J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
44-2 (2004), 231–243

Le générateur amorti d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace des chemins riemanniens

By

Tetsuya Kazumi

1. Introduction

Depuis l'article de Fang-Malliavin [11], nous connaissons deux sortes de gradient D et $\tilde{D}$ sur l'espace des chemins à valeurs dans une variété riemannienne. Le gradient D défini à travers le transport parallèle stochastique est l'analogue le plus naturel à son homologue sur l'espace de Wiener, alors que le gradient $\tilde{D}$ dit amorti est défini de manière à ce que la divergence relative à $\tilde{D}$ d'un champ de vecteurs adapté soit exactement de la même forme que la divergence sur l'espace de Wiener.

Par conséquent nous avons deux opérateurs $\mathcal{L} = -D^*D$ et $\tilde{\mathcal{L}} = -\tilde{D}^*\tilde{D}$ qui méritent de porter le nom d'Ornstein-Uhlenbeck. Jusqu'au jour d'aujourd'hui, nous avons tendance à favoriser des études sur le gradient D et sur $\mathcal{L}$ en matière d'analyse de l'espace des chemins, d'autant que l'intervention de la matrice $Q_{\sigma,\tau}$ dans la définition de $\tilde{D}$ rend son analyse un peu rébarbative. Ainsi nous avons vu développer des travaux en faveur du gradient D et de l'opérateur $\mathcal{L}$: l'existence du flot engendré par $h \in H$ qui définit la dérivée D_h dans la direction de h (Driver [6], Enchev-Stroock [8], Hsu [12]). l'existence du processus ayant $\mathcal{L}$ comme générateur infinitésimal (Driver-Röckner [7], Kazumi [17]). quelques propriétés de $\mathcal{L}$ (Fang [10], Hsu [14]).

Par contre l'avantage de $\tilde{\mathcal{L}}$ sur $\mathcal{L}$ est que comme nous le verrons plus tard les coefficients de $\tilde{\mathcal{L}}$ sont adaptés à la filtration naturelle. Il semble que ce soit la raison pour la quelle Norris [21] a réussi à construire le processus associé à $\tilde{\mathcal{L}}$ tout en exploitant la théorie des équations différentielles stochastiques à deux indices.

Dans cet article nous nous intéressons principalement au générateur amorti $\tilde{\mathcal{L}}$ et nous calculons l'expression explicite de $\tilde{\mathcal{L}}$ pour les fonctions cylindriques. Le calcul s'effectue en développant en série au moyen d'une base orthonormée dans l'espace de Cameron-Martin la forme quadratique associée à $\tilde{D}$ et en appliquant la formule d'intégration par parties pour $\tilde{D}$. L'intégrale stochastique au sens d'Ogawa (le lemme 5.1) et la formule des dérivées secondes due à Cruzeiro-Malliavin (le lemme 5.2) permetteront la bonne marche du calcul.

Received September 16, 1999

Ensuite nous verrons que des estimations des coefficients de $\tilde{\mathcal{L}}$ nous permettent d'obtenir le processus stationnaire associé à $\tilde{\mathcal{L}}$ de la même façon que dans [17].

2. Base de l'analyse de l'espace des chemins

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension d. Soit $(P_0(\mathbb{R}^d), \nu)$ l'espace de Wiener d-dimensionnel.

$$P_0(\mathbb{R}^d) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R}^d; \text{continue et } x(0) = 0\}$$

et ν est la mesure de Wiener sur $P_0(\mathbb{R}^d)$. Etant donné un point de départ $m_0 \in M$, on désigne par $(P_{m_0}(M), \mu)$ l'espace des chemins sur la variété M.

$$P_{m_0}(M) = \{p : [0,1] \to M; \text{continue et } p(0) = m_0\}$$

et μ est la mesure de Wiener sur $P_{m_0}(M)$. Il est bien connu que du point de vue de la théorie de la mesure, les deux espaces sont isomorphes l'un à l'autre par l'application d'Itô I

$$I : P_0(\mathbb{R}^d) \to P_{m_0}(M) \quad \text{et} \quad \mu = \nu \circ I^{-1}.$$

L'application d'Itô I est définie de manière suivante. Soit $O(M)$ le fibré des repères orthonormés au-dessus de M et soit π la projection naturelle $\pi : O(M) \to M$. Rappelons que $r \in O(M)$ peut être considéré comme une application unitaire $r : \mathbb{R}^d \to T_{\pi(r)}M$. On fixe un élément $r_0 \in O(M)$ tel que $\pi(r_0) = m_0$ et on note $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha=1}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $A_1, A_2, \dots, A_d$ les champs de vectuers horizontaux sur $O(M)$, c'est-à-dire, la valuer de A_α en $r \in O(M)$ est le relèvement horizontal à $T_rO(M)$ de $r(\varepsilon_\alpha)$. Etant donné le mouvement brownien d-dimensionnel $(x(\tau))_{0\le\tau\le1}$, le processus horizontal $(r(\tau))_{0\le\tau\le1}$ à valeurs dans $O(M)$ est défini par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dr(\tau) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha(r(\tau)) \circ dx^\alpha(\tau), \\ r(0) = r_0. \end{cases}$$

Le mouvement brownien $(p(\tau))_{0\le\tau\le1}$ sur M n'est rien d'autre que la projection naturelle de $(r(\tau))_{0\le\tau\le1}$: $p(\tau) = \pi(r(\tau))$. L'association de $(x(\tau))_{0\le\tau\le1}$ à $(p(\tau))_{0\le\tau\le1}$ est appelée application d'Itô. Soient σ_1, σ_2 des point dans $[0,1]$. Le transport parallèle stochastique le long de $p \in P_{m_0}$ $t^p_{\sigma_1\leftarrow\sigma_2} : T_{p(\sigma_2)}M \to T_{p(\sigma_1)}M$ est dèfini par $t^p_{\sigma_1\leftarrow\sigma_2} = r(\sigma_1) \circ r(\sigma_2)^{-1}$. On pose $e_\alpha(\sigma) = r(\sigma)(\varepsilon_\alpha)$. Le système $(\{e_\alpha(\sigma)\}_{\alpha=1}^d)_{0\le\sigma\le1}$ est appelé repère mobile stochastique.

Une fonction $f(p)$ sur $P_{m_0}(M)$ est dite cylindrique lorsqu'elle s'exprime par

$$f(p) = F(p(\sigma_1), p_(\sigma_2), \dots, p(\sigma_N)) \tag{2.1}$$

avec des points de partition $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_N \le 1$ et une fonction F de classe C^∞ sur on M^N.

Soit H^1 l'espace de Cameron-Martin:

$$H^1 = \left\{ h : [0,1] \to \mathbb{R}^d ; \text{absolument continue et } |h|^2_{H^1} = \int_0^1 |\dot{h}(\tau)|^2 \, d\tau < \infty \right\}.$$

On définit maintenant la composante du gradient d'indice continu $\tau \in [0,1]$ et d'indice discret $\alpha \in \{1, 2, \ldots, d\}$ par

$$D_{\tau,\alpha} f(p) = \sum_{j=1}^{N} 1_{\tau < \sigma_j} (t^p_{0 \leftarrow \sigma_j} \partial_j F(p(\sigma_1), \ldots, p(\sigma_N)), r_0(\varepsilon_\alpha)). \tag{2.2}$$

Le gradient D est défini par la relation suivante:

$$\langle Df(p), h \rangle_{H^1} = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^1 D_{\tau,\alpha} f(p) \dot{h^\alpha}(\tau) \, d\tau$$

pour tout $h = \sum_{\alpha=1}^d h^\alpha \varepsilon_\alpha \in H^1$.

Etant donée une fonction F sur M^N, on définit une fonction $\tilde{F}$ sur $O(M)^N$ par

$$\tilde{F}(r_1, \ldots, r_N) = F(\pi(r_1), \ldots, \pi(r_N)). \tag{2.3}$$

Soit $f(p)$ une fonction cylindrique de la forme (2.1). Remarquons que $D_{\tau,\alpha} f(p)$ peut se traduire par

$$D_{\tau,\alpha} f(p) = \sum_{j=1}^{N} 1_{\tau < \sigma_j} \partial_{A^j_\alpha} \tilde{F}(r(\sigma_1), \ldots, r(\sigma_1), \ldots, r(\sigma_N)).$$

Soient R, Ric le tenseur de courbure et le tenseur de Ricci de M respectivement. On définit les processus $({\Omega_{\alpha,\beta,\gamma}}^\delta(\tau))_{0 \le \tau \le 1}$ et $({\mathrm{Ric}_\alpha}^\beta(\tau))_{0 \le \tau \le 1}$ par

$$\sum_{\delta=1}^{d} {\Omega_{\alpha,\beta,\gamma}}^\delta(\tau) e_\delta(\tau) = R_{p(\tau)}(e_\alpha(\tau), e_\beta(\tau)) e_\gamma(\tau),$$
$$\sum_{\beta=1}^{d} {\mathrm{Ric}_\alpha}^\beta(\tau) e_\beta(\tau) = Ric_{p(\tau)}(e_\alpha(\tau)).$$

Un processus $Z = (Z(\tau))_{0 \le \tau \le 1}$ sur $P_{m_0}(M)$ à valeurs dans TM est appelé champ de vecteurs si $Z(\tau) \in T_{p(\tau)} M$. Soit $z(\tau)$ le processus scalarisé de Z: $Z(\tau) = \sum_{\alpha=1}^d z^\alpha(\tau) e_\alpha(\tau)$. Z est dit adapté si $(z(\tau) \circ I^{-1})_{0 \le \tau \le 1}$ est adapté par rapport à la tribu engendrée par $x(\sigma), 0 \le \sigma \le \tau$ pour tout $\tau \in [0,1]$. Lorsque Z est un champ de vecteurs adapté, on définit sa divergence par

$$\delta(Z) = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^1 (\dot{z^\alpha}(\lambda) + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{d} {\mathrm{Ric}_\beta}^\alpha(\lambda) z^\beta(\lambda)) \, dx^\alpha(\lambda).$$

Soit $f, g \in W^1_\infty$ des fonctions cylindriques et soit Z un champ de vecteurs adapté. Alors on a

$$\int_{P_{m_0}(M)} f(p) D_Z g(p)\, d\mu(p) = \int_{P_{m_0}(M)} (-D_Z f(p) + \delta(Z) f(p)) g(p)\, d\mu(p).$$

3. Gradient amorti et sa formule d'intégration par parties

On va rappeler brièvement le gradient amorti introduit par Fang-Malliavin [11] et la formule d'intégration par parties associé à ce gradient.

Etant donné un processus adapté $(u(\tau))_{0 \le \tau \le 1}$ à valuer dans $\mathbb{R}^d$, on définit un nouveau processus adapté $(\tilde{u}(\tau))_{0 \le \tau \le 1}$ comme la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{u}(\tau) + \frac{1}{2} \operatorname{Ric}(\tau) \tilde{u}(\tau) = \dot{u}(\tau).$$

La solution peut en effet explicitement s'exprimer

$$\tilde{u}(\tau) = \int_0^\tau Q_{\tau,\lambda} \dot{u}(\lambda)\, d\lambda \tag{3.1}$$

où $Q_{\tau,\lambda}$ est la matrice définie par la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau} Q_{\tau,\lambda} = -\dfrac{1}{2} \operatorname{Ric}(\tau) Q_{\tau,\lambda}, \\ Q_{\tau,\tau} = I. \end{cases} \tag{3.2}$$

On a donc

$$\int_{P_{m_0}(M)} D_{\tilde{U}} f(p)\, d\mu(p) = \int_{P_{m_0}(M)} \delta(\tilde{U}) f(p)\, d\mu(p)$$

où

$$\delta(\tilde{U}) = \sum_{\alpha=1}^d \int_0^1 \dot{u}^\alpha(\lambda)\, dx^\alpha(\lambda). \tag{3.3}$$

On définit le gradient amorti $\tilde{D}$ par

$$\langle \tilde{D} f(p), u \rangle = \tilde{D}_U(p) = D_{\tilde{U}} f(p).$$

4. Générateur amorti

Soit $\{\dot{h}_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$ une base orthonormée quelconque de $L^2(0,1)$ et on pose $u_{k,\alpha}(\tau) = h_k(\tau)\varepsilon_\alpha$. Selon (3.1) on définit le processus adapté $(\tilde{u}_{k,\alpha}(\tau))_{0 \le \tau \le 1}$ par

$$\tilde{u}_{k,\alpha}(\tau)^\beta = \int_0^\tau (Q_{\tau,\lambda})_\alpha{}^\beta \dot{h}_k(\lambda)\, d\lambda. \tag{4.1}$$

Soient f, g des fonctions cylindriques.

$$\begin{aligned}
&\int_{P_{m_0}(M)} \langle \tilde{D}f(p), \tilde{D}g(p)\rangle \, d\mu(p) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d} \int_{P_{m_0}(M)} \langle \tilde{D}f(p), u_{k,\alpha}\rangle \langle \tilde{D}g(p), u_{k,\alpha}\rangle \, d\mu(p) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d} \int_{P_{m_0}(M)} D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} f(p) D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} g(p) \, d\mu(p) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d} \int_{P_{m_0}(M)} \Big(-D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} f(p) + \delta(\tilde{U}_{k,\alpha}) D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} f(p)\Big) \, g(p) \, d\mu(p) \\
&\quad = \int_{P_{m_0}} -\tilde{\mathcal{L}} f(p) g(p) \, d\mu(p).
\end{aligned}$$

On a donc le générateur amorti $\tilde{\mathcal{L}}$ sous réserve de convergence:

$$\tilde{\mathcal{L}} f(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d} \Big(D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} f(p) - \delta(\tilde{U}_{k,\alpha}) D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} f(p)\Big). \tag{4.2}$$

Définissons une fonction $\phi_{s,t} : O(M) \to \mathbb{R}$ par

$$\phi_{\alpha,\beta}(r) = (\mathrm{Ric}_{\pi(r)}\, r(\varepsilon_\alpha), r(\varepsilon_\beta)). \tag{4.3}$$

Alors $\phi_{\alpha,\beta}(r(\tau)) = \mathrm{Ric}_\alpha{}^\beta(\tau) = \mathrm{Ric}_\beta{}^\alpha(\tau) = \mathrm{Ric}_{\alpha,\beta}(\tau)$. On définit donc $\partial_\gamma \mathrm{Ric}_{\alpha,\beta}(\tau) = \partial_{A_\gamma} \phi_{\alpha,\beta}(r(\tau))$.

Théorème 4.1. *Soit f une fonction cylindrique*

$$f(p) = F(r(\sigma_1), \ldots, r(\sigma_N)),\ 0 \le \sigma_1 < \cdots < \sigma_N \le 1.$$

On pose $\tilde{F}(r_1, \ldots, r_N) = F(\pi(r_1), \ldots, \pi(r_N))$. Alors le second membre de (4.2) *converge dans L^q pour tout q, $1 < q < \infty$ et a son expression suivante*:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}} f(p) = &\sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{d}\sum_{i,j=1}^{N} S^{\alpha_1,\alpha_2}(\sigma_j, \sigma_i) \partial_{A^i_{\alpha_2}} \partial_{A^j_{\alpha_1}} \tilde{F}(r(\sigma_1), \ldots, r(\sigma_N)) \\
&+ \sum_{\alpha_1=1}^{d}\sum_{j=1}^{N} T^{\alpha_1}(\sigma_j) \partial_{A^j_{\alpha_1}} \tilde{F}(r(\sigma_1), \ldots, r(\sigma_N)).
\end{aligned}$$

Les coefficient sont donnés par

$$\begin{aligned}
S^{\alpha,\beta}(\sigma, \tau) &= \sum_{\gamma=1}^{d} \int_0^{\sigma\wedge\tau} (Q_{\sigma,\lambda})_\gamma{}^\alpha (Q_{\tau,\lambda})_\gamma{}^\beta \, d\lambda, \\
T^\alpha(\sigma) &= \sum_{\beta=1}^{d} \int_0^{\sigma} (Q_{\sigma,\lambda})_\beta{}^\alpha \circ dx^\beta(\tau) + \sum_{\beta=1}^{d} K_\beta{}^{\beta,\alpha}(\sigma) - \frac{1}{2} J^\alpha(\sigma)
\end{aligned}$$

où les deuxième et troisième termes de $T^\alpha(\sigma)$ s'expriment

$$K_\gamma{}^{\delta_1,\delta_2}(\sigma) = \sum_{\alpha,\alpha_2,\beta_2=1}^{d} \int_0^\sigma (Q_{\alpha,\xi})_\alpha^{\delta_1} \int_\xi^\sigma (Q_{\lambda,\xi})_\alpha^{\alpha_2} \Omega_{\alpha_2,\beta_2,\gamma}{}^{\delta_2}(\lambda) \circ dx^{\beta_2}(\lambda)\, d\xi,$$

$$J^\alpha(\sigma) = \sum_{s,t,\delta=1}^{d} \int_0^\sigma (Q_{\sigma,\tau})_s{}^\alpha \big(\partial_\delta \operatorname{Ric}_{s,t}(\tau) S^{\delta,t}(\tau,\tau) + \operatorname{Ric}_{\delta,t}(\tau) K_s{}^{t,\delta}(\tau) + \operatorname{Ric}_{s,\delta}(\tau) K_t{}^{t,\delta}(\tau)\big)\, d\tau.$$

Corollaire 4.2. *Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire ayant le générateur $\tilde{\mathcal{L}}$ existe.*

Preuve. Il est clair que l'on a les estimations suivantes

$$S^{\alpha,\beta}(\sigma,\tau) \text{ est bornée et}$$
$$\sup_{0\le\sigma\le 1} \int_{P_{m_0}} |T^\alpha(\sigma)|^q \, d\mu(p) < \infty \text{ pour tout } q,\ 1 < q < \infty.$$

La démonstration peut s'effectuer de la même manière que dans [17]. □

5. Calcul du génŕateur amrti

On calcule le terme ayant comme coefficient la divergence dans le second membre de (4.2). D'après (3.3), on a

$$\delta(\tilde{U}_{k,\alpha}) D_{\tilde{U}_{k,\alpha}} f(p) = \int_0^1 \dot{h}_k(\tau)\, dx^\alpha(\tau) \sum_{\alpha_1=1}^{d} \tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1} \partial_{A^j_{\alpha_1}} \tilde{F}(r(\sigma_1), \dots, r(\sigma_N)).$$

Afin de sommer sur k et α, on prépare le lemme suivant:

Lemme 5.1. *Soit $\{\Phi(\tau)\}_{0\le\tau\le1}$ une semi-martingale de classe C^∞ au sens de Malliavin. Alors la série $\sum_{k=1}^\infty \int_0^1 \dot{h}_k\, dx^\alpha(\tau) \int_0^1 \dot{h}_k(\tau)\Phi(\tau)\, d\tau$ converge vers $\int_0^1 \Phi(\tau) \circ dx^\alpha(\tau)$ dans $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$.*

Preuve. Voir [22], [23] et [25]. □

Remarque. Le lemme 5.1 montre en effet que l'intégrale stochastique anticipative au sens d'Ogawa [24] coïncide avec celle de Stratonovichi lorsque Φ est une semimartingale de classe C^∞.

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^1 \dot h_k(\tau)\,dx^\alpha(\tau)\tilde u_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1}\,d\tau\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^1 \dot h_k(\tau)\,dx^\alpha(\tau)\int_0^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\tau})_\alpha{}^{\alpha_1}\dot h_k(\tau)\,d\tau\\
&=\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\tau})_\alpha{}^{\alpha_1}\circ dx^\alpha(\tau),
\end{aligned}$$

ce qui démontre le premier terme de $T^{\alpha_1}(\sigma_j)$.

Ensuite on procède au calcul du reste du second membre de (4.2). Comme on a

$$D_{\tilde U_{k,\alpha}}f(p)=\sum_{\alpha_1=1}^{d}\int_0^1 D_{\tau_1,\alpha_1}f(p)\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1}\,d\tau_1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
(5.1)\qquad & D_{\tilde U_{k,\alpha}}D_{\tilde U_{k,\alpha}}f(p)\\
&=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{d}\int_0^1\int_0^1 D_{\tau_2,\alpha_2}\left(D_{\tau_1,\alpha_1}f(p)\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1}\right)\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\,d\tau_1 d\tau_2\\
&=\sum_{\alpha_1,\alpha_2=1}^{d}\int_0^1\int_0^1 \Big(D_{\tau_2,\alpha_2}D_{\tau_1,\alpha_1}f(p)\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1}\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\\
&\quad +D_{\tau_2,\alpha_2}f(p)D_{\tau_1,\alpha_1}\left(\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1}\right)\dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\Big)\,d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}$$

Lemme 5.2. *Soit f une fonction cylindrique de forme*

$$f(p)=F(r(\sigma_1),\dots,r(\sigma_N)),\ 0\le\sigma_1<\cdots<\sigma_N\le 1,$$

et on pose $\tilde F(r_1,\dots,r_N)=F(\pi(r_1),\dots,\pi(r_N))$.

$$\begin{aligned}
&D_{\tau_2,\alpha_2}D_{\tau_1,\alpha_1}f(p)\\
&=\sum_{i,j=1}^{N}1_{\tau_1<\sigma_j}1_{\tau_2<\sigma_i}\partial_{A^i_{\alpha_2}}\partial_{A^j_{\alpha_1}}\tilde F(r(\sigma_1),\dots,r(\sigma_N))\\
&\quad+\sum_{1\le\beta_1,\beta_2\le d}\sum_{j=1}^{N}1_{\tau_1<\sigma_j}1_{\tau_2<\sigma_j}\int_{\tau_2}^{\sigma_j}\Omega_{\alpha_2,\beta_2,\alpha_1}{}^{\beta_1}(\lambda)\circ dx^{\beta_2}(\lambda)\\
&\qquad\qquad\partial_{A^j_{\beta_1}}\tilde F(r(\sigma_1),\dots,r(\sigma_N)).
\end{aligned}$$

Preuve. Voir [3], [4], [17]. □

Remarque. Le lemme 5.2 a été démontré par Cruzeiro-Malliavin [4] pour calculer le crochet de deux champs de vecteurs.

En appliquant le lemme 5.2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 D_{\tau_2,\alpha_2}D_{\tau_1,\alpha_1}f(p)\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1}\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\,d\tau_1 d\tau_2\\
&\quad=\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1}\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_i)^{\alpha_2}\partial_{A^i_{\alpha_2}}\partial_{A^j_{\alpha_1}}\tilde{F}(r(\sigma_1),\dots,r(\sigma_N))\\
&\qquad+\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1}\int_0^{\sigma_j}\Omega_{\alpha_2,\beta_2,\alpha_1}{}^{\beta_1}(\lambda)\tilde{u}_{k,\alpha}(\lambda)^{\alpha_2}\circ dx^{\beta_2}(\lambda)\\
&\qquad\partial_{A^j_{\beta_1}}\tilde{F}(r(\sigma_1),\dots,r(\sigma_N)).
\end{aligned}$$

En sommant les coefficients des dérivées secondes de $\tilde{F}$ sur k et α, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1}\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_i)^{\alpha_2}\\
&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\lambda})^{\alpha_1}_{\alpha}\dot{h}_k(\lambda)\,d\lambda\int_0^{\sigma_i}(Q_{\sigma_i,\lambda})^{\alpha_2}_{\alpha}\dot{h}_k(\lambda)\,d\lambda\\
&\quad=\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{\sigma_j\wedge\sigma_i}(Q_{\sigma_j,\lambda})^{\alpha_1}_{\alpha}(Q_{\sigma_i,\lambda})^{\alpha_2}_{\alpha}\,d\lambda\\
&\quad=S^{\alpha_1,\alpha_2}(\sigma_j,\sigma_i).
\end{aligned}$$

Quant aux coefficients des dérivées premières de $\tilde{F}$, on peut calculer de la même manière:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1}\int_0^{\sigma_j}\Omega_{\alpha_2,\beta_2,\alpha_1}{}^{\beta_1}(\lambda)\tilde{u}_{k,\alpha}(\lambda)^{\alpha_2}\circ dx^{\beta_2}(\lambda)\\
&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\xi})^{\alpha_1}_{\alpha}\dot{h}_k(\xi)\,d\xi\int_0^{\sigma_j}\Omega_{\alpha_2,\beta_2,\alpha_1}{}^{\beta_1}(\lambda)\\
&\qquad\int_0^{\lambda}(Q_{\lambda,\xi})^{\alpha_2}_{\alpha}\dot{h}_k(\xi)\,d\xi\circ dx^{\beta_2}(\lambda)\\
&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\xi})^{\alpha_1}_{\alpha}\dot{h}_k(\xi)\,d\xi\int_0^{\sigma_j}\int_{\xi}^{\sigma_j}(Q_{\lambda,\xi})^{\alpha_1}_{\alpha}\Omega_{\alpha_2,\beta_2,\alpha_1}{}^{\beta_1}(\lambda)\\
&\qquad\circ dx^{\beta_2}(\lambda)\dot{h}_k(\xi)\,d\xi\\
&\quad=\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\xi})^{\alpha_1}_{\alpha}\int_{\xi}^{\sigma_j}(Q_{\lambda,\xi})^{\alpha_1}_{\alpha}\Omega_{\alpha_2,\beta_2,\alpha_1}{}^{\beta_1}(\lambda)\circ dx^{\beta_2}(\lambda)\,d\xi\\
&\quad=K_{\alpha_1}{}^{\alpha_1,\beta_1}(\sigma_j).
\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant au second terme du dernier membre de (5.1).

D'aprés, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 D_{\tau_1,\alpha_1} f(p) D_{\tau_2,\alpha_2}(\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1})\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\,d\tau_1 d\tau_2\\
&= \int_0^1\int_0^1 1_{\tau_1<\sigma_j}\partial_{A^j_{\alpha_1}}\tilde{F}(r(\sigma_1),\ldots,r(\sigma_N))D_{\tau_2,\alpha_2}(\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_1)^{\alpha_1})\\
&\qquad \dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\,d\tau_1 d\tau_2\\
&= \int_0^1 D_{\tau_2,\alpha_2}(\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1})\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}d\tau_2\ \partial_{A^j_{\alpha_1}}\tilde{F}(r(\sigma_1),\ldots,r(\sigma_N)).
\end{aligned}$$

Pour calculer davantage on a besoin de toute une gamme de lemmes suivants.

Lemme 5.3.

$$D_{\tau,\alpha}(Q_{\sigma,\lambda}) = \int_\lambda^\sigma Q_{\sigma,\eta} D_{\tau,\alpha}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Ric}(\eta)\right) Q_{\eta,\lambda}\,d\eta. \tag{5.2}$$

Preuve. D'après l'éqation (3.2), la fonction $\sigma \to D_{\tau,\alpha}(Q_{\sigma,\lambda})$ satisfait l'équation différentielle ordinaire par rapport à σ à valeurs matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma} D_{\tau,\alpha}(Q_{\sigma,\lambda}) = -\dfrac{1}{2} D_{\tau,\alpha}\operatorname{Ric}(\sigma)(Q_{\sigma,\lambda}) - \frac{1}{2}\operatorname{Ric}(\sigma) D_{\tau,\alpha}(Q_{\sigma,\lambda}),\\ D_{\tau,\alpha} Q_{\lambda,\lambda} = O. \end{cases} \tag{5.3}$$

Il est facile de voir que (5.2) vérifie bel et bien (5.3). □

Définissons une matrice antisymétrique $\Gamma(\tau,\sigma;\alpha)$ par

$$\Gamma(\tau,\sigma;\alpha)_\gamma{}^\delta = 1_{\tau<\sigma}\sum_{\beta=1}^d \int_\tau^\sigma \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}{}^\delta(\lambda)\circ dx^\beta(\lambda).$$

Lemme 5.4. *Soit ϕ une fonction de classe C^∞ sur $O(M)$. Alors on a*

$$D_{\tau,\alpha}\phi(r(\sigma)) = 1_{\tau<\sigma}\partial_{A_\alpha}\phi(r(\sigma)) + \frac{d}{dt}\phi(r(\sigma)e^{t\Gamma(\tau,\sigma;\alpha)})|_{t=0}.$$

Preuve. Voir [3], [4], [17]. □

Lemme 5.5.

$$\begin{aligned}
D_{\tau_2,\alpha_2}(\operatorname{Ric}_{s,t}(\eta)) &= 1_{\tau_2<\eta}\partial_{\alpha_2}\operatorname{Ric}_{s,t}(\eta)\\
&\quad + 1_{\tau_2<\eta}\sum_{\beta,\delta=1}^d \int_{\tau_2}^\eta \Omega_{\alpha_2,\beta,s}{}^\delta(\xi)\circ dx^\beta(\xi)\operatorname{Ric}_{\delta,t}(\eta)\\
&\quad + 1_{\tau_2<\eta}\sum_{\beta,\delta=1}^d \int_{\tau_2}^\eta \Omega_{\alpha_2,\beta,t}{}^\delta(\xi)\circ dx^\beta(\xi)\operatorname{Ric}_{s,\delta}(\eta).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme précédent et compte tenu de (4.3), on a

$$
\begin{aligned}
&D_{\tau_2,\alpha_2}(\mathrm{Ric}_{s,t}(\eta))\\
&\quad = D_{\tau_2,\alpha_2}(\phi_{s,t}(r(\eta)))\\
&\quad = 1_{\tau_2<\eta}\partial_{A_{\alpha_2}}\phi_{s,t}(r(\eta))\\
&\qquad + \frac{d}{d\lambda}(\mathrm{Ric}_{p(\eta)}\, r(\eta)e^{\lambda\Gamma(\tau_2,\eta;\alpha_2)}\varepsilon_s, r(\eta)e^{\lambda\Gamma(\tau_2,\eta;\alpha_2)}\varepsilon_t)|_{\lambda=0}\\
&\quad = 1_{\tau_2<\eta}\partial_{A_{\alpha_2}}\phi_{s,t}(r(\eta))\\
&\qquad + \Gamma(\tau_2,\eta;\alpha_2)_s{}^\delta\phi_{\delta,t}(r(\eta)) + \Gamma(\tau_2,\eta;\alpha_2)_t{}^\delta\phi_{s,\delta}(r(\eta))\\
&\quad = 1_{\tau_2<\eta}\partial_{\alpha_2}\mathrm{Ric}_{s,t}(\eta)\\
&\qquad + \Gamma(\tau_2,\eta;\alpha_2)_s{}^\delta\,\mathrm{Ric}_{\delta,t}(\eta) + \Gamma(\tau_2,\eta;\alpha_2)_t{}^\delta\,\mathrm{Ric}_{s,\delta}(\eta).
\end{aligned}
$$

□

On revient au calcul qu'on a laissé avant le lemme 5.3.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 D_{\tau_2,\alpha_2}(\tilde{u}_{k,\alpha}(\sigma_j)^{\alpha_1})\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\,d\tau_2\\
&= \int_0^1\left[\int_0^{\sigma_j} D_{\tau_2,\alpha_2}(Q_{\sigma_j,\lambda})^{\alpha_1}_{\alpha}\,\dot{h}_k(\lambda)\,d\lambda\,\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\right]d\tau_2\\
&= \sum_{s,t=1}^{d}\int_0^1\left[\int_0^{\sigma_j}\int_\lambda^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1}D_{\tau_2,\alpha_2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Ric}(\eta)_t{}^s\right)(Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t\,d\eta\right.\\
&\qquad \left.\dot{h}_k(\lambda)\,d\lambda\,\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\right]d\tau_2\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{d}\left(J^{(1)}_{k,\alpha} + \sum_{\beta,\delta=1}^{d}J^{(2)}_{k,\alpha} + \sum_{\beta,\delta=1}^{d}J^{(3)}_{k,\alpha}\right),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
J^{(1)}_{k,\alpha} = \int_0^1\left[\int_0^{\sigma_j}\int_\lambda^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1}\,(1_{\tau_2<\eta}\partial_{\alpha_2}\mathrm{Ric}_{s,t}(\eta))\right.\\
\left.(Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t\,d\eta\,\dot{h}_k(\lambda)\,d\lambda\,\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\right]d\tau_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J^{(2)}_{k,\alpha} = \int_0^1\left[\int_0^{\sigma_j}\int_\lambda^{\sigma_j}(Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1}\left(1_{\tau_2<\eta}\sum_{\beta,\delta=1}^{d}\int_{\tau_2}^{\eta}\Omega_{\alpha_2,\beta,s}{}^\delta(\xi)\circ dx^\beta(\xi)\,\mathrm{Ric}_{\delta,t}(\eta)\right)\right.\\
\left.(Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t\,d\eta\,\dot{h}_k(\lambda)\,d\lambda\,\dot{\tilde{u}}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2}\right]d\tau_2
\end{aligned}
$$

$$J^{(3)}_{k,\alpha} = \int_0^1 \left[\int_0^{\sigma_j} \int_\lambda^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \left(1_{\tau_2<\eta} \sum_{\beta,\delta=1}^d \int_{\tau_2}^\eta \Omega_{\alpha_2,\beta,t}{}^\delta(\xi) \circ dx^\beta(\xi) \ \mathrm{Ric}_{s,\delta}(\eta) \right) \right.$$
$$\left. (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \, d\eta \, \dot h_k(\lambda) \, d\lambda \, \dot{\tilde u}_{k,\alpha}(\tau_2)^{\alpha_2} \right] d\tau_2.$$

On calcule la somme sur k et α de $J^{(1)}_{k,\alpha}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha=1}^d J^{(1)}_{k,\alpha} \\
&\quad = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha=1}^d \int_0^{\sigma_j} \left[\int_\lambda^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \tilde u_{k,\alpha}(\eta)^{\alpha_2} \partial_{\alpha_2} \mathrm{Ric}_{s,t}(\eta) (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \, d\eta \right] \dot h_k(\lambda) \, d\lambda \\
&\quad = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha=1}^d \int_0^{\sigma_j} \left[\int_\lambda^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \int_0^\eta (Q_{\eta,\xi})_\alpha{}^{\alpha_2} \dot h_k(\xi) \, d\xi \right. \\
&\qquad\quad \left. \partial_{\alpha_2} \mathrm{Ric}_{s,t}(\eta) (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \, d\eta \right] \dot h_k(\lambda) \, d\lambda \\
&\quad = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha=1}^d \int_0^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \mathrm{Ric}_{s,t}(\eta) \int_0^\eta (Q_{\eta,\xi})_\alpha{}^{\alpha_2} \dot h_k(\xi) \, d\xi \\
&\qquad\quad \int_0^\eta (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \dot h_k(\lambda) \, d\lambda \, d\eta \\
&\quad = \sum_{\alpha=1}^d \int_0^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \mathrm{Ric}_{s,t}(\eta) \int_0^\eta (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^{\alpha_2} (Q_{\eta,\lambda})_\alpha^t \, d\lambda \, d\eta \\
&\quad = \int_0^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \mathrm{Ric}_{s,t}(\eta) S^{\alpha_2,t}(\eta,\eta) \, d\lambda \, d\eta.
\end{aligned}$$

En sommant le dernier membre sur α_2, s et t, on obtient le premier terme de $J^{\alpha_1}(\sigma_j)$. Ensuite on calcule la somme sur k, α, α_2 et β de $J^{(2)}_{k,\alpha}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha,\alpha_2,\beta=1}^d J^{(2)}_{k,\alpha} \\
&\quad = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha,\alpha_2,\beta=1}^d \int_0^{\sigma_j} \left[\int_\lambda^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \int_0^\eta \tilde u_{k,\alpha}(\xi)^{\alpha_2} \Omega_{\alpha_2,\beta,s}{}^\delta(\xi) \circ dx^\beta(\xi) \right. \\
&\qquad\quad \left. \mathrm{Ric}_{\delta,t}(\eta) (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \, d\eta \right] \dot h_k(\lambda) \, d\lambda \\
&\quad = \sum_{k=1}^\infty \sum_{\alpha,\alpha_2,\beta=1}^d \int_0^{\sigma_j} \left[(Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \mathrm{Ric}_{\delta,t}(\eta) \int_0^\eta \int_\zeta^\eta (Q_{\xi,\zeta})_\alpha{}^{\alpha_2} \Omega_{\alpha_2,\beta,s}{}^\delta(\xi) \circ dx^\beta(\xi) \right. \\
&\qquad\quad \left. \dot h_k(\zeta) \, d\zeta \int_0^\eta (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \dot h_k(\lambda) \, d\lambda \right] d\eta
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha,\alpha_2,\beta=1}^{d} \int_0^{\sigma_j} \Big[(Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \operatorname{Ric}_{\delta,t}(\eta) \int_0^{\eta} (Q_{\eta,\lambda})_\alpha{}^t \int_\lambda^\eta (Q_{\xi,\lambda})_\alpha{}^{\alpha_2} \Omega_{\alpha_2,\beta,s}{}^\delta(\xi) \circ dx^\beta(\xi)\, d\lambda \Big]\, d\eta$$
$$= \int_0^{\sigma_j} (Q_{\sigma_j,\eta})_s{}^{\alpha_1} \operatorname{Ric}_{\delta,t}(\eta) K_s{}^{t,\delta}(\eta)\, d\lambda\, d\eta.$$

En sommant le dernier membre sur s, t, et δ, on obtient le deuxième terme de $J^{\alpha_1}(\sigma_j)$. De la même manière, on obtient le troisième terme de $J^{\alpha_1}(\sigma_j)$.

College of Integrated Arts and Sciences,
Osaka prefecture University, Sakai
e-mail: kazumi@mi.cias.osakafu-u.ac.jp

Références

[1] H. Airault and P. Malliavin, *Semimartingales with values in a Euclidean vector bundle and Ocone's formula on a Riemannian manifold*, Proceedings of Symposia in Pure Math. **57** (1995), 175–192.

[2] A. B. Cruzeiro et P. Mallavin, *Repère mobile et géométrie riemannienne sur les espaces de chemin*, C. R. Acad. Sci. Paris **319** (1994), 859–864.

[3] ______, *Courbure de l'espace de probabilités d'un mouvement brownien riemannien*, C. R. Acad. Sci. Paris **320** (1995), 603–607.

[4] ______, *Curvatures of path spaces and stochastic analysis*, preprint, Mittag Leffler, 1995.

[5] J. M. Bismut, *Large Deviation and Malliavin Calculus*, Birkhauser, Boston/Basel, 1984.

[6] B. K. Driver, *A Cameron-Martin type quasi-invariance theorem for Brownian motion on a compact manifold*, J. Funct. Anal. **110** (1992), 272–376.

[7] B. K. Driver and M. Röckner, *Construction of diffusions on path and loop spaces of compact Riemannian manifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 603–602.

[8] O. Enchev and D. W. Stroock, *Towards a Riemanian geometry on the path space over a Riemanian manifold*, to appear in J. Funct. Anal. **134** (1995), 392–416.

[9] S. Fang, *Stochastic anticipative integrals on a Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. **131** (1995).

[10] ______, *Inégalité du type Poincaré sur l'espace des chemins riemanniens*, C. R. Acad. Sci. Paris **318** (1994), 257–260.

[11] S. Fang and P. Malliavin, *Stochastic analysis on the Path space of a Riemannian manifold*, I, Markovian Stoch. Calculus, J. Funct. Anal. **118** (1993), 249–247.

[12] E. P. Hsu, *Flows and quasi-invariance of the Wiener measure on path spaces*, M. C. Cranston and M. A. Pinsky ed., Proceedings of Symposia in Pure Math. **57** (1995), 265–279.

[13] ———, *Quasi-invariance of the Wiener measure on path spaces over a compact Riemannian manifold*, to appear in J. Funct. Anal. **134** (1995), 417–450.

[14] ———, *Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces over Riemannian manifolds*, preprint.

[15] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland and Kodansha, Amsterdam and Tokyo, 1989.

[16] K. Itô, *The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold*, Proc. Intern. Congr. Math., Stockholm, 1963, pp. 536–539.

[17] T. Kazumi, *Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace des chemins riemanniens et le probléme des martingales*, J. Funct. Anal. **144**-1 (1997), 20–45.

[18] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, I, II, Interscienence, New York, 1963 and 1969.

[19] R. Léandre, *Integration by parts formulas and rotationally inbariant Sobolev calculus on free loop spaces*, J. Geom. Phys. **11** (1993), 517–528.

[20] P. Malliavin, *Géométrie différentielle stochastique*, Les presses de l'Université de Montréal, Montéal, 1978.

[21] J. Norris, *Twisted sheets*, to appear in J. Funct. Anal. **132** (1995), 273–334.

[22] D. Nualart, *Noncausal stochastic integral and calculus*, Stoch., Analysis and Rel. Topics, Lecture Notes in Math. **1316** (1986), 80–129.

[23] D. Nualart and M. Zakai, *Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus*, Probab. Theory Related Fields **73** (1986), 255–280.

[24] S. Ogawa, *Une remarque sur l'approximation de l'intégrale stochastique du type noncausal par une suite des intégrales de Stieltjes*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 41–48.

[25] ———, *Quelques propriétés de l'intégrale stochastique du type noncausal*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984), 405–416.