J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
33-3 (1993) 621-632

Principe de Duhamel et problèmes de Cauchy uniformément bien posés

Par

Keiichiro KITAGAWA

§ 1. Introduction

Il s'agit de la relation entre deux sortes de problèmes de Cauchy: Ceux *non homogènes* $(\mathrm{PC})_s(0\leq s<T^0)$;

$$(\mathrm{PC})_s \qquad \begin{cases} L(t,x;\partial_t,\partial_x)U(t,x)=F(t,x) & t\in[s,T^0], \quad x\in R^d \\ U(s,x)=\Phi(x) \end{cases}$$

et ceux *homogènes* $(\mathrm{PCH})_s(0\leq s<T^0)$;

$$(\mathrm{PCH})_s \qquad \begin{cases} L(t,x;\partial_t,\partial_x)U(t,x)=0 & t\in[s,T^0], \quad x\in R^d \\ U(s,x)=\Phi(x) \end{cases}$$

pour un opérateur différentiel linéaire aux dérivées partielles.

Soit $L(t,x;\partial_t,\partial_x)\equiv\partial_t I-A(t,x;\partial_x)$ avec une $N\times N$-matrice carrée $A(t,x;\partial_x)$. Le principe de Duhamel, souvent utilisé,[1],[2],[10] dit que la solution $U(t,x)$ du $(PC)_s$ soit donnée par la formule;

$$\text{(D)} \qquad U(t,x)=U(t,x;s;\Phi)+\int_s^t U(t,x;\tau;F(\tau,\circ))d\tau$$

où $U(t,x;s;\Phi)$ est la solution du $(\mathrm{PCH})_s$ à donnée initiale $\Phi(x)$.

Or il est vrai que la formule (D) est valable pour l'opérateur différentiel linéaire L, mais elle ne l'est plus pour l'opérateur différentiel linéaire aux dérivées partielles L.

Au cas où les coefficients de L ne dépendent que de t, I. G. Petrowsky[7] et L. Schwartz[9] ont montré, respectivement dans le cadre de $\mathfrak{B}$ et $\mathscr{S}'$, que, si les $(\mathrm{PCH})_s(0\leq s<T^0)$ sont uniformément bien posés, alors la formule (D) est valable et par conséquent que les $(\mathrm{PC})_s(0\leq s<T^0)$ sont bien posés. Et à propos de l'inverse, L. Schwartz[9] a fait une remarque courte: "Si les $(\mathrm{PCH})_s$ $(0\leq s<T^0)$ sont bien posés, mais non uniformément, $\cdots$, alors on ne peut rien conclure sur les $(\mathrm{PC})_s$ $(0\leq s<T^0)$.

Communicated by Prof. N. Iwasaki, October 1, 1991.

A la théories de semigroupe, la formule (D) est bien connue; Il l'est aussi[6] que, si les $(PCH)_s$ $(0\leq s< T^0)$ sont uniformément bien posés, alors la formule (D) donne la solution du $(PC)_s$ $(0\leq s< T^0)$. Mais il nous semble qu'on ne s'y interesse pas au probléme inverse.

Nous montrons qu'ils sont équivalents les deux énoncés: "Les $(PC)_s$ $(0\leq s < T^0)$ sont bien posés" et "Les $(PCH)_s$ $(0\leq s< T^0)$ sont uniformément bien posés"; Au cas où il y a l'unicité de solution, c'est le seul cas où la formule (D) est toujours valable. Et à propos de la remarque de L. Schwartz ci-haut, nous montrons un exemple d'opérateur pour lequel les $(PCH)_s$ $(0\leq s< T^0)$ sont bien posés dans H^∞, mais non uniformément; Nous donnons encore un exemple de fonction $F(t, x)$ tell que le $(PC)_0$ à données $F(t, x)$ et $\Phi(x)\equiv 0$ n'a plus de solution dans la classe de fonctions à valeur dans H^∞. Nous les avons déjà annoncés à un compte rendu.[4] Nous y avons énoncé le cas le plus simple mais typique avec la démonstration à peu près complète. Dans cette note nous traitons le cas général.

Séparons les deux notions, existence et unicité, combinées dans celle "bien posé"; Tandis qu'à l'unicité, l'unicité au $(PC)_0$ est prépondérante à celle aux autres $(PC)_s$, à l'existence, l'existence au $(PCH)_0$ ne joue pas de rôle à la formule (D). Ainsi nous introduisons, au lieu de la notion" $(PCH)_s$ $(0\leqq s< T^0)$ uniformément bien posés", la notion" $(PCH)_s$ $(0< s< T^0)$ uniformément solubles". Alors notre équivalence, sous l'hypothèse de l'unicité de solution du $(PC)_0$, est celle entre deux énoncés; "Les $(PC)_s$ $(0\leq s< T^0)$ sont bien posés" et "Les $(PCH)_s$ $(0< s< T^0)$ sont uniformément solubles". Considéré seules les $(PCH)_s(0< s< T^0)$ a l'avantage sur considérer les $(PC)_s(0\leq s< T^0)$ surtout aux cas où il y a une singularité à $t=0$. Il en est un de chercher la condition[5] pour que le $(PC)_0$ soit bien posé pour l'opérateur dégénéré $L(t, x; \partial_t, \partial_x) \equiv t^k\partial_t I - A(t, x; \partial_x)$ $(k\geq 0)$. Il nous est donc intéressant d'établir notre équivalence au cas où $k\geq 0$; C'est ce que nous faisons dans cette note.

§ 2. Les notions sur $(PC)_s$ et $(PCH)_s$

Notons par $C^m([0, T^0], X)$ $(0\leq m\leq\infty)$ l'espace de fonctions de la class C^m sur $[0, T^0]$ et à valeur dans X espace vectoriel topologique sur $\boldsymbol{C}$ et $\mathcal{L}(X)$ l'espace d'opérateurs linéaires continues de X dans lui-même muni de la topologie simple.

Hypothèse. Soient X un espace de Fréchet, $k\geq 0$ et $T^0>0$ fixés une fois pris. Soit $A\in C^\infty([0, T^0], \mathcal{L}(X))$ tel que la famille $\{\partial_t^m A(t);\ t\in[0, T^0]\}$ est équicontinue pour tout entier $m\geq 0$: pour toute semi-norme p de X, il existe une semi-norme q de X telle que

$$\sup_{t\in[0, T^0]} p(\partial_t^m A(t)\Phi)\geq q(\Phi) \text{ pour tout } \Phi\in X. \tag{2.1}$$

Et soit $L(t; \partial_t)\equiv t^k\partial_t - A(t)$.

Nous considérons les problèmes de Cauchy *non homogènes* $(PC)_s$ *à* donnée initiale nulle pour la simplicité de l'écriture $(0 \leqq s < T^0)$;

$$(\mathrm{PC})_s \qquad L(t; \partial_t)U(t) = F(t) \qquad (\forall t \in [s, T^0]); \quad U(s) = 0$$

et ceux *homogènes* $(PCH)_s$ $(0 \leq s < T^0)$;

$$(\mathrm{PCH})_s \qquad L(t; \partial_t)U(t) = 0 \qquad (\forall t \in [s, T^0]); \quad U(s) = \Phi$$

Définition 1 (soluble). Le $(\mathrm{PC})_s$ est dit $c_t^{m^0}$*-soluble* $(0 \leq m^0 \leq \infty)$, $(0 \leq s < T^0)$, si, au cas où $k=0$ ou $s \neq 0$, pour toute $F \in C^{m^0}([s, T^0], X)$, il existe une solution $U \in C^1([s, T^0], X)$ du $(\mathrm{PC})_s$ à donnée F et qu'au cas où $k>0$ et $s=0$, pour toute $F \in C^{m^0}([0, T^0], X)$ plate à $t=0$, il existe une solution $U \in C^1([0, T^0], X)$ plate à $t=0$ du $(\mathrm{PC})_s$ à donnée F. Nous disons tout simplement *soluble* au cas où $m^0=0$.

Nous disons que $F \in C^{m^0}([0, T^0], x)$ est plate à $t=0$ si, pour tous l, m finis $(0 \leq l,\ 0 \leq m \leq m^0)$, l'on a $\lim_{t \to 0} t^{-l} F^{(m)}(t) = 0$

Remarquons que la solution $U \in C^1([s, T^0], X)$ est nécessairement $U \in C^{m^0+1}([s, T^0], X)$.

Le préfixe $C_t^{m^0}$-veut dire que la donnée F est m^0-fois différentiable. On verra qu'il ne faut pas se soucier de telle distinction: Si les $(\mathrm{PC})_s(0 \leq s < T^0)$ sont C_t^∞-solubles avec l'unicité de solution, alors ils sont solubles. Pourtant il y logiquement la différence. Nous acceptons cette comlication pour le moment.

Définition 2 (unicité). T, T' étant $s < T' \leq T \leq T^0$, nous disons *l'unicité* $(U_{T'}^T)$ l'unicité suivante de solution du $(\mathrm{PC})_s$:

Cas où $k=0$ ou $s \neq 0$;

$$(U_{T'}^T) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{la solution } U \in C^\infty([s, T], X) \text{ du } (\mathrm{PC})_s \text{ à donnée nulle est} \\ \text{nulle dans } C^\infty([s, T'], X)\,. \end{array} \right.$$

Cas où $k>0$ et $s=0$; On y remplace "$U \in C^\infty([s, T], X)$" par "$U \in C^\infty([0, T], X)$ plate *à* $t=0$".

Remarquons qu'il revient au même si l'on remplace la condition $U \in C^\infty([s, T], X)$ par $U \in C^1([s, T], X)$.

Proposition 1. *Si le* $(PC)_0$ *a l'unicité* $(U_{T'}^T)$, *alors le* $(PC)_s$ *a l'unicité* $(U_{T'}^T)$ *pour tout* $s(0 \leq s < T')$.

Proposition 2. *Supposons qu'il y ait l'unicité* $(U_{T'}^T)$ *au* $(PC)_0$ *pour tout* T $(0 \leq T \leq T^1)$. *Si le* $(PC)_0$ *est* $C_t^{m^0}$*-soluble pour un* m^0 $(0 \leq m^0 \leq \infty)$, *alors les* $(PC)_s(0 \leq s \leq T^1)$ *sont* $C_t^{m^0}$*-solubles.*

Démonstration. Fixons s $(0<s\leq T^1)$, et $F\in C^{m^0}([s,\ T^0],\ X)$. Considérons la solution formelle du $(\mathrm{PC})_s$ à donnée F; $U^f(t;s)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-s)^n}{n!}\Phi_n$.

Soient $U^0(t;s)\in C^{m^0}(R.X)$ (voire aussi la démonstration de la proposition 5 pour $m^0=\infty$[3]) la fonction telle que $\partial_t^n U^0(t;s)|_{t=s}=\Phi_n$ $(0\leq{}^{\forall}n\leq m^0)$, et $F^0(t;s)\equiv L(t;\partial_t)U^0(t;s)$. $F^0(t;s)-F(t)$ est alors prolongée par 0 à une fonction $G(t;s)\in C^{m^0}([0,\ T^0],\ X)$.

Il existe alors une solution $V(t;s)$ plate à $t=0$ du $(\mathrm{PC})_0$ à donnée $G(t;s)$. Grâce à l'unicité (U_s^s), on a $V(s;s)=0$. Soit $U(t;s)\equiv U^0(t;s)-V(t;s)$. Alors $U(t;s)$ est la solution du $(\mathrm{PC})_s$ à donnée F. C.Q.F.D.

Définition 3 (uniformément solubles)c.f.[6]. Les $(\mathrm{PCH})_s(0<s<T^0)$ sont dits *uniformément solubles*, s'il correspond, à chaque semi-norme p de X, un entier $k(p)$ tel que

(2.2) $\qquad k(p)=0$ au cas où $=0$,

et que, pour tout $\Phi\in X$, il existe des solutions $U(t;s;\Phi)\in C^1([s,\ T^0],\ X)$ de $(\mathrm{PCH})_s$ à donnée $\Phi(0<s<T^0)$, satisfaisant, pour toute semi-norme p de X,

$$\sup_{(t,s)\in\Omega(T^0)} s^{k(p)}p(U(t;s;\Phi))<\infty \tag{2.3}$$

où

$$\Omega(T^0)\equiv\{(t,\ s);\ 0<s\leq t\leq T^0,\ s<T^0\}\subset\boldsymbol{R}^2\ . \tag{2.4}$$

Proposition 3. *Si les* $(PCH)_s$ $(0<s<T^0)$ *sont uniformément solubles, alors*

(2.5) $\left\{\right.$ *il correspond, à chaque semi-norme p de X, un entier $k(p)$ satisfaisant* (2.2), *et une semi-norme q de X tels que, pour tout $\Phi\in X$ satisfaisant $q(\Phi)\neq 0$, il existe des solutions $U(t;s;\Phi)\in C^{\infty}$ $([s,\ T],\ X)$ des $(PCH)_s$ à donnée Φ $(0<s<T^0)$ satisfaisant*

$$\sup_{(t,s)\in\Omega(T^0)} s^{k(p)}p(U(t;s;\Phi))\leq q(\Phi)\ .$$

Remarque. Imposons l'unicité $(U_{T^1}^{T^0})$ au $(\mathrm{PCH})_0$. Alors, en remplacant $\Omega(T^0)$ par $\Omega(T^1)$, on peut se passer, à (2.5), de la condition; $q(\Phi)\neq 0$. Au cas où $k=0$, c'est la condition imposée à la notion "uniformément bien posés" considérée par I. G. Petrowsky[7] et L. Schwartz.[9] La condition (2.5) est alors suffisante pour que les $(\mathrm{PCH})_s$ $(0<s<T^1)$ soient uniformément solubles.

Encore au cas où $k=0$, la notion "uniformément bien posés" considérée par S. G. Krein[6] est plus forte en apparence que celle de I. G. Petrowsky mais la même sous notre hypothése. (voire (3.2) ci-après)

Démonstration. Soient $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite non décroissante de semi-normes engendrant la topologie de X. Soient $k(n)\equiv k(p_n)$ $n=1, 2, \cdots$ Grâce à (2.1), pour tout n, il existe un $l(n)$ tel qu'on a

$$\operatorname*{Sup}_{t\in[0,T^0]} p_n(A(t)\Phi)\leq {}^{\exists}Cp_{l(n)}(\Phi) \text{ pour tout } \Phi\in X\,.$$

Soient $I\equiv(0,\ T^0)$,

$$\boldsymbol{X}\equiv\{(U(t;s))_{s\in I}\,;\quad U(t;s)\in C^\infty([s,\ T^0],X)\,,\quad L(t;\partial_t)U(t;s)=0\,,$$

$$\operatorname*{Sup}_{s\in I}\ \operatorname*{Sup}_{t\in[s,T^0]}(s^{k(n)}p_n(U(t;s))+s^{k(l(n))+k}p_n(\partial_t U(t;s)))<\infty \quad {}^{\forall}n\,,$$

$$U(s;s)=U(s';s')\,{}^{\forall}s,\ {}^{\forall}s'\in I\}\subset\prod_{s\in I}C^\infty([s,\ T^0],X)\,,$$

et $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{X}\to X$; $\boldsymbol{T}((U(t;s))_{s\in I})=U(s;s)$.

L'espace $\boldsymbol{X}$ est un espace de Fréchet avec une suite non décroissante de semi-normes $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$q_n((U(\circ;s))_{s\in I})=\operatorname*{Sup}_{s\in I}\ \operatorname*{Sup}_{m\leq n}\ \operatorname*{Sup}_{t\in[s,T^0]}(s^{k(m)}p_m(U(t,s))$$
$$+s^{k(l(m))+k}p_m(\partial_t U(t;s)))\,.$$

D'après l'hypothèse que les $(\mathrm{PCH})_s(0<s<T^0)$ sont uniformément solubles, on voit que $\boldsymbol{T}$ est surjective. Donc grâce au théorème du homomorphisme de Banach,[8] $\boldsymbol{T}$ est ouverte. Par conséquent, pour tout n, il existe des nombres $\boldsymbol{n}(n)$ et C_n tels que, tout $\Phi\in X$ satisfaisant $p_{\boldsymbol{n}(n)}(\Phi)\leq C_n$, il existe un $(V_n(t;s;\Phi))_{s\in I}\in\boldsymbol{X}$ tel que $\boldsymbol{T}((V_n(t;s;\Phi))_{s\in I})=\Phi$, $q_n((V_n(\circ;s;\Phi))_{s\in I})\leq 1$. Soient, n étant fixé, pour $\Phi\in X$ tel que $p_{\boldsymbol{n}(n)}(\Phi)\neq 0$, $U_n(t;s;\Phi)\equiv\dfrac{p_{\boldsymbol{n}(n)}(\Phi)}{C_n}\times V_n\Big(t;s;\dfrac{C_n}{p_{\boldsymbol{n}(n)}(\Phi)}\Phi\Big)$ $(s\in I)$. Alors on a $q_n(U_n(\circ;s;\Phi)_{s\in I})\leqq\dfrac{1}{C_n}p_{\boldsymbol{n}(n)}(\Phi)$ et $U_n(s;s;\Phi)=\Phi$ $(s\in I)$. Compte tenu de la définition de q_n, ceci montre (2.5). C.Q.F.D.

Pour illustrer la signification de l'uniformité, nous citons l'exemple à la note précédente.[4]

Exemple. Soient $X\equiv H^\infty(\boldsymbol{R})$ et

$$L(t,x;\partial_t,\partial_x)\equiv\partial_t-\partial_x{}^6(t^2\partial_x{}^4+2t\partial_x{}^2+1)-t^2\partial_x{}^8\ (x\in\boldsymbol{R})\,.$$

Remarquons qu'il y a l'unicité (U_T^T) pour tout $T\geq 0$.

Soit encore $F(t,x)\in C^0(\boldsymbol{R},X)$ telle que sa transformée de Fourier par rapport à x est

$$\hat{F}(t, \xi) \equiv \sum_{n\geq 1} \exp(-\sqrt{n})\chi_n(t)\phi_n(\xi)$$

où

$$\chi_n(t) \equiv \begin{cases} 1 & \left|t - \dfrac{1}{n(n+1)}\right| \leq n^{-6} \\ \geq 0 & (\text{continue}) \\ 0 & \left|t - \dfrac{1}{n(n+1)}\right| \geq 2n^{-6} \end{cases}, \qquad \phi_n(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi - n| \leq n^{-3} \\ \geq 0 & (\in C_0^\infty(\boldsymbol{R})) \\ 0 & |\xi - n| \geq 2n^{-3}. \end{cases}$$

Alors les $(\text{PCH})_s(0 \leq s < T)$ sont solubles (bien posés!) mais non uniformément. La fonction $U(t, x)$ définie par (D) pour $F(t, x)$ est la solution de l'équation $L(t; \partial_t, \partial_x)U(t, x) = F(t, x)$ $(0 < t)$, mais non la solution du $(\text{PC})_0$ à donnée $F(t, x)$. Et le $(\text{PC})_0$ à données $F(t, x)$ n'a pas de solution de $C^1([0, T], X)$.

Démonstration. En effet la solution $\hat{K}(t, \xi; s)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} L(t; \partial_t, i\xi)\hat{K}(t, \xi; s) = 0 \\ \hat{K}(s, \xi; s) = 1 \end{cases}$$

est donnée par

$$\hat{K}(t, \xi; s) = \exp\left(\int_s^t [-\xi^6(\tau\xi^2 - 1)^2 + \tau^2\xi^8] d\tau\right).$$

Elle satisfait à

$$\text{(E)} \qquad \hat{K}\left(\frac{1}{\xi(\xi-1)}, \xi; \frac{1}{\xi(\xi+1)}\right) = \exp\left(\frac{4}{3}\frac{\xi^5}{(\xi^2-1)^2}\right) \quad \forall \xi > 1.$$

On voit que $\hat{K}(t, \xi; s)$ est bornée dans $\{(t, \xi);\ s \leq t \leq T\}$ pour tout s $(0 \leq s < T)$ fixé. Ceci montre que les $(\text{PCH})_s(0 \leq s < T)$ sont solubles.

Pour que les $(\text{PCH})_s(0 \leq s < T)$ soient uniformément solubles, il faut et il suffit que $\hat{K}(t, \xi; s)$ soient majorées par un polynôme en $|\xi|$ dans $\{(t, \xi, s);\ (t, s) \in \Omega\}$.[7] Celle-ci est violée par (E).

Grâce à ce que les $(\text{PCH})_s(0 \leq s < T)$ sont solubles, la formule (D) pour $F(t, x)$ s'écrit, par la transformée de Fourier,

$$(\text{D}^\sim) \qquad U(t, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds \int e^{ix\xi}\hat{K}(t, \xi; s)\hat{F}(s, \xi)d\xi$$

Puisque $\hat{K}(t, \xi; s)$ est bornée dans $\{(t, \xi, s);\ 0 \leq s \leq t \leq T,\ s < T,\ \delta \leq t\}$ pour tout $\delta > 0$ fixé, $U(t, x)$ satisfait à $L(t; \partial_t, \partial_x)U(t, x) = F(t, x)$ $(t > 0)$. Mais à cause de (E), $U(t, x)$ a l'estimation

$$U\left(\frac{1}{n(n-1)}, 0\right) \geq {}^{\exists} C n^{-9} \exp\left(\frac{2}{3}n - \sqrt{n}\right) \quad (n \gg 1).$$

Donc, ayant la singularité à $t=0$, elle n'est plus la solution du $(PC)_0$ à données $F(t, x)$.

S'il y avait la solution du $(PC)_0$ à donnée $F(t, x)$, elle serait représentée par le deuxième membre de $(D^{\sim})$. Il n'y a donc pas de solution du $(PC)_0$ à donnée $F(t, x)$. C.Q.F.D.

Remarque. I. G. Petrowsky[7] a montré un exemple où le $(PCH)_0$ est bien posé mais les $(PCH)_s(0 \leq s < T^0)$ ne sont pas uniformément bien posés. Et pour cause: Au cas où les coefficients e $L(t, x; \partial_t, \partial_x)$ ne dépendent que de variable t, il a montré (comme il est fin!) qu'au cas oú $L(t; \partial_t, \partial_x)$ est kowalevskien, si le $(PCH)_0$ est bien posé, alors les $(PCH)_s(0 \leq s < T^0)$ sont uniformément bien posés. Bien que nous l'espérions, nous ignorons si c'est vrai au cas général.

§ 3. Relation entre $(PC)_s$ et $(PCH)_s$

Proposition 4. *Si les $(PC)_s(0 \leq s < T^0)$ sont C_t^{∞}-solubles et que le $(PC)_0$ a l'unicité $(U_{T^1}^{T^0})$ avec un $T^1(0 < T^1 \leq T^0)$, alors les $(PCH)_s$ $(0 < s < T^1)$ sont uniformément solubles.*

Remarque. Si la formule (D) donne, pour tout $F \in C^{\infty}([s, T^0], X)$ (plate à $t=0$ au cas où $s=0$ et $k>0$), la solution du $(PC)_s(0 \leq s < T^0)$ et que le $(PC)_0$ a l'unicité $(U_{T^1}^{T^1})$ aec un T^1 $(0 < T^1 \leq T^0)$, alors les $(PC)_s(0 \leq s < T^0)$ étant C_t^{∞}-solubles, les $(PCH)_s(0 < s < T^0)$ sont uniformément solubles.

Démonstration. Soit $U(t; s; \Phi) \in C^{\infty}([s, T^0], X)$ la solution du $(PCH)_s$ à donnée $\Phi(0 < s < T^1)$. Remarquons que l'on a $\Phi_n(s) \equiv \partial_t^n U(t; s; \Phi)|_{t=s} = s^{-kn}$ ${}^{\exists}A_n(s)\Phi$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ avec $A_0(s) \equiv 1$, $A_1(s) \equiv A(s) \cdots$.

Exprimons $U(t; s; \Phi)$ par une solution du $(PC)_0$. Formons pour cela une fonction $U^0(t; s; \Phi) \in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, X)$[3] telle que

$$\partial_t^n U^0(0; s; \Phi)|_{t=s} = \Phi_n(s) \ (n=0, 1, 2, \cdots)$$

Soit en effet $g(t)$ une fonction telle que Supp $g \subset (-1, 1)$, $g(t) \equiv 1$ au voisinage de $t=0$. Soit $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_0 \equiv 1 > \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_n > \rightarrow 0)$ une suite de nombres positifs que nous choisirons ci-après. Soient

$$U^0(t; s; \Phi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t; s; \Phi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g(\varepsilon_n^{-1}(t-s)) \Phi_n(s)(t-s)^n/n!.$$

Comme on voit ci après, $U^0(t; s; \Phi)$ est de $C^{\infty}(\boldsymbol{R}, X)$. Les fonctions $V^0(t; s; \Phi) \equiv U^0(t; s; \Phi) - U(t; s; \Phi)$ et $F^0(t; s; \Phi) \equiv L(t; \partial_t) U^0(t; s; \Phi)$ étant de $C^{\infty}([s, T^0], X)$ et plates à $t=s$, nous les prolongeons par 0 respectivement aux fonctions $V(t; s; \Phi)$, $F(t; s; \Phi) \in C^{\infty}([0, T^0], X)$. Alors $V(t; s; \Phi)$ est la solution plate à $t=0$ du $(\mathrm{PC})_0$ à donnée $F(t; s; \Phi)$. Ainsi on a $U(t; s; \Phi)=U^0(t; s; \Phi)-V^0(t; s; \Phi)$ avec $V^0(t; s; \Phi)$ restriction à $[s, T^0]$ de $V(t; s; \Phi)$ solution du $(\mathrm{PC})_0$.

Soit $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite non décroissante de semi-normes de X qui engendre la topologie de X. Grâce à (2.1), on peut bien supposer que, pour tout n, il existe des nombres $l(n)$ et C_n tels que, pour tout m $(0\leq m\leq n-1)$, on a

$$\mathrm{Max}\{p_n(\partial_t^m G_n(t; s; \Phi)), p_n(\partial_t^m(A(t)G_n(t; s; \Phi)))\}\leq C_{(n)}p_{l(n)}(\Phi)s^{-kn}\varepsilon_n .$$

Nous choisissons ε_n de manière qu'on a

$$\varepsilon_n\leq(c_{(n)}p_{l(n)}(\Phi))^{-1}(s^k/2)^n \quad n=1, 2, \cdots .$$

Alors on a pour tous m, n $(0\leq m\leq n-1,\ n=1, 2, \cdots)$

$$\mathrm{Max}\{p_n(\partial_t^m G_n(t; s; \Phi)), p_n(\partial_t^m(A(t)G_n(t; s; \Phi))))\}\leq 2^{-n} .$$

Cette estimation montre en chemin $U^0(t; s; \Phi\}\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}, X)$

Le $(\mathrm{PC})_0$ étant soluble avec l'unicité $(U_{T^1}^{T^0})$, grâce au théorème du graphe fermé de Banach,[8] il existe, pour tout n, des entiers $m(n)$, $\boldsymbol{n}(n)$ et $k(n)$ tels qu'on a

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[s,T^1]} p_n(V(t; s; \Phi))\\
&\leq {}^{\exists}C \sup_{t\in[0,T^0]} \sum_{m=0}^{m(n)} p_{m(n)}(\partial_t^m F(t; s; \Phi)) .\\
&\leq {}^{\exists}C \sup_{t\in[0,T^0]} \Big(\sum_{m=0}^{m(n)} \sum_{n=0}^{m(n)+1} p_{m(n)}(\partial_t^{m+1}G_n(t; s; \Phi))\\
&\quad + p_{m(n)}(\partial_t^m(A(t)G_n(t; s; \Phi)))\\
&\quad + \sum_{m=0}^{m(n)} \sum_{n=m(n)+2}^{\infty} p_n(\partial_t^{m+1}G_n(t; s; \Phi)) + p_n(\partial_t^m(A(t)G_n(t; s; \Phi)))\\
&\leq {}^{\exists}Cs^{-{}^{\exists}k(n)}(p_{n(n)}(\Phi)+1) .
\end{aligned}$$

Evidemment $k(n)=0$ au cas $k=0$. Mentionnons que C dépend bien de Φ, mais ni $k(n)$ *ni* $\boldsymbol{n}(n)$ n'en dépendent.

Ayant la même estimation pour $U^{(0)}(t; s; \Phi)$, on a la même estimation pour $U(t; s; \Phi)$. Ceci montre (2.3). C.Q.F.D.

Proposition 5. *Si les* $(PCH)_s(0<s<T^0)$ *sont uniformément solubles et que le* $(PCH)_0$ *a l'unicité* $(U_{T^1}^{T^0})$, *alors, pour la donnée* $F\in C^0([s, T^1], X)$, (*telle que* $t^{-m}F(t)\rightarrow 0$ $(t\rightarrow 0)$ *pour tout* $m\geq 0$ *au cas où* $k>0$ *et* $s=0$), *la formule de Duhamel:*

$$(D) \qquad U(t;s)=\int_s^t \tau^{-k}U(t;\tau;F(\tau,\circ))d\tau$$

donne la solution $U(t;s)\in C^1([s,T^1],X)$ *du* $(PC)_s$ $(0\leq s<T^1)$ (*telle que* $t^{-m}\partial_t^l U(t;s)\to 0$ $(t\to 0)$ *pour tout* $m\geq 0$ *et* $l=0,1$ *au cas où* $k>0$ *et* $s=0$) *et par conséquent que les* $(PC)_s(0\leq s<T^1)$ *sont solubles.*

Démonstration. Il suffirait de montrer le cas le plus délicat où $k>0$ et $s=0$. Soit $F\in C^0([0,T^1],X$ telle que $t^{-m}F(t)\to 0$ $(t\to 0)$ pour tout $m\geq 0$. Soient $U(t;s;F(s))\in C^\infty([s,T^0],X)$ les solutions de $(\mathrm{PCH})_s$ à donnée $F(s)$ $(0<s<T^1)$ unique dans $C^\infty([s,T^1];X)$ et ayant l'estimation (2.5) avec T^1 remplaçant T^0 là.

Nous définissons la fonction $U_{lm}(t;s)$ $(l=0,1,m\geq 0)$ par

$$(3.1) \qquad U_{lm}(t;s)\equiv s^{-m}\partial_t^l U(t;s;F(s)) \ (s>0),\ U_{lm}(t;0)\equiv 0\,.$$

Alors grâce à l'hypothèse, on a

$$(3.2) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Les fonctions } U_{lm}(t;s) \text{ sont uniformément continues dans}\\ \Omega(T^1) \text{ à valeur dans } X.\end{array}\right.$$

Prenons en effet deux points (t,s) et (t',s') de $\Omega(T^1)$. Supposons $s\leq s'<T^1$. Remarquons qu'on a, pour $l=0,1$,

$$\begin{aligned}&\partial_t^l U(t;s;F(s))-\partial_t^l U(t';s';F(s'))\\ &\quad=\int_{t'}^t A_{l+1}(\tau)\tau^{-k(l+1)}U(\tau;s;F(s)))d\tau\\ &\qquad+A_l(t')t'^{-kl}U(t';s';U(s';s;F(s))-F(s))\\ &\qquad+A_l(t')t'^{-kl}U(t';s';F(s)-F(s'))\,.\end{aligned}$$

où $A_0(t)\equiv 1$, $A_1(t)\equiv A(t)$, et $A_2(t)\equiv A(t)^2+t^k\partial_t A(t)-kt^{k-1}A(t)$.

Alors, les $(\mathrm{PCH})_s(0<s<T^0)$ étant uniformément solubles et ayant l'unicité $(U_{T^1}^{T^0})$, grâce à (2.1) et à la proposition 3 avec la remarque juste après elle, il existe, pour une semi-norme p de X, des constantes $h>0$, $C>0$ et une semi-norme q de X indépendantes de s, telles que

$$\begin{aligned}&p(U_{lm}(t;s)-U_{lm}(t';s'))\\ &\quad\leq C([|s-s'|+|t-t'|]q(F_h{}^\sim(s))+q(F_h{}^\sim(s)-F_h{}^\sim(s')))\end{aligned}$$

où $F_h{}^\sim(t)\equiv t^{-h}F(t)$.
Compte tenu de la continuité uniforme de $F_h{}^\sim$, on a (3.2).

D'où l'intégral de Riemann:

$$U(t)\equiv\int_0^t s^{-k}U(t;s;F(s))\mathrm{d}s$$

est bien définie et telle que

$$U\in C^0([0,T^1],X)\,;\quad t^{-m}U(t)\to 0(t\to 0)\text{ pour tout } m\geq 0\,.$$

A(t) étant linéaire continue de X dans X, l'on a

$$A(t)U(t)=\int_0^t s^{-k}A(t)U(t;s;F(s))\mathrm{d}s\,.$$

Nous montrons ensuite que U est dérivable de droite par rapport à t dans $[0, T^1)$ et que sa derivée à droite est

$$\text{(3.3)}\qquad \left(\begin{array}{l}\partial_t{}^+U(t)=t^{-k}U(t;t)+\int_0^t s^{-k}\partial_t U(t;s;F(n))\mathrm{d}s\\ \partial_t{}^+U(0)=0\end{array}\right.\quad \in C^0([0,T^1],X)\,.$$

Plus précisément, on a

$$\text{(3.4)}\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute semi-norme } p \text{ de } X \text{ et } \varepsilon>0, \text{ il existe un } \eta\ (\eta>0) \text{ tel}\\ \text{que, pour tous } h(0<h<\eta) \text{ et } t\in(0,T^1)\ (t+\eta\in[0,T^1)), \text{ on a}\\ \qquad p\Big(\dfrac{U(t+h)-(t)}{h}-\Big(t^{-k}F(t)+\int_0^t s^{-k}\partial_t U(t;s;F(s))\mathrm{d}s\Big)\Big)<\varepsilon\\ \qquad p(U(h)/h)<\varepsilon\end{array}\right.$$

En effet, pour tous $\delta>0$, $t\in(0, T^1)$, $h(h>0)$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{U(t+h)-U(t)}{h}-\Big(t^{-k}F(t)+\int_0^t s^{-k}\partial_t U(t;s;F(s))\mathrm{d}s\Big)\\ &=\int_0^1((t+hs)^{-k}U(t+h;t+hs;F(t+hs))-t^{-k}F(t))\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_0^t s^{-k}\mathrm{d}s\int_0^1(t+h\tau)^{-k}A(t+h\tau)[U(t+h\tau;s;F(s))\\ &\quad-U(t;s;F(s))]\mathrm{d}\tau\\ &\quad+\int_0^t s^{-k}\mathrm{d}s\int_0^1[(t+h\tau)^{-k}A(t+h\tau)-t^{-k}A(t)]U(t;s;F(s))\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Pour toute semi-norme p de X, il existe une constante $C>0$ et une semi-norme q de X telles que

$$\begin{aligned}&p\Big(\frac{U(t+h)-U(t)}{h}-\Big(t^{-k}F(t)+\int_0^t s^{-k}\partial_t U(t;s;F(s))\mathrm{d}s\Big)\Big)\\ &\leq\int_0^1 p(U_{0k}(t+h;t+hs)-U_{0k}(t;t))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+{}^{\exists}C\int_0^t ds\int_0^1 q(U_{02k}(t+h\tau;\,s)-U_{02k}(t;\,s))\mathrm{d}\tau$$

$$+{}^{\exists}C|h|\int_0^t q(U_{03k}(t;\,s))ds\,.$$

Alors, grâce à (3.2), on voit aisément (3.4).

Revenant à la définition de l'intégrale de Riemann, grâce à (3.4), on voit

$$\int_0^t \partial_t{}^+U(t)dt=U(t)-U(0)\quad (t\in(0,\,T^1))\,.$$

Celle-ci montre la dérivabilité de $U(t)$ dans $[0,\,T^1)$;

$$\begin{cases}\partial_t U(t)=t^{-k}F(t)+\int_0^t s^{-k}\partial_t U(t;\,s;\,F(s))ds\in C^0([0,\,T^1],\,X)\,.\\ \partial_t U(0)=0\end{cases}$$

On voit, grâce à (3.2), que $U(t)$ est bien la solution du $(\mathrm{PC})_0$ telle que $t^{-m}\partial_t{}^l U(t;\,s)\to 0$ $(t\to 0)$ pour tout $m\geq 0$, $l=0,\,1$ et par conséquent que $U(t)$ est de $C^1([0,\,T^1],\,X)$ et plate à $t=0$. C.Q.F.D.

Par réunir ces propositions 2, 4, 5, on a le théorème.

Théorème. (1) *Supposons que le* $(PC)_0$ *ait l'unicité* $(U_{T^0}^{T^0})$. *Alors pour que les* $(PC)_s(0\leq s<T^0)$ *soient* $C_t^{m^0}$*-solubles* $(0\leq m^0\leq\infty)$, *il faut et il suffit que les* $(PCH)_s(0<s<T^0)$ *soient uniformémet solubles.*
(2) *Supposons que le* $(PC)_0$ *ait l'unicité* (U_T^T) *pour tout* T $(0<T\leq T^0)$. *Alors pour que le* $(PC)_0$ *soit* $C_t^{m^0}$*-soluble* $(0\leq m^0\leq\infty)$, *il faut et il suffit que les* $(PCH)_s(0<s<T^0)$ *soient uniformément solubles.*

Dans ces cas-ci, *si* (et seulement *si*) les $(\mathrm{PCH})_s(0<s<T^0)$ sont uniformément solubles, alors pour $F\in C^0([s,\,T^0],\,X)$ (telle que $t^{-m}F(t)\to 0$ $(t\to 0)$ pour tout $m\geq 0$ au cas où $k>0$ et $s=0$), la solution du $(\mathrm{PC})_s$ à donnée F est donnée par la formule de Duhamel

$$\text{(D)}\qquad U(t)=\int_s^t \tau^{-k}U(t;\,\tau;\,F(\tau))\mathrm{d}\tau\,.$$

Remarque. Sous l'hypothèse que le $(\mathrm{PC})_0$ ait l'unicité $(U_{T^0}^{T^0})$ (l'unicité (U_T^T) pour tout T $(0<T\leq T^0)$ resp.), si les $(\mathrm{PC})_s$ $(0\leq s<T^0)$ sont $C_t{}^\infty$-solubles (le $(\mathrm{PC})_0$ est $C_t{}^\infty$-soluble resp.), ils sont alors solubles.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Á LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D' EHIMÉ

Référence

[1] Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Springer Verlag, 1968.

[2] G. F. D. Duff and D. Naylor, Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley & sons Inc., 1966.

[3] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I, Springer, 1983.

[4] K. Kitagawa, Sur le Principe de Duhamel, Proc.Japan Acad. **66**, Ser. A-7 (1990), 222-225.

[5] K. Kitagawa, Sur des conditions nécessaires pour les équations en évolution pour que les problèmes de Cauchy soient uniformément bien posés dans les casses de fonctions C^∞ [III], J. Math. Kyoto Univ. 32-3 (1992), 485-514.

[6] S. G. Krein, Linear differential equations in Banach space. Translation of mathematical monographs 29, Amer. Math. Soc. Providence, 1971.

[7] I. G. Petrowsky, Uber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bull de L'université d' Etat de Moscou, **2**-7 (1938), 1-74.

[8] H. M. Schaefr, Topological Vector Spaces, Macmillan Comp., 1966.

[9] L. Schwartz, Les équations d'évolution liées au produit de composition, Ann. Inst. Fourier, **2** (1950), 19-49.

[10] E. Zauderer, Partial differential equations of applied mathematics, John Wiley & Sons Inc., 1983.