J. Math. Soc. Japan
Vol. 23, No. 1, 1971

Sur les sociétés de surfaces caractéristiques dans l'espace de deux variables complexes

Par Seizo KONDO

(Reçu le 19 Mars, 1970)

Introduction.

1. En 1910, E. E. Levi[1] a envisagé pour la première fois une certaine famille de surfaces caractéristiques dans son étude sur les points singuliers essentiels des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Sa famille de surfaces caractéristiques dans un domaine est construite géométriquement telle que, par tout point du domaine, passe une et une seule surface de la famille. Après lui, en considérant la caractère de famille de surfaces caractéristiques de E. E. Levi, en 1926, G. Julia[2] a mis de l'importance à la classe de familles de surfaces caractéristiques à un certain paramètre complexe dans ses recherches sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables.

Dans le présent mémoire, j'essayerai d'étendre la classe de familles de surfaces caractéristiques considérée par G. Julia, en demandant conseil aux fonctions holomorphes ou méromorphes mais indépendamment de ces fonctions, à celle dont une famille quelconque de surfaces caractéristiques irréductibles dans un domaine a deux propriétés suivantes:

1°. Par tout point du domaine passe au moins une surface de la famille.

2°. Sur une surface quelconque de la famille, l'ensemble des points, par lesquels passent plusieurs surfaces de la famille, pouvant être en nombre infini, est au plus $(n-2)$ en dimensions complexes où n est celle de l'espace. Les familles de surfaces caractéristiques jouissant de ces deux propriétés seront appelées sociétés de surfaces caractéristiques. C'est à faire la recherche sur la structure des sociétés de surfaces caractéristiques que le présent mémoire est destiné. On se borne pour éviter la complication aux surfaces caractéristiques dans un domaine qui ne s'accumulent pas elles-mêmes dans le domaine. Les ordres des surfaces caractéristiques ne seront pas considérés.

Ces considérations sur les sociétés de surfaces caractéristiques faites indépendamment des fonctions analytiques seront utiles pour tirer des propriétés propres pour les fonctions analytiques uniformes quand on les étudie,

1) Voir Annali di Matematica, série III, tome 17, notamment pages 67–69.
2) Voir Acta Mathematica, tome 47, notamment pages 73–76.

comme T. Nishino[3], en portant son attention sur les familles de surfaces caractéristiques. Mais pour étudier les fonctions analytiques multiformes dans cette direction il est nécessaire de considérer les sociétés de surfaces caractéristiques irréductibles dans un domaine qui s'accumulent effectivement elles-mêmes dans le domaine.

On se borne encore à l'espace de deux variables complexes pour la simplicité.

2. Le § 1 est consacré au rappel ou à l'introduction des notions qui seront utilisées au cours du mémoire, surtout à l'exposition de la notion de famille normale de surfaces caractéristiques et de celle de société de surfaces caractéristiques dans l'espace de 2 variables complexes. On donne quelques propriétés de ces familles quant à la convergence et à quelques moyens de savoir si une famille est normale.

Le § 2 expose le théorème fondamental sur lequel repose tout le mémoire. En gros, ce théorème dit que les points où une société de surfaces caractéristiques cesse d'être normale ne peuvent admettre de points intérieurs. Le § 3 expose l'allure d'une société de surfaces caractéristiques au voisinage d'un point où elle est normale. Le § 4 expose les différences essentielles entre les sociétés de surfaces caractéristiques et les suites infinies de surfaces caractéristiques ne se rencontrant pas entre elles. Aux §§ 5 et 6, en faisant appel aux transformations linéaires d'une variable, on donne quelques exemples de sociétés de surfaces caractéristiques qui satisfont aux quelques conditions étudiées aux §§ 2 et 3 respectivement. Au § 7, on étudie en détail l'allure d'une société de surfaces caractéristiques au voisinage d'un de ses points α. Ces études nous permettent de donner des exemples de sociétés de surfaces caractéristiques sans faire appel aux transformations linéaires d'une variable.

Au § 8, l'étude ainsi faite montre que les sociétés de surfaces caractéristiques appartenant aux fonctions holomorphes ou méromorphes forment une classe très spéciale dans la famille de toutes les sociétés de surfaces caractéristiques.

§ 1. Définitions. Préliminaires.

3. Etant donné un ensemble *fermé* Σ de points dans un domaine D de l'espace (x, y), on l'appellera *surface caractéristique dans ce domaine*, si, pour chaque point p sur Σ, on peut trouver un voisinage σ de p dans D et une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans σ, telle que la partie $\Sigma \cap \sigma$ soit représentée

---

3) Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ. 8-1 (1968) pages 49–100; (II) Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable, J. Math. Kyoto Univ. 9-2 (1969) pages 221–274.

par l'équation $f(x, y)=0$. Un point $p_0=(x_0, y_0)$ est un *point ordinaire ou régulier de la surface caractéristique* Σ, si, au voisinage de ce point, la surface caractéristique peut être représentée par une équation $y-y_0=\varphi(x-x_0)$, φ étant une fonction holomorphe de $(x-x_0)$ pour $|x-x_0|<\rho$, telle que $\varphi(0)=0$, ou bien par une équation $x-x_0=\psi(y-y_0)$, ψ étant holomorphe en $y-y_0$ pour $|y-y_0| <\rho'$, et telle que $\psi(0)=0$. Quand le point $p_0=(x_0, y_0)$ n'est pas un point ordinaire de Σ, il est un *point critique algébrique de la surface caractéristique*, si cette surface peut s'exprimer au voisinage de (x_0, y_0) par une relation $y-y_0=\varphi[(x-x_0)^{\frac{1}{p}}]$, où $\varphi[(x-x_0)^{\frac{1}{p}}]$ est une série entière en $(x-x_0)^{\frac{1}{p}}$, p étant un entier positif, convergente pour $|x-x_0|<\rho$, ou bien par une relation pareille $x-x_0=\psi[(y-y_0)^{\frac{1}{p}}]$.

Pour une surface caractéristique Σ quelconque dans le domaine D, l'ensemble des points qui ne sont pas points ordinaires de la surface Σ n'a pas de points d'accumulation dans D. Et de plus on peut voir, d'après le théorème de Weierstrass bien connu, que tout autre point que les points ordinaires est un point critique algébrique sauf les points en lesquels Σ se rencontre elle-même.

Une surface caractéristique Σ dans le domaine D est dite *réductible dans ce domaine* s'il y a deux surfaces caractéristiques Σ_1, Σ_2 dans D, non vides et différentes de Σ, telles que $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$. Au contraire, s'il n'en est pas ainsi, Σ est *irréductible*.

4. Considérons maintenant une suite infinie de surfaces caractéristiques $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ dans un domaine D de l'espace (x, y). On appelle *point limite de la suite* tout point p tel que, pour un voisinage quelconque σ de p, il y ait une infinité de surfaces caractéristiques appartenant à la suite et rencontrant σ. On dit de plus que la suite *converge uniformément en un point* p du domaine D, si, en prenant un voisinage σ de p convenablement dans ce domaine, on peut trouver une suite de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ holomorphes dans σ de façon que $\Sigma_1\cap\sigma, \Sigma_2\cap\sigma, \cdots$ soient données par les équations $\varphi_1=0, \varphi_2=0, \cdots$ respectivement et que la suite de fonctions converge uniformément vers une fonction holomorphe qui ne s'annule pas identiquement dans σ. Trivialement de la définition, la suite de surfaces caractéristiques converge uniformément en chaque point qui n'est pas point limite de la suite. On dit que la suite de surfaces caractéristiques *converge uniformément dans l'intérieur du domaine D* si elle converge uniformément en tout point de D. S'il en est ainsi, l'ensemble des points limites de la suite est aussi une surface caractéristique dans D, pouvant être vide, qui est définie localement par la fonction limite de la suite de fonctions holomorphes $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ ci-dessus. On l'appellera *limite de la suite*.

Considérons ensuite une famille de surfaces caractéristiques dans un domaine D. On dit qu'elle est *normale en un point p* du domaine, si, en prenant un voisinage σ de p suffisamment petit dans ce domaine, on peut extraire, de toute suite infinie de surfaces caractéristiques appartenant à la famille, une suite partielle infinie convergeant uniformément dans l'intérieur de σ. Une famille de surfaces caractéristiques dans D est dite *normale dans ce domaine* si elle est normale en tout point de D. Alors, si une famille de surfaces caractéristiques est normale dans D, on peut extraire de toute suite infinie de surfaces caractéristiques appartenant à la famille, une suite partielle infinie convergeant uniformément dans l'intérieur de ce domaine et donc sa limite est aussi une surface caractéristique dans D. Au contraire, s'il n'en est pas ainsi, par exemple, si, l'ensemble des points limites de toute suite partielle d'une suite de surfaces caractéristiques de la famille forme toujours une surface à 3 dimensions réelles passant par un point p de D, alors la famille cesse d'être normale en ce point p.

5. Pour étudier des familles de surfaces caractéristiques, deux théorèmes suivants de K. Oka[4] sont de la première importance. Premièrement il a caractérisé la normalité d'une famille de surfaces caractéristiques par les aires de surfaces caractéristiques appartenant à la famille :

THÉORÈME A. *Pour qu'une famille de surfaces caractéristiques dans un domaine D de l'espace (x, y) soit normale en un point de D, il faut et il suffit que les surfaces appartenant à la famille soient bornées en aire dans un certain voisinage de ce point.*

Deuxièmement il a étudié l'ensemble des points où une famille de surfaces caractéristiques cesse d'être normale. Pour énoncer cela, rappelons la notion d'ensemble pseudoconcave. Un ensemble E de points dans un domaine D est appelé *ensemble pseudoconcave dans D* s'il est fermé relativement à D et s'il satisfait au théorème de la continuité[5] au voisinage d'un point quelconque p de lui, et si cette propriété admet toute transformation pseudoconforme biunivoque au voisinage de p. Maintenant :

THÉORÈME B. *Considérons une famille de surfaces caractéristiques dans un domaine D. Alors, l'ensemble de tous les points dans D où la famille cesse d'être normale est pseudoconcave dans D.*

---

4) Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc. J. Sci. Hiroshima Univ., série A, volume 4 (1934) pages 93–98. Pour les démonstrations des théorèmes voir les deux mémoires de T. Nishino, a) Sur les familles de surfaces analytiques. J. Math. Kyoto Univ. 1-3 (1962) pages 357–377 ; b) Sur les ensembles pseudoconcaves. J. Math. Kyoto Univ. 1-2 (1962) pages 225–245.

5) Ceci signifie qu'il existe une hypersphère σ de centre p, ayant le caractère suivant : Considérons dans σ un point quelconque (a, b) et une circonférence de la forme, $x=a$, $|y-b|=\rho'$, ρ' étant un rayon quelconque. Si cette circonférence reste extérieur à E, sans l'être pour le point (a, b), on peut trouver un nombre positif ρ de façon que, à tout point x_0 dans $|x-a|<\rho$ corresponde au moins un point y_0 dans $|y-b|<\rho'$ tel que le point (x_0, y_0) appartienne à E.

6. *Notion de société de surfaces caractéristiques.* Dans le présent mémoire on envisagera une classe spéciale de familles de surfaces caractéristiques. Une famille de surfaces caractéristiques *irréductibles* dans un domaine D de l'espace (x, y) sera appelée *société de surfaces caractéristiques dans ce domaine* ou simplement *société caractéristique dans* D, si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1°. *Par tout point du domaine passe au moins une surface de la famille.*

2°. *Sur une surface quelconque de la famille, l'ensemble des points, par lesquels passent plusieurs surfaces de la famille, pouvant être en nombre infini, n'a pas de points d'accumulation dans ce domaine.*

On appelle *point d'indétermination de la société de surfaces caractéristiques* tout point par lequel passent une infinité de surfaces de la famille.

Soient S une société de surfaces caractéristiques du domaine D et D' un domaine quelconque contenu dans D, alors on peut considérer la partie de S dans D' comme une société de surfaces caractéristiques dans D', en décomposant chacune des surfaces caractéristiques de S en ses composantes irréductibles dans D'. Cette décomposition étant faite, on appelle *restriction de* S *au domaine* D' la société caractéristique ainsi obtenue dans D'.

7. *Sociétés de surfaces caractéristiques données par quelques fonctions analytiques ou non.* Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y dans un domaine D, admettant l'infini comme sa valeur, telle que, pour chaque nombre complexe a, l'équation

$$f(x, y)-a=0$$

définit une surface caractéristique, pouvant être vide, dans ce domaine. C'est bien le cas lorsque $f(x, y)$ est une fonction holomorphe ou méromorphe dans D. Alors, en décomposant toutes ces surfaces caractéristiques en leurs composantes irréductibles, on obtient une famille S de surfaces caractéristiques irréductibles dans D qui satisfait évidemment aux deux conditions indiquées plus haut, donc elle est une société de surfaces caractéristiques dans le domaine. Dans cette circonstance on dit que la fonction $f(x, y)$ *donne la société* S *de surfaces caractéristiques dans* D.

Soit donnée une société S de surfaces caractéristiques dans le domaine D. Si elle est donnée par une fonction holomorphe ou méromorphe dans D, on dit qu'elle est *analytique dans ce domaine.* On dit que S est *analytique en un point* p de D s'il y a un voisinage σ de p tel que la restriction de S à σ soit analytique dans σ. Si la société caractéristique S est analytique en tout point de D, elle est dite *localement analytique dans* D. Alors une société de surfaces caractéristiques analytique dans D est a priori localement analytique dans ce domaine.

On donnera plus tard quelques exemples de sociétés de surfaces caractéristiques qui ne sont ni localement analytiques dans le domaine ni analytiques en aucun point du domaine. Parmi elles, il y a beaucoup de sortes; par exemple celle qui est donnée par une fonction continue qui est à la fois une application ouverte, ou encore celle qui ne peut pas être donnée par une certaine fonction pareille. C'est le but du présent mémoire de rechercher la structure des sociétés de surfaces caractéristiques, et notamment celle des sociétés caractéristiques qui ne sont pas analytiques.

8. *Quelques sortes de normalité des sociétés de surfaces caractéristiques.* Une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D est dite *normale en un point p* de D si elle y est normale comme famille de surfaces caractéristiques. Dans ce cas, on dit encore que le point p est un *point N pour cette société caractéristique S.* L'ensemble $\{N\}$ de tous les points N pour S est évidemment un ensemble ouvert dans D. On désigne par E l'ensemble de tous les points où S cesse d'être normale.

En prenant un domaine D' complètement intérieur à D, on peut considérer la restriction S' de S au domaine D'. Si un point p de D est un point N pour toutes les S', où S' correspondent aux domaines D' contenant le point p, on dit que le point p est un *point N' pour S.* On dénote E' l'ensemble de tous les points dans D qui ne sont pas points N' pour S.

On dit qu'un point p de D est un *point ν pour S* s'il y a un voisinage σ de p tel que la restriction de S au domaine σ est normale dans σ. Tous les points ν pour S forment un ensemble $\{\nu\}$ ouvert dans D. L'ensemble de tous les points qui ne sont pas points ν pour S sera désigné par Ω. Alors dans cette circonstance on obtient immédiatement la relation

$$E \supseteqq E' \supseteqq \Omega .$$

Voici un lemme de T. Nishino[6] concernant certaines suites normales de surfaces caractéristiques dans un domaine D, qui sera appliqué à plusieurs reprises dans la suite:

THÉORÈME C. *Soient données une suite $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ normale dans un domaine D de surfaces caractéristiques irréductibles dans D et une autre surface caractéristique Σ_0 irréductible dans D qui n'a de point commun avec aucune surface de la suite. Alors, si l'ensemble E_1 des points limites de cette suite contient au moins un point p_0 de Σ_0, E_1 contient tous les points de Σ_0.*

En appliquant ce théorème à notre cas, faisons ici une remarque tout à fait utile.

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ une suite de surfaces caractéristiques irréductibles, distinctes l'une de l'autre, appartenant à une société S de surfaces caracté-

6) Voir pages 57–59 du mémoire (I) cité dans la note 3).

ristiques, qui est normale dans le domaine D, et Σ_0 une autre surface caractéristique de S. Si l'ensemble E_1 pour cette suite contient au moins un point p_0 de Σ_0 qui est supposé n'étant pas point d'indétermination de S, alors E_1 contient tous les points de Σ_0. Car dans ce cas l'hypothèse de l'énoncé plus haut est vérifiée à l'intérieur complet de D sauf des points d'indétermination de S situés sur Σ_0, si l'on prend une suite partielle infinie.

De là, on voit immédiatement que l'ensemble E_1 consiste exactement en une réunion de surfaces caractéristiques de S.

§ 2. Propriété fondamentale de l'ensemble E des points où une société de surfaces caractéristiques cesse d'être normale.

9. THÉORÈME FONDAMENTAL: *Soit donnée une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D de l'espace (x, y). Supposons que toute surface Σ de S a son aire finie dans tout le domaine D. Alors l'ensemble E des points où S cesse d'être normale est un ensemble pseudoconcave dans D n'ayant aucun point intérieur.*

Si l'hypothèse de l'énoncé n'est pas vérifiée, on peut encore dire qu'en prenant un domaine D' quelconque complètement intérieur à D, l'ensemble E pour la restriction S' de S au domaine D' est un ensemble pseudoconcave dans D' n'ayant aucun point intérieur. Car, la partie dans D' de toute surface de S est d'aire finie et il en est de même des composantes de cette partie.

De là, en considérant la relation citée dans le N° précédent, on peut immédiatement voir que: Pour toute société de surfaces caractéristiques, l'ensemble Ω est fermé dans D et n'admet pas de point intérieur; en d'autres termes, que l'ensemble $\{\nu\}$ est ouvert et distribué partout dense dans D.

10. 1°. Pour démontrer le théorème fondamental, assemblons d'abord pour chaque entier positif n toutes les surfaces de S d'aire inférieure ou égale à n, et écrivons M_n l'ensemble de tous les points trouvés sur les surfaces ainsi assemblées. Alors, en vertu de la propriété 1° des sociétés de surfaces caractéristiques, tout le point de D est contenu dans une certaine surface de S et par suite dans un certain ensemble M_n. Donc on a

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n .$$

Maintenant vérifions que chaque ensemble M_n est fermé dans D. Soit $p_1, p_2, \cdots$ une suite de points appartenant tous à M_n qui a un point limite p_0 dans D. Soit Σ_0 une surface caractéristique de S qui passe par le point p_0. Prenons pour chaque p_i de la suite une surface caractéristique Σ_i de S d'aire inférieure ou égale à n telle que p_i soit un point de Σ_i. On peut évidemment supposer que chaque Σ_i ne passe par le point p_0 et de plus qu'elle ne rencontre pas la surface Σ_0 au voisinage de p_0, car s'il en est ainsi il n'y aurait rien à dire. Alors, d'après le théorème A, la suite de surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ est normale dans le domaine D. En extrayant une suite partielle de cette suite, si nécessaire, on peut supposer qu'elle converge uniformément dans l'intérieur de D. La limite E_1 de cette suite est alors une surface caractéristique dans D, et, d'après le théorème C, l'ensemble E_1 contient tous les points de Σ_0 au voisinage de p_0, car il contient un point p_0 sur Σ_0. L'ensemble de tous les points d'indétermination de S situés sur Σ_0 n'ayant pas de point d'accumulation, il en résulte immédiatement que E_1 contient tous les points de Σ_0. Sous cette condition, l'aire de la surface caractéristique E_1 est la limite de la suite des aires des surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$[7] qui sont toutes inférieures ou égales à n. Donc celle de E_1 et a priori celle de Σ_0 est n au plus. C'est à dire que Σ_0 appartient à M_n. On a ainsi vu que chaque ensemble M_n est fermé dans D.

2°. Pour chaque point p dans D en prenant un voisinage quelconque δ de ce point, on peut encore écrire:

$$\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\delta \cap M_n\} .$$

L'ensemble $\delta \cap M_n$ étant fermé dans δ, le domaine δ est la somme d'ensembles fermés en nombre fini ou infini dénombrable au plus. Donc, d'après le théorème de R. Baire, il existe un entier positif n tel que $\delta \cap M_n$ contienne un point p_0 comme point intérieur de lui-même. Alors, si l'on décrit une petite hypersphère σ de centre p_0, σ est contenue dans $\delta \cap M_n$. Il en résulte que l'aire de toute surface de S qui passe par un point p' dans σ est inférieure ou égale à n dans D ainsi que dans σ. En effet, si une surface Σ' qui passe par un point p' de σ est d'aire supérieure à n, alors il y a pour tout point p sur Σ' dans σ une surface passant par p et ayant son aire inférieure ou égale à n dans D. Donc sur Σ' il y a une infinité de points par lesquels passent les plusieurs surfaces caractéristiques de la famille. C'est en contradiction avec la propriété 2° des sociétés caractéristiques. Donc, S est normale dans σ.

De là on voit que l'ensemble ouvert $\{N\}$ des points où S est normale est distribué partout dense dans D et par suite E n'a pas de point intérieur de lui-même. De plus, d'après le théorème B, E est pseudoconcave dans le domaine D.

---

7) Voir pour l'aire de surface caractéristique le mémoire a) pages 368–370 cité dans la note 4).

§ 3. Allure d'une société de surfaces caractéristiques au voisinage d'un point où elle est normale.

11. Soit donnée une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D de l'espace (x, y). Supposons pour simplifier l'écriture que l'origine est un point ν pour S et que S n'y a pas de point d'indétermination de plus que S ne contient pas le plan caractéristique $y=0$. On peut toujours trouver un tel point aussi près que l'on veut d'un point ν quelconque, si l'on effectue une transformation linéaire convenable dans tout l'espace. Alors il y a une petite hypersphère σ de centre origine telle que la restriction S_σ de S au domaine σ soit normale dans tout σ. Soit Σ_a la somme de toutes les surfaces caractéristiques de S_σ irréductibles dans σ qui passent par l'origine. Alors, d'après la propriété 2° des sociétés de surfaces caractéristiques, on peut trouver à l'intérieur complet de σ une autre hypershère σ' de centre origine telle que la surface Σ_a ne rencontre aucune des surfaces caractéristiques de S_σ, autres que celles de Σ_a, dans le domaine fermé $\bar{\sigma}'$. En outre, on peut décrire un dicylindre $|x|<\rho$, $|y|<\rho'$ contenu dans σ' de façon que Σ_a ne rencontre pas l'hypersurface $H=\{|x|=\rho,\ |y|\leqq\rho'\}$.

1°. Dans cette circonstance, on peut trouver dans ce dicylindre une hypersphère σ_0 de centre origine assez petite pour que toute surface caractéristique de $S_{\sigma'}$ irréductible dans σ' qui passe par un point de σ_0 ne rencontre pas l'hypersurface H.

En effet si ce n'est pas vrai, on peut trouver une suite de surfaces caractéristiques $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \cdots$ de $S_{\sigma'}$, distinctes l'une de l'autre, telle qu'elle converge uniformément à l'intérieur de σ'. Son ensemble limite E'_1 contient une partie Σ'_a de Σ_a contenant l'origine. Les composantes irréductibles de E'_1 qui ne sont pas contenues dans Σ_a forment une surface caractéristique Σ'_b dans σ', passant par un point de l'hypersurface H. Chaque surface Σ'_i, $i=1, 2, \cdots$ est contenue dans une et une seule surface caractéristique Σ_i de S_σ. En prenant si nécessaire une suite partielle convenable, on peut supposer ici que la suite $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$ aussi converge uniformément dans l'intérieur de σ. Considérons cette suite-ci. D'après la remarque faite à la fin du N° 8, la limite E_1 de la suite se compose de certaines des surfaces de S_σ et contient toute la surface Σ_a. Les composantes irréductibles de la surface caractéristique E_1, qui ne sont pas contenues dans Σ_a, forment une surface caractéristique Σ_b dans σ, qui contient Σ'_b et qui ne rencontre pas Σ_a dans $\bar{\sigma}'$ d'après la condition imposée à σ'. Donc on peut prendre un voisinage v_a de Σ_a et celui v_b de Σ_b de manière qu'ils ne se rencontrent pas dans $\bar{\sigma}'$. Alors toute $\Sigma_i \frown \bar{\sigma}'$ ainsi que Σ'_i est entièrement contenue dans la somme des deux domaines v_a et v_b, pourvu que l'indice i surpasse un certain entier positif. Mais c'est une contradiction avec le fait que les surfaces $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \cdots$ irréductibles dans σ' s'approchent de Σ'_a et de Σ'_b à la fois, aussi près que l'on veut.

2°. Chaque surface caractéristique Σ' de $S_{\sigma'}$ qui passe par un point de σ_0 ne rencontrant pas l'hypersurface $H=\{|x|=\rho,\ |y|\leqq\rho'\}$, on peut, d'après le théorème de Weierstrass, représenter la surface Σ' dans le domaine $\{|x|<\rho,\ |y|<\rho'\}$ par l'équation

$$x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y)=0$$

où $a_i(y)$ $i=1, \cdots, n$ sont des fonctions holomorphes dans le cercle $|y|<\rho'$. Comme $S_{\sigma'}$ est normale dans σ', les ordres n sont bornés pour les surfaces de S passant par σ_0.

On a donc vu qu' : Au voisinage d'un des points ν de la société caractéristique S qui n'est pas un point d'indétermination, en faisant une transformation linéaire convenable si nécessaire, les surfaces de S sont toujours représentées par les équations pseudopolynômes avec les ordres bornés, dont les racines sont aussi bornées.

12. Quand on représente une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D au voisinage d'un de ses points ν qui n'est pas un point d'indétermination, où on suppose qu'il se trouve à l'origine, par les équations pseudopolynômes avec les ordres bornés, on dit que ce point est un *point* β *pour* S, si ces équations pseudopolynômes admettent un paramètre complexe continu β. Cela veut dire que l'on peut trouver une équation pseudopolynôme

$$x^m+a_1(y, \beta)x^{m-1}+\cdots+a_m(y, \beta)=0\,,$$

où les fonctions $a_1(y, \beta), \cdots, a_m(y, \beta)$ sont des fonctions continues des deux variables complexes y et β, holomorphes par rapport à y, dans un certain domaine $\{|y|<\rho',\ |\beta-\beta_0|\leqq\varepsilon\}$, de manière que pour chaque surface caractéristique Σ de $S_{\sigma'}$ passant par un certain voisinage σ_0 de l'origine, il y ait une et une seule valeur de β pour laquelle la surface définie par l'équation comprenne la partie de Σ dans un certain dicylindre $\{|x|<\rho,\ |y|<\rho'\}$ et que les deux surfaces correspondant respectivement à deux valeurs distinctes de β ne rencontrent pas dans le dicylindre.

Dans le cas où le pseudopolynôme se réduit à celui d'ordre 1:

$$x+a(y, \alpha)=0\,,$$

on dit encore que ce point est un *point* α *pour* S.

D'après la définition, tous les points β pour S dans D forment un ensemble ouvert dans ce domaine que l'on désigne par $\{\beta\}$. Et puis dans le cas où la société caractéristique S est normale dans tout le domaine, on désigne par F l'ensemble de tous les points dans D qui ne sont pas points β pour S.

L'ensemble $\{\alpha\}$ de tous les points α de S dans D est évidemment aussi ouvert dans D.

13. Maintenant revenons à la société caractéristique S dont il s'agissait dans le N° 11. Les ordres des équations pseudopolynômes qui représentent les surfaces de $S_{\sigma'}$ au voisinage de l'origine étant bornés, il y a le plus grand m. Assemblons toutes les surfaces caractéristiques de $S_{\sigma'}$ dont les pseudopolynômes sont d'ordre m, et écrivons Γ la somme des surfaces ainsi assemblées. Alors Γ est un ensemble ouvert dans le domaine σ_0. En effet soit p un point de Γ et supposons qu'il existe une suite de points $p_1, p_2, \cdots$ qui tend vers p et de plus que les pseudopolynômes correspondant aux surfaces caractéristiques Σ_i, $i=1, 2, \cdots$ qui passent par p_i respectivement sont d'ordre inférieur à m. En choisissant une suite partielle si nécessaire convergeant uniformément dans $\{|x|<\rho, |y|<\rho'\}$, la limite de la suite $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots$, d'après le théorème C, doit contenir la surface caractéristique Σ, où Σ est la somme des surfaces de S qui passent par le point p. Mais cela est évidemment impossible.

Soit Σ_0 une surface caractéristique dans Γ, et soit $p_0=(x_0, y_0)$ un point ordinaire de Σ_0. Alors toutes les surfaces caractéristiques dans Γ qui sont suffisamment voisines de Σ_0 passent une et une seule fois par le cercle $|x-x_0|<\varepsilon$, ε étant un nombre réel positif suffisamment petit, sur le plan caractéristique $y=y_0$. Donc on peut représenter chaque Σ dans Γ suffisamment voisine de Σ_0 par l'équation pseudopolynôme

$$x^m+a_1(y, \beta)x^{m-1}+\cdots+a_m(y, \beta)=0\,,$$

en prenant pour le paramètre β le point dans le cercle $|x-x_0|<\rho$ sur le plan $y=y_0$ par lequel passe la surface Σ. D'après le théorème C, toutes les fonctions $a_1(y, \beta), \cdots, a_m(y, \beta)$ sont des fonctions continues des 2 variables (y, β) et holomorphes pour la variable y dans le domaine $\{|y-y_0|<\rho', |\beta-\beta_0|\leqq\varepsilon\}$, où $\beta_0=x_0$. Dans cette circonstance, tous les points dans Γ sont des points β pour cette société caractéristique S.

Envisageons encore le point (x_0, y_0) pris plus haut. Alors, au voisinage de ce point, toute la surface caractéristique Σ dans Γ est représentée par l'équation d'ordre 1

$$x+a(y, \alpha)=0$$

en prenant encore pour le paramètre α le point dans le cercle $|x-x_0|<\rho$ sur le plan $y=y_0$ par lequel passe la surface Σ. La fonction $a(y, \alpha)$ est évidemment continue par rapport aux 2 variables (y, α) et holomorphe par rapport à la variable y. Donc on peut encore dire que tous les points dans Γ près de (x_0, y_0) sont des points α pour S.

D'après ce que l'on a vu jusqu'ici, on peut dire qu' : Au voisinage d'un point ν pour une société S de surfaces caractéristiques dans D, l'ensemble

$\{\beta\}$ pour S est distribué partout dense dans D. Il en est évidemment de même de l'ensemble des points α.

14. En combinant les énoncés aux N[os] 9 et 13 on a le

THÉORÈME. *Etant donnée une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D, alors l'ensemble $\{\beta\}$ pour S est distribué partout dense dans ce domaine, et il en est de même de l'ensemble $\{\alpha\}$ des points α pour S.*

Par suite, dans le cas où S est normale dans tout le domaine D, l'ensemble F des points de D qui ne sont pas points β est fermé et sans points intérieurs dans D.

§ 4. Les suites infinies de surfaces caractéristiques ne se rencontrant pas entre elles.

Si l'on prend une suite infinie de surfaces caractéristiques dans une société de surfaces caractéristiques d'un domaine D, alors, en gros, les surfaces caractéristiques de la suite ne se rencontrent pas dans l'intérieur complet quelconque de D sauf des points d'indétermination. Réciproquement, étant donnée une suite infinie de surfaces caractéristiques ne se rencontrant pas entre elles dans un domaine D, est ce que l'on peut trouver une société caractéristique dans D qui comprend toutes les surfaces caractéristiques de la suite? C'est la question que l'on va aborder dans le présent paragraphe.

15. 1°) *Deux surfaces caractéristiques très simples qui sont contenues dans une certaine société de surfaces caractéristiques. Soient données deux fonctions holomorphes $f_1(y)$, $f_2(y)$ dans un domaine Δ simplement connexe sur le plan de y telles qu'elles satisfassent aux inégalités*

$$0<|f_2(y)|<|f_1(y)|<1 \quad \textit{pour } y\in\Delta .$$

Alors on peut construire une société S de surfaces caractéristiques dans le domaine $\{0\leqq|x|\leqq 1, y\in\Delta\}$ contenant les deux surfaces caractéristiques $x=f_1(y)$, $x=f_2(y)$, de manière que toute surface caractéristique de S soit de la forme $x=f(y)$, où $f(y)$ est une fonction holomorphe dans Δ.

D'abord on forme la famille de surfaces caractéristiques

$$x=e^{i\theta}\cdot t\cdot f_2(y)\,, \qquad 0\leqq t\leqq 1\,, \qquad 0\leqq\theta<2\pi\,.$$

Cette famille est évidemment une société caractéristique dans le domaine $\{0\leqq|x|\leqq|f_2(y)|,\ y\in\Delta\}$.

Ensuite on donne la famille de surfaces caractéristiques

$$x=e^{i\theta}\cdot e^{[t\log f_1(y)+(1-t)\log f_2(y)]}\,, \qquad 0<t\leqq 1\,, \qquad 0\leqq\theta<2\pi\,,$$

où l'on prend une branche uniforme pour chacune des $\log f_1(y)$ et $\log f_2(y)$. C'est possible puisque le domaine Δ est simplement connexe. Cette famille est une société caractéristique dans le domaine $\{|f_2(y)|<|x|\leqq|f_1(y)|,\ y\in\varDelta\}$. En effet, pour chaque y, la courbe l: $e^{[t\log f_1(y)+(1-t)\log f_2(y)]}$, $0<t\leqq 1$ part d'un point sur le cercle intérieur $|x|=|f_2(y)|$ et arrive à un point sur le cercle extérieur $|x|=|f_1(y)|$ en faisant croître son module continûment. En tournant cette courbe l une fois autour de l'origine du plan de x, on a l'ensemble des points $x=e^{i\theta}\cdot e^{[t\log f_1(y)+(1-t)\log f_2(y)]}$, $0<t\leqq 1$, $0\leqq\theta<2\pi$, qui est évidemment l'anneau $|f_2(y)|<|x|\leqq|f_1(y)|$.

En dernier lieu la famille de surfaces caractéristiques

$$x=e^{i\theta}\cdot e^{[t\log 1+(1-t)\log f_1(y)]}=e^{i\theta}\cdot e^{(1-t)\log f_1(y)},\qquad 0<t\leqq 1,\quad 0\leqq\theta<2\pi$$

est une société caractéristique dans le domaine $\{|f_1(y)|<|x|\leqq 1,\ y\in\varDelta\}$. Ceci sera vérifié comme dans le cas précédent.

En assemblant toutes les surfaces caractéristiques construites plus haut, qui sont toutes de la forme $x=f(y)$, on a fourni une société S de surfaces caractéristiques dans le domaine $\{0\leqq|x|\leqq 1,\ y\in\varDelta\}$. Les deux surfaces caractéristiques $x=f_1(y)$ et $x=f_2(y)$ données a priori sont contenues dans S.

2°) *Suite infinie de surfaces caractéristiques très simple qui est contenue dans une certaine société de surfaces caractéristiques. Soit donnée une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine $\varDelta$ simplement connexe sur le plan de y satisfaisant aux inégalités suivantes*

$$0<\cdots<|f_2(y)|<|f_1(y)|<f_0(y)\equiv 1\quad \textit{pour}\ y\in\varDelta\,.$$

Alors, on peut construire dans le domaine $\{0\leqq|x|\leqq 1,\ y\in\varDelta\}$ une société de surfaces caractéristiques, toutes de la forme $x=f(y)$, $f(y)$ étant une fonction holomorphe dans $\varDelta$, telle qu'elle contienne toutes les surfaces caractéristiques données par $x=f_n(y)$, $n=1,2,\cdots$.

En effet, selon la méthode employée précédemment, on peut fournir une société caractéristique dans chaque anneau

$$|f_{i+1}(y)|\leqq|x|<|f_i(y)|\,,\qquad i=0,1,2,\cdots.$$

En prenant si nécessaire une suite partielle, on peut supposer que la suite $f_1(y), f_2(y),\cdots$ converge uniformément dans l'intérieur de $\varDelta$ vers sa fonction limite $g(y)$. Dans le cas où $g(y)\equiv 0$, les familles de surfaces caractéristiques déjà construites et le plan caractéristique $x=0$ forment une société caractéristique dans tout le domaine $\{0\leqq|x|\leqq 1,\ y\in\varDelta\}$. Dans le cas où $g(y)\not\equiv 0$, $g(y)$ n'a aucun zéro dans $\varDelta$. Les familles de surfaces caractéristiques déjà construites forment une société caractéristique dans le domaine $\{|g(y)|<|x|\leqq 1,\ y\in\varDelta\}$. Pour compléter la construction de la société caractéristique, il suffit d'y adjoindre la famille de surfaces caractéristiques dans le domaine $\{0\leqq|x|\leqq|g(y)|,\ y\in\varDelta\}$ construite selon la méthode indiquée dans le 1°).

16. *Une société de surfaces caractéristiques construite à l'aide de la méthode citée.* Maintenant on peut donner un exemple de société caractéristique qui cesse d'être normale effectivement en certains points. Considérons les fonctions $x=f_n(y)=y^n$, $n=1, 2, \cdots$, holomorphes dans le domaine simplement connexe Δ obtenu à partir du cercle unité $\{|y|<1\}$ par l'exception de la partie de l'axe réelle donnée par $-1<y_1\leqq 0$, $y_2=0$ où $y=y_1+iy_2$. Elles forment une suite infinie satisfaisant aux inégalités

$$0<\cdots<|f_2(y)|<|f_1(y)|<1 \quad \text{pour } y\in\Delta\,.$$

Alors, selon la méthode exposée dans le N° précédent, on peut construire une société caractéristique S dans le domaine $\{0<|x|<1,\ y\in\Delta\}$.

Voyons une surface quelconque de S

$$\begin{aligned} x=f(y) &= e^{i\theta}\cdot e^{[t\log y^n+(1-t)\log y^{n+1}]} \\ &= e^{i\theta}\cdot e^{[nt+(n+1)(1-t)]\log y}=e^{i\theta}\cdot y^{n+1-t}\,. \end{aligned}$$

Cette surface caractéristique ne comprend pas de point (x, y) *dans l'anneau* $0<|x|<1$ *où la coordonnée* y *est un point dans le domaine* $\delta=\{|y|\geqq 1$ *sauf la partie de l'axe réelle donnée par* $-\infty<y_1\leqq -1$, $y_2=0\}$, donc si l'on fournit une famille de surfaces caractéristiques $y=y'$, $0<|x|<1$, où $y'\in\delta$, cettes deux familles de surfaces caractéristiques forment une société caractéristique $\tilde{S}$ dans le domaine $D=\{0<|x|<1,\ \Delta'=|y|<+\infty$ sauf la partie de l'axe réelle donnée par $-\infty<y_1\leqq 0$, $y_2=0$, où $y=y_1+iy_2\}$.

La société caractéristique $\tilde{S}$ *cesse d'être normale sur l'hypersurface* $H=\{|y| =1$ *sauf* $y=-1$, $0<|x|<1\}$ *à 3 dimensions réelles*, car la suite de surfaces caractéristiques de $\tilde{S}$ $x=f_n(y)$, $n=1, 2, \cdots$ a l'hypersurface H comme ensemble des points limites et il en est de même de toute suite partielle de cette suite.

On voit dans la société caractéristique $\tilde{S}$ ainsi construite qu'il y a effectivement des points, en lesquels elle cesse d'être normale mais qui sont des points α donc a priori des points ν pour $\tilde{S}$. En d'autres termes, on a pour $\tilde{S}$ la relation

$$E=E'\neq\Omega\,.$$

17. 1°) *Premier exemple de suite de surfaces caractéristiques qui ne peut s'enfoncer dans aucune société de surfaces caractéristiques.* Considérons la même suite de surfaces caractéristiques $x=f_n(y)=y^n$, $n=1, 2, \cdots$ que dans le numéro précédent mais dans un domaine plus grand $D_0=\{0\leqq|x|<1,\ y\in\Delta' =|y|<+\infty$ sauf la partie de l'axe réelle donnée par $-\infty<y_1\leqq 0$, $y_2=0$ où $y=y_1+iy_2\}$. Alors il n'y a pas de société caractéristique dans le domaine D_0 qui contient cette suite.

En effet d'abord il est évident que s'il existe une société caractéristique S dans le domaine qui contient toutes les surfaces caractéristiques de la suite, elle doit aussi contenir le plan caractéristique $x=0$, $y \in \Delta'$, car la partie de ce plan $\{x=0,\ y \in \Delta = |y| < 1$ sauf la partie de l'axe réelle donnée par $-1 < y_1 \leqq 0,\ y_2 = 0\}$ est contenue dans la limite de la suite normale dans le domaine $\{0 \leqq |x| < 1,\ y \in \Delta\}$ de surfaces caractéristiques $x = f_n(y)$, $n = 1, 2, \cdots$ appartenant à S.

Ensuite voyons quelle sorte de surface caractéristique Σ' est celle qui passe par un point y' sur la circonférence $|y| = 1$ du plan caractéristique $x = x'$, x' étant un point près de l'origine. Si elle n'est pas de la forme $y = y'$, d'après le théorème de Weierstrass, elle est représentée au voisinage de (x', y') par une équation

$$x^m + a_1(y)x^{m-1} + \cdots + a_m(y) = 0 .$$

Alors Σ' doit rencontrer des surfaces caractéristiques $y^n - x = 0$ sur une infinité de points qui a des points d'accumulation dans D_0. C'est en contradiction avec la propriété 2° des sociétés de surfaces caractéristiques, donc Σ' doit être le plan caractéristique $y = y'$. Mais c'est encore impossible puisqu'alors toutes les plans caractéristiques $y = y'$ rencontrent le plan $x = 0$.

On voit dans cet exemple une suite de surfaces caractéristiques pour laquelle le théorème C ne subsiste plus ; en général, pour les suites de surfaces caractéristiques qui ne sont pas normales.

2°) *Deuxième exemple.* Voyons une autre sorte de suite de surfaces caractéristiques qui n'est contenue dans aucune société caractéristique. Les surfaces caractéristiques $x = y^{\frac{q}{p}}$, où $\frac{q}{p}$ prend tous les nombres rationnels positifs, ne se rencontrent ni l'une ni l'autre dans le domaine $D_1 = \{0 \leqq |y| < 1,\ 0 < |x| < 1\}$.

D'abord, on voit que l'ensemble E_1 des points limites de cette suite de surfaces caractéristiques est tout le domaine D_1. En effet, pour un point quelconque (x', y') dans D_1, il existe une suite de paires de nombres entiers (p_i, q_i), $i = 1, 2, \cdots$ tel que l'ensemble des points limites de l'ensemble des points $y'^{\frac{q_i}{p_i}}$, $i = 1, 2, \cdots$ soit le cercle $|x| = |x'|$. Cela est fourni, en prenant le nombre positif a tel que $|x'| = |y'|^a$, par la suite de nombres rationnels

$$\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}, \cdots$$

qui sont différents de a et tendent vers a. Donc, le point (x', y') est contenu dans E_1 et, par suite, tout le point dans D_1 est contenu dans E_1.

Ensuite voyons l'ensemble des points limites de la suite de surfaces caractéristiques $x=y^{\frac{q_i}{p_i}}$, $i=1, 2, \cdots$. Il contient l'hypersurface $H'=\{|x|=|x'|, |y|<1\}$ à 3 dimensions réelles et il en est de même de toute suite partielle de cette suite. Donc cette suite cesse d'être normale sur l'hypersurface H'. D'où, on voit facilement que la suite originale de surfaces caractéristiques $x=y^{\frac{q}{p}}$ cesse d'être normale dans tout le domaine D_1. Cette circonstance ne change pas quand on prend un domaine D_1' complètement intérieur dans D_1, mais suffisamment approché de D_1. Donc, d'après le théorème fondamental, il n'existe pas de société caractéristique du domaine D_1 qui contient la suite de surfaces caractéristiques $x=y^{\frac{q}{p}}$.

En d'autres termes on voit dans cet exemple une suite de surfaces caractéristiques pour laquelle le théorème fondamental établi pour les sociétés de surfaces caractéristiques ne subsiste plus.

§ 5. Sociétés de surfaces caractéristiques construites à l'aide des transformations linéaires d'une variable.

Dans le présent paragraphe, concernant les énoncés au § 2, on construit quelques sociétés de surfaces caractéristiques qui cessent d'être normales sur un ensemble donné pseudoconcave, sans points intérieurs, du type particulier.

18. Il y a une et une seule transformation linéaire d'une variable y qui applique le cercle unité sur lui-même en fixant le point $y=1$, et de plus qui apporte un point donné $y=y_0$ à un autre point donné $y=y_1$. Ecrivons $l_\alpha(y)$ la transformation de cette sorte, qui apporte l'origine $y=0$ à un point $y=\alpha$ où $0\leqq|\alpha|<1$. Toutes les transformations $l_\alpha(y)$, α parcourant le cercle unité $0\leqq|\alpha|<1$, forment un groupe par rapport à la composition fonctionnelle. Plus exactement, la transformation $l_\alpha(y)$ s'écrit par

$$l_\alpha(y)=\frac{(1-\alpha)y+\alpha(1-\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}(1-\alpha)y+(1-\bar{\alpha})}\,.$$

19. 1°. D'abord on voit que *la famille $\mathcal{L}$ des surfaces caractéristiques $\Sigma_\alpha=[x=l_\alpha(y)]$, où α est un nombre complexe avec $0\leqq|\alpha|<1$, est une société caractéristique dans le domaine $D=\{0\leqq|x|<1,\ 0\leqq|y|<1\}$.*

En effet si $\alpha_1\neq\alpha_2$ alors les deux surfaces caractéristiques Σ_{α_1}, Σ_{α_2} ne se rencontrent pas dans D, car pour un point (x', y') dans D l'égalité

$$l_{\alpha_1}(y')=x'=l_{\alpha_2}(y')$$

subsiste si et seulement si $\alpha_1=\alpha_2$. Et puis, pour un point (x', y') quelconque dans D, la transformation $l=l_{x'}\circ l_{y'}^{-1}$ appartient au groupe et la surface caractéristique $x=l(y)$ passe par ce point (x', y'). Donc la famille de surfaces caractéristiques $\mathcal{L}$ est une société caractéristique dans D.

On remarque ici que cette société caractéristique $\mathcal{L}$ dans D a une propriété qui concerne la frontière du domaine D: *Toute la surface caractéristique de* $\mathcal{L}$ *ne rencontre pas la frontière* $\{0 \leqq |y| < 1,\ |x| = 1\}$ *du domaine* D. Donc, on peut l'enfoncer dans un domaine plus grand que D, par exemple dans le domaine $D_1 = \{0 \leqq |y| < 1,\ 0 \leqq |x| < +\infty\}$, en y adjoignant les plans caractéristiques: $x = x'$, $0 \leqq |y| < 1$, pour tous les x' avec $1 \leqq |x'| < +\infty$.

2°. Ensuite envisageons une société caractéristique qui est un peu plus compliquée que la précédente. *Pour deux nombres entiers positifs p et q relativement premiers, considérons la famille $\mathcal{L}^{p,q}$ des surfaces caractéristiques $\Sigma^{p,q} = [x^q = l_\alpha(y^p)]$, où α est un nombre complexe avec $0 \leqq |\alpha| < 1$. Elle est aussi une société caractéristique dans le domaine D.* Ceci sera vérifié comme précédemment.

De plus *toute la surface de la famille ne rencontre pas la frontière* $\{0 \leqq |y| < 1,\ |x| = 1\}$ *du domaine* D. Donc on peut encore l'enfoncer dans le domaine D_1 de la même façon.

20. Décrivant sur le plan de x des cercles c_n de centres $x = \dfrac{1}{n}$ et de rayons $r_n = \dfrac{1}{2(n^2+1)}$. La suite de cercles c_n, $n = 1, 2, \cdots$ tend vers l'origine et ni l'un ni l'autre ne se rencontrent. Soit $x = \varphi_n(z)$ une transformation conforme qui applique le cercle unité du plan de z au cercle c_n sur le plan de x, par exemple $x = \varphi_n(z) = \dfrac{z}{2(n^2+1)} + \dfrac{1}{n}$. On désigne le domaine $\{x \in c_n,\ 0 \leqq |y| < 1\}$ par Δ_n.

Maintenant on va construire une société de surfaces caractéristiques dans le domaine $D_1 = \{0 \leqq |y| < 1, 0 \leqq |x| < +\infty\}$ à l'aide des sociétés caractéristiques $\mathcal{L}^{n,1}$, $n = 1, 2, \cdots$.

D'abord on donne dans le domaine Δ_1 la famille de surfaces caractéristiques $\Sigma_\alpha^{(1)} = [x = \varphi_1(l_\alpha(y))]$ pour $0 \leqq |\alpha| < 1$; dans le domaine Δ_2 la famille des $\Sigma_\alpha^{(2)} = [x = \varphi_2(\sqrt{l_\alpha(y)})]$ pour $0 \leqq |\alpha| < 1$; dans le domaine Δ_3 la famille des $\Sigma_\alpha^{(3)} = [x = \varphi_3(\sqrt[3]{l_\alpha(y)})]$ pour $0 \leqq |\alpha| < 1, \cdots$. Alors la totalité de ces familles de surfaces caractéristiques forment une société caractéristique dans l'ensemble ouvert des points $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots$. Ensuite on fournit les surfaces caractéristiques $x = x'$ pour tous les points x' en dehors de $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots$ sur le plan $0 \leqq |x| < +\infty$. Alors on obtient une société caractéristique S dans tout le domaine D_1.

Pour cette société S de surfaces caractéristiques, on voit facilement que *l'ensemble E des points où S cesse d'être normale est la surface caractéristique*: $x = 0$, $0 \leqq |y| < 1$, qui appartient à la société caractéristique S. En outre, tous les points sur la surface $x = 0$ ne sont pas points ν. En d'autres termes, on a pour cette société caractéristique la relation

$$E = E' = \Omega\,.$$

Tous les autres points dans le domaine D_1 sont des points β pour S.

21. REMARQUE. De la même manière, en prenant la suite de cercles c_n convenablement sur le plan de x, on peut construire une société caractéristique telle que l'ensemble E des points où cette société caractéristique cesse d'être normale (et ainsi que l'ensemble Ω) soit l'hypersurface $H=\{x_1=0, 0\leqq|y|<1$ où $x=x_1+ix_2\}$ à 3 dimensions réelles, et que tous les autres points soient des points β. D'ailleurs, on aura encore celle telle que l'ensemble E (et ainsi que l'ensemble Ω) soit l'ensemble produit d'un domaine sur le plan de y et d'un ensemble fermé sans points intérieurs donné a priori sur le plan de x et que tous les autres points soient des points β.

§ 6. Sociétés de surfaces caractéristiques construites à l'aide des transformations linéaires d'une variable. (*bis*)

Quant aux énoncés dans le § 3, on construit, dans le présent paragraphe, de la même manière que dans le paragraphe précédent, quelques sociétés de surfaces caractéristiques qui sont normales dans tout le domaine et qui ont, comme leurs ensembles F des points qui ne sont pas de points β pour elles, un ensemble donné fermé et sans points intérieurs, du type particulier.

22. Conservont les notations dans le paragraphe précédent. *Lorsqu'on considère la famille des surfaces caractéristiques* $\tilde{\Sigma}^{(1)}_\alpha=[x=\varphi_1(\sqrt{l_\alpha(y)})]$ *pour* $0\leqq|\alpha|<1$ *dans le domaine* Δ_1, *celle des surfaces* $\tilde{\Sigma}^{(2)}_\alpha=[x=\varphi_2(\sqrt{l_\alpha(y)})]$ *pour* $0\leqq|\alpha|<1$ *dans le domaine* Δ_2, *celle des surfaces* $\tilde{\Sigma}^{(3)}_\alpha=[x=\varphi_3(\sqrt{l_\alpha(y)})]$ *pour* $0\leqq|\alpha|<1$ *dans le domaine* $\Delta_3, \cdots$ *et qu'on y adjoint les plans caractéristiques* $x=x'$ *pour tous les points* x' *en dehors des cercles* c_n, $n=1, 2, \cdots$, *alors la totalité de ces surfaces caractéristiques forment une société caractéristique* $\tilde{S}$ *dans tout le domaine* $D_1=\{0\leqq|y|<1,\ 0\leqq|x|<+\infty\}$.

Elle est évidemment normale dans tout le domaine. De plus il est facilement vérifié que *tout point en dehors du plan caractéristique* $x=0$ *est un point* β *pour* $\tilde{S}$.

23. Pour étudier le comportement de cette société caractéristique $\tilde{S}$ au voisinage d'un point sur la surface $x=0$, il faut tout d'abord faire quelques remarques concernant les points β.

1°. Représentons une société caractéristique S dans un voisinage $v=\{0\leqq|x|<\rho,\ 0\leqq|y|<\rho'\}$ de l'origine, qui est un point β, par une équation pseudopolynôme à un paramètre continu β, $|\beta|\leqq\varepsilon$, où on a supposé pour simplifier l'écriture que $\beta_0=0$ dans le N° 12:

$$x^m+a_1(y, \beta)x^{m-1}+\cdots+a_m(y, \beta)=0\,.$$

A chaque point (x, y) dans le domaine v, il correspond d'après la définition de point β une et une seule valeur de β telle que la surface caractéristique correspondant à cette valeur comprenne la surface caractéristique de S qui passe par le point (x, y). On considère cette valeur β comme une fonction

$$\beta = \varphi(x, y)$$

des deux variables (x, y) définie dans le domaine v.

a) *La fonction $\beta = \varphi(x, y)$ est continue dans ce domaine.*

En effet, prenons une suite de points (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots$, tendant vers un point (x', y') dans v et telle que la suite de valeurs $\beta_i = \varphi(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \cdots$ tende vers une valeur β'. Alors, étant $f(x, y, \beta)$ le pseudopolynôme ci-dessus, la suite de fonctions holomorphes des deux variables (x, y)

$$f(x, y, \beta_1),\ f(x, y, \beta_2), \cdots$$

tend uniformément vers la fonction limite $f(x, y, \beta')$, qui ne s'annule pas identiquement dans v. Donc la suite de surfaces caractéristiques

$$f(x, y, \beta_1) = 0,\ f(x, y, \beta_2) = 0, \cdots$$

tend aussi uniformément vers la surface caractéristique $f(x, y, \beta') = 0$. Par suite, le point (x', y') se trouve sur la surface $f(x, y, \beta') = 0$, d'où on a

$$\beta' = \varphi(x', y').$$

On a donc démontré que la fonction $\varphi(x, y)$ est continue dans le domaine $v = \{|x| < \rho,\ |y| < \rho'\}$.

b) *La fonction $\beta = \varphi(x, y)$ est une application ouverte.*

En effet, soit σ un voisinage d'un point (x', y') de v. Pour toute valeur β suffisamment voisine de $\beta' = \varphi(x', y')$, la surface caractéristique correspondant à β passe par un point de σ. Donc, l'image de σ par l'application $\varphi(x, y)$ comprend un voisinage de β', c'est-à-dire que la fonction $\varphi(x, y)$ est une application ouverte au point (x', y'). Le point (x', y') étant quelconque, la fonction est une application ouverte dans le domaine v.

2°. La fonction $\beta = \varphi(x, y)$ étant continue, si l'on prend un cercle quelconque $|\beta| < \eta$ autour de l'origine du plan de β où on suppose que $0 = \varphi(0, 0)$, alors l'ensemble de tous les points sur les surfaces caractéristiques correspondant aux valeurs dans ce cercle comprend le point $(0, 0)$ à son intérieur. Cela étant, en prenant un voisinage $v_1 = \{|x| < \rho_1,\ |y| < \rho_1'\}$ suffisamment petit de l'origine, on peut supposer que l'ensemble des zéros du pseudopolynôme envisagé plus haut, où on substitue 0 à β, ne comprend dans ce voisinage que les surfaces caractéristiques de S qui passent par l'origine. Autrement dit, dans l'équation

$$x^m + a_1(y, 0)x^{m-1} + \cdots + a_m(y, 0) = 0$$

on peut considérer que $a_1(0, 0) = 0, \cdots, a_m(0, 0) = 0$.

C'est facilement démontré d'après le théorème de Weierstrass bien connu, en vertu de l'hypothèse que la surface plane $y=0$ n'est pas contenue dans S.

24. Ensuite on fait une autre remarque concernant la décomposition en facteurs d'un certain pseudopolynôme:

Soit donné un pseudopolynôme de la forme

$$x^m+a_1(\beta)x^{m-1}+\cdots+a_m(\beta),$$

où les coefficients $a_1(\beta),\cdots,a_m(\beta)$ sont des fonctions continues définies dans l'intervalle $0\leqq\beta\leqq 1$. Alors on peut trouver m fonctions $A_1(\beta),\cdots,A_m(\beta)$ définies et continues sur cet intervalle, telles que le pseudopolynôme donné se décompose en facteurs linéaires, de la manière

$$[x-A_1(\beta)]\cdots[x-A_m(\beta)].$$

En effet si toutes les fonctions $a_i(\beta)$, $i=1,\cdots,m$ sont holomorphes par rapport à la variable β au voisinage de l'intervalle $0\leqq\beta\leqq 1$ sur le plan de β, cela est certainement possible, car, dans ce cas, le pseudopolynôme a toujours les racines simples sauf en un nombre fini de points dans cet intervalle.

Dans le cas général, on peut fournir la démonstration par l'approximation des coefficients par des polynômes en β. Etant donné un nombre réel positif ε arbitrairement petit, ils existent m polynômes $P_i(\beta)$, $i=1,\cdots,m$ tels que les inégalités

$$|a_i(\beta)-P_i(\beta)|<\varepsilon, \qquad i=1,\cdots,m$$

soient vérifiées dans $0\leqq\beta\leqq 1$. Le pseudopolynôme

$$x^m+P_1(\beta)x^{m-1}+\cdots+P_m(\beta)$$

se décompose en facteurs linéaires

$$=[x-B_1(\beta)]\cdots[x-B_m(\beta)],$$

où $B_i(\beta)$, $i=1,\cdots,m$ sont des fonctions continues dans l'intervalle.

Or, ces fonctions continues $B_i^{(\varepsilon)}(\beta)$, $i=1,\cdots,m$, qui correspondant à un nombre réel positif quelconque ε plus petit que l'unité, sont bornées uniformément et également continues dans l'intervalle $0\leqq\beta\leqq 1$. Donc, on peut extraire de la suite de systèmes de m fonctions continues

$$[B_1^{(n)}(\beta),\cdots,B_m^{(n)}(\beta)], \qquad n=1,2,\cdots$$

qui correspondant aux $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$ une suite partielle convergeant uniformément vers un système de fonctions continues

$$[A_1(\beta),\cdots,A_m(\beta)].$$

C'est avec ces fonctions $A_1(\beta),\cdots,A_m(\beta)$ que le pseudopolynôme original se décompose en facteurs linéaires.

25. Maintenant démontrons que *tout le point sur la surface plane* $x=0$ *n'est pas un point* β *pour la société caractéristique* $\tilde{S}$ *formée dans le N° 22.*

Si, par exemple, l'origine est un point β pour $\tilde{S}$ alors on aurait sans aucune transformation des coordonnées une équation pseudopolynôme

$$x^m+a_1(y,\beta)x^{m-1}+\cdots+a_m(y,\beta)=0$$

définie dans un domaine $\{|x|<\rho,\ |y|<\rho',\ |\beta|\leqq\varepsilon\}$ jouissant des propriétés indiquées au N° 12, puisqu'au présent cas la surface plane $y=0$ n'est pas contenue dans $\tilde{S}$. De plus les surfaces caractéristiques de $\tilde{S}$ qui passent par l'origine étant la seule surface plane $x=0$, on peut en déduire que toutes les coefficients s'annulent identiquement pour $\beta=0$: $a_1(y,0)\equiv 0, \cdots, a_m(y,0)\equiv 0$.

Plaçons-nous maintenant sur le plan caractéristique $y=0$ et écrivons l'équation pseudopolynôme considérée sur le plan $y=0$

$$x^m+a_1(\beta)x^{m-1}+\cdots+a_m(\beta)=0\,, \tag{1}$$

et la fonction $\beta=\varphi(x,y)$ considérée sur le plan $y=0$

$$\beta=\varphi(x)\,. \tag{2}$$

Envisageons le point $x=x_0$ $\left(=\dfrac{1}{n_0}\right)$, où n_0 est un entier positif suffisamment grand pour que la fonction (2) soit définie au point $x=x_0$. Soit $\beta_0=\varphi(x_0)$. Décrivons un cercle $|\beta-\beta_0|=\varepsilon_1$ autour de β_0 dont le rayon ε_1 soit suffisamment petit et soit β_1 le point où ce cercle et le segment de droite limitée par deux points 0 et β_0 se rencontre. Voyons la fonction (1) sur le cercle: $\beta=\beta_0+\varepsilon_1e^{i\theta}$, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, et décomposons-la en facteurs linéaires continus sur ce cercle:

$$=[x-A_1(\beta)]\cdots[x-A_m(\beta)]\,.$$

On prend un des facteurs $A_1(\beta)$, par exemple, et désigne par l l'image sur le plan de x du cercle $|\beta-\beta_0|=\varepsilon_1$ par cette fonction $A_1(\beta)$. Alors l est une courbe de Jordan simple ne passant par le point x_0 mais n'est pas nécessairement fermée.

1°. D'abord envisageons le cas où la courbe l est fermée.

a) Si le point x_0 est à l'extérieur du domaine limité par l, alors on peut réduire la courbe l par une déformation continue à un point x_0' autre que x_0 sans passer par le point x_0, et donc son image, le cercle $|\beta-\beta_0|=\varepsilon_1$, par la fonction continue $\beta=\varphi(x)$, est aussi réduite à un point β_0' autre que β_0 sans passer par le point β_0. Cela est évidemment impossible.

b) Ou encore si le point x_0 est à l'intérieur du domaine limité par l, on peut réduire la courbe l par une déformation continue sans passer par le point x_0 à un cercle $|x-x_0|=\rho$ dont le rayon ρ soit suffisamment petit, et donc son image, le cercle $|\beta-\beta_0|=\varepsilon_1$, par la fonction continue $\beta=\varphi(x)$ est aussi réduite à une autre courbe fermée Γ sans passer par le point β_0. Donc la variation de l'argument autour de β_0 de Γ est égale à celle du cercle $|\beta-\beta_0|=\varepsilon_1$, c'est-à-dire 2π.

Maintenant envisageons le cercle $|x-x_0|=\rho$. Alors d'après le mode de la construction de la société caractéristique $\tilde{S}$, les deux extrémités x et x' d'un diamètre de ce cercle ont la même valeur $\beta: \varphi(x)=\varphi(x')$. Donc si l'on désigne par γ l'image du demi-cercle: $x=x_0+\rho e^{i\theta}$, $0\leqq\theta\leqq\pi$, par la fonction $\beta=\varphi(x)$, γ est une courbe fermée et l'image du tout cercle: $|x-x_0|=\rho$, est 2γ. C'est à dire que $\Gamma=2\gamma$. Alors en désignant par $2N\pi$, où N est un nombre entier, la variation de l'argument de γ autour de β_0, on voit que celle du cercle 2γ $(=\Gamma)$ doit être $4N\pi$, mais cela est incompatible avec le fait que celle de la courbe Γ est 2π.

2°. Ensuite envisageons le cas où la courbe l n'est pas fermée et dénotons ses deux extrémités x_1 et x_2. Considérons la fonction (1) sur le segment de droite limité par deux points β_1 et 0 dans le plan de β: $\beta=\beta_1-t\beta_1$, $0\leqq t\leqq 1$, et décomposons-la en facteurs linéaires continus sur cette droite:

$$[x-B_1(\beta)][x-B_2(\beta)]\cdots[x-B_m(\beta)].$$

Et de plus soient, par exemple, $B_1(\beta_1)=x_1$, $B_2(\beta_1)=x_2$. Lorsque l'on fait varier β sur le segment $\overrightarrow{\beta_1 0}$, $x=B_1(\beta)$ et $x=B_2(\beta)$ décrivent deux courbes. L'une d'elles part du point $x=x_1$ et l'autre du point $x=x_2$ et toutes les deux arrivent à l'origine car toutes les fonctions $B_i(\beta)$, $i=1,2,\cdots,m$ s'annulent à l'origine. Donc il y a le point $x=x'$ où les deux courbes se rencontrent pour la première fois.

Soit $\beta'=\varphi(x')$. Alors les trois courbes l: $x=A_1(\beta)$, $|\beta-\beta_0|=\varepsilon_1$; l_1: $x=B_1(\beta)$, $\beta\in\overrightarrow{\beta_1\beta'}$; l_2: $x=B_2(\beta)$, $\beta\in\overrightarrow{\beta_1\beta'}$, entourent un domaine $\varDelta$ simplement connexe sur le plan de x. Considérons la fonction $\beta=\varphi(x)$ au voisinage du point x'. Le domaine $\varDelta$ contenant toujours un ensemble ouvert aussi près du point x' que l'on veut, son image $\varphi(\varDelta)$ contient aussi un ensemble ouvert aussi près du point β' que l'on veut, car la fonction continue $\beta=\varphi(x)$ est une application ouverte. Mais cela est évidemment impossible, car l'image du domaine fermé $\bar{\varDelta}$ par la fonction $\varphi(x)$ ne contient qu'une partie de la droite $\overrightarrow{\beta_1\beta'}$ au voisinage du point β'.

On a donc démontré que le point $x=y=0$ n'est pas un point β pour $\tilde{S}$. Les autres points sur le plan caractéristique $x=0$ ne sont plus points β comme on le vérifie de façon analogue. En d'autres termes on a vu que l'ensemble F pour la société caractéristique $\tilde{S}$ est le plan $x=0$ qui appartient à $\tilde{S}$.

26. REMARQUES. I. En prenant la suite de cercles c_n, $n=1,2,\cdots$ convenablement sur le plan de x, on peut encore construire une société caractéristique S normale dans tout le domaine $D_1=\{0\leqq|y|<1,\ 0\leqq|x|<+\infty\}$ telle que l'ensemble F des points qui ne sont pas points β pour S soit l'hypersurface $H=\{x_1=0,\ 0\leqq|y|<1,$ où $x=x_1+ix_2\}$ à 3 dimensions réelles, et que tous les autres points soient des points β, ou encore construire celle telle que l'ensemble F pour S soit un ensemble donné fermé sans points intérieurs sur le plan de x et que tous les autres points soient des points β.

II. Si l'on construit une société caractéristique en donnant aux domaines Δ_n, $n=1,2,\cdots$ respectivement les familles de surfaces caractéristiques $\tilde{\Sigma}'^{(n)}_{\alpha}=[x=\varphi_n(\sqrt{l_\alpha(y^3)})]$ pour $0\leqq|\alpha|<1$ au lieu de $\tilde{\Sigma}^{(n)}_{\alpha}$ utilisées précédemment, on voit aussi que l'ensemble F de la société caractéristique $\tilde{S}'$ ainsi construite est la surface caractéristique $x=0$ et tous les autres points sont des points β. Mais cette fois-ci on connaît qu'il y a des surfaces caractéristiques de $\tilde{S}'$ dont les points critiques algébriques s'approchent de l'origine aussi près que l'on veut, malgré que la surface $x=0$ de $\tilde{S}'$ qui passe par l'origine y soit régulière, même dans le cas où la société caractéristique est normale dans tout le domaine.

§ 7. Représentation d'une société de surfaces caractéristiques par une série de la forme $\alpha+\varphi_1(\alpha)y+\varphi_2(\alpha)y^2+\cdots$ au voisinage d'un de ses points α.

On sait déjà qu'une société de surfaces caractéristiques peut être représentée par une fonction $x=a(y,\alpha)$, continue par rapport aux deux variables (y,α) et holomorphe par rapport à la variable y, au voisinage d'un de ses points α. Dans le présent paragraphe on étudie la fonction $a(y,\alpha)$ en détail. Cette étude nous permettra de construire des sociétés caractéristiques voulues aux §§ 5 et 6 sans faire appel aux transformations linéaires d'une variable.

27. Soit donnée une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D de l'espace (x,y), ayant un point $p_0=(x_0,y_0)$ de D comme un de ses points α. Alors, en faisant une transformation linéaire convenable de l'espace (x,y) si nécessaire, S est représentée par une fonction $x=a(y,\alpha)$, où $|\alpha|\leqq\varepsilon$, exposée au N° 12 dans un voisinage $v=\{|x-x_0|<\rho,\ |y-y_0|<\rho'\}$ de p_0. Dans ce cas, les surfaces caractéristiques $x=a(y,\alpha)$, pour $|\alpha|\leqq\varepsilon$, ne se rencontrent plus ni l'une ni l'autre dans v.

Pour simplifier l'écriture on suppose dans la suite que le point $p_0=(x_0,y_0)$ est l'origine et que le paramètre α est le point sur le plan $y=0$ par lequel passe la surface $x=a(y,\alpha)$:

$$\alpha=a(0,\alpha).$$

Développons la fonction $a(y,\alpha)$ en série entière de y:

$$a(y,\alpha)=\alpha+\varphi_1(\alpha)y+\varphi_2(\alpha)y^2+\cdots \tag{3}$$

dans le cercle $|y|<\rho'$.

1°) Alors *chacune des* $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\cdots$ *est une fonction continue de la variable* α.

En effet la fonction $a(y, \alpha)$ étant bornée en module dans le domaine $\{|y|<\rho', |\alpha| \leqq \varepsilon\}$: $|a(y, \alpha)|<\rho$, d'après le théorème de Cauchy, les coefficients sont estimés comme il suit

$$|\varphi_i(\alpha)| < \frac{\rho}{\rho'^i}, \qquad i=1, 2, \cdots.$$

D'abord on va démontrer que $\varphi_1(\alpha)$ est continue. Dans l'inégalité

$$\left|\frac{a(y, \alpha)-\alpha}{y} - \varphi_1(\alpha)\right| = |y[\varphi_2(\alpha)+\varphi_3(\alpha)y+\cdots]| \leqq |y|\left[\frac{\rho}{\rho'^2}+\frac{\rho}{\rho'^3}|y|+\cdots\right],$$

le 3ième membre est estimé par $|y|\frac{2\rho}{\rho'^2}$ quand $|y|$ tend vers 0. D'où on voit que la fonction $\varphi_1(\alpha)$ est la limite de la suite de fonctions continues $\frac{a(y, \alpha)-\alpha}{y}$ qui converge uniformément dans $|\alpha| \leqq \varepsilon$, donc $\varphi_1(\alpha)$ y est continue.

Ensuite en raisonnant pareillement on verra que toutes les autres fonctions $\varphi_2(\alpha)$, $\cdots$ sont aussi fonctions continues.

2°) *Si la série* (3) *se réduit à un polynôme de* y *d'ordre* m, *les* m *coefficients* $\varphi_1(\alpha), \cdots, \varphi_m(\alpha)$ *satisfont à la condition de Lipschitz.*

Au cas $m=1$, c'est facilement vérifié, car, pour deux valeurs α_1, α_2 distinctes, les deux plans caractéristiques qui leur correspondant respectivement ne se rencontrent pas dans le domaine $\{|x|<\rho, |y|<\rho'\}$:

$$\alpha_1+\varphi_1(\alpha_1)y \neq \alpha_2+\varphi_1(\alpha_2)y \qquad \text{pour } |y|<\rho',$$

donc

$$-[\varphi_1(\alpha_1)-\varphi_1(\alpha_2)]y \neq \alpha_1-\alpha_2 \quad \text{pour } |y|<\rho'.$$

De là, on déduit

$$\left|\frac{\varphi_1(\alpha_1)-\varphi_1(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}\right| \neq \left|\frac{1}{y}\right| \quad \text{pour } |y|<\rho', \qquad \text{donc } \left|\frac{\varphi_1(\alpha_1)-\varphi_1(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}\right| < \frac{1}{\rho'}.$$

Passons au cas général. L'inégalité

$$\alpha_1+\varphi_1(\alpha_1)y+\cdots+\varphi_m(\alpha_1)y^m \neq \alpha_2+\varphi_1(\alpha_2)y+\cdots+\varphi_m(\alpha_2)y^m \quad \text{pour } |y|<\rho',$$

donc

$$-[\varphi_1(\alpha_1)-\varphi_1(\alpha_2)]y-\cdots-[\varphi_m(\alpha_1)-\varphi_m(\alpha_2)]y^m \neq \alpha_1-\alpha_2 \quad \text{pour } |y|<\rho',$$

entraîne l'inégalité

$$-\left[\frac{\varphi_1(\alpha_1)-\varphi_1(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}\right]y-\cdots-\left[\frac{\varphi_m(\alpha_1)-\varphi_m(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}\right]y^m \neq 1 \quad \text{pour } |y|<\rho'.$$

Il suffit donc de démontrer que: Les m coefficients $A_1, \cdots, A_m$ sont bornés, si un polynôme satisfait à l'inégalité suivante

$$P(y)=A_1y+\cdots+A_my^m \neq 1 \quad \text{pour } |y|<\rho'.$$

Supposons par l'absurde qu'il y a une suite de polynômes de cette sorte tous d'ordre m dont un certain coefficient A_i tend vers l'infini en module. En choisissant une suite partielle si nécessaire, on peut supposer en outre que le coefficient A_{i_0} tend vers l'infini le plus vite entre eux. On a de là une inégalité

$$\frac{1}{A_{i_0}} \neq \frac{A_1}{A_{i_0}} y + \cdots + y^{i_0} + \cdots + \frac{A_m}{A_{i_0}} y^m \quad \text{pour } |y| < \rho',$$

où les coefficients sont tous inférieurs ou égaux à 1 en module, et de plus $\frac{1}{A_{i_0}}$ tend vers 0. Les membres à droite sont des fonctions holomorphes non constantes, donc, pour chaque fonction, l'image du cercle $|y| < \rho'$, contient au moins un petit cercle $|x| < \varepsilon$. Mais les rayons de ces cercles admettent une valeur positive ε_0 comme leur borne inférieure, car les fonctions forment une famille normale dans le cercle $|y| < \rho'$. C'est en contradiction avec ce que $\frac{1}{A_{i_0}}$ tend vers zéro. On a ainsi démontré que tous les A_i sont bornés en module: $|A_i| < L$, $i = 1, \cdots, m$.

REMARQUE. Quand la série (3) ne se réduit pas à un polynôme les coefficients ne satisfont pas nécessairement à la condition de Lipschitz.

En effet on peut construire une telle série entière de la manière suivante: Pour les fonctions

$$e^{ny} = 1 + ny + \frac{n^2}{2!} y^2 + \cdots, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

on peut déterminer successivement une suite de valeurs réelles positives $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$, de manière que les inégalités suivantes soient vérifiées:

$$0 < \cdots < |\alpha_2 e^{2y}| < |\alpha_1 e^y| < 1 \quad \text{pour } |y| < 1.$$

Posons

$$f_n(y) = \alpha_n e^{ny}.$$

En vertu des inégalités ci-dessus, on peut construire, *selon la méthode indiquée au* N° 15, une société caractéristique S dans le domaine $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ qui contient toutes les surfaces caractéristiques $x = f_n(y)$, $n = 1, 2, \cdots$ et de plus toutes les surfaces caractéristiques de S sont de la forme $x = f(y)$, $f(y)$ étant holomorphe dans $|y| < 1$. Donc la société caractéristique S a l'origine comme un de ses points α.

Envisageons la condition de Lipschitz pour la fonction $\varphi_1(\alpha)$, par exemple à l'origine. Dans l'expression $\frac{\varphi_1(\alpha) - \varphi_1(\beta)}{\alpha - \beta}$, posons $\beta = 0$ et $\alpha = \alpha_n$, $n = 1, 2, \cdots$, α_n étant les valeurs prises plus haut. Alors

$$\frac{\varphi_1(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{n \cdot \alpha_n}{\alpha_n} = n, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

tendent vers l'infini avec n, ce qui montre que $\varphi_1(\alpha)$ ne satisfait pas à la condition de Lipschitz.

28. Pour voir quelques réciproques aux énoncés exposés plus haut, commençons par préparer l'énoncé suivant: Soit donnée une famille de surfaces caractéristiques au voisinage de l'origine de l'espace (x, y) de la forme

$$x = \alpha + \varphi_1(\alpha) y + \varphi_2(\alpha) y^2 + \cdots, \tag{4}$$

où α parcourt un certain cercle $|\alpha| \leqq \varepsilon$ de centre origine. Supposons que pour toute α, cette série entière de y est une fonction holomorphe de la variable y dans un certain cercle $|y| < \rho$ fixé pour toute α, et de plus que les surfaces caractéristiques de cette famille ne se rencontrent ni l'une ni l'autre dans le domaine $\{|y| < \rho,\ |x| \leqq \varepsilon\}$. Alors elle définit une société caractéristique au voisinage de l'origine et de plus par tout point près de l'origine passe une et une seule surface caractéristique dans cette famille.

En effet considérant la série donnée comme une fonction $\Phi(y, \alpha)$ des 2 variables (y, α) on peut voir, d'après le théorème C, que sous cette circonstance $\Phi(y, \alpha)$ est une fonction continue des deux variables (y, α) et de plus toutes les fonctions $\varphi_n(\alpha)$, $n = 1, 2, \cdots$ sont aussi continues dans le cercle $|\alpha| \leqq \varepsilon$. Décrivons sur le plan $y = 0$ le cercle $|\alpha| = \varepsilon$ et dénotons l son image par la fonction $\Phi(y, \alpha)$ d'une variable α sur le plan $y = y'$, y' étant pris suffisamment près de l'origine, alors l'image l est une courbe de Jordan simple fermée et elle se réduit au point $\Phi(y', 0)$ quand le rayon du cercle $|\alpha| = \varepsilon$ tend vers zéro. Donc tout le point dans le domaine limité par l est contenu dans une certaine surface caractéristique de cette famille. Cela signifie que tout point suffisamment près de l'origine se trouve sur quelqu'une des surfaces caractéristiques de cette famille.

29. Maintenant *considérons une suite de fonctions* $\varphi_n(\alpha)$, $n = 1, 2, \cdots$ *satisfaisant à la condition de Lipschitz,* $\left| \dfrac{\varphi_n(\alpha_1) - \varphi_n(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} \right| \leqq L_n$, $n = 1, 2, \cdots$ *dans un cercle* $|\alpha| \leqq \varepsilon$, *telles que la série entière de* y

$$L_1 y + L_2 y^2 + \cdots$$

admette son rayon de convergence positif. Alors la série de la forme

$$x = \alpha + \varphi_1(\alpha) y + \varphi_2(\alpha) y^2 + \cdots \tag{4}$$

définit une société caractéristique au voisinage de l'origine de l'espace (x, y).

En effet pour deux valeurs distinctes α_1, α_2 de α les surfaces caractéristiques correspondant ne se rencontrent ni l'une ni l'autre dans un domaine $\{|x| < \rho,\ |y| < \rho'\}$ suffisamment près de l'origine, puisque dans l'inégalité

$$\left| -\left[\frac{\varphi_1(\alpha_1) - \varphi_1(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] y - \left[\frac{\varphi_2(\alpha_1) - \varphi_2(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} \right] y^2 - \cdots \right| \leqq L_1 |y| + L_2 |y|^2 + \cdots,$$

si la valeur ρ' est suffisamment petite et si $|y| < \rho'$, le membre à droite sera plus petit que l'unité, d'où il suit l'inégalité

$$-\left[\frac{\varphi_1(\alpha_1)-\varphi_1(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}\right]y-\left[\frac{\varphi_2(\alpha_1)-\varphi_2(\alpha_2)}{\alpha_1-\alpha_2}\right]y^2-\cdots\neq 1 \quad \text{pour } |y|<\rho'.$$

Donc, d'après l'énoncé dit plus haut, cette famille de surfaces caractéristiques définit une société caractéristique au voisinage de l'origine.

REMARQUE. *Sociétés de surfaces caractéristiques construites à l'aide des fonctions particulières continues satisfaisant à la condition de Lipschitz.* En prenant pour coefficients dans la série (4) les fonctions : $\varphi_1(\alpha)=1-|\alpha|$, $\varphi_2(\alpha)\equiv 0$, $\varphi_3(\alpha)\equiv 0, \cdots$, on voit que toutes ces fonctions satisfont à la condition de Lipschitz avec $L_n=1$, $n=1, 2, 3, \cdots$, et de plus qu'elles s'annulent identiquement sur la circonférence $|\alpha|=1$. Donc la famille de surfaces caractéristiques

$$x=s_\alpha(y)=\alpha+\varphi_1(\alpha)y+\varphi_2(\alpha)y^2+\cdots, \qquad |y|<1,$$

α parcourant le cercle $|\alpha|<1$, définit une société caractéristique $\mathcal{S}$ dans le domaine $D=\{|x|<1, |y|<1\}$, qui satisfait à la condition, citée à plusieurs reprises, concernant la frontière du domaine D : *Aucune surface caractéristique de $\mathcal{S}$ ne rencontre la frontière $\{|x|=1, |y|<1\}$ de D.*

On voit ici que la société caractéristique $\mathcal{S}$ est tout pareil à la société caractéristique $\mathcal{L}$ construite au § 5. Pour cette raison, à partir de la société caractéristique $\mathcal{S}$, on obtiendra des sociétés caractéristiques pour lesquelles subsistent aussi les énoncés établis aux §§ 5 et 6.

§ 8. Une propriété des sociétés de surfaces caractéristiques qui sont localement analytiques dans un domaine.

Maintenant on étudie une propriété des sociétés localement analytiques de surfaces caractéristiques. Grâce à cette propriété on peut voir que les sociétés caractéristiques qui sont localement analytiques forment une classe très spéciale dans la totalité des sociétés caractéristiques générales que l'on a étudié jusqu'au présent.

30. 1°. *Soit S une société de surfaces caractéristiques localement analytique dans un domaine D. Soient Σ_0 une surface caractéristique dans S et $p_0=(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface Σ_0. Alors le point p_0 est un point α pour S. Supposons sans restreindre la généralité que p_0 est l'origine et que le plan $y=0$ n'appartient pas à S. En représentant S au voisinage de p_0 par une série de la forme*

$$x=\alpha+\varphi_1(\alpha)y+\varphi_2(\alpha)y^2+\cdots, \tag{5}$$

toutes les fonctions $\varphi_i(\alpha)$, $i=1, 2, \cdots$ sont alors holomorphes au voisinage de l'origine dans le plan de α.

En effet, dans ce cas, on peut facilement trouver une fonction $f(x, y)$ holomorphe qui donne S au voisinage de l'origine et qui satisfait à la condition

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0, y=0} \neq 0 .$$

A l'aide de cette fonction, l'énoncé est immédiatement vérifié.

2°. D'après ce qu'on a vu, on va montrer que: *Si deux sociétés de surfaces caractéristiques dans un domaine D sont toutes deux localement analytiques dans ce domaine, et de plus qu'elles ont une infinité dénombrable de surfaces caractéristiques en commun, qui ont au moins un point limite dans D, alors les deux sociétés de surfaces caractéristiques se coïncident exactement dans tout le domaine D.*

En d'autres termes, une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D qui est localement analytique dans D est complètement déterminée par une suite de surfaces caractéristiques de S qui a au moins un point limite dans D.

Pour le voir, supposons que le point limite est l'origine et que les surfaces caractéristiques de ces deux sociétés caractéristiques qui passent par l'origine sont régulières à l'origine, c'est certainement admis. Alors pour les deux sociétés caractéristiques à la fois, l'origine est un point α. En y les représentant par les séries (5), toutes les fonctions $\varphi_i^{(1)}(\alpha)$, $\varphi_i^{(2)}(\alpha)$, $i=1, 2, \cdots$ qui leur correspondant respectivement sont holomorphes. De plus il y a une suite de valeurs de α qui tend vers 0, telle que $\varphi_i^{(1)}(\alpha)=\varphi_i^{(2)}(\alpha)$ pour toutes les indices i. Donc pour chaque indice i les deux fonctions sont identiques:

$$\varphi_i^{(1)}(\alpha) \equiv \varphi_i^{(2)}(\alpha) , \qquad i=1, 2, \cdots ,$$

c'est à dire que les deux sociétés caractéristiques sont exactement identiques au voisinage de l'origine. Grâce au théorème d'identité les familles de surfaces caractéristiques des deux sociétés caractéristiques dans le domaine D sont exactement identiques.

31. *Sociétés de surfaces caractéristiques dans l'espace d'une seule variable.* Faisons en dernier lieu une autre remarque concernant les sociétés analytiques de surfaces caractéristiques: Si l'on considère la même question que l'on a étudié jusqu'ici dans un domaine D du plan d'une seule variable complexe z, on trouvera d'abord que toute la surface caractéristique est un ensemble de points isolés et celle irréductible est un seul point et ensuite que toute la société S de surfaces caractéristiques est toujours analytique dans tout domaine D, car on peut toujours prendre la fonction $f(z)=z$ comme celle qui donne S dans D.

Donc on peut dire d'un côté que tous les énoncés établis jusqu'au présent sont triviaux au plan d'une seule variable, d'autre côté que si une société S de surfaces caractéristiques dans un domaine D à l'espace de deux variables se réduit à celle d'une seule variable par une transformation pseudoconforme biunivoque de D, alors S est analytique dans tout domaine D.

Voici une société très simple de surfaces caractéristiques de cette sorte: Soit S une société de surfaces caractéristiques dans tout l'espace (x, y) telle que toute sa surface caractéristique soit représentée par

$$x = f(y),$$

où $f(y)$ est une fonction entière d'une variable y. Alors la société caractéristique S se réduit à celle d'une seule variable par une transformation pseudoconforme biunivoque convenable de tout l'espace.

Pour le voir, remarquons d'abord que sous cette condition deux surfaces caractéristiques quelconques de S ne se rencontrent nulle part dans l'espace (x, y). Ensuite en prenant deux quelconques de surfaces caractéristiques de S: $x = f_0(y)$, $x = f_1(y)$, effectuons la transformation

$$x' = \frac{x - f_0(y)}{f_1(y) - f_0(y)}, \qquad y' = y.$$

Alors, cette transformation faite, la surface caractéristique $x = f_0(y)$ se réduit au plan $x' \equiv 0$, et celle $x = f_1(y)$ au plan $x' \equiv 1$. Toutes les autres surfaces caractéristiques s'expriment par $x' = g(y')$, où $g(y')$ sont des fonctions entières d'une variable y'. Or, $g(y')$ ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1. D'après le théorème de Picard, chaque fonction $g(y')$ se réduit à une constante. Cela veut dire que la société caractéristique S s'est réduite à celle d'une seule variable.

Le 6 Mars, 1970.

Kyoto Prefectural University