J. Math. Soc. Japan
Vol. 14, No. 2, 1962

Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs

Par J. L. LIONS

(Reçu le 26 dec., 1961)

1. Introduction

1.1—Soient V et H deux espaces de Hilbert, avec $V \subset H$, l'injection de V dans H étant continue et V étant dense dans H. On désigne par (f, g) (resp. $((u, v))$) le produit scalaire dans H (resp. V); on pose: $|f| = (f, f)^{1/2}$, $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$.

Soit $u, v \to a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur V. On suppose que

$$\text{Re}\, a(v, v) \geqq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \text{ pour tout } v \in V. \tag{1.1}$$

Le triplet $\{V, H, a(u, v)\}$ définit un opérateur A *non borné dans* H, de domaine $D(A)$, de la façon suivante (cf. par ex. Lions [1] chap. II): un élément u de V est dans $D(A)$ si la forme semi-linéaire

$$v \to a(u, v)$$

est continue sur V pour la topologie induite par H; alors

$$a(u, v) = (Au, v), \qquad Au \in H, \tag{1.2}$$

ce qui définit A.

On munira toujours $D(A)$ de la norme du graphe: $(|u|^2 + |Au|^2)^{1/2}$, qui fait de $D(A)$ un espace de Hilbert.

Dans la terminologie de T. Kato [1], l'opérateur A est dit (lorsque (1.1) a lieu) *régulièrement accrétif*[1]. (Dans les notations de T. Kato, $V = D(\Phi)$).

On définit la *forme adjointe* $a^*(u, v)$ par

$$a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}, \qquad u, v \in V. \tag{1.3}$$

Cette forme définit un opérateur A^*, par

$$a^*(u, v) = (A^*u, v), \qquad u \in D(A^*), \tag{1.4}$$

dont on vérifie qu'il est l'adjoint de A.

Plusieurs auteurs (cf. la bibliographie de T. Kato [1]) ont défini les puissances fractionnaires A^θ d'opérateurs A ayant diverses propriétés.

---

1) Au lieu de (1.1), M. Kato suppose seulement que $\text{Re}\, a(v, v) + \lambda |v|^2 \geqq \alpha \|v\|^2$. Mêmes résultats (raisonner sur $A + \lambda$ au lieu de A).

Sous les hypothèses précédentes (et même pour des opérateurs accrétifs, non nécessairement régulièrement accrétifs), M. T. Kato (cf. Kato [**1**], [**2**]) a démontré les résultats suivants:

(1.5) $$D(A^{\rho})=D(A^{*\rho}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \rho < 1/2$$

(identité algébrique et normes équivalentes);

(1.6) $\left\{\begin{array}{l}\text{Soit } A_1, V_1, H_1 \text{ un deuxième triplet ayant des propriétés analogues} \\ \text{au triplet } A, V, H; \text{ si } \Pi \text{ est un opérateur linéaire continu de } H \\ \text{dans } H_1, \text{ appliquant continûment } D(A) \text{ dans } D(A_1), \text{ alors } \Pi \text{ applique} \\ \text{continûment } D(A^{\rho}) \text{ dans } D(A_1^{\rho}),\ 0<\rho<1.\end{array}\right.$

(Ces résultats sont établis pour A accrétif).

En outre, M. T. Kato pose le problème de savoir si $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})=V$ lorsque A est régulièrement accrétif, et conjecture que ceci n'est pas vrai lorsque A est accrétif non régulièrement accrétif (cf. T. Kato [**1**, p. 268, Remark 1]).

1.2—Nous nous proposons d'étudier ces problèmes dans cet article.

Tout d'abord, la propriété d'interpolation (1.6) impose d'étudier les *relations entre* $D(A^{\rho})$ *et les espaces d'interpolation entre* $D(A)$ *et* H. C'est ce que nous faisons au n°3, à l'aide des *espaces de trace* (cf. Lions [**2**], [**3**], [**4**]); un rappel sur les espaces de trace est fait au n°2. La réponse est facile: les $D(A^{\rho})$ *coincident* avec les espaces d'interpolation "naturels" entre $D(A)$ et H.

Ceci étant fait, nous donnons aux n°5 et 6 *deux conditions suffisantes sous lesquelles* $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})$.

La première (n°5) est simplement que $D(A)=D(A^*)$ (ce qui naturellement n'entraîne pas que $A=A^*$!).

La deuxième (n°6) est plus technique-mais elle couvre tous les problèmes aux limites elliptiques "réguliers" (cf. n°6).

Nous donnons enfin (n°7) un exemple où, A étant accrétif *non* régulièrement accrétif, on a: $D(A^{1/2}) \neq D(A^{*1/2})$.

1.3—Nous utilisons systématiquement des méthodes de théorie d'interpolation. Pour cela, nous mettons en évidence au n°3 quelques théorèmes d'isomorphisme. Les résultats du n°5 sont, entre autres, démontrés par M. T. Kato dans l'article suivant celui-ci, par des méthodes différentes (cf. T. Kato [**3**]).

Le plan est le suivant:

5. Applications (I).
6. Applications (II).
7. Un contre-exemple.

2. Espaces de trace. Rappels.

2.1—Soient A_0 et A_1 deux espaces de Banach, avec

$$A_0 \subset A_1,$$

l'injection de A_0 dans A_1 étant continue et A_0 dense dans A_1 (l'hypothèse $A_0 \subset A_1$ n'est *nullement* indispensable—cf. Lions [3]).

On considère l'espace $W(2, \alpha; A_0, A_1)$ des (classes de) fonctions $t \to u(t)$ telles que

$$t^{\alpha} u \in L^2(0, \infty; A_0) \tag{2.1}$$

(i. e. $\int_0^{\infty} t^{2\alpha} \| u(t) \|_{A_0}^2 dt < \infty$, u étant fortement mesurable à valeurs dans A_0) et

$$t^{\alpha} \frac{du}{dt} \in L^2(0, \infty; A_1) \tag{2.2}$$

(la dérivée $\frac{du}{dt}$ étant prise au sens des distributions vectorielles—L. Schwartz [1]). On suppose que

$$\frac{1}{2} + \alpha = \theta \in]0, 1[. \tag{2.3}$$

Muni de la norme

$$\| u \|_{W(2,\alpha;A_0,A_1)} = \max \left(\| t^{\alpha} u \|_{L^2(0,\infty;A_0)}, \left\| t^{\alpha} \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0,\infty;A_1)} \right)$$

c'est un espace de Banach.

Pour chaque $u \in W(2, \alpha; A_0, A_1)$ on peut définir de façon unique $u(0)$; *on désigne par* $T(2, \alpha; A_0, A_1)$ *l'espace décrit* (dans A_1) *par* $u(0)$ *lorsque* u *décrit* $W(2, \alpha; A_0, A_1)$. Muni de la norme

$$\| a \|_{T(2,\alpha;A_0,A_1)} = \inf_{u(0)=a} \| u \|_{W(2,\alpha;A_0,A_1)} \tag{2.4}$$

c'est *un espace de Banach.*

Les espaces $T(2, \alpha; A_0, A_1)$ entrent dans la famille des *espaces de trace* (cf. Lions [2], [3], [4]).

2.2—Nous utiliserons les propriétés suivantes de ces espaces.

D'abord la *propriété d'interpolation:*

(2.5) $\left\{\begin{array}{l}\text{si } \{B_0, B_1\} \text{ est un deuxième couple d'espaces de Banach ayant des} \\ \text{propriétés analogues à celles du couple } \{A_0, A_1\}, \text{ et si } \Pi \text{ est un} \\ \text{opérateur linéaire continu de } A_i \text{ dans } B_i \text{ pour } i=0 \textit{ et } i=1, \text{ (en bref :} \\ \Pi \in \mathcal{L}(A_i\,; B_i)), \text{ alors} \\ \qquad\qquad \Pi \in \mathcal{L}(T(2, \alpha\,; A_0, A_1)\,; T(2, \alpha\,; B_0, B_1))\,. \end{array}\right.$

Ensuite la *propriété de dualité* :

(2.6) $\left\{\begin{array}{l}\text{si } A_0 \text{ et } A_1 \text{ sont réflexifs (cf. détails dans Lions [3]), alors } (X' \text{ dé-} \\ \text{signant de façon générale le dual de } X): \\ \qquad\qquad T(2, \alpha\,; A_0, A_1)' = T(2, -\alpha\,; A_1', A_0')\,. \end{array}\right.$

2.3—Nous utilisons dans la suite les espaces de trace. On pourrait tout aussi bien utiliser les espaces d'interpolation construits à l'aide des fonctions holomorphes (cf. A. P. Caldéron [1], J. L. Lions [5]; cf. aussi S. G. Krein [1], [2]), ces diverses constructions donnant le même résultat dans le cas qui nous intéresse (on pourrait aussi utiliser J. L. Lions [4]).

3. Espaces de trace et espaces $D(A^\rho)$.

THÉORÈME 3.1—*L'opérateur* A *étant défini par* (1.2), *avec* (1.1), *on a:*

(3.1) $$T(2, \alpha\,; D(A), H) = D(A^{1/2-\alpha})\,, \qquad -1/2 < \alpha < 1/2\,,$$

avec normes équivalentes.

REMARQUE 3.1

Résultat valable—avec la même démonstration—en supposant A accrétif, non régulièrement accrétif.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1

Soit B un opérateur auto-adjoint strictement positif tel que

$$D(B) = D(A) \qquad \text{(avec normes équivalentes)}.$$

Alors, naturellement :

(3.2) $$T(2, \alpha\,; D(A), H) = T(2, \alpha\,; D(B), H)\,.$$

Par ailleurs, du résultat de Kato rappelé en (1.6), il résulte que

(3.3) $$D(B^\rho) = D(A^\rho)\,, \qquad 0 < \rho < 1\,,$$

Mais, d'après Lions [2] :

(3.4) $$T(2, \alpha\,; D(B), H) = D(B^{1/2-\alpha})$$

(on peut dans ce cas utiliser la décomposition spectrale de B) et le théorème résulte alors de (3.2), (3.3), (3.4).

4. Théorèmes d'isomorphisme.

Nous avons les inclusions (avec injections continues):

$$D(A) \subset V \subset H, \qquad D(A^*) \subset V \subset H,$$

et chaque espace étant dense dans le suivant. Si nous prenons les espaces anti-duals, en identifiant H à son anti-dual, il vient

$$D(A) \subset V \subset H \subset V' \subset D(A^*)' \tag{4.1}$$

et

$$D(A^*) \subset V \subset H \subset V' \subset D(A)' . \tag{4.2}$$

Notons maintenant que de (1.1) résulte aussitôt ceci:

(4.3) A (resp. A^*) *est un isomorphisme de* $D(A)$ (resp. $D(A^*)$) *sur* H;

(4.4) A (resp. A^*) *est un isomorphisme de* V *sur* V'.

Considérons l'adjoint $(A^*)^*$ de A^* considéré comme isomorphisme de $D(A^*)$ sur H; $(A^*)^*$ est un isomorphisme de H sur $D(A^*)'$, et comme $(A^*)^*$ coïncide avec A sur $D(A)$, c'est un prolongement de A; donc

(4.5) *A est un isomorphisme de H sur $D(A^*)'$.*

De même

(4.5)* *A^* est un isomorphisme de H sur $D(A)'$.*

On peut maintenant *interpoler* de toutes les façons entre ces divers isomorphismes. On obtient, en particulier:

(4.6) $\left\{\right.$ A (resp. A^*) *est un isomorphisme de* $T(2, \alpha ; D(A), H)$ (resp. $T(2, \alpha ; D(A^*), H)$) *sur* $T(2, \alpha ; H, D(A^*)')$ (resp. $T(2, \alpha ; H, D(A)')$).

D'après (2.6), $T(2, \alpha ; H, D(A^*)') = T(2, -\alpha ; D(A^*), H)'$ et de même $T(2, \alpha ; H, D(A)') = T(2, -\alpha ; D(A), H)'$.

Tenant compte de ces relations dans (4.6) et prenant $\alpha = 0$, on obtient (en notant que $T(2, 0 ; D(A), H) = D(A^{1/2})$ et $T(2, 0 ; D(A^*), H) = D(A^{*1/2})$):

(4.7) $\left\{\right.$ A (resp. A^*) *est un isomorphisme de* $D(A^{1/2})$ (resp. $D(A^{*1/2})$) *sur* $D(A^{*1/2})'$ (resp. $D(A^{1/2})'$).

Les résultats des n°5 et 6 sont obtenus par comparaison de (4.4) et (4.7).

5. Applications (I).

THÉORÈME 5.1—*On suppose que A est donné par* (1.2), (1.1) *ayant lieu. Alors l'inclusion* "$D(A^{1/2}) \subset V$" *est équivalente à* "$D(A^{*1/2}) \supset V$". *Même chose en échangeant A et A^*.*

DÉMONSTRATION. En effet, A étant un isomorphisme de V sur V' et de $D(A^{1/2})$ sur $D(A^{*1/2})'$, l'inclusion " $D(A^{1/2})\subset V$ " équivaut à " $D(A^{*1/2})'\subset V'$ ", ce qui équivaut à " $V\subset D(A^{*1/2})$ " d'où le théorème.

COROLLAIRE 5.1—*Si* $D(A^{1/2})\subset V$ *et* $D(A^{*1/2})\subset V$, *alors* $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})=V$. *Même chose si l'on suppose que* $D(A^{1/2})\supset V$ *et* $D(A^{*1/2})\supset V$.

THÉORÈME 5.2—*On suppose* A *donné par* (1.2), (1.1) *ayant lieu. Si* $D(A^{1/2})\subset D(A^{*1/2})$, *alors* $D(A^{1/2})\subset V\subset D(A^{*1/2})$.

DÉMONSTRATION. De l'hypothèse résulte que $D(A^{*1/2})'\subset D(A^{1/2})'$ d'où résulte que en particulier, A est un opérateur linéaire continu de $D(A^{1/2})$ dans son dual. Donc, pour tout $u\in D(A^{1/2})$,

$$|<Au,u>|\leqq c_1\|u\|^2_{D(A^{1/2})}\,.$$

Pour $u\in D(A)$, on a : $<Au,u>=a(u,u)$ donc

$$\|u\|\leqq c_2\|u\|_{D(A^{1/2})}\qquad\text{pour tout } u\in D(A)\,.$$

Comme $D(A)$ est dense dans $D(A^{1/2})$, on en déduit que

$$\|u\|\leqq c_2\|u\|_{D(A^{1/2})}\qquad\text{pour tout } u\in V$$

i. e. $D(A^{1/2})\subset V$.

Alors (Théorème 5.1), $V\subset D(A^{*1/2})$, d'où le théorème.

COROLLAIRE 5.2—*Si* $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})$ *alors* $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})=V$.

THÉORÈME 5.3—*On suppose* A *donné par* (1.2), (1.1) *ayant lieu. Si* $D(A)=D(A^*)$, *alors* $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})=V$.

DÉMONSTRATION. En effet, $D(A^{1/2})=T(2,0\,;D(A),H)=T(2,0\,;D(A^*),H)=D(A^{*1/2})$ et le Théorème résulte du corollaire 5.2.

REMARQUE 5.1—L'hypothèse $D(A)=D(A^*)$ est vérifiée lorsque A est un opérateur différentiel elliptique, *pour les conditions aux limites de Dirichlet*, toutes les données étant suffisamment régulières.

6. Applications (II).

6.1—On va démontrer le

THÉORÈME 6.1—*On suppose* A *donné par* (1.2), (1.1) *ayant lieu. On suppose en outre*

$$(6.1)\qquad\left\{\begin{array}{l}\textit{il existe un espace de Hilbert } X,\ X\subset H, \textit{ tel que};\\ \text{(i)}\ \ V \textit{ soit un sous-espace fermé de } T(2,0\,;X,H)\,;\\ \text{(ii)}\ \ D(A)\subset X,\ D(A^*)\subset X.\end{array}\right.$$

Alors $D(A^{1/2})=D(A^{*1/2})=V$.

(On donne au point 6.2 des exemples où (6.1) est vérifiée).

DÉMONSTRATION. Désignons par $\mathcal{W}$ l'espace des fonctions $t \to u(t)$ une fois continûment différentiables de $t \geqq 0 \to D(A)$ et à support compact; $\mathcal{W}$ est dense dans $W(2, 0; D(A), H)$.

L'application $u \to u(0)$ de $\mathcal{W}$ dans $D(A)$ est continue lorsque l'on munit $\mathcal{W}$ de la topologie de $W(2, 0; D(A), H) = W$ et $D(A)$ de la topologie induite par $T(2, 0; D(A), H) = D(A^{1/2})$. Comme $D(A) \subset X$, on a $T(2, 0; D(A), H) \subset T(2, 0; X, H)$ de sorte que

$$\| u(0) \|_{T(2,0;X,H)} \leqq c_1 \| u \|_W, \qquad u \in \mathcal{W}.$$

Comme V est fermé dans $T(2, 0; X, H)$, ceci équivaut à

$$\| u(0) \| \leqq c_2 \| u \|_W, \qquad u \in \mathcal{W}.$$

Par conséquent $u \to u(0)$ se prolonge par continuité en une application de W *dans* V; or $u \to u(0)$ applique W *sur* $D(A^{1/2})$, d'où

$$D(A^{1/2}) \subset V.$$

Même chose pour A^*, d'où le théorème par application du corollaire 5.1.

6.2—On va maintenant donner des exemples où (6.1) est vérifiée.

Soit Ω un ouvert de R^n, borné, de frontière régulière. On désigne par $H^k(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega) = H^\circ(\Omega)$ telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour $|p| \leqq k$; pour $u, v \in H^k(\Omega)$, on pose

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|p| \leqq k} \int_\Omega (D^p u)(\overline{D^p v})\, dx,$$

ce qui munit $H^k(\Omega)$ d'une *structure hilbertienne*.

On désigne par $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence dans $H^k(\Omega)$ du sous-espace des fonctions à support compact dans Ω.

Soit V un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$ avec

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega). \tag{6.2}$$

Nous appliquons les résultats précédents avec V comme ci-dessus et $H = H^\circ(\Omega)$; la forme $a(u, v)$ étant donnée (avec (1.1)), on dit que le triplet $\{V, H, a(u, v)\}$ est *régulier* si

$$D(A) \subset H^{2m}(\Omega), \qquad D(A^*) \subset H^{2m}(\Omega). \tag{6.3}$$

Il en est ainsi si $a(u, v) = \sum_{|p|, |q| \leqq m} \int_\Omega a_{pq} D^q u \overline{D^p v}\, dx$, les fonctions a_{pq} étant suffisamment régulières dans $\bar{\Omega}$, et si V est défini par des relations linéaires à coefficients réguliers entre les valeurs de u et de ses dérivées d'ordre $\leqq m-1$ sur la frontière Γ de Ω (cf. L. Nirenberg [**1**], Browder [**1**]). [On peut également incorporer des intégrales sur Γ dans $a(u, v)$].

Ceci étant posé, l'hypothèse (6.1) a lieu, avec $X = H^{2m}(\Omega)$. En effet, $T(2, 0\,; H^{2m}(\Omega), H^{\circ}(\Omega)) = (T(2, 0\,; X, H)) = H^{m}(\Omega)$ (cf. Lions-Magenes [**1**]) et V est *par hypothèse* un sous-espace fermé de $H^{m}(\Omega)$.

REMARQUE 6.1—Il est bon de rappeler que les problèmes aux limites *mêlés n'entrent pas* dans la catégorie précédente. Donc, *par exemple*, pour un opérateur elliptique A du 2ème ordre, non auto-adjoint, avec condition aux limites de Dirichlet sur une partie de la frontière et condition aux limites de Neumann sur le reste de la frontière, on ignore si $D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$. Même chose d'ailleurs avec le problème de Dirichlet et une *frontière irrégulière*.

7. Un contre-exemple.

On considère l'opérateur A défini dans T. Kato [1], p. 252.

On va voir que, pour cet opérateur (accrétif mais non régulièrement accrétif) *$D(A^{1/2})$ est strictement contenu dans $D(A^{*1/2})$ avec une topologie plus fine.*

En effect, si $\Omega =]0, \infty[$, on a (cf. T. Kato [**1**]):

$$D(A) = H_0^1(\Omega), \qquad D(A^*) = H^1(\Omega) \qquad \text{(notations du n°6)}$$

et notre affirmation résulte alors de Lions-Magenes [**2**, Théorème 5.2].

Nancy

Bibliographie

F. E. Browder
[1] On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 351–361.
A. P. Caldéron
[1] Intermediate spaces and interpolation, Colloque de Varsovie, Septembre, 1960.
T. Kato
[1] Fractionnal powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 246–274.
[2] A generalization of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad., **37** (1961), 305–308.
[3] Fractionnal powers of dissipative operators, II, This Journal,
S. G. Krein
[1] Un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, **130** (1960), 1162–1165.
[2] Sur la notion d'échelle normale d'espaces, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, **132** (1960), 510–513.
J. L. Lions
[1] Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer (collection Jaune), t. 111, 1961.
[2] Théorèmes de trace et d'interpolation (I), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), 389–403.

[3] Sur les espaces d'interpolation ; dualité, Math. Scand. **9** (1961), 147-177.
[4] Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, Bull. Math. R. P. R. Bucarest, **2** (1958), 419-432.
[5] Une construction d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris, **251** (1960), 1853-1855.

J. L. Lions-E. Magenes
[1] Problèmes aux limites non homogènes (II), Ann. Inst. Fourier, **11** (1961), 137-178.
[2] Id., (IV), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (1961),

L. Nirenberg
[1] Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), 648-674.

L. Schwartz
[1] Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), 1-139, **8**, (1958), 1-209.