J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
33-3 (1993) 749-764

Sur le squelette et les dérivées de Malliavin des fonctions holomorphes sur un espace de Wiener complexe

Par

Shizan FANG et Jiagang REN[1]

1. Notations et Préliminéaires

Soit (X, H, μ) un espace de Wiener abstrait réel muni d'un isomorphisme J: $X \to X$ tel que: $J^2 = -\mathrm{Id}_X$ et la restriction de J sur H soit aussi une isométrie. Soit $\xi = a + ib \in \boldsymbol{C}$, on note: $\xi.x = ax + bJx$, J induit alors une structure complexe sur X. Supposons que la norme $\|\ \|_X$ de X est invariante par rotation:

$$\|\xi.x\|_X = |\xi| \|x\|_X .$$

Selon I. Shigekawa [5], (X, H, μ, J) s'appelle un espace de Wiener presque complexe. Notons:

X^{*C} = l' espace des formes complexes $\boldsymbol{R}$-linéaires continues de X;

$X^{*(1,0)}$ = l'espace des formes complexes $\boldsymbol{C}$-linéaires continues de X;

$X^{*(0,1)}$ = l'espace des formes complexes $\boldsymbol{C}$-antilinéaires continues de X.

Alors $X^{*C} = X^{*(1,0)} \oplus X^{*(0,1)}$. De la même maniére, on définit H^{*C}, $H^{*(1,0)}$ et $H^{*(0,1)}$. Afin de renormaliser les v.a. gaussiennes complexes $\langle \varphi, x \rangle$, $\varphi \in X^{*(1,0)}$, on suppose que la fonction caractéristique de μ vérifie:

$$\hat{\mu}(\varphi) = \int_X \exp\{\sqrt{-1} \langle \varphi, x \rangle\} d\mu(x) = \exp\{-\|\varphi\|_{H^*}{}^2/4\}, \quad \varphi \in X^* \subset H^* .$$

Une fonction F: $X \to \boldsymbol{C}$ est appelée un polynôme holomorphe si

$$F(x) = f(\langle \varphi_1, x \rangle, \cdots, \langle \varphi_k, x \rangle)$$

avec f: $\boldsymbol{C}^k \to \boldsymbol{C}$ un polynôme complexe holomorphe et $\varphi_i \in X^{*(1,0)}$.

Communicated by Prof. S. Watanabe, March 10, 1992

[1] En visite à l'Université de Paris VI. L'auteur tient à remercier monsieur le Professeur Paul MALLIAVIN de son invitation chaleureuse. Le travail est aussi partiellement subventionè par N. S. F. de Chine et Fok Ying Tong education foundation.

D'aprés I. Shigekawa [5], l'espace $H^p(X, \mu)$ des fonctions L^p-holomorphes $(1<p<+\infty)$ est défini comme la fermeture des polynômes holomorphes dans $L^p(X, \mu)$.

Dèsignons par ∇ le gradient sur X (*Voir* [*3*]), et

$$W_{p,r}(X)=\left\{F: X\to \boldsymbol{C}/\sum_{k=0}^{r}\int_X\|\nabla^k F\|^p \mathrm{d}\mu<+\infty\right\}.$$

Notons: $W_\infty{}^p(X)=\bigcap_{r\geq 0} W_{p,r}(X)$. Si $F\in W_\infty{}^p(X)\cap H^p(X, \mu)$, alors: (*Voir* [*5*])

$$\bar{\partial}F(x)=(1/2)(\nabla F(x)+\sqrt{-1}J^*\nabla F(x))=0$$

où J^* est l'adjoint de J.

Suivant H. Sugita [8], définissons le squelette d'une fonction $F\in H^p(X, \mu)$ par:

$$\hat{F}(h)=\int_X F(x+h)\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{1.1}$$

On a (*Voir* [*8*]):

$$\hat{F}(h)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mu(V(0, r))}\int_{V(0,r)}F(x+h)\mathrm{d}\mu(x) \tag{1.2}$$

où $V(h, r)=\{x\in X/\|x-h\|_X<r\}$.

Dans ce travail, en montrant d'abord qu'une fonction $F\in H^p(X, \mu)$ est entièrement déterminée par son squelette $\hat{F}$, on est amené à étudier des propriétés analyiques de $\hat{F}$. Dans le cas où $p=2$, $\hat{F}$ appartient à une classe de fonctions analytiques $\mathcal{F}_\infty$ de V. Bargmann [1] qui sont des fonctions analytiques au sens de Hille-Phillips [2]. On montrera que cette propriété subsiste pour toutes les dérivées partielles de $\hat{F}$ avec $F\in H^p(X, \mu)$ $(1<p<+\infty)$. Dans la section 3, On introduira la transformation de Cameron-Martin pour toutes fonctions $F\in L^p(X, \mu)$ et ses propriétés seront étudiées.

On montrera que les dérivées radiales de ces fonctions existent sous des nouvelles mesures boréliennes qui sont holomorphes relativement à ces mesures, ce qui fera l'objet des sections 5. Enfin dans la dernière section, un résultat sur le principe de grandes déviations sera donné. Finalement, les deux auteurs remercient vivement Monsieur le Professeur Paul Malliavin pour tous ses conseils et discussions. Ils remercient également Monsieur le Professeur Shinzo Watanabe pour ses suggestions utiles.

2. Caractérisation du squelette d'une fonction de $H^2(X, \mu)$

Dans ce qui suit, on fixera une suite $\varphi_j\in X^{*(1,0)}$ tels que $\{\varphi_j/j\geq 1\}$ forment une base hilbertienne de $H^{*(1,0)}$. On va d'abord définir l'espace de Hilbert $\mathcal{F}_\infty$ suivant l'idée de V. Bargmann ([1], p. 200). Posons:

$$u_{[m]}(h)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\langle\varphi_k, h\rangle^{m_k}}{\sqrt{m_k!}}, \quad h\in H \tag{2.1}$$

où $m=(m_1, \cdots, m_n)$ dèsigne un multi-indice. Notons:

$$M=\{m=(m_1, \cdots, m_n, \cdots)\in Z_+{}^N/|m|=\sum_n m_n<+\infty\}.$$

Définition $\mathcal{F}_\infty$ est l'espace des fonctions $f(h)$ définies sur H telles qu'il existe des coefficients complexes $\gamma_{[m]}$ vérifiant $\sum_m|\gamma_{[m]}|^2<+\infty$ tels que:

$$f(h)=\sum_{m\in M}\gamma_{[m]}u_{[m]}(h). \tag{2.2}$$

Et il est bien connu (cf. [1]) que la serie dans (2.2) converge absolument.

L'espace $\mathcal{F}_\infty$ est muni d'un produit scalaire:

$$(f, f')=\sum_m\gamma_{[m]}\overline{\gamma'_{[m]}}, \quad f, \quad f'\in\mathcal{F}_\infty. \tag{2.3}$$

Théorème 2.1. *Une fonction f définie sur H est le squelette d'une fonction holomorphe $F\in H^2(X, \mu)$ si et seulement si $f\in\mathcal{F}_\infty$.*

Preuve. Soit $f\in\mathcal{F}_\infty$, elle a l'expression (2.2). Notons:

$$u_{[m]}(x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\langle\varphi_k, x\rangle^{m_k}}{\sqrt{m_k!}} \tag{2.4}$$

et posons: $F(x)=\sum_m\gamma_{[m]}u_{[m]}(x)$. D'après I. Shigekawa [5], pour tout $m\in M$, $u_{[m]}(x)$ est un polynôme de Hermite complexe sur X, et l'ensemble des $\{u_{[m]}(x)/m\in M\}$ forment une base hilbertienne de $H^2(X, \mu)$. Par suite $F\in H^2(X, \mu)$. Soit $h\in H$, en utilisant e théorème de Cameron-Martin, la série $\sum_m\gamma_{[m]}u_{[m]}(x+h)$ converge vers $F(x+h)$ dans $L^p(X, \mu)$ pour tout $p<2$. Il en résulte que:

$$\int_X F(x+h)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_m\gamma_{[m]}\int_X u_{[m]}(x+h)\mathrm{d}\mu(x).$$

D'autre part, chaque $u_{[m]}$ est continue et holomorphe, donc, compte tenu de (1.2), on a:

$$\hat{u}_{[m]}(h)=u_{[m]}(h),$$

la relation (1.1) donne immédiatement: $\hat{F}(h)=f(h)$.

Inversement, toute $F\in H^2(X, \mu)$ admet une décomposition en chaos:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{|m|=n}\gamma_{[m]}u_{[m]}(x) \tag{2.5}$$

où la convergence a lieu dans l'espace $L^2(X, \mu)$. On a donc:

$$\int_X F(x+h)\mathrm{d}\mu(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{|m|=n}\gamma_{[m]}\int_X u_{[m]}(x+h)\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

par suite;

$$\hat{F}(h)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{|m|=n}\gamma_{[m]}u_{[m]}(h)\,. \tag{2.6}$$

Evidement $\hat{F}\in\mathcal{F}_{\infty}$. Q.E.D.

3. Analyticité réelle de la transformée de Cameron-Martin [cf. 10]

Oublions dans cette section la structure complexe de X. Rappelons d'abord les polynômes de Hermite réels sur X et notons:

$$H_n(\xi)=2^{-n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}e^{\xi^2/2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2/2})\,. \tag{3.1}$$

On a:

$$2(n+1)H_{n+1}(\xi)=\xi H_n(\xi)-H_n'(\xi)\,. \tag{3.2}$$

Soit $\{e_n\in X^*/n\geq 1\}$ une base orthonormée de H. Pour $m\in M$, on définit:

$$H_{[m]}(x)=\prod_k H_{m_k}(\langle e_k, x\rangle)\,.$$

Définition 3.1. Soit $F\in L^p(X,\mu)$ $(1<p<+\infty)$, on définit sa transformation de Cameron-Martin $\hat{F}$: $H\to \boldsymbol{C}$ par:

$$\hat{F}(h)=\int_X F(x+h)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Si F est holomorphe, $\hat{F}$ *n*'est rien d'autre que son squelette.

Théorème 3.1. *Soit $F\in L^p(X,\mu)$, alors $\hat{F}(h)$ est une fonction indéfiniment Gâteaux-différentiable de H dans $\boldsymbol{C}$ et les dérivées partielles sont données par:*

$$[D_{e_n}^{m_n}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}](h)=2^{|m|}\sqrt{[m]!}\int_X F(x+h)H_{[m]}(x)d\mu(x) \tag{3.3}$$

où $[m]!=m_1!m_2!\cdots m_n!$.

Preuve. Lorsque $m=0$, c'est justement la définition 3.1. Supposons (3.3) vraie pour tout. $m\in M$, $|m|\leq L$. Soit $e_j\in\{e_n/n\geq 1\}$, écrivons $m=(m_1,\cdots,m_k,\cdots)$, $(m_k\neq 0)$, et définissons la fonction $\phi(\varepsilon)$:

$$\phi(\varepsilon)=D_{e_k}^{m_k}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}(h+\varepsilon e_j)\,,$$

Utilisant (3.3):

$$\phi(\varepsilon)=2^{|m|}\sqrt{(m)!}\int_X F(x+h+\varepsilon e_j)H_{[m]}(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=2^{|m|}\sqrt{(m)!}\int_X F(x+h)H_{[m]}(x-\varepsilon e_j)\exp\{\varepsilon<e_j,\ x>-\varepsilon^2/4\}\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

En dérivant les deux membres par rapport à ε, on obtient:

$$\left\{\frac{\mathrm{d}\phi(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0}=2^{|m|}\sqrt{(m)!}\int_X F(x+h)[\langle e_j,\ x\rangle H_{[m]}(x) - \sum_{n=1}^{k}\frac{\partial H_{[m]}}{\partial\xi_n}(\langle e_1,\ x\rangle,\ \cdots,\ \langle e_k,\ x\rangle)\langle e_j,\ e_n\rangle]\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{3·4}$$

Si $e_j\notin\{e_1,\ \cdots,\ e_k\}$, notons $m'=(m_1,\ \cdots,\ m_k,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ 0\cdots)$ où j figure sur la j-ième place, alors:

$$\langle e_j,\ x\rangle H_{[m]}(x)=2H_{[m']}(x)\ \text{ et }\ m'!=m!\,.$$

La relation (3.3) est déduit de (3.4).

Si $e_j\in\{e_1,\ \cdots,\ e_k\}$, pour a simplicité, on suppose: $e_j=e_1$. On a:

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{\partial H_{[m]}}{\partial\xi_n}(x)\langle e_j,\ e_n\rangle=H'_{m_1}(\langle e_1,\ x\rangle)H_{m_2}(\langle e_2,\ x\rangle)\cdots H_{m_k}(\langle e_k,\ x\rangle)\,.$$

En utilisant (3.2) et (3.4), on obtient:

$$[D_{e_k}^{m_k}D_{e_{k-1}}^{m_{k-1}}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}](h)=2^{|m'|}\sqrt{[m']!}\int_X F(x+h)H_{[m']}(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

où $m'=(m_1+1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k,\ 0,\ \cdots)$. De la même manière, on a:

$$[D_{e_k}D_{e_k}^{m_k-1}\cdots D_{e_1}^{m_1+1}\hat{F}](h)=2^{|m'|}\sqrt{[m']!}\int_X F(x+h)H_{[m']}(x)\mathrm{d}\mu(x)\,,$$

d' où (3.3). Q.E.D.

Corollaire 3.1. *Soit $F\in L^p(X,\ \mu)$, l'application $H\to\boldsymbol{C}$:*

$$h\to[D_{e_n}^{m_n}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}](h)$$

est continue.

Preuve. Il résulte de (3.3) et du théorème de Cameron-Martin. Q.E.D.

Corollaire 3.2. *Soit $F\in L^p(X,\ \mu)$, soit $1<p'<p$, on a:*

$$|[D_{e_n}^{m_n}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}](h)|\leq\|F\|_{L^p(X,\mu)}^{p'}\|H_{[m]}\|_{L^{q'}(X,\mu)}\exp\{(q''-1)\|h\|^2/4\}$$

où $q'=p'/(p'-1)$ et $q''=p/(p-p')$.

Preuve. Il résulte de (3.3) et de l'inégalité de Hölder. Q.E.D.

Considérons maintenant l'application $D^n\hat{F}(h):H\times H\times\cdots\times H\to \boldsymbol{C}$ definie par:

$$(h_1,\cdots,h_n)\mapsto D^n\hat{F}(h)h_1\cdots h_n=D_{h_n\cdots h_1}\hat{F}(h)\,.$$

Théorème 3.2. *Soit* $F\in L^p(X,\mu)$ $(1<p<+\infty)$, *alors:*
i) $D^n\hat{F}(h)$ *est une forme n-linéaire symétrique continue;*

$$ii)\qquad \hat{F}(h+k)=\hat{F}(h)+\sum_{n\geq 1}\frac{D^n\hat{F}(h).k^n}{n!}\,,\qquad k\in H\,.$$

De plus, la série dans (ii) converge uniformément en h sur tout borné de H.

Preuve. Soient $h_1,\cdots,h_n\in H$, écrivons: $h_j=\sum_{\alpha\geq 1}h_j^{\alpha}e_\alpha$, alors:

$$(3.5)\qquad D^n\hat{F}(h).h_1\cdots h_n=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}D_{e_{\alpha_n},\cdots,e_{\alpha_1}}\hat{F}(h)h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}\,.$$

On a:

$$(3.6)\qquad |D^n\hat{F}(h).h_1\cdots h_n|\leq\Big(\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}|D_{e_{\alpha_n},\cdots,e_{\alpha_1}}\hat{F}(h)|^2\Big)^{1/2}\times\Big(\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n})^2\Big)^{1/2}\,.$$

D'aprés (3.3):

$$\Big(\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}|D_{e_{\alpha_n},\cdots,e_{\alpha_1}}\hat{F}(h)|^2\Big)^{1/2}\leq 2^n\sqrt{n!}\,\|J_n\tau_hF\|_{L^2(X,\mu)}\,.$$

D'autre part:

$$\Big(\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n})^2\Big)^{1/2}=\|h_1\|_H\cdots\|h_n\|_H\,.$$

Il résulte de (3.6):

$$(3.7)\qquad |D^n\hat{F}(h).h_1\cdots h_n|\leq 2^n\sqrt{n!}\,\|J_n\tau_hF\|_{L^2(X,\mu)}.\|h_1\|_H\cdots\|h_n\|_H$$

où J_n est la projection de $L^p(X,\mu)$ sur le n-iéme chaos. D'où i).
Soit maintenant $k\in H$, posons $e=k/\|k\|_H$, d'aprés (3.7):

$$(3.8)\qquad |D^n\hat{F}(h).k^n|\leq 2^n\sqrt{n!}\,\|k\|_H^n\|J_n\tau_hF\|_{L^2(X,\mu)}\,.$$

Si $1<p<2$, prenons $t>0$ tel que $(e^t-1)p=1$, en utilisant l'hypercontrativité du semi-groupe d' Ornstein-Uhlenbeck T_t:

$$\|T_tJ_nG\|_{L^2(X,\mu)}\leq\|J_nG\|_{L^p(X,\mu)}\,,\quad G\in L^p(X,\mu)\,.$$

Donc:

$$(3.9)\qquad \|J_nG\|_{L^2(X,\mu)}\leq e^{nt}\|J_nG\|_{L^p(X,\mu)}\,.$$

Remarquons que (3.9) est aussi valable pour $p \geq 2$. (avec $t=0$). D'autre part, il existe $s>0$ tel que:

$$\|J_n G\|_{L^p(X,\mu)} \leq e^{ns} \|G\|_{L^p(X,\mu)} .$$

On en déduit avec (3.9):

$$\|J_n G\|_{L^2(X,\mu)} \leq e^{n(t+s)} \|G\|_{L^p(X,\mu)} .$$

En prenant $G=\tau_h F$ et $1<p'<p$, on a:

$$(3.10) \qquad \|J_n(\tau_h F)\|_{L^2(X,\mu)} \leq e^{nc} \|\tau_h F\|_{L^{p'}(X,\mu)} , \quad c=t+s .$$

En utilisant le théorème de Cameron-Martin:

$$(3\cdot 11) \qquad \|\tau_h F\|_{L^{p'}(X,\mu)} \leq \|F\|^{p'}_{L^p(X,\mu)} \exp\{(q'-1)\|h\|_H{}^2/4\}$$

où $q'=p/(p-p')$.Soit $m<m_1$, en combinant (3.8), (3.10) et (3.11), on obteint:

$$(3.12) \qquad \sum_{n=m}^{m_1} \left| \frac{D^n \hat{F}(h).k^n}{n!} \right| \leq \left[\sum_{n=m}^{m_1} \frac{2^n \|k\|^n e^{nc}}{\sqrt{n!}} \right] \|F\|^{p'}_{L^p(X,\mu)} \exp\{(q'-1)\|h\|_H{}^2/4\} .$$

On en déduit donc que la série dans ii) converge uniformément en h parcourant un ensemble borné dans H. Q.E.D.

Corollaire 3.3. *Soit $F \in L^p(X,\mu)$, alors la fonction $h \to \hat{F}(h)$ est différentiable au sens de Fréchet.*

Preuve. De la relation (3.12), on voit facilement que:

$$|\hat{F}(h+k) - \hat{F}(h) - D\hat{F}(h).k| = 0(\|k\|) .$$

Q.E.D.

4. Holomorphie du squelette

Dans ce qui suit nous allons tenir compte de la structure complexe de H induite par l'opérateur J. Soit f une fonction Gâteaux-différentiable de H dans $\boldsymbol{C}$. Selon Shigekawa [5], on définit:

$$(4.1) \qquad \bar{D}F(h) = (1/2)(DF(h) + \sqrt{-1} J^* DF(h)) .$$

Définition. Soit f une fonction Gâteaux-différentiable de H dans $\boldsymbol{C}$, on dit qu'elle est holomorphe sur H si $\bar{D}f=0$ sur H.

Proposition 4.1. *f est holomorphe sur H si et seulement si pour tout h, $k \in H$, la fonction G: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ definie par: $G(\xi)=f(h+\xi.k)$ est holomorphe sur $\boldsymbol{C}$.*

Preuve. En prenant $h_0=h+\xi_0.k$, on se ramène à démontrer que f est holomorphe si et seulement si $\bar{\partial}G(0)=0$. Soit $\xi=a+ib\in \boldsymbol{C}$, on a:

$$\frac{\partial G}{\partial a}(0)=\langle Df(h), k\rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial b}(0)=\langle Df(h), Jk\rangle .$$

Donc:

$$\bar{\partial}G(0)=\langle \bar{D}f(h), k\rangle .$$

D' où le rèsultat. Q.E.D.

Théorème 4.2. *Pour tout* $m\in M$,

$$\bar{D}[D_{e_n}^{m_n}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}](h)=0 . \tag{4.2}$$

Preuve. Nous allons démontrer (4.2) pour $m=0$, le cas général se démontre de la même manière. Soient P_k une suite de polynômes holomorphes convergeant ver F dans $L^p(X, \mu)$. On voit que:

$$\bar{D}P_n(h)=0 \text{ pour tout } h\in H . \tag{4.3}$$

D'après (3.3), $k\in H$:

$$\langle DP_n(h), k\rangle=\int_X P_n(x+h)\langle k, x\rangle \mathrm{d}\mu(x) .$$

(4.3) se traduit donc par:

$$\int_X P_n(x+h)\langle k, x\rangle \mathrm{d}\mu(x)+\sqrt{-1}\int_X P_n(x+h)\langle Jk, x\rangle \mathrm{d}\mu(x)=0 .$$

Par passage à la limite:

$$\int_X F(x+h)\langle k, x\rangle \mathrm{d}\mu(x)+\sqrt{-1}\int_X F(x+h)\langle Jk, x\rangle \mathrm{d}\mu(x)=0 .$$

Soit:

$$\langle \bar{D}\hat{F}(h), k\rangle=0 \text{ pour tout } k\in H .$$

D'où le résultat. Q.E.D.

Remarque. Selon la terminologie de Hille-Phillips [2], on peut lire les résultats du corollaire 3.2 et le théorème 4.2 en disant que les fonctions $[D_{e_n}^{m_n}\cdots D_{e_1}^{m_1}\hat{F}](h)$ sont analytiques. (*Voir* [*2*], *p. 109-115).*

Corollaire 4.11. *Soit* $F\in H^p(X, \mu)$, *supposons qu'il existe* $R>0$ *telle que*:

$$|\hat{F}(h)|\leq R \text{ pour tout } h\in H . \tag{4.4}$$

Alors F *est constante.*

Preuve. Soit $h \in H$, considérons la fonction $G_h(\xi)=\hat{F}(\xi,h)$. D'aprés le théorème 4.2, $G_h(\xi)$ est une fonction holomorphe sur $\boldsymbol{C}$. En utilisant le théorème de Liouville, G_h est constante. En particulier, on a: $\hat{F}(h)=\hat{F}(0)$ pour tout $h \in H$. Par conséquent $\hat{F}$ est constante sur H. En utilisant l' unicité de la transformée de Cameron-Martin, on obtient le résultat.

Q.E.D.

Corollaire 4.2. *Soit $F \in H^p(X, \mu)$. Supposons qu'il existe un ouvert O de H tel que $\hat{F}(h)=0$ pour tout $h \in O$. Alors $F=0$ $\mu-p.p.$*

Preuve. On fixe $h_0 \in O$, soit $h \in H$, on considère la fonction holomorphe $G_h(\xi)=\hat{F}(h_0+\xi h)$. Pour $|\xi|$ assez petit, $h_0+\xi h \in O$, donc $G_h(\xi)=0$ au voisinage de O, G_h est donc identiquement zéro. En particulier: $\hat{F}(h)=\hat{F}(h_0)$ $=0$. On conclut par l'unicité de la transformée de Cameron-Martin.

Q.E.D.

Théorème 4.3. Soit $F \in H^p(X, \mu)$ non identiquement constante, posons:

$$M(r)=\sup_{\|h\|_H \leq r} |\hat{F}(h)|. \tag{4.5}$$

Alors $r \rightarrow \mathrm{M}(r)$ est strictement croissante.

Preuve. Soit P_n une suite de polynomes holomorphes convergeant vers F dans $L^p(X, \mu)$. Il est aisé de voir que $h \rightarrow \hat{P}_n(h)$ est une fonction continue pour la norme $\| \ \|_X$. D'autre part:

$$|\hat{F}(h)-\hat{P}_n(h)| \leq \|F-P_n\|_{L^p} \exp[(q-1)\|h\|_H{}^2/4]. \tag{4.6}$$

Par conséquent, $\hat{P}_n(h)$ converge vers $\hat{F}(h)$ uniformément sur tout borné de H, $\hat{F}$ est donc continue pour la norme $\| \ \|_X$ sur tout ensemble borné de H. Par conséquent, il existe $\|h_0\|_H \leq r_0$ tel que:

$$M(r_0)=|\hat{F}(h_0)|.$$

Considérons maintenant la fonction $G_{h_0}(\xi)=\hat{F}(\xi.h_0)$, alors:

$$\sup_{|\xi| \leq 1} |G_{h_0}(\xi)| < \sup_{|\xi| \leq r} |G_{h_0}(\xi)|, \qquad (r>1). \tag{4.7}$$

Car sinon $G_{h_0}(\cdot)$ serait une fonction identiquement constante par son holomorphie. En particulier, $\hat{F}(h_0)=G_{h_0}(1)=G_{h_0}(0)=\hat{F}(0)$. Soit maintenant $h \in H$. On a:

$$\begin{aligned} \sup_{|\xi| \leq r_0/\|h\|_H} |\hat{F}(\xi h)| &\leqq \sup_{\|h\|_H \leq r_0} |\hat{F}(h)| \\ &= |\hat{F}(h_0)| \\ &= |\hat{F}(0)|. \end{aligned}$$

D'où $\hat{F}(h)=\hat{F}(0)$ pour tout $h \in H$. D'autre part $\hat{F}$ ne peut pas être identiquement constante par l'unicité de la transformée de Cameron-Martin. Cette contradiction montre (4.7). Q.E.D.

Remarque. De la démonstratin on voit facilement que pour chaque $r>0$, il existe $h=h(r)$, qui peut dependre de r, tel que $\|h(r)\|_H=r$ et $M(r)=\hat{F}(h(r))$. Par consequent, si F n'est pas identiquement constante, on a alors pour tout h avec $\|h\|_H<r$:

$$|\hat{F}(h)|<M(r).$$

5. Dérivées radiales des fonctions $F\in H^p(X,\mu)$

Dans cette section, on désignera par $\boldsymbol{D}$ le disque unité de $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{D}=\{\xi\in \boldsymbol{C}/|\xi|<1\} \text{ et } \bar{\boldsymbol{D}} \text{ le disque unité fermé}.$$

Proposition 5.1. *Soit P un polynôme holomorphe, alors*:

$$\sup_{\xi\in\bar{D}}\int_X|P(\xi.x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\leq\int_X|P(x)|^p\mathrm{d}\mu(x). \tag{5.1}$$

Preuve. Ecrivons $\xi=re^{i\theta}$, d'après l'invariance de μ par rotation:

$$\int_X|P(re^{i\theta}.x)|^p\mathrm{d}\mu(x)=\int_X|P(rx)|^p\mathrm{d}\mu(x). \tag{5.2}$$

D'autre part:

$$P(rx)=\int_X P(rx+(1-r^2)^{1/2}y)\mathrm{d}\mu(y)=T_tP(x).$$

avec $t=-\log r$. On en déduit donc:

$$\int_X|P(rx)|^p\mathrm{d}\mu(x)\leq\int_X|P(x)|^p\mathrm{d}\mu(x). \tag{5.3}$$

En combinant (5.2) et (5.3), on obtient (5.1).

Introduisons maintenant la mesure borélienne ρ_1 sur X par:

$$\rho_1(A)=(2/\pi)\int_X\mathrm{d}\mu(x)\int_D 1_A(\xi.x)\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi) \tag{5.4}$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{D}$.

Proposition: 5.2. *La mesure ρ_1 charge tous les ouverts de X, de masse totale 1.*

Preuve. $\int_D\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)=2\pi\int_0^1 r\log(1/r)\mathrm{d}r=\pi/2$. D'autre part, soit $A\subset X$ un ouvert, soit $x_0\in A$, il existe alors $r(x_0)>0$ tel que: $\xi.x_0\in A$ si $|\xi|>1$

$-r(x_0)>0$. On a:

$$\int_D 1_A(\xi.x)\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

$$\geq\int_{1-r(x_0)<|\xi|<1-r(x_0)/2} 1_A(\xi.x)\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

$$\geq\log[1/1-r(x_0)/2]\sigma(\{\xi\in\boldsymbol{C}/1-r(x_0)<|\xi|<1-r(x_0)/2\})$$

$$>0\,.$$

Par suite, $\rho_1(A)\geq(2/\pi)\int_A \mathrm{d}\mu(x)\int_D 1_A(\xi.x)\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)>0$. Q.E.D.

Remarque 1. La mesure ρ_1 ne peut pas être absolument continue par rapport à μ. Considérons $X=C_0([0,1],\boldsymbol{C})$ l'espace des fonctions continues complexes s'annulant à l'origine. Notons:

$$A=\{x\epsilon X/\lim_{n\to+\infty}\textstyle\sum_{k=1}^{2^n}|x(k2^{-n})-x((k-1)2^{-n})|^2=1\}\,.$$

On a $\mu(A)=1$. D'autre part:

$$\rho_1(A)=(2/\pi)\int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_D 1_A(\xi.x)\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

$$=(2/\pi)\int_D \log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)\int_X 1_A(\xi.x)\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=(2/\pi)\int_D \log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)\int_A 1_A(\xi.x)\mathrm{d}\mu(x)=0\,.$$

Remarque 2. Lorsque $X=\boldsymbol{C}^n$ $(n>2)$, on a: $\mathrm{d}\rho_1=f(z,\bar{z})\mathrm{d}\mu_{\boldsymbol{C}^n}$, $z\in\boldsymbol{C}^n$ avec $f(z,\bar{z})=\int_1^{+\infty}[r^{n-2}e^{(1-r)|z|^2}\log r]\mathrm{d}r$.

Proposition 5.3. *Soit P un polynôme holomorphe, on a*:

$$\sup_{\eta\in\bar{D}}\int_X |P(\eta.x)|^p\mathrm{d}\rho_1(x)\leq\int_X |P|^p\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{5.5}$$

Preuve. Soit $\eta\in\bar{\boldsymbol{D}}$, on a:

$$\int_X |P(\eta.x)|^p\mathrm{d}\rho_1(x)=(2/\pi)\int_X \mathrm{d}\mu(x)\int_D |P(\xi\eta.x)|^p\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

$$=(2/\pi)\int_X |P(\xi\eta.x)|^p\mathrm{d}\mu(x)\int_D \log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)\,.$$

En utilisant (5.1) il vient:

$$\int_X |P(\eta.x)|^p \mathrm{d}\rho_1(x) \le (2/\pi)\left(\int_X |P(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)\int_D \log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)$$

$$=\int_X |P(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\,.$$

D'oû (5.5). Q.E.D.

Définition 5.1. [cf. 9] Soit P un polynôme holomorphe, on définit:

(5.6) $$D_x P(x) = \lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon<0} \frac{P((1+\varepsilon)x)-P(x)}{\varepsilon}\,.$$

Proposition 5.4. *Soit P un polynôme holomorphe, on a*:

(5.7) $$\int_X |D_x P(x)|^2 \mathrm{d}\rho_1(x) \le \int_X |P(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) - |P(0)|^2\,.$$

Preuve. Rappelons d'abord le résultat suivant (Voir [4]): Soit h une fonction de classe C^2 sur $\bar{\boldsymbol{D}}$, alors:

(5.8) $$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\mathrm{d}\theta - h(0) = (1/2\pi)\int_D \Delta h(\xi)\log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)\,.$$

Soit $x\in X$, posons $h(\xi)=P(\xi.x)$, qui est holomorphe sur $\boldsymbol{C}$. Ecrivons $\xi=a+ib$, $h=u+iv$, alors

$$\Delta|h|^2 = \Delta(u^2+v^2) = \Delta u^2 + \Delta v^2$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2\right]+2u.\Delta u+2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2\right]+2v.\Delta v$$

$$=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2\right]=4|\nabla u|^2\,.$$

où on a utilisé l'équation de Cauchy-Riemann. D'autre part:

$$\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right|^2 = |\nabla u|^2\,.$$

En appliquant (5.8) à $|h|^2$, on obtient:

$$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta - |h(0)|^2 = \frac{2}{\pi}\int_D \left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\right|^2 \log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)\,.$$

Par suite:

(5·9) $$(1/2\pi)\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta}.x)|^2\mathrm{d}\theta - |P(0)|^2 = \frac{2}{\pi}\int_D \left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\xi}(\xi.x)\right|^2 \log\frac{1}{|\xi|}\mathrm{d}\sigma(\xi)\,.$$

En l'intégrant par rapport à x, on obtient:

$$(5.9) \qquad \int_X |P|^2 \mathrm{d}\mu(x) - |P(0)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_X \mathrm{d}\mu(x) \int_D \left| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\xi}(\xi.x) \right|^2 \log \frac{1}{|\xi|} \mathrm{d}\sigma(\xi) .$$

Remarquons $\left[\frac{dP}{d\xi}(\xi.x)\right].\xi = D_x P(\xi.x)$, donc $|D_x P(\xi.x)| \leq \left|\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\xi}(\xi.x)\right|$. Par suite:

$$\int_X |D_x P|^2 \mathrm{d}\rho_1(x) = (2/\pi) \int_X \mathrm{d}\mu(x) \int_D |D_x P(\xi.x)|^2 \log \frac{1}{|\xi|} \mathrm{d}\sigma(\xi)$$

$$\leq \int_X |P|^2 \mathrm{d}\mu(x) - |P(0)|^2 .$$

Q.E.D.

Proposition 5.5. *Soit P un polynôme holomorphe, alors:*

$$(5.10) \qquad \sup_{\xi \in D} \int_X |D_x P(\xi.x)|^p \mathrm{d}\rho_1(x) \leq \int_X |D_x P(x)|^p \mathrm{d}\rho_1(x) .$$

Preuve. Il résulte de (5.1) et de la définition de ρ_1. Donnons lors le suivant:

Théorème 5.1. *Soient $F \in H^2(X, \mu)$, F_n des polynômes holomorphes tels que $F_n \to F$ dans $H^2(X, \mu)$. Alors:*

i) $D_x F = \lim D_x F_n$ *existe dans* $L^2(X, \rho_1)$.

ii) $\int_X |D_x F(x)|^2 d\rho_1(x) \leq \int_X |F(x)|^2 d\mu(x) - |\hat{F}(0)|^2$.

Preuve. Direct en utilisant la proposition 5.4. Q.E.D.

Dans ce qui suit, nous allons étendre les résultats du théorème 5.1 aux fonctions $F \in H^p(X, \mu)$ avec $1 < p < 2$.

Théorème 5.2. *Soit* $F \in H^p(X, \mu)$ $(1 < p < 2)$, *on a alors:*

i) $D_x F(x)$ *existe* ρ_1-*p.p.* ;

ii) $\int_X |D_x F(x)|^p d\rho_1(x) \leq c_p \int_X |F(x)|^p d\mu(x)$.

où c_p sera précisé dans (5.12).

Prueve. Suivant le schéma ci-dessus, il suffit d'établir le résultat:

$$(5.11) \qquad \int_X |D_x P(x)|^p \mathrm{d}\rho_1(x) \leq c_p \int_X |P(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) .$$

lorsque P est un polynôme holomorphe.

Soit $\xi \in \boldsymbol{D}$, posons $r = 1 - |\xi|$. En appliquant la formule de Cauchy à la fonction holomorphe: $\xi \to P(\xi.x)$, on obtient:

$$\frac{dP}{d\xi}(\xi.x)=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} P((\xi+re^{i\theta}).x)e^{-i\theta}d\theta .$$

donc:

$$\left|\frac{dP}{d\xi}(\xi.x)\right|^p=\frac{1}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi}|P((\xi+re^{i\theta}).x)|^p d\theta .$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
&\int_X |D_X P(x)|^p d\rho_1(x)\\
&=\frac{2}{\pi}\int_X d\mu(x)\int_D |D_x P(\xi.x)|^p \log\frac{1}{|\xi|}d\sigma(\xi)\\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_X d\mu(x)\int_D\Big[\frac{1}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi}|P((\xi+re^{i\theta}).x)|^p d\theta\Big]\log\frac{1}{|\xi|}d\sigma(\xi)\\
&=\frac{2}{\pi}\int_D\Big[\frac{1}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi}\Big(\int_X |P((\xi+re^{i\theta}).x)|^p d\mu(x)\Big)\log\frac{1}{|\xi|}d\sigma(\xi)\\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_D\Big[\frac{1}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi}\Big(\int_X |P(x)|^p d\mu(x)\Big)d\theta\Big]\log\frac{1}{|\xi|}d\sigma(\xi)
\end{aligned}$$

(où on a utilisé (5.1))

$$=\Big(\int_X |P(x)|^p d\mu(x)\Big)\times\Big(\frac{2}{\pi}\int_D (1-|\xi|)^{-p}\log\frac{1}{|\xi|}d\sigma(\xi)\Big).$$

$$=c_p\int_X |P(x)|^p d\mu(x) .$$

avec:

$$c_p=\frac{2}{\pi}\int_D (1-|\xi|)^{-p}\mathrm{Log}\frac{1}{|\xi|}d\sigma(\xi) \tag{5.12}$$

$$=4\int_0^1 r(1-r)^{-p}\mathrm{Log}(1/r)dr<+\infty .$$

Q.E.D.

6. Principe de grandes déviations

En théorie de diffusions, le résultat de grandes déviations est exprimé à l' aide de son squelette, la solution d'une équation différentielle ordinaire ssociée à un trajectoire déterministe (Voir par exemple [7]). Parallèlement, dans notre cas, on a aussi:

Théorème 6.1. *Soit* $F\in H^p(X,\mu)$ $(1<p<+\infty)$, *on a:*

i) *Si* $A\subset \boldsymbol{C}$ *est un ensemble fermé, alors:*

(6.1) $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} 4\varepsilon^2\log\mu(\{x\in X/F(\varepsilon x)\in A\})\leq -\inf\{\|h\|_H{}^2/\hat{F}(h)\in A\}$.

ii) *Si* $A\subset \boldsymbol{C}$ *est un ensemble ouvert, alors:*

(6.2) $\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} 4\varepsilon^2\log\mu(\{x\in X/F(\varepsilon x)\in A\})\geq -\inf\{\|h\|_H{}^2/\hat{F}(h)\in A\}$.

Preuve. Prenons P_n une suite de polynômes holomorphes convergeant vers F dans $L^p(X,\mu)$, montrons d'abord:

(6.3) $$\lim_{n\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log\mu(\{x\in X/|F(\varepsilon x)-P_n(\varepsilon x)|\geq\delta\})=-\infty\,,\quad \delta>0$$

En effect, notant $q(\varepsilon)=(1/\varepsilon^2-1)p+1$, on a:

(6.4) $$\begin{aligned}&\mu(\{x\in X/|F(\varepsilon x)-P_n(\varepsilon x)|\geq\delta\})\\&\leq\frac{1}{\delta^{q(\varepsilon)}}\int_X|F(\varepsilon x)-P_n(\varepsilon x)|^{q(\varepsilon)}\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{\delta^{q(\varepsilon)}}\int_X|T_{-\log\varepsilon}[F-P_n](x)|^{q(\varepsilon)}\mathrm{d}\mu\\&\leq\frac{1}{\delta^{q(\varepsilon)}}\|F-P_n\|_{L^p(X,\mu)}^{q(\varepsilon)}\,,\end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypercontrativité de T_t. On a:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log\left[\frac{1}{\delta^{q(\varepsilon)}}\|F-P_n\|_{L^p(X,\mu)}^{q(\varepsilon)}\right]=\log(1/\delta)^p+\log\|F-P_n\|_{L^p(X,\mu)}^p\,.$$

On en déduit:

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\log\left[\frac{1}{\delta^{q(\varepsilon)}}\|F-P_n\|_{L^p(X,\mu)}^{q(\varepsilon)}\right]=-\infty\,.$$

D'où (6.3).

Le reste de la démonstration est tout à fait formel, analogue à [7, P. 85-86]. Q.E.D.

Remarque. Dans (6.1) et (6.2), le nombre "4" est dûe à la renormalisation de la mesure μ.

ANALYSE COMPLEXE ET GÉOMÉTRIE
UNIVERSITÉ DE PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75232 PARIS 05
et UNIVERSITÉ DE WUHAN, CHINE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE WUHAN WUCHANG, HUBEI 430072
R. P. CHINE

Bibliographie

[1] V. Bargmann, Remarks on a Hilbert space of analytic functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **48** (1961), 199-204.
[2] E. Hille et R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-groups, Colloquium Publications, **31** (1957).
[3] P. Malliavin, Differantial Analysis on Stochastic Analysis, Cours M. I. T.
[4] M. P. Malliavin et P. Malliavin, Intégrales de Lusin-Calderon pour les fonctions biharmoniques, Bull. Sci. math. 2^e série, **101** (1977), 357-384.
[5] I. Shigekawa, Ito-Wiener expansions of holomorphic functions on the complex Wiener space. In "stochastic analysis", ed. by E. Mayer and al. Academic press, San Diego, p. 459-478 (1991).
[6] D. Stroock, Homogeneous Chaos revisited, Séminaires de Prob. XXI, 1-7.
[7] D. Stroock, An Introduction to the Theory of Large Deviations, Universitext, Springer-Verlag, 1984.
[9] M. Zakai, Malliavin derivatives and derivatives of functionals of Wiener process with respect to a scale parameter, Annals of Prob. 13-2 (1985), 609-615.
[10] D. Feyel and A. de la pradelle. Harmonic Analysis in infinite dimension. Potential Analysis 2 (1993), p. 23-36.