}_{0,t}+\underline{\Phi}_{0,x}\Delta\underline{\Phi}_{0,x}+\underline{\Phi}_{0,y}\Delta\underline{\Phi}_{0,y}-(\Delta\underline{\Phi}_0)^2\}, \\ \Gamma_{1,t}+(\Gamma_0\underline{\Phi}_{1,x})_x+(\Gamma_0\underline{\Phi}_{1,y})_y+(\Gamma_1\underline{\Phi}_{0,x})_x+(\Gamma_1\underline{\Phi}_{0,y})_y=\frac{1}{6}(\Gamma_0^3\Delta\underline{\Phi}_{0,x})_x+\frac{1}{6}(\Gamma_0^3\Delta\underline{\Phi}_{0,y})_y. \end{cases}$$

En résumé, grâce aux études dans les paragraphes 5-6, on a pu donner une justification mathématique du développement de Friedrichs trois-dimensionnel (7.30) et (7.35) comme développement asymptotique par rapport à $\delta\in[0, 1]$, dans $S=\bigcup_{\rho>0} B_\rho$ pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, $\forall\rho<\rho_0$, si les données initiales sont dans B_{ρ_0}.

En plus, on a obtenu toute une série d'équations pour les coefficients de δ^{2n} de développement de (2.3)-(2.6) dont le premier système n'est autre que les équations des ondes en eau peu profonde. Ainsi on a retrouvé encore une fois une justification de ces équations pour l'écoulement trois-dimensionnel.

§ 8. Conclusions.

1. On a étudié dans cet article le problème de Dirichlet pour une famille d'équations uniformément elliptiques dépendant d'un paramètre non-dimensionnel $\delta\in[0, 1]$:

$$(8.1) \qquad \delta^2(\phi_{xx}+\phi_{yy})+\phi_{zz}=0.$$

Les conditions de Dirichlet sont données par un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires sur les frontières. Notre tâche était donc de montrer le théorème d'existence du problème de Cauchy pour ce système d'abord, pour déterminer les conditions de Dirichlet.

Tout dépendait du fait que l'on obtient des estimations aux bords pour ϕ *uniformes* par rapport à $\delta\in[0, 1]$ y compris $\delta=0$ où (8.1) perd l'ellipticité uniforme. D'où notre solution indéfiniment différentiable par rapport à $\delta\in[0, 1]$.

2. On en conclut une justification mathématique pour le développement de Friedrichs qui a été proposé par K.-O. Friedrichs comme une méthode systématique pour déduire d'équations d'Euler les équations des ondes de surface en eau peu profonde.

[10] Pour le cas 2-dimensionnel, voir (4.11) dans [14].

Ce qui montre en premier lieu que notre problème aux limites pour une équation elliptique était approché par un problème hyperbolique quasi-linéaire asymptotiquement par rapport à un paramètre autour d'une valeur où, justement, l'équation elliptique est dégénérée.

Outre cela, le développement asymptotique de Friedrichs nous fournit une série de systèmes d'équations aux dérivées partielles pour obtenir une solution approchée de notre problème aux limites pour (8.1) à une erreur d'ordre $O(\delta^{2N})$ près pour tout $N\in \boldsymbol{N}$.

C'est un exemple concret et précis de soi-disant "reductive perturbation methode"[11] qui est, en fait, dans notre cas, un développement asymptotique. C'est une superposition asymptotique non-linéaire.

3. Le défaut le plus grand de nos études dans cet article est que toute théorie n'est que *locale* par rapport au temps. Rigoureuse, certes, de point de vue mathématique, mais il serait fatale de point de vue de l'hydrodynamique.

La "petitesse" de donnée initiale $\Gamma_0(x, y)$ pour la forme de surface de l'eau serait aussi vulnérable à la critique. Si nous y avons été contraint, c'est parce que nous avons approché l'opérateur elliptique L_δ, (2.16), par

$$\delta^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

pour obtenir estimations a priori pour ϕ. Cette faiblesse serait surmontée si on peut calculer toutes les estimations aux bords *uniformes* par rapport à $\delta\in[0, 1]$ en partant de l'expression de ϕ sur $z=1$ moyennant la fonction de Green pour L_δ, dont les coefficients se composent de γ et ses dérivées, sur Ω_1 avec les conditions de Dirichlet sur $z=\pm 1$. Ce qu'on avait fait dans le cas de l'écoulement deux-dimensionnel [13].

Troisièmement, notons que la classe de solutions analytiques est encore plus réstrainte par rapport au problème deux-dimensionnel de [13], [14] et [15]. Contrairement à ce qui était dans [13], dans le cas présent, $\gamma-1$, $u=\phi_x(1)$, $v=\phi_y(1)$ s'annulent à l'infini (voir la définition de $E_{1,\rho}(\gamma-1)$ et de $E_{2,\rho}(\phi)$ dans le paragraphe 3). Dans le cas du problème deux-dimensionnel, en passant de $\Omega_\delta(t)$ à Ω_1 par la représentation conforme, nous avons une expression explicite de valeur de dérivée normale de potentiel sur la surface par de valeurs de dérivées tangentes sur la surface d'après la formule de Cauchy [31], [13]. Dans cet article, on a obtenu les estimations aux bords pour $\frac{\phi_z}{\delta}$ et $\frac{\phi_z}{\delta^2}$ par une théorie ordinaire et générale du problème elliptique aux limites aux conditions de Dirichlet. Ce qui ne nous a pas permis de faire les calculs délicats que l'on avait fait dans [13] pour les estimation de partie non-linéaire d'équations (2.18)-(2.19).

Enfin, il faudrait aussi sortir de cadre de fonctions analytiques. Voir le travail de H. Yoshihara [32] et celui de Nalimov cité dans [32].

---

[11] Voir par exemple: T. Taniuti-C.C. Wei, J. Phys. Soc. Japan, **24** (1968), p. 941.

DEPARTMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE D'OSAKA

Bibliographies

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623-727.

[2] G.B. Airy, Tides and Waves, B. Fellows, London, 1845, 241-396.

[3] J. Boussinesq, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal réctangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, J. Math. Pure. Appl., 2^e série, **17** (1872), 55-108.

[4] J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, tome XXIII (1877).

[5] L.J.F. Broer, On the interaction of nonlinearity and dispersion in wave propagation, Appl. Sci. Res., Section B, **11** (1964), 273-285.

[6] P.J. Bryant, Two-dimensional periodic permanent waves in shallow water, J. Fluid Mech., **115** (1982), 525-532.

[7] T. Carleman, Sur la propagation d'un mouvement à la surface libre d'un liquide, Arkiv för mat., astr. och fysik, **32** (1945), 1-2.

[8] K.-O. Friedrichs, On the derivation of the shallow water theory, Appendix to: The formation of breakers and bores by J.J. Stoker, Comm. Pure Appl. Math., **1** (1948), 1-87.

[9] K.-O. Friedrichs, Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull. of A.M.S., **61** (1955), 485-504.

[10] R.S. Johnson, Water waves and Korteweg-de Vries equations, J. Fluid Mech., **97** (1980), 701-719.

[11] Б.Б. Кадомцев, В.И. Петвиашвили, Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах, ДАН СССР, **192** (1970), 753-756.

[12] T. Kano, T. Nishida, Sur les ondes de surface de l'eau. Une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, C.R. Acad. Sci. Paris, **287** (17 juillet 1978), Sér. A, 137-140.

[13] T. Kano, T. Nishida, Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ., **19** (1979), 335-370.

[14] T. Kano, T. Nishida, Water waves and Friedrichs expansion, in Lecture Note in Numerical and Applied Analysis, Vol. 6, "Recent topics in nonlinear PDE, Hiroshima 1983", ed. M. Mimura-T. Nishida, Kinokuniya-North Holland, 1984, 39-57.

[15] T. Kano, T. Nishida, A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, Osaka J. Math., **23** (1986).

[16] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves, Phil. Magaz., **39** (1895), 422-443.

[17] L. Lagrange, Mécanique analytique, tome II, M^{me} V^e Courcier, Paris, 1815.

[18] H. Lamb, Hydrodynamics, 6^{th} edition, Cambridge, 1932.

[19] А.И. Леонов, О двумерных уравнениях Кортевега-де Бриза в нелинейной теории поверхностных и внутренних болн, ДАН СССР, **229** (1976), 820-823.

[20] V.I. Nalimov, A priori estimates of solutions of elliptic equations in the class of analytic functions and their applications to the Cauchy-Poisson problem, Soviet Math. Dokl., **10** (1969), 1350-1354.

[21] L. Nirenberg, An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalevski theorem, J.

Diff. Geom., **6** (1972), 561-576.

[22] T. Nishida, A note on a theorem of Nirenberg, J. Diff. Geom., **12** (1977), 629-633.

[23] L.V. Ovsjannikov, A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces, Soviet Math. Dokl., **12** (1971), 1497-1502.

[24] D.H. Peregrine, Equations for water waves and the approximation behind them, in "Waves on beaches and the resulting sediment transport" ed. R.E. Meyer, Acad. Press, 1972, 95-121.

[25] J.C.W. Rogers, Water waves: analytic solutions, uniqueness and continuous dependence on the data, Naval Ordnance Laboratory NSWC/WOL/TR. 75-43, (1975).

[26] J.S. Russell, Report on waves, in "Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science held at York in September 1844", John Murray, London, 1845, 311-390.

[27] M. Shinbrot, J. Reeder, The initial value problem for surface waves under gravity, II. The simplest 3-dimensional case, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 1049-1071.

[28] J.J. Stoker, Water waves, the mathematical theory with applications, Interscience, New York, 1957.

[29] G.G. Stokes, On the theory of oscillatory waves, Trans. Camb. Phil. Soc., **8** (1847), 441-473 ("Scientific Papers", vol. 1, 197-229).

[30] F. Ursell, The long-wave paradox in the theory of gravity waves, Proc. Phil. Soc. Cambridge, **49** (1953), 685-694.

[31] L.C. Woods, The theory of subsonic plane flow, Cambridge Univ. Press, 1961.

[32] H. Yoshihara, Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **18** (1982), 49-96.

Bibliographie ajoutée:

[33] T. Kano, L'équation de Kadomtsev-Petviashvili approchant les ondes longues de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel, dans "Pattern and Wave-Qualitative analysis of nonlinear differential equations", ed. T. Nishida-M. Mimura-H. Fujii, Kinokuniya-North Holland, 1986.

Corrigendum: Dans 106 p. ↑ 3^e ligne, lisez $W'=\frac{\delta}{c}\boldsymbol{W}$ comme $W'=\frac{\delta}{c}W$