J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)
49-1 (2009), 161–172

Sur le Cortex d'un groupe de Lie nilpotent

By

Imed KÉDIM et Megdiche HATEM

Abstract

Let G be a connected and simply connected, nilpotent Lie group. In this paper, we show that the cortex of G is a semi-algebraic set by means of a geometric characterization. It is also shown that the cortex is the image under a linear projection of a countable union of a semi-algebraic sets lying in the tensor product $T(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^*$.

1. Introduction

Soient G un groupe localement compact et $\hat{G}$ son dual unitaire, c'est l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductiblesde G, muni de la topologie de Jacobson. Généralement, $\hat{G}$ n'est pas un espace de Hausdorff. Le Cortex de G est l'ensemble des classes dans $\hat{G}$, non séparées de la représentation unité de G, au sens de Hausdorff. Dans le cadre des groupes nilpotents, connexes et simplement connexes, la méthode des orbites est un artifice très important pour étudier la topologie de $\widehat{G}$. Dans [7], Brown avait établi que la bijection de Kirillov est un homéomorphisme entre $\widehat{G}$ et l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/Ad^*$, muni de la topologie quotient. Avec cette identification, trouver le cortex est équivalent a déterminer le cortex de $\mathfrak{g}^*$, qui est son image réciproque par la surjection canonique de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}^*/Ad^*$, et que l'on note $Cor(\mathfrak{g}^*)$. Une première conséquence de la réalisation de $\hat{G}$ comme espace quotient, est le résultat suivant, que l'on énonce comme une définition, et que l'on trouve dans [6] :

Définition 1.1. Soit $y \in \mathfrak{g}^*$. Alors $y \in Cor(\mathfrak{g}^*)$ s'ils existent deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G et $\mathfrak{g}^*$ respectivement, telles que :

$$\lim y_n = 0 \text{ et } \lim Ad^*_{x_n}(y_n) = y.$$

Il est donc facile de voir que,

$$Cor(\mathfrak{g}^*) \subseteq \{y \in \mathfrak{g}^*, \quad p(y) = p(0),\ \forall\, p \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification*(*s*). Primary 22E27; Secondary 22G25

Received July 22, 2008
This work was completed with the support of D.G.R.S.R.T, Research Unity: 00 UR 1501.

Lorsque G est produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^n$, Boidol, Ludwig et Müller [6], ont prouvé qu'il y a égalité. Ce résultat n'est pas une généralité, Bekka et Kaniuth [3] ont donné un contre exemple. Ils ont aussi montré que sous l'hypothèse G de pas 2, on a :

$$Cor(\mathfrak{g}^*) = \overline{\{ad_x^*(y),\, x \in \mathfrak{g},\, y \in \mathfrak{g}^*\}}.$$

Dans [2], Baklouti a affaiblit cette hypothèse. Il a montré que l'égalité précédente, s'étend aux groupes dont les orbites génériques de l'action coadjointe, sont des variétés linéaires; ce qui est le cas des groupes de pas 2. En étudiant les cortex des groupes de pas 3, il a donné un exemple où l'égalité est en défaut.

Ce travail est composé de trois sections. La Section 1 est la présente introdution, dans laquelle, nous exposons nos résultat. La section 2 est consacrée à la preuve d'une formule géométrique du cortex qui généralise celle du pas deux, à tout groupe nilpotent, connexe et simplement connexe. Plus précisément, si G est de pas $p+1$, $p > 0$, nous considérons les espaces

$$V_p = \oplus_{k=0}^{p} \mathfrak{g}^{\otimes^k} \otimes \mathfrak{g}^* \quad \text{et} \quad V_p^+ = \oplus_{k=1}^{p} \mathfrak{g}^{\otimes^k} \otimes \mathfrak{g}^*.$$

Nous construisons deux applications semi-algébriques

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\exp} V_p \xrightarrow{\tilde{a}d^*} \mathfrak{g}^*$$

et nous donnons la preuve du théorème suivant,

Théorème 1.2. *Soit U un supplémentaire de $Ker\tilde{a}d^* \cap V_p^+$ dans V_p^+ et p_U la projection de V_p sur $U \oplus \mathfrak{g}^*$ parallèlement a $Ker\tilde{a}d^* \cap V_p^+$. Alors,*

$$Cor(\mathfrak{g}^*) = \tilde{a}d^*\big(\overline{p_U \circ \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)} \cap V_p^+\big).$$

En particulier, le cortex de $\mathfrak{g}^*$ est semi-algebrique.

Dans la Section 3, en fixant deux bases quelconques $\{X_1, \ldots, X_r\}$ et $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ respectivement, nous montrons le résultat principal suivant, que l'on interprète comme le passage de la caractérisation discrète (voir définition 1.1), à une caractérisation polynomiale.

Théorème 1.3. *Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes,*

1) *$f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$.*
2) *Ils existent $P_1, \ldots P_r \in \mathbb{R}[t]$ et $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathbb{R}[t, t^{-1}]$ tels que,*
   - *ı) $P_i(0) = 0$, pour $i = 1, \ldots, r$.*
   - *ıı) Pour $x(t) = \sum_{i=1}^r Q_i(t)X_i$ et $y(t) = \sum_{i=1}^r P_i(t)Y_i$ on a,*

$$f = \lim_{t \to 0} Ad^*_{e^{x(t)}} y(t).$$

Comme application directe, nous donnerons dans le corollaire 3.7 une décomposition du cortex de $\mathfrak{g}^*$, comme réunion dénombrable d'ensembles semi-algébriques. Ce résultat est analogue à celui obtenu dans [4] pour le pas $p = 2$.

2. Preuve du théorème 1.2.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, nilpotente, de dimension $r > 0$ et de pas $p+1$, $p > 0$. Notons $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$ et ad^* la représentation coadjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, sur son dual $\mathfrak{g}^*$. Soit G le groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à $\mathfrak{g}$ et $e : \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle, qui est un difféomorphisme. Sous ces hypothèses, l'action coadjointe Ad^* du groupe G sur $\mathfrak{g}^*$ se décompose en trois applications,

$$G \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{(\mathrm{Log}, Id)} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\exp} V_p \xrightarrow{\tilde{a}d^*} \mathfrak{g}^*$$

$Ad^*_x(y) = \tilde{a}d^* \circ \exp(\mathrm{Log} x, y)$, où Log est l'inverse de l'exponentielle, l'application exp que l'on appelle aussi exponentielle est définie par,

$$\exp(x, y) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} x^{\otimes^k} \otimes y,$$

et $\tilde{a}d^*$ est l'application linéaire définie par,

$$\tilde{a}d^*(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y) = \begin{cases} ad^* x_1 \circ \cdots \circ ad^* x_k(y) & \text{si } k > 0 \\ \tilde{a}d^*(y) = y & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

pour tout $x_1, \ldots x_k \in \mathfrak{g}$ et $y \in \mathfrak{g}^*$.

Considérons $\mathfrak{g}^*$ comme sous espace de V_p via l'injection naturelle, et soit π la projection de V_p sur $\mathfrak{g}^*$ paralèllement à V_p^+. Comme conséquence directe de ces considérations et la définition du cortex, nous avons les deux résultats immédiats,

Lemme 2.1. *Les propriétés suivantes sont satisfaites,*
1) $\pi \circ \exp(x, y) = y, \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$.
2) $(\tilde{a}d^*)^2 = \tilde{a}d^*$.
3) *L'application* exp *est linéaire par rapport à la seconde variable, en particulier* $\exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ *est un cône, s'il contient* $v \in V_p$, *il contient la droite* $\mathbb{R}v$.

Lemme 2.2. *Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes,*
1) $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$.
2) *Il existe une suite* (w_n) *dans* $\exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ *telle que* $\lim \tilde{a}d^* w_n = f$ *et* $\lim \pi(w_n) = 0$.

Pour démontrer le théorème 1.2, on a besoin du lemme suivant, que nous démontrons plus loin.

Lemme 2.3. *Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$. Alors, $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$ si et seulement s'ils existent deux entiers $1 \leq k < l \leq \dim V_p$, une famille libre $v_1, \dots, v_l$ dans V_p et l suites réelles à termes non nuls $(\varepsilon_{n,1}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$ tels que :*

$(\imath)$ $v_1, \dots, v_{k-1} \in Ker(\tilde{a}d^* \cap V_p^+)$.

$(\imath\imath)$ *Les suites* $(\varepsilon_{n,1}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$ *convergent vers zéro.*

$(\imath\imath\imath)$ $\tilde{a}d^*(v_k) = f$ *et* $v_k \in V_p^+$.

$(\imath v)$ *La suite* $(w_n = \varepsilon_{n,1}v_1 + \cdots + \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,l}v_l) \subset \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$.

Preuve du théorème 1.2. Soit $A = \overline{p_U \circ \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)} \cap V_p^+$ et f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que $f \in \tilde{a}d^*(A)$. Soient $z \in A$ tel que $\tilde{a}d^*(z) = f$, et (z_n) une suite dans $p_U \circ \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ qui converge vers z. Considérons une suite (w_n) dans $\exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ telle que $p_U(w_n) = z_n$, pour tout n. Notons que par définition de la projection p_U, on a bien $\tilde{a}d^* \circ p_U = \tilde{a}d^*$ et $\pi \circ p_U = \pi$, donc

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{a}d^*(w_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}d^* \circ p_U(w_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}d^*(z_n) = \tilde{a}d^*(z) = f.$$
$$\lim_{n\to\infty} \pi(w_n) = \lim_{n\to\infty} \pi \circ p_U(w_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(z_n) = \pi(z) = 0.$$

On conclut donc, avec le lemme 2.2.

Réciproquement, supposons que $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$ et montrons que $f \in \tilde{a}d^*(A)$. D'après le lemme 2.3, ils existent $v_1 \dots, v_\ell \in V_p$, et l suites réelles $(\varepsilon_{n,1}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$ vérifiant $(\imath) - (\imath v)$. Soit $\alpha_n = \frac{1}{\varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,k}}$, d'après le lemme 2.1, la suite $(\alpha_n w_n)$ est contenue dans $\exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$. Rappelons que $Ker p_U = V_p^+ \cap Ker \tilde{a}d^*$, donc de $(\imath)$ et $(\imath\imath)$, on tire que

$$p_U(\alpha_n w_n) = p_U(v_k + \cdots + \varepsilon_{n,k+1} \cdots \varepsilon_{n,l} v_l) \text{ et } \lim p_U(\alpha_n w_n) = p_U(v_k).$$

Par conséquent, $p_U(v_k)$ appartient à l'ensemble $\overline{p_U \circ \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)}$. Comme $v_k \in V_p^+$, on déduit que $p_U(v_k) \in V_p^+$, de plus $\tilde{a}d^* \circ p_U(v_k) = \tilde{a}d^*(v_k) = f$.

Pour voir que $Cor(\mathfrak{g}^*)$ est semi algébrique, il suffit de remarquer que les applications $\tilde{a}d^*$ et exp sont semi-algébriques, qui est une conséquence du faite qu'elles sont polynomiales. $\square$

Lemme 2.4. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension fini et (w_n) une suite dans E qui contient une infinité de termes non nuls. Alors, ils existent une sous suite $(w_{\varphi(n)})$, un entiers non nul l, une famille libre $\{v_1, \dots, v_l\}$ dans E et l suites réelles $(\varepsilon_{n,1}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$ telles que:*

1) $w_{\varphi(n)} = \varepsilon_{n,1}v_1 + \varepsilon_{n,1}\varepsilon_{n,2}v_2 + \cdots + \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,l}v_l$.

2) *Les suites* $(\varepsilon_{n,2}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$ *convergent vers zéro.*

3) *Si* $l > 1$, *alors aucun terme des suites* $(\varepsilon_{n,2}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$ *n'est nul.*

Preuve. Quite à choisir une sous suite, nous supposons que $w_n \neq 0$ pour tout n. La suite de terme général $u_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}$ est bornée, elle contient donc une sous suite qui converge vers un élément non nul, v_1. Complétons v_1 en une base $\{v_1, \dots, v_s,\}$, où $s = \dim E$. Ils existent des suites réelles, $(\delta_{n,1})$ qui converge vers 1 et $(\delta_{n,2}), \dots, (\delta_{n,s})$, qui convergent vers zéro telles que, $u_n = \delta_{n,1}v_1 + \delta_{n,2}v_2 + \cdots + \delta_{n,s}v_s$.

Si la suite de terme général $z_n = u_n - \delta_{n,1}v_1$ contient une sous suite nulle $(z_{\varphi(n)})$, alors $w_{\varphi(n)} = \|w_{\varphi(n)}\|v_1$. Sinon, la suite (z_n) contient une infinité de termes non nuls, et elle est contenue dans le sous espace F engendrée par $v_2, \dots, v_s$. En utilisant une récurrence sur la dimension de E, nous pouvons déduire l'existence d'une sous suite de $(z_{\varphi(n)})$ que nous notons aussi $(z_{\varphi(n)})$, un entier $l > 1$, une famille libre $v'_2, \dots, v'_l$ dans F et des suites $(\delta'_{n,2}), \dots, (\delta'_{n,l})$, qui convergent vers zéro, dont les termes sont non nuls et telles que $z_{\varphi(n)} = \delta'_{n,2}v'_2 + \dots + \delta'_{n,2} \cdots \delta'_{n,l}v'_l$, donc $w_{\varphi(n)} = \varepsilon_{n,1}v_1 + \varepsilon_{n,1}\varepsilon_{n,2}v'_2 + \dots + \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,l}v'_l$, avec

$$\varepsilon_{n,1} = \|w_{\varphi(n)}\|\delta_{\varphi(n),1}, \tag{1}$$

et $\varepsilon_{n,2} = \frac{\delta'_{n,2}}{\delta_{\varphi(n),1}}$ et $\varepsilon_{n,i} = \delta'_{n,i},\ i = 3, \dots, l.$ □

Preuve du Lemme 2.3. Soit $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$. Si $f = 0$, nous considérons $(X, Y) \in Z(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{g}^*$ tel que $X \neq 0$ et $Y \neq 0$. Pour $X_n = nX$ et $Y_n = \frac{Y}{n^{p+1}}$, on a

$$\exp(X_n, Y_n) = \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{n^{p+1-r}r!} X^{\otimes^r} \otimes Y$$

Par suite, nous prenons $l = p + 1$, $k = 1$, $v_r = X^{\otimes^{p-r+1}} \otimes Y$ pour $1 \leq r \leq l$, $\varepsilon_{n,1} = \frac{1}{np!}$ et $\varepsilon_{n,r} = \frac{p-r+2}{n}$, pour $2 \leq r \leq p + 1$.

Supposons que $f \neq 0$. D'après le Lemme 2.2, il existe une suite (w_n) dans $\exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ telle que $\lim ad^*(w_n) = f$ et $\lim \pi(w_n) = 0$. Puisque $f \neq 0$, on peut supposer que les termes de la suite (w_n) sont tous non nuls. En utilisant le Lemme 2.4, on déduit qu'ils existent, un entier $l \leq \dim V_p$, une famille libre $v_1, \dots, v_l$ dans de V_p et l suites réelles $(\varepsilon_{n,1}), \dots, (\varepsilon_{n,l})$, vérifiant $1) - 3)$ et tels que

$$w_n = \varepsilon_{n,1}v_1 + \varepsilon_{n,1}\varepsilon_{n,2}v_2 + \dots + \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,l}v_l.$$

Comme $(\tilde{a}d^*w_n)$ est convergente, donc ou bien $(\varepsilon_{n,1})$ converge vers une constante α et $f = \alpha ad^*(v_1)$, dans ce cas, on prend $k = 1$; ou bien $(\varepsilon_{n,1})$ diverge et dans ce cas $\tilde{a}d^*(v_1) = 0$, donc pour k minimal tel que $ad^*(v_k) \neq 0$ (k existe car sinon $f = 0$), on a

$$\lim ad^*w_n = (\lim \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,k})\tilde{a}d^*(v_k) = f.$$

Ce qui induit que $\lim \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,k}$ est une constante non nulle α, et les suites $(\varepsilon_{n,1}), \dots, (\varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,k-1})$ divergent. Tout en gardant les mêmes notations, en remplaçant $\varepsilon_{n,1}$ par $\frac{\varepsilon_{n,1}}{\alpha}$ et v_i par αv_i, pour $1 \leq i \leq l$, on obtient $w_n = \varepsilon_{n,1}v_1 + \dots + \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,l}v_l$ et $\lim \tilde{a}d^*(w_n) = \tilde{a}d^*(v_k)$.

Soit t minimal tel que $\pi(v_t) \neq 0$. Puisque

$$0 = \lim_{n\to\infty} \pi(w_n) = (\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,t})\pi(v_t),$$

nous déduisons que $\lim \varepsilon_{n,1} \cdots \varepsilon_{n,t} = 0$, par conséquent $t > k$, d'où $v_1, \dots, v_k \in V_p^+$ et $k < l$.

Comme $w_n \in \exp(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*)$, il existe $(x_n, y_n)\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ tel que $w_n = \exp(x_n, y_n)$. D'après (1), les termes de la suite $(\varepsilon_{n,1})$ sont tous non nuls, la suite $(\varepsilon'_{n,1}) = (\frac{1}{n\varepsilon_{n,1}})$ est bien définie et la suite de terme général,

$$\varepsilon'_{n,1}w_n = \exp(x_n, \varepsilon'_{n,1}y_n) = \frac{1}{n}v_1 + \frac{1}{n}\varepsilon_{n,2}v_2 + \cdots + \frac{1}{n}\varepsilon_{n,2}\cdots\varepsilon_{n,l}v_l.$$

est dans $\exp(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*)$. Par conséquent les suites $(\frac{1}{n}), (\varepsilon_{n,2}), \ldots, (\varepsilon_{n,l})$ et les vecteurs $v_1, \ldots, v_l$ vérifient $(\imath) - (\imath v)$.

Inversement, pour $f = \tilde{a}d^*(v_k)$ verifiant $(\imath) - (\imath v)$, on déduit directement que $w'_n = \frac{1}{\varepsilon_{n,1}\cdots\varepsilon_{n,k}}w_n \in \exp(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*)$, $f = \lim \tilde{a}d^*(w'_n)$ et $\lim \pi(w'_n) = 0$. $\square$

3. Caractérisation polynomiale de $Cor(\mathfrak{g}^*)$

Le but de cette section est de prouver le théorème 1.3 et d'en déduire le corollaire 3.7. L'assertion (2) implique (1) du théorème est immediate, elle se déduit directement de la définition1.1. Pour démontrer le sens inverse, nous commençons par quelques résultats préliminaires.

Considérons deux bases $\{X_1, \ldots X_r\}$ et $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ respectivement. Lorsque les $(k+1)$-uplets $(i_1, \ldots, i_{k+1})$ décrivent l'ensemble

$$\mathfrak{a}_{r,p} := \{(i_1, \ldots, i_{k+1}) \,|\, 1 \leq i_1, \ldots, i_{k+1} \leq r \text{ et } 0 \leq k \leq p\},$$

les tenseurs $X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})} = \frac{1}{k!}X_{i_1}\otimes\cdots\otimes X_{i_k}\otimes Y_{i_{k+1}}$ forment une base de V_p. Soit $R = \mathbb{R}[x_\tau,\ \tau \in \mathfrak{a}_{r,p}]$ l'anneau des coordonnées de l'espace affine V_p. Pour $\tau = (i_1, \ldots, i_{k+1}) \in \mathfrak{a}_{r,p}$, on associe les deux ensembles $B_\tau = \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $C_\tau = \{i_{k+1}\}$. Soit $J_{r,p}$ l'idéal homogène dans R engendré par les binômes

$$x_{\tau_1}\cdots x_{\tau_s} - x_{\tau'_1}\cdots x_{\tau'_s} \tag{2}$$

tels que $s > 0$ et $\tau_1, \ldots, \tau_s, \tau'_1, \ldots, \tau'_s \in \mathfrak{a}_{r,p}$, avec

$$\dot{\bigcup}_{j=1}^{s} B_{\tau_j} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{s} B_{\tau'_j} \quad \text{et} \quad \dot{\bigcup}_{j=1}^{s} C_{\tau_j} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{s} C_{\tau'_j}. \tag{3}$$

Lemme 3.1. *On a,*

$$\exp(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*) = \left\{ v \in V_p \;\middle|\; \begin{array}{l} Q(v) = 0,\ \forall\, Q \in J_{r,p}. \\ \pi(v) \neq 0,\ si\, v \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Preuve. Soit $v = \exp(x, y)$, où $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i$ et $y = \sum_{i=1}^r \beta_i Y_i$, donc

$$v = \sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{a}_{r,p}} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}\beta_{i_{k+1}}X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}.$$

Pour $\tau = (i_1, \ldots, i_{k+1})$, soit $\alpha_\tau = \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}\beta_{i_{k+1}}$. Donc, pour $\tau_1, \ldots, \tau_s \in \mathfrak{a}_{r,p}$, on a

$$\Pi_{i=1}^s \alpha_{\tau_i} = \Pi_{j\in\dot{\cup}_{i=1}^s B_{\tau_i}}\alpha_j \,\Pi_{j\in\dot{\cup}_{i=1}^s C_{\tau_i}}\beta_j.$$

Si $\tau_1, \ldots, \tau_s, \tau'_1, \ldots, \tau'_s$ vérifient (3), la dernière égalité implique directement que

$$\Pi_{i=1}^s \alpha_{\tau_i} - \Pi_{i=1}^s \alpha_{\tau'_i} = 0,$$

ce qui induit que $Q(v) = 0$ pour tout $Q \in J_{r,p}$. Comme $v = \exp(x, y)$, alors $\pi(v) = y$ et $v = \exp(x, \pi(v))$. Donc $\pi(v) = 0$ implique $v = 0$.

Inversement, soit $v \in V_p$ tel que $Q(v) = 0$, pour tout $Q \in J_{r,p}$. Si $v = 0$, alors clairement $v \in \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$. Supposons donc que $v \neq 0$ et $\pi(v) \neq 0$. Pour

$$v = \sum_{\tau \in \mathfrak{a}_{r,p}} \alpha_\tau X_\tau, \quad \text{on a} \quad \pi(v) = \sum_{j=1}^r \alpha_{(j)} X_{(j)}, \text{ où } X_{(j)} = Y_j.$$

Par conséquent, il existe un entier j tel que $\alpha_{(j)} \neq 0$. Soient $\tau_i = (i, j)$ et $\alpha_i = \frac{\alpha_{\tau_i}}{\alpha_{(j)}}$, $1 \leq i \leq r$. Pour $\tau = (i_1, \ldots, i_{k+1}) \in \mathfrak{a}_{r,p}$, d'après (3), le polynôme $x_\tau x_{(j)}^k - x_{(i_1,j)} \cdots x_{(i_k,j)} x_{(i_{k+1})} \in J_{r,p}$. Par conséquent,

$$\alpha_\tau \alpha_{(j)}^k = \alpha_{(i_1,j)} \cdots \alpha_{(i_k,j)} \alpha_{(i_{k+1})}.$$

Cela montre que, $\alpha_\tau = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} \alpha_{(i_{k+1})}$ et donc

$$v = \sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1}) \in \mathfrak{a}_{r,p}} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} \alpha_{(i_{k+1})} X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})} = \exp\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i X_i, \sum_{i=1}^r \alpha_{(i)} X_{(i)}\right).$$

$\square$

Soit $\mu = \dim V_p$. Pour tout $1 \leq k \leq l \leq \mu$, on considère l'ensemble semi-algébrique

$$Z_{k,l} := \left\{ (v_1, \ldots, v_l) \in V_p^l \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{a}d^* v_1 = \cdots = \tilde{a}d^* v_{k-1} = 0 \\ v_1, \ldots, v_k \in V_p^+ \\ v_1, \ldots, v_l \text{ famille libre.} \end{array} \right\}.$$

Pour $v \in Z_{k,l}$, on associe l'ensemble

$$Y_{k,l,v} := \left\{ (z_1, \ldots, z_l) \in \mathbb{R}^l \;\middle|\; \begin{array}{l} z_1 v_1 + \cdots + z_1 \cdots z_l v_l \in \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*) \\ z_1 \cdots z_l \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Proposition 3.2. 1) *$Y_{k,l,v}$ est un ensemble semi-algébrique.*

2) *Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes,*

ı) $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$.

ıı) Ils existent deux entiers naturels non nuls $k < l \leq \mu$ et $v \in Z_{k,l}$ tels que, $f = \tilde{a}d^* v_k$ et 0 appartient à l'adhérence $\overline{Y_{k,l,v}}$, pour la topologie euclidienne.

Preuve. La première propriété se déduit directement du faite que l'ensemble $\exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ est semi-algébrique. Quant à (2), c'est une reformulation du Lemme 2.3. $\square$

Lemme 3.3 ([5, p. 167](de sélection des courbes)). *Soient $Y \subset \mathbb{R}^l$ un ensemble semi-algébrique et $x \in \overline{Y}$. Alors il existe une fonction analytique g de l'intervalle $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}^l$, telle que $g(0) = x$ et $g(]0,1[) \subset Y$.*

Fixons $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$. La Proposition (3.2) implique l'existence de deux entiers naturels non nuls $k \leq l \leq \mu$, $v \in Z_{k,l}$ et $Y_{k,l,v}$ un ensemble semi-algébrique, tels que $0 \in \overline{Y_{k,l,v}}$ et $f = \tilde{a}d^* v_k$. Du dernier Lemme, nous déduisons l'existence d'une fonction analytique g de l'intervalle $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}^l$, telle que $g(]0,1[) \subset Y_{k,l,v}$ et $g(0) = 0$. Donc, pour $g = (g_1, \ldots, g_l)$ la fonction produit $g_1 \cdots g_k$ est analytique sur $]-1,1[$ et elle s'annule en zéro. D'après le principe des zéros isolés, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g_1(t) \cdots g_k(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ excepté en zéro. Quite a composé g avec l'application $t \mapsto \varepsilon t$, nous pouvons supposer que $g_1(t) \cdots g_k(t) \neq 0$ sur l'ouvert $]-1,1[\backslash\{0\}$. Considérons la fonction w de $]-1,1[\backslash\{0\}$ dans V_p définie par

$$w(t) = \frac{1}{g_1(t) \cdots g_k(t)} \big(g_1(t)v_1 + \cdots + g_1(t) \cdots g_l(t)v_l\big), \tag{4}$$

Dans ce qui suit, nous allons construire à pratir de w, deux fonctions vérifiant la partie (2) du théorème 1.3.

Lemme 3.4. 1) *La fonction w est méromorphe au voisinage de zéro et on a, $w(]0,1[) \subset \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*) \setminus \{0\}$,*

2) *L'application $t \mapsto \pi(w(t))$ est prolongeable en une fonction analytique sur $]-1,1[$ et on a $\lim_{t\to 0} \pi(w(t)) = 0$.*

3) *$lim_{t\to 0} \tilde{a}d^* w(t) = \tilde{a}d^* v_k$.*

Preuve. D'après (4) les coordonnées de w sont des fractions de fonctions analytiques, donc w est méromorphe. Par définition de $Y_{k,l,v}$, pour tout $t \in]0,1[$ on a, $g_1(t) \cdots g_l(t) \neq 0$ et

$$g_1(t)v_1 + \cdots + g_1(t) \cdots g_l(t)v_l \in \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*) \tag{5}$$

Comme $\exp(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*)$ est un cône, de (4) et (5) on tire que $w(t) \in \exp(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*)$. Pour voir que $w(t) \neq 0$, il suffit de remarquer que $w(t)$ est combinaison linéaire d'une famille libre a coefficients non nuls, ce qui montre (1). Puisque $v_1, \ldots, v_k \in V_p^+$, on a

$$\pi\big(w(t)\big) = \pi\left(\sum_{i=k+1}^{l} g_{k+1}(t) \cdots g_i(t) v_i\right),$$

qui est la composée d'une fonction analytique sur $]-1,1[$ et une projection (qui est polynomiale), donc c'est une fonction analytique de l'intervalle $]-1,1[$ dans $\mathfrak{g}^*$, qui s'annule en zéro ; ce qui prouve (2). Du fait que $v_1, \ldots, v_{k-1} \in \ker \tilde{a}d^*$, on obtient

$$\tilde{a}d^* w(t) = \tilde{a}d^* \left(v_k + \sum_{i=k+1}^{l} g_{k+1}(t) \cdots g_i(t) v_i\right).$$

Comme les fonctions g_i s'annules en zéro, on déduit que $\lim_{t\to 0} \tilde{a}d^* w(t) = \tilde{a}d^* v_k$. □

Proposition 3.5. *Ils existent $\varepsilon > 0$, x une fonction méromorphe en zéro à valeurs dans $\mathfrak{g}$, et y une fonction analytique qui s'annule en zéro à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$ tels que, $w(t) = \exp(x(t), y(t))$ pour tout t dans l'ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$.*

Preuve. Dans la base formée par les X_τ, $\tau \in \mathfrak{a}_{r,p}$ la fonction w s'écrit,

$$w(t) = \sum_{\tau \in \mathfrak{a}_{r,p}} y_\tau(t) X_\tau \quad \textit{et} \quad \pi(w(t)) = \sum_{i=1}^{r} y_{(i)}(t) X_{(i)}. \tag{6}$$

Du lemme 3.4, on a $w(]0,1[) \subset \exp(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*) \setminus \{0\}$, donc d'après le lemme 3.1 $\pi(w(t))$ est non nul pour $t \in]0,1[$. Par conséquent, ils existent $\varepsilon > 0$ et un entier non nul $j \leq r$ tels que $y_{(j)}(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, excepté en zéro.

Pour $i = 1, \ldots, r$, soit $x_i :]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, définie par $x_i(t) = \frac{y_{(i,j)}(t)}{y_{(j)}(t)}$. Dans le lemme 3.4, on a montré que la fonction $t \mapsto \pi(w(t))$ est analytique et qu'elle s'annule en zéro, ainsi de (6) on déduit que la fonction $y_{(j)}$ l'est aussi, et donc x_i est méromorphe au voisinage de zéro.

Le lemme 3.1, implique encore que $Q(w(t)) = 0$, pour tout $Q \in J_{p,r}$. En particulier pour $(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in \mathfrak{a}_{r,p}$, de (2) et (3), on constate que le polynôme

$$x_{(i_1,\ldots,i_{k+1})} x_{(j)}^k - x_{(i_1,j)} \cdots x_{(i_k,j)} x_{(i_{k+1})} \in J_{p,r},$$

donc

$$y_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}(t) y_{(j)}(t)^k - y_{(i_1,j)}(t) \cdots y_{(i_k,j)}(t) y_{(i_{k+1})}(t) = 0.$$

Sur l'ouvert $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus\{0\}$, on a

$$y_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}(t) = x_{i_1}(t) \cdots x_{i_k}(t) y_{(i_{k+1})}(t).$$

En utilisant cette dernière expression dans (6), on obtient

$$w(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{r} x_i(t) X_i, \sum_{i=1}^{r} y_{(i)}(t) X_{(i)} \right).$$

□

Pour ε assez petit, les fonctions $x = (x_1, \ldots, x_r)$ et $y = (y_1, \ldots, y_r)$ données par la propostion 3.5, sont developpables en series. Soit $m \geq 0$ tel que $x_i(t) = \sum_{j \geq -m} a_{ij} t^j$ et $y_i(t) = \sum_{j \geq 1} b_{ij} t^j$. Soient

$$x_i^1(t) = \sum_{j=-m}^{mp} a_{ij} t^j, \quad x_i^2(t) = x_i(t) - x_i^1(t), \tag{7}$$

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{mp} b_{ij} t^j, \quad y_i^2(t) = y_i(t) - y_i^1(t), \tag{8}$$

pour $s = 1$ ou 2,

$$x^s(t) = \sum_{i=1}^{r} x_i^s(t) X_i \;\; \text{et} \;\; y^s(t) = \sum_{i=1}^{r} y_i^s(t) X_{(i)}. \tag{9}$$

Donc,

$$x(t) = x^1(t) + x^2(t) \quad \text{et} \quad y(t) = y^1(t) + y^2(t).$$

Lemme 3.6. *Nous avons,* $\exp(x(t), y(t)) = \exp(x^1(t), y^1(t)) + A(t)$, *avec* $\lim_{t\to 0} A(t) = 0$.

Preuve. Notons que

$$\begin{aligned}
\exp(x(t), y^2(t)) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{a}_{r,p}} x_{i_1}(t)\cdots x_{i_k}(t) y^2_{i_{k+1}}(t) X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}\\
\exp(x(t), y^1(t)) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{a}_{r,p}} \Pi_{j=1}^k \big(x^1_{i_j}(t) + x^2_{i_j}(t)\big) y^1_{i_{k+1}}(t) X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}\\
&= \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{a}_{r,p}\\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\in\{1,2\}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k>k}} x^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)\cdots x^{\varepsilon_k}_{i_k}(t) y^1_{i_{k+1}}(t) X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}\\
&\quad + \sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{a}_{r,p}} x^1_{i_1}(t)\cdots x^1_{i_k}(t) y^1_{i_{k+1}}(t) X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}.
\end{aligned}$$

Donc pour

$$A(t) = \exp(x(t), y^2(t)) + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in\mathfrak{a}_{r,p}\\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\in\{1,2\}\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k>k}} x^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)\cdots x^{\varepsilon_k}_{i_k}(t) y^1_{i_{k+1}}(t) X_{(i_1,\ldots,i_{k+1})}$$

on a, $\exp(x(t), y(t)) = \exp(x^1(t), y^1(t)) + A(t)$. Pour conclure, il suffit de voir que pour tout $(i_1, \ldots, i_{k+1}) \in \mathfrak{a}_{r,p}$ et $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k > k$ les coefficients

$$x_{i_1}(t)\cdots x_{i_k}(t) y^2_{i_{k+1}}(t) \quad \text{et} \quad x^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)\cdots x^{\varepsilon_k}_{i_k}(t) y^1_{i_{k+1}}(t),$$

s'annules en zéro. Pour $t \neq 0$ et $\varepsilon_{k_1} = 2$, on a

$$\begin{aligned}
x_{i_1}(t)\cdots x_{i_k}(t) y^2_{i_{k+1}}(t) &= \big(t^{-mk} y^2_{i_{k+1}}(t)\big) \Pi_{j=1}^k \big(t^m x_{i_j}(t)\big),\\
x^{\varepsilon_1}_{i_1}(t)\cdots x^{\varepsilon_k}_{i_k}(t) y^1_{i_{k+1}}(t) &= \big(t^{-m(k-1)} x^2_{i_{k_1}}(t)\big)\big(y^1_{i_{k+1}}(t)\big) \Pi^k_{\substack{j=1\\ j\neq k_1}} \big(t^m x^{\varepsilon_j}_{i_j}(t)\big)
\end{aligned}$$

D'après les expressions (7) et (8) chaque parenthèse dans ces deux produits admet une limite finie en zéro, en parliculier $\lim_{t\to 0} y^1_{i_{k+1}}(t) = 0$ et $\lim_{t\to 0} t^{-mk} y^2_{i_{k+1}}(t) = 0$. □

Preuve du théorème 1.3. Notons que l'assertion (2) implique (1) du théorème découle de la définition 1.1 dès qu'on prend $x_n = e^{x(\frac{1}{n})}$ et $y_n = y(\frac{1}{n})$. Montrons alors l'implication inverse. Soit $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$, d'après le Lemme 3.4, il existe une fonction analytique w telle que $\lim_{t\to 0} \tilde{a}d^* w(t) = f$. De la Proposition 3.5, on tire l'existence d'une fonction analytique y et une fonction méromorphe x au voisinage de zéro telles que $w(t) = \exp(x(t), y(t))$. Comme précédement, on a

$$\exp(x(t), y(t)) = \exp(x^1(t), y^1(t)) + A(t)$$

Donc du Lemme 3.6, on déduit que

$$f = \lim_{t\to 0} \tilde{a}d^*\exp(x(t), y(t)) = \lim_{t\to 0} \tilde{a}d^*\exp(x^1(t), y^1(t)) = Ad^*_{e^{x^1(t)}} y^1(t).$$

□

Finalement, soient m et s deux entiers positifs tels que $0 \leq s < mp$ et considérons l'ensemble des multi-indices

$$I_{m,p,s} = \left\{ (i_1, \ldots, i_{k+1}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k+1} \leq mp \\ i_1 + \cdots + i_{k+1} = (m+1)k - s \\ 0 \leq k \leq p \end{array} \right\}.$$

Corollaire 3.7. *Pour qu'une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ soit dans $Cor(\mathfrak{g}^*)$ il faut et il suffit qu'ils existent un entier naturel m, $x_1, \ldots, x_{mp} \in \mathfrak{g}$ et $y_1, \ldots, y_{mp} \in \mathfrak{g}^*$ tels que*

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in I_{m,p,s}} \frac{1}{k!} x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{i_{k+1}} = 0, \quad 0 < s < mp \text{ et}$$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_{k+1})\in I_{m,p,0}} \frac{1}{k!} x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{i_{k+1}} = f,$$

où $x_{i_1} \cdots x_{i_k} y_{i_{k+1}} = ad^*_{x_{i_1}} \cdots ad^*_{x_{i_k}} (y_{i_{k+1}})$.

Preuve. Soit $f \in Cor(\mathfrak{g}^*)$ et considérons les deux fonctions polynomiales $x(t)$ et $y(t)$ données par le Théorème 1.3. Donc,

$$x(t) = \sum_{j=1}^{mp} t^{j-m-1} v_j \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{j=1}^{mp} t^j u_j,$$

où $v_1, \ldots, v_{mp} \in \mathfrak{g}$ et $u_1, \ldots, u_{mp} \in \mathfrak{g}^*$. Par conséquent,

$$\exp(x(t), y(t)) = \sum_{s=-mp+1}^{mp(p+1)} t^s \sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_{k+1}\leq mp \\ i_1+\cdots+i_{k+1}-(m+1)k=s}} \frac{1}{k!} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes u_{i_{k+1}}.$$

Donc la limite en zéro de $\tilde{a}d^*\exp(x^1(t), y^1(t))$ existe si et seulement si

$$\tilde{a}d^* \left(\sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_{k+1}\leq mp \\ i_1+\cdots+i_{k+1}-(m+1)k=s}} \frac{1}{k!} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes u_{i_{k+1}} \right) = 0, \quad \text{si } s < 0$$

et

$$f = \tilde{a}d^* \left(\sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots,i_{k+1}\leq mp \\ i_1+\cdots+i_{k+1}-(m+1)k=0}} \frac{1}{k!} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes u_{i_{k+1}} \right).$$

□

Département des Mathématiques
Faculté des Sciences De Bizerte, Tunisie
e-mail: kedim.Imed@fsg.rnu.tn

Département des Mathématiques
Faculté des Sciences de Gabes, Zrig Tunisie Tunisia
e-mail: Megdiche.Hatem@fsg.rnu.tn

References

[1] A. Baklouti, *Le cortex en dimension six*, Centre Universitaire de Luxembourg, 321, Fascicule V (1993), 7–45.

[2] ———, *On the cortex of connected simply connected nilpotent Lie groups*, Russian J. Math. Phys. **5**-3 (1998), 281–293.

[3] M. Bekka et E. Kaniuth, *Irreductible representations of locally compact group that cannot be Hausdorff separated from the identity representation*, J. Reine Angew. Math. **385** (1988), 203–220.

[4] N. Ben Fraj et H. Megdiche, *Cortex des Groupes de Lie Nilpotents de pas deux*, J. Trav. Math. de Luxembourg, Fascicule XV (2004)

[5] J. Bochnak, M. Coste et M. F. Roy, *Real algebraic geometry*, Springer, volume 36 (1991).

[6] J. Boidol, J. Ludwig et D. Müller, *On infinitely small orbits*, Studia Math. T. LXXXVIII (1988), 1–11.

[7] I. Brown, *Dual topology of nilpotent Lie groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 407–411.