J. Math. Soc. Japan
Vol. 52, No. 2, 2000

Feuilletages et topologie spectrale

By Ezzeddine Bouacida*, Othman Echi** and Ezzeddine Salhi*

(Received Jan. 5, 1998)
(Revised Oct. 20, 1998)

Abstract. Let $\mathscr{F}$ be a codimension-one foliation, transversally oriented, of class C^r $(r \geq 0)$ on a connected closed manifold M. The class of a leaf F of $\mathscr{F}$ is defined to be the union of all leaves G with $\bar{F} = \bar{G}$. Let X be the space of classes of leaves in M and let X_0 be the union of open subsets of X which are homeomorphic to $\boldsymbol{R}$ or to S^1. In this paper we prove that if the level of $\mathscr{F}$ is well defined (in the sense of [**12**]), then $X - X_0$ is a spectral space.

0. Introduction.

Soient M une variété fermée connexe, $\mathscr{F}$ un feuilletage défini sur M, transversalement orientable, de classe C^r $(r \geq 0)$ et de codimension 1, et soit τ un feuilletage de dimension 1 transverse à $\mathscr{F}$ (τ existe toujours).

On entend par feuille une feuille de $\mathscr{F}$. Une telle feuille F est dite *propre* s'il existe un arc transverse ouvert I tel que $I \cap F$ est un singleton, F est dite *localement dense* s'il existe un arc transverse ouvert I tel que $I \cap \bar{F} = I$, autrement F est dite *exceptionnelle*.

Etant donné une feuille F, on définit $Cl(F)$, la classe de F, comme étant la réunion des feuilles G de $\mathscr{F}$ vérifiant $\bar{F} = \bar{G}$ [**11**].

On définit sur M la relation d'équivalence: $x \sim y$ signifie $\bar{F}_x = \bar{F}_y$ où F_x et F_y désignent les feuilles de $\mathscr{F}$ passant respectivement par x et y, l'espace quotient est noté $M/\bar{\mathscr{F}}$, c'est l'espace des classes des feuilles, il est de Kolmogoroff (T_0), alors que l'espace des feuilles $M/\mathscr{F}$ ne l'est pas toujours. On remarque que si toutes les feuilles sont propres, alors $M/\mathscr{F} = M/\bar{\mathscr{F}}$.

Dans ce travail on comparera la topologie quotient de $M/\bar{\mathscr{F}}$ avec une topologie spectrale. Pour cela rappelons la topologie de Zariski définie sur le spectre, $\mathrm{Spec}(A)$ (ensemble des idéaux premiers de A), d'un anneau commutatif unitaire A:

Si p est un idéal de A, on pose $V(p) = \{q \in \mathrm{Spec}(A)/p \subseteq q\}$, les $V(p)$ sont les fermés de la topologie de Zariski, notée τ_z, sur $\mathrm{Spec}(A)$. L'espace $Y = \mathrm{Spec}(A)$ muni de

1991 *Mathematics Subject Classification*. 54A10, 54B35, 57R30.
Key Words and Phrases. Foliation, leaf, spectrum of a ring, Zariski topology.
* Supported in part by the DGRST E05/C15.
** Supported in part by the DGRST E03/C15.

la topologie de Zariski possède les propriétés suivantes:

i) Y est un espace de Kolmogoroff (T_0) (i.e. pour tout couple de points distincts x et y de Y, il existe un voisinage V_x de x ne contenant pas y ou il existe un voisinage V_y de y ne contenant pas x).

ii) Y est quasi-compact et possède une base d'ouverts quasi-compacts.

iii) L'intersection de deux ouverts quasi-compacts est quasi-compacte.

iv) Tout fermé irréductible de Y possède un point générique (i.e. Si B est un fermé de Y tel que l'intersection de deux ouverts non vides de B est non vide, alors il existe un élément a, appelé point générique de B, tel que $\overline{\{a\}} = B$).

Un espace topologique X vérifiant les quatre propriétés précédentes est appelé *espace topologique spectral* [**8**]. L'espace $(\mathrm{Spec}(A), \tau_z)$ est spectral, et réciproquement tout espace topologique spectral est homéomorphe au spectre d'un anneau muni de la topologie de Zariski [**8**].

Soit $\mathscr{U}_0$ la réunion des feuilles propres stables (*i.e.* les feuilles contenues dans un ouvert trivialement feuilleté en produit). L'ensemble $\mathscr{U}_0$ est un ouvert saturé de M tel que deux feuilles F et G d'une même composante connexe de $\mathscr{U}_0$ sont propres, homéomorphes, et ont le même ensemble limite.

Dans tout ce qui suit, on note $X = M/\bar{\mathscr{F}}$ et $X_0 = \mathscr{U}_0/\bar{\mathscr{F}}$ et on a $(M - \mathscr{U}_0)/\bar{\mathscr{F}} = X - X_0$ (X_0 est la réunion des ouverts de X homéomorphes à $\boldsymbol{R}$ ou à S^1).

L'espace $X = M/\bar{\mathscr{F}}$ est ordonné par: $p(x) \leq p(y)$ signifie $\bar{F}_x \subseteq \bar{F}_y$ (p étant la projection canonique de M dans X). Un point de X est dit de hauteur 0 si c'est un point minimal de X, par récurrence transfinie il est dit de hauteur un ordinal α si tout point $p(y) < p(x)$ a une hauteur définie égale à un ordinal $\beta < \alpha$ et si pour tout ordinal $\beta < \alpha$, il existe un élément $p(y)$ de X de hauteur β tel que $p(y) < p(x)$ [**2**]. Le niveau d'une feuille (défini dans [**12**]) correspond à la hauteur de sa classe dans X, le feuilletage $\mathscr{F}$ a une hauteur définie si le niveau de toute feuille est défini; cela est équivalent à dire que pour toute feuille F et pour tout ouvert invariant U contenant F, l'intersection $\bar{F} \cap U$ contient un ensemble minimal de la restriction de $\mathscr{F}$ à U [**12**] (c'est le cas des feuilletages de classe $C^r, r \geq 2$ [**3**]).

Le résultat principal de ce travail consiste à montrer que si le feuilletage $\mathscr{F}$ a une hauteur définie, alors $X - X_0$ est un espace spectral (*cf.* Théorème 3.15). Ce résultat est mis en défaut si le niveau de $\mathscr{F}$ n'est pas défini (*cf.* Exemple 2.9 et lemme 3.6). Ils existent des espaces topologiques spectraux connexes dénombrables de hauteur le premier ordinal limite ω (*cf.* Exemple 3.18) et des espaces topologiques connexes de hauteur finie (*cf.* Exemples 3.19 et 3.20) qui ne sont pas homéomorphes à des espaces $X - X_0$).

Pour établir ce résultat, on a besoin de rappeler les notions suivantes sur les feuilletages, pour plus de précisions voir C. Godbillon [**5**, Chapitre 4.4].

Le saturé d'une partie A de M, $\mathrm{Sat}(A)$, est la réunion des feuilles de $\mathscr{F}$ rencontrants A. Un sous-ensemble E de M est dit saturé, s'il est invariant pour $\mathscr{F}$ (*i.e.* E est une réunion de feuilles de $\mathscr{F}$). L'ensemble saturé E est dit un *ensemble minimal* $(E.M)$ s'il est minimal pour l'inclusion dans la famille des fermés invariants non vides, il est dit *ensemble minimal local* $(E.M.L)$ s'il est un ensemble minimal pour la restriction de $\mathscr{F}$ à un ouvert saturé U de M; ce qui est équivalent à dire que pour toute feuille F dans E on a: $\bar{F} \cap U = E = Cl(F)$. Toutes les feuilles d'un $(E.M.L)$ sont de même type (propre, dense, exceptionnel); on parlera ainsi d'un $(E.M.L)$ de type dense ou exceptionnel.

Etant donné un ouvert connexe invariant U de M, on note $\hat{U}$ le complété de U pour une métrique riemannienne de M. Dippolito a montré qu'il existe un compact K (appelé noyau de U) inclus dans $\hat{U}$ tel que toute feuille de U rencontre l'intérieur $\overset{o}{K}$ de K, de plus si δU est l'image du bord $\partial \hat{U}$ de $\hat{U}$ par l'extension $\hat{i}$ de l'injection canonique i de U dans M, alors δU est une union finie de feuilles de $\mathscr{F}$ [**4**]. On distingue les parties $\delta^- U$ (resp. $\delta^+ U$) de δU le long desquels les feuilles de $\hat{\tau}$ sortent de (resp. entrent dans) U, $\hat{\tau}$ étant la restriction de τ à $\hat{U}$.

On dit qu'une feuille G se *rapproche* d'une feuille F si F est contenue dans l'adhérence $\bar{G}$ de G avec $\bar{G} \neq \bar{F}$, dans ce cas si x est un point de F et T_x la feuille de τ passant par x, il existe une suite infinie $(x_n, n \in \boldsymbol{N})$ dans $T_x \cap G$ qui converge vers x. Si on peut supposer que $(x_n, n \in \boldsymbol{N})$ est dans $T_x^+ \cap G$ (T_x^+ étant la demi-feuille positive de T_x), on dit que G se rapproche de F^+.

Soient L une feuille, x un point de L et T_x un arc transverse identifié à $\boldsymbol{R}$ où x correspond à zéro, on suppose que L est propre du côté positif (*i.e.* Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L \cap]0, \varepsilon[= \varnothing$). On désigne par PL_x^+ le pseudo-groupe d'holonomie positif de L en x. D'après le théorème de Dippolito-Sacksteder-Schwartz [**4**], l'une des deux situations suivantes est réalisée:

i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout point de $]0, \varepsilon[$ n'est pas un point fixe de PL_x^+; ceci est équivalent à dire que toute feuille rencontrant $]0, \varepsilon[$ se rapproche de L^+ auquel cas on dit que L^+ est *attractante*.

ii) Il existe une suite $(x_n, n \in \boldsymbol{N})$ strictement décroissante de points fixes de PL_x^+ convergeant vers zéro, et telle que toute feuille passant par x_n est homéomorphe à L et l'ouvert $\mathrm{Sat}(]0, x_1[)$ est un produit feuilleté. Dans ce cas L^+ est semi-stable (L^+ est dite *semi-stable* (resp. *stable*) s'il existe un ouvert U produit feuilleté (resp. trivialement feuilleté en produit) tel que L est incluse dans $\delta^+ U$).

Finalement pour une feuille F, on définit la *structure supérieure*, $SS(F)$, (resp. la *structure inférieure* $SI(F)$) de F comme la réunion des feuilles G de $\mathscr{F}$ vérifiant $\bar{F} \subset \bar{G}$ (resp. $\bar{G} \subset \bar{F}$) [**11**].

Notons que tout au long de ce travail, "$\subset$" désigne l'inclusion stricte et "$\subseteq$" désigne l'inclusion large.

1. Généralités sur l'espace $X = M/\bar{\mathscr{F}}$.

Les propriétés relatives à la structure des feuilles du feuilletage $\mathscr{F}$ (type et niveau de feuilles, $(E.M.L)$, structure inférieure et supérieure d'une feuille,...) correspondent à des propriétés équivalentes dans l'espace des classes de feuilles $X = M/\bar{\mathscr{F}}$. Dans ce paragraphe on donne certaines de ces propriétés qui seront utilisées dans la suite.

On note p la projection canonique de M dans X et on définit la relation d'ordre $\leq$, sur X, par:

$$p(x) = a \leq b = p(y) \text{ signifie } \bar{F}_x \subseteq \bar{F}_y.$$

Si $a = p(x)$ est un point de X, on désigne par:

$$[a, \uparrow[= \{b \in X / a \leq b\}, \quad]\downarrow, a] = \{b \in X / b \leq a\}.$$

$$]a, \uparrow[= \{b \in X / a < b\}, \quad]\downarrow, a[= \{b \in X / b < a\}.$$

On a facilement la propriété suivante:

PROPRIÉTÉ 1.1.

i) $p^{-1}(\{a\}) = Cl(F_x)$.

ii) $p^{-1}(]a, \uparrow[) = SS(F_x)$.

iii) $p^{-1}(]\downarrow, , a[) = SI(F_x)$.

iv) $p^{-1}(]\downarrow, , a]) = \bar{F}_x$.

REMARQUE. 1.2. Soient F et G deux feuilles, alors $F \subseteq \bar{G}$ si et seulement si, tout ouvert saturé contenant F contient G.

Remarquons que pour tout ouvert U de M la réunion des feuilles rencontrants U est égale à la réunion des classes de feuilles rencontrants U. Compte tenu du fait que la projection de M sur l'espace des feuilles $M/\mathscr{F}$ est ouverte, on a:

PROPRIÉTÉ 1.3. *La surjection canonique p est une application ouverte.*

PROPRIÉTÉ 1.4. *La topologie de X est compatible avec l'ordre $\geq$ (i.e. pour tout $a \in X$, $\overline{\{a\}} =]\downarrow, a]$).*

DÉMONSTRATION. Soit $b = p(y) \in]\downarrow, a]$ donc $\bar{F}_y \subseteq \bar{F}_x$. Soit V_b un voisinage ouvert de b, $p^{-1}(V_b)$ est un ouvert saturé de M contenant y, donc $F_x \subseteq p^{-1}(V_b)$ (*cf.* Remarque 1.2) et $V_b = p(p^{-1}(V_b)) \supseteq p(F_x) = \{p(x)\} = \{a\}$, ainsi tout voisinage de b contient a et $b \in \overline{\{a\}}$. Réciproquement, si $b \in \overline{\{a\}}$, alors pour tout voisinage ouvert V_b de b on a; $a \in V_b$.

Ainsi, puisque p est ouverte, tout voisinage saturé de F_y contient F_x donc $\bar{F}_y \subseteq \bar{F}_x$. Ce qui donne $b \leq a$. □

PROPRIÉTÉ 1.5. *Le singleton $\{a\}$ est localement fermé dans X si et seulement si F_x est contenue dans un $(E.M.L)$ de $\mathscr{F}$.*

DÉMONSTRATION. Le singleton $\{a\}$ est localement fermé veut dire qu'il existe un ouvert V de X tel que $\overline{\{a\}} \cap V = \{a\}$. On a $p^{-1}(\overline{\{a\}}) \cap p^{-1}(V) = p^{-1}(\{a\})$, au vu de la propriété 1.1, $\bar{F}_x \cap p^{-1}(V) = Cl(F_x)$. On en déduit que $Cl(F_x)$ est un $(E.M.L)$.

Réciproquement, si F_x est incluse dans un $(E.M.L)$ E, alors $E = Cl(F_x)$, et il existe un ouvert U de M tel que $\bar{F}_x \cap U = E$. On a; $p(\bar{F}_x \cap U) = p(E) = p(Cl(F_x)) = \{a\}$, or U est un ouvert saturé, donc $p(\bar{F}_x \cap U) = p(\bar{F}_x) \cap p(U) = \{a\}$ et, vu que $\overline{\{a\}} = p(\bar{F}_x)$, on a $\overline{\{a\}} \cap p(U) = \{a\}$. Il en résulte que $\{a\}$ est localement fermé. □

CONSÉQUENCE 1.6. *L'ensemble $]\downarrow, a[$ est fermé dans X si et seulement si F_x est contenue dans un $(E.M.L)$.*

En effet, si $]\downarrow, a[$ est fermé, alors $\{a\}$ est fermé dans $X - (]\downarrow, a[)$. Réciproquement, si F_x est incluse dans un $(E.M.L)$ alors $\{a\}$ est localement fermé, ainsi il existe un ouvert V de X tel que $\overline{\{a\}} \cap V = \{a\}$, et par suite $]\downarrow, a[=]\downarrow, a] - V$ est un fermé.

PROPRIÉTÉ 1.7. [**11**] i) *Pour tout $a \in X$, $]a, \uparrow[$ est un ouvert.*

ii) *Si la feuille F_x est propre attractante des deux côtés ou si F_x est non propre et contenue dans un $(E.M.L)$, alors $[a, \uparrow[$ est un ouvert.*

PROPRIÉTÉ 1.8. i) *L'intérieur de l'adhérence du singleton $\{a\}$ est non vide si et seulement si F_x est localement dense.*

ii) *Si le singleton $\{a\}$ n'est pas localement fermé et s'il vérifie $\overset{o}{\overline{\{a\}}} = \emptyset$, alors F_x est exceptionnelle et n'est contenue dans aucun $(E.M.L)$.*

DÉMONSTRATION. i) Si F_x est localement dense, il existe un ouvert U de M tel que $F_x \subseteq U \subseteq \bar{F}_x$. Ainsi $\{a\} = p(F_x) \subseteq p(U) \subseteq p(\bar{F}_x) = \overline{\{a\}}$, d'où $\overset{o}{\overline{\{a\}}}$ est non vide. Réciproquement, si $\overset{o}{\overline{\{a\}}} \neq \emptyset$ on a: $a \in \overset{o}{\overline{\{a\}}} \subseteq \overline{\{a\}}$, de sorte que $F_x = p^{-1}(\{a\}) \subseteq p^{-1}(\overset{o}{\overline{\{a\}}}) \subseteq p^{-1}(\overline{\{a\}}) = \bar{F}_x$. L'ensemble $p^{-1}(\overset{o}{\overline{\{a\}}})$ est un ouvert non vide donc $\bar{F}_x$ est non vide et par suite F_x est localement dense.

ii) Le fait que $\overset{o}{\overline{\{a\}}}$ est vide implique que F_x est nullepart dense (d'après l'étape (i)). Le fait que $\{a\}$ n'est fermé dans aucun ouvert, implique que F n'est contenue dans aucun $(E.M.L)$ (*cf.* Propriété 1.5), ainsi F_x est exceptionnelle. $\square$

2. Ensembles compacts par saturation.

Dans le but d'étudier les ouverts quasi-compacts de X, on introduit la notion de parties de M compactes par saturation.

DÉFINITION 2.1. Une partie saturée A de M est dite compacte par saturation (en abrégé $(C.P.S)$) si de tout recouvrement de A par des ouverts saturés, on peut extraire un sous-recouvrement fini. (i.e. A est quasi-compacte pour la topologie de M formée par les ouverts saturés).

REMARQUE 2.2. Tout ouvert compact par saturation possède un nombre fini de composantes connexes.

En effet, puisque M est localement connexe alors toute composante connexe de M est un ouvert.

LEMME 2.3. *Un ouvert saturé U de M est $(C.P.S)$ si et seulement si, il est le saturé d'un compact T de U.*

DÉMONSTRATION. Supposons que U est le saturé du compact T et soit $(U_i, i \in I)$ un recouvrement de U par des ouverts saturés, la famille $(T_i = T \cap U_i, i \in I)$ est un recouvrement ouvert de T, il existe ainsi un entier p tel que $T = T_{i_1} \cup T_{i_2} \cup \cdots \cup T_{i_p}$ et, vu que $U_i = \mathrm{Sat}(T_i)$, on a; $U \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_p}$. Réciproquement, l'ouvert U possède un nombre fini de composantes connexes (*cf.* remarque 2.2), ainsi il existe un compact K de $\hat{U}$ tel que toute feuille de U coupe $\overset{o}{K}$ (où K est un noyau de U). On en déduit qu'il existe un nombre fini d'arcs transverses compacts $T_1, T_2, \ldots, T_p$ dans K tels que toute feuille de U rencontre l'intérieur de l'un de ces arcs. Si, par exemple, T_1 a une extrémité dans une feuille L de $\delta^+ U$, on identifie T_1 à $[0,1]$ où zéro est l'extrémité appartenant à L, on considère ensuite une suite strictement décroissante $(\varepsilon_n, n \in \boldsymbol{N})$ de points de $]0,1[$ qui converge vers zéro.

La suite d'ouverts $(U_n, n \in \boldsymbol{N})$ définie par $U_n = \mathrm{Sat}(]\varepsilon_n, 1[\cup (\bigcup_{i=2}^{p} \mathrm{Sat}(\overset{o}{T_i}))$ est strictement croissante et recouvre l'ouvert (C.P.S) U, il existe alors n_0 tel que $U = U_{n_0}$. Ainsi on peut remplacer T_1 par $[\varepsilon_{n_0}, 1]$ et par récurrence on peut supposer alors que le compact $T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_p$ est inclus dans $U \cap K$ avec $\mathrm{Sat}(T) = U$. $\square$

EXEMPLES 2.4. a) Le saturé d'une transversale fermée est un ouvert $(C.P.S)$.

b) Le saturé d'une composante connexe d'une réunion de feuilles de τ est $(C.P.S)$.

c) Tout fermé invariant d'un ouvert $(C.P.S)$ est $(C.P.S)$.

d) Toute réunion finie de $(C.P.S)$ est $(C.P.S)$.

LEMME 2.5. *Soit U un ouvert invariant de M, les conditions* a) *et* b) *sont équivalentes*

a) *U est $(C.P.S)$.*

b) *U possède un nombre fini de composantes connexes et les deux propriétés suivantes sont vérifiées*:

i) *Pour toute feuille L de $\delta^{\varepsilon}U(\varepsilon = \pm)$, L est attractante du côté ε.*

ii) *Pour toute feuille F incluse dans U, $\bar{F} \cap U$ contient un ensemble minimal de $\mathscr{F}$ restreint à U.*

DÉMONSTRATION. Dans chacune des deux conditions *a*) et *b*), U possède un nombre fini de composantes connexes, et il existe ainsi un compact $K \subseteq \hat{U}$ tel que $U = \mathrm{Sat}(\overset{o}{K})$ et un nombre fini de feuilles $L_1, L_2, .., L_n$ telles que $\delta U = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ [**4**].

b) $\Rightarrow$ a) Si L_i est une feuille de $\delta^{\varepsilon_i}U$ $(\varepsilon_i = \pm, 1 \leq i \leq n)$, L_i est attractante du côté ε_i, notons $V(L_i^{\varepsilon_i})$ l'ouvert formé par la réunion des feuilles se rapprochant du côté ε_i de la feuille L_i, d'après ii), il existe un arc transverse $T_i \subseteq U \cap K$ tel que toute feuille de $V(L_i^{\varepsilon_i})$ coupe $\overset{o}{T}_i$ [**9**, Corollaire 1, page 75]. On en déduit que toute feuille de U passe par le compact $\chi = (\bigcup_{i=1}^{n} T_i) \cup (K - (\bigcup_{i=1}^{n} V(L_i^{\varepsilon_i}))) \subseteq U$. Le lemme 2.3 permet de conclure.

Pour la réciproque, remarquons que a) veut dire qu'il existe un compact T de U tel que $U = \mathrm{Sat}(T)$ ce qui entraîne, d'après le lemme de Zorn, la propriété ii). De plus non i) entraîne non a): en effet supposons que i) n'est pas vérifiée, il existe une feuille L de $\delta^{\varepsilon}U$ non atractante du côté ε $(\varepsilon = \pm)$. Supposons $\varepsilon = +$, soient x un point de L et I_x un arc transverse identifié à $]-1, 1[$ où x correspond à zéro, il existe une suite $(x_n, n \in \boldsymbol{N})$ dans $]0, 1[$ convergeant vers zéro telle que pour tout n, x_n correspond à un point fixe du pseudo-groupe d'holonomie positif PL_x^+ de la feuille L, en particulier $\mathrm{Sat}([0, x_n])$ est un produit feuilleté. L'ensemble $U_n = U - \mathrm{Sat}([0, x_n])$ est un ouvert de U et la famille $(U_n, n \in \boldsymbol{N})$ est un recouvrement de U par des ouverts saturés duquel on ne peut extraire un sous-recouvrement fini, ainsi non i) $\Rightarrow$ non a). $\square$

REMARQUE 2.6. Si le feuilletage $\mathscr{F}$ restreint à U a une hauteur définie [**12**], alors la condition b-ii) du Lemme 2.6 est réalisée. En particulier, si $\mathscr{F}$ est de classe C^r $(r \geq 2)$ cette condition est réalisée pour tout ouvert invariant $U \subseteq M$ [**3**].

On a aussi:

Corollaire 2.7. *Si le feuilletage* $\mathscr{F}$ *a une hauteur définie et* U *est un ouvert saturé de* M *possédant un nombre fini de composantes connexes, alors* U *est* $(C.P.S)$ *si et seulement si toute feuille de* $\delta^{\varepsilon} U$ *est attractante du côté* ε $(\varepsilon = \pm)$.

Corollaire 2.8. *Si* $\mathscr{F}$ *est un feuilletage qui a une hauteur définie, alors l'intersection* W *de deux ouverts* U *et* V $(C.P.S)$ *est un ouvert* $(C.P.S)$.

En effet, on a $\delta^{\varepsilon} W \subseteq \delta^{\varepsilon} U \cup \delta^{\varepsilon} V$ $(\varepsilon = \pm)$, de sorte que, d'après le corollaire 2.7, toute feuille de $\delta^{\varepsilon} W$ est attractante du côté ε et W est $(C.P.S)$.

En général l'intersection de deux ouverts $(C.P.S)$ n'est pas $(C.P.S)$, l'exemple suivant corrobore cette affirmation.

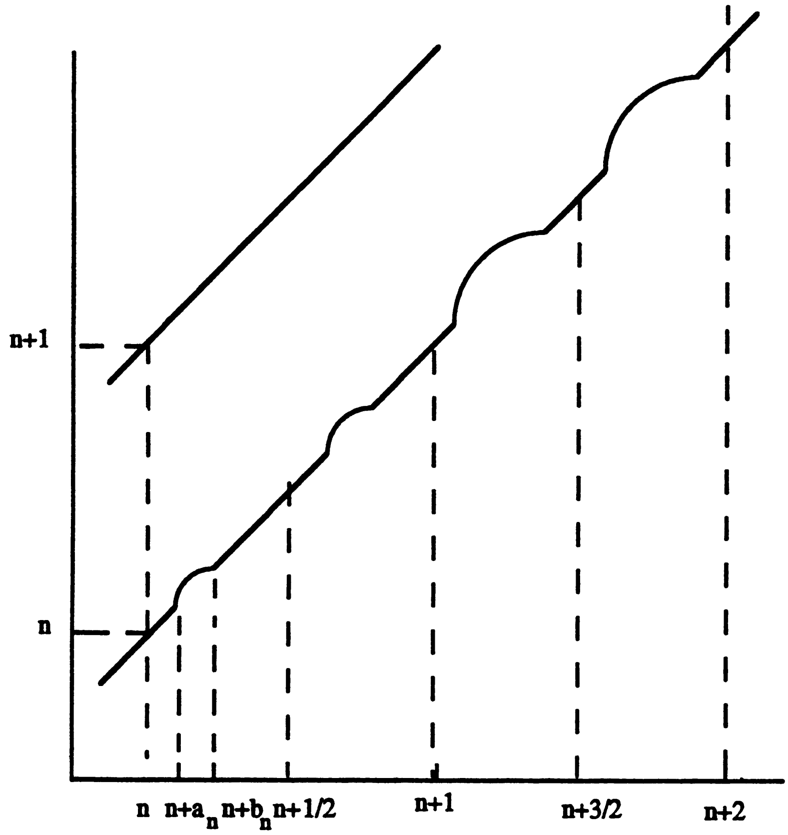
Exemple 2.9. On considère les suites $(a_n, n \in \boldsymbol{N})$, $(b_n, n \in \boldsymbol{N})$, $(c_n, n \in \boldsymbol{N})$ et $(d_n, n \in \boldsymbol{N})$, strictement monotones, vérifiants $0 < a_n \leq 1/4 \leq b_n \leq 1/2 \leq c_n \leq 3/4 \leq d_n \leq 1$, définies sur $[0,1]$ et convergeants respectivement vers $0, 1/2, 1/2$ et 1. On définit pour tout n un difféomorphisme de classe C^{∞} sur $[0,1]$ tel que:

* $f_n(x) = x$, pour tout élément x de $[0, a_n] \cup [b_n, c_n] \cup [d_n, 1]$.
* $f_n(x) > x$, pour tout élément x de $]a_n, b_n[\cup]c_n, d_n[$.
* $f_{n+1}(a_n) = b_n$, $f_{n+1}(c_n) = d_n$ (voir figure 1).

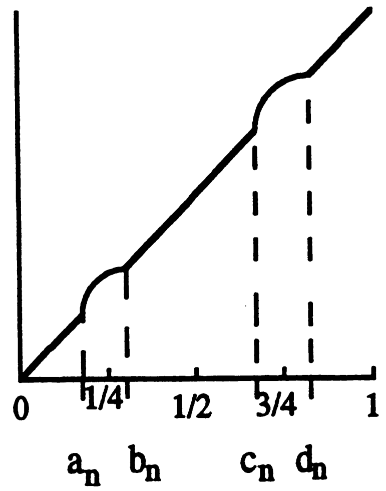
Soient enfin le groupe de difféomorphismes H de $[0,1]$ engendré par $(f_n, n \in \boldsymbol{N})$, et le groupe G de difféomorphismes de $\boldsymbol{R}$ de classe C^{∞} engendré par la translation φ_0 définie par $\varphi_0(x) = x + 1$ et par le difféomorphisme φ défini comme suit; pour tout $x \in [n, n+1[$, $\varphi(x) = (\varphi_0^n \circ f_n \circ \varphi_0^{-n})(x)$ (voir figure 1). On a $G(0) = \boldsymbol{Z}$, $G(1/2) = (1/2) + \boldsymbol{Z}$ et pour x élément de $\boldsymbol{R} - (G(0) \cup G(1/2))$ on a: $G(x) \cap [0,1] = H(y)$ où y est un point de $]0,1[$. Les orbites des points de $[0,1]$ par G ou par H sont de même type.

Par suspension de groupes, on associe à G un feuilletage $\mathscr{F}$ de classe C^0 sur la variété $M = V_2 \times S^1$ (V_2 étant une surface fermée connexe de genre 2). Le feuilletage $\mathscr{F}$ possède une feuille compacte F_{∞} et deux feuilles propres F_0 et $F(1/2)$ telles que $\bar{F}_0 - F_0 = \bar{F}(1/2) - F(1/2) = F_{\infty}$, les autres feuilles correspondent aux orbites de H pour x élément de $]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$. Pour x dans $[0,1]$ on note F_x la feuille correspondant à $H(x)$. Dans M considérons les deux ouverts $U = M - \bar{F}_0$ et $V = M - \bar{F}(1/2)$.

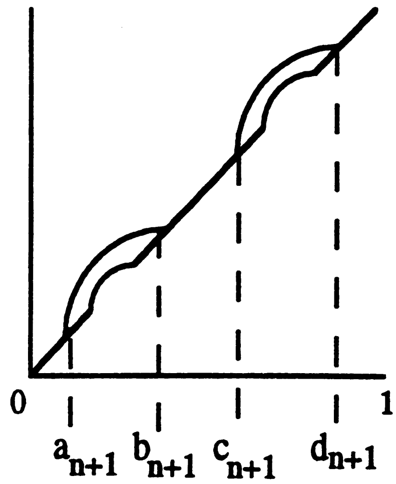
L'ouvert U (resp. V) est $(C.P.S)$ car c'est le saturé d'un arc transverse compact contenant le point $1/2$ (resp. 0), par contre $U \cap V = M - (\bar{F}_0 \cup \bar{F}(1/2))$ n'est pas $(C.P.S)$: En effet, la suite d'ouverts $(U_n, n \in \boldsymbol{N})$ définie par $U_n = \mathrm{Sat}(]a_n, b_n[\cup]c_n, d_n[)$ est une suite strictement croissante d'ouverts saturés vérifiants $U \cap V = \bigcup_n U_n$ et pour tout entier p, $U \cap V \neq U_p$.



Les difféomorphismes φ_0 et φ



Le difféomorphisme f_n



Les difféomorphismes f_n et f_{n+1}

Figure (1).

3. Feuilletages et Topologie spectrale.

Puisque M est une variété compacte, l'espace $X = M/\bar{\mathscr{F}}$ est quasi-compact (en abrégé $(Q.C)$). On montrera que l'espace $X - X_0$ possède une base d'ouverts $(Q.C)$, l'exemple 3.3 montre que ce n'est pas le cas pour X.

Propriété 3.1. *L'espace topologique X est de Kolmogoroff (T_0).*

En effet, si l'espace X n'est pas (T_0), ils existeraient $a = p(x)$ et $b = p(y)$ deux points distincts de X tels que tout voisinage de a contient b et tout voisinage de b contient a; ce qui équivaut à $\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}}$ ainsi $\bar{F}_x = \bar{F}_y$, en contradiction avec le fait que $a \neq b$.

Théorème 3.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

i) *L'espace X est séparé (T_2).*

ii) *L'espace X est accessible (T_1).*

iii) *Le feuilletage $\mathscr{F}$ est minimal* (*i.e. l'adhérence de toute feuille de $\mathscr{F}$ est un ensemble minimal*).

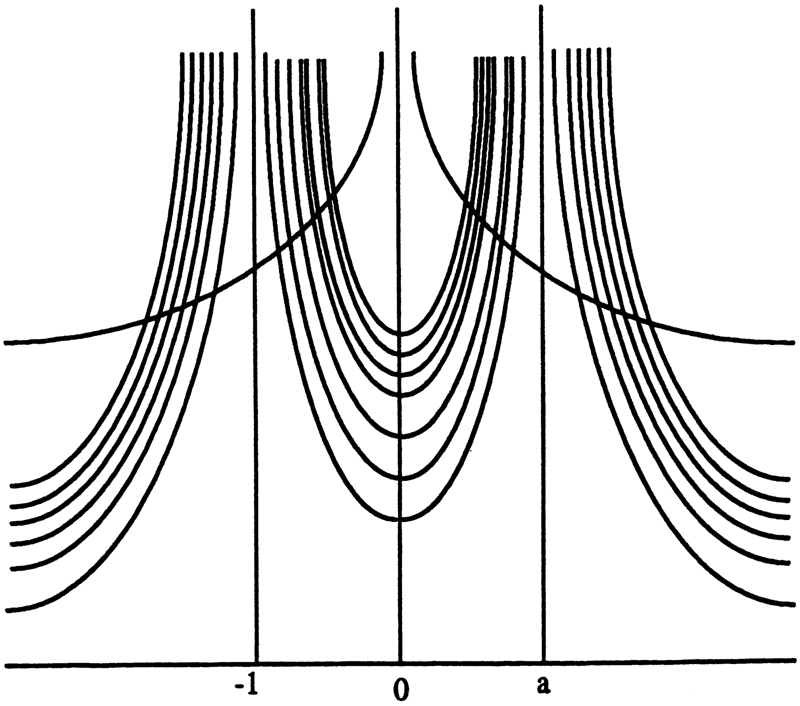
Démonstration. i) $\Rightarrow$ ii) Evident.

ii) $\Rightarrow$ iii) L'espace X étant accessible, tout singleton $\{a\}$ est fermé, c'est à dire $\overline{\{a\}} = \{a\} =]\downarrow, a]$ (*cf.* propriété 1.4), ainsi pour toute feuille F on a $\bar{F} = Cl(F)$ et $\bar{F}$ est un ensemble minimal.

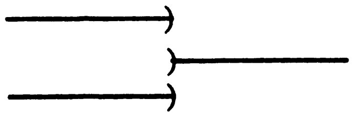
iii) $\Rightarrow$ i) L'existence d'un ensemble minimal E de type exceptionnel implique l'existence d'une feuille F telle que $E \subset \bar{F}$ [**10**], en contradiction avec le fait que $\mathscr{F}$ est minimal. Il en résulte que ou bien toutes les feuilles sont partout denses, auquel cas X est réduit à un point, ou bien toutes les feuilles sont compactes auquel cas X est homéomorphe à S^1 muni de sa topologie usuelle. $\square$

Exemple 3.3. On considère le tore à deux dimension T^2 muni d'un feuilletage $\mathscr{F}$ possédant une seule feuille périodique notée F_0, l'espace des classes de feuilles X ne possède pas de base d'ouverts $(Q.C)$, en effet le sous-ensemble $U = X - p(F_0)$ est un ouvert homéomorphe à S^1 (muni de sa topologie usuelle) et S^1 privé d'un point ne peut contenir aucun ouvert $(Q.C)$. L'espace X est non séparé, il est donc non accessible.

Remarques 3.4. 1) On déduit du théorème 3.2 que si $\mathscr{F}$ est un feuilletage non minimal sur M, alors l'espace X est de Kolmogoroff non accessible et que si $\mathscr{F}$ est minimal alors X est séparé. Ce résultat est faux si M est non compacte. Par exemple si $M = \boldsymbol{R}^2$ et $\mathscr{F}$ est le feuilletage de M défini par l'équation $(a - x)(1 + x)\,dy = x\,dx$ avec a un réel strictement positif (voir figure 2), on a $M/\bar{\mathscr{F}} = M/\mathscr{F}$ accessible non séparé.



Quelques lignes de champ coupées par deux tranversales



L'espace $M/\mathscr{F} = M/\bar{\mathscr{F}}$

Figure (2). Feuilletage défini sur $\boldsymbol{R}^2$ par l'équation $(x-a)(x+1)\,dy = x\,dx$ $(a>0)$

2) Si toutes les feuilles sont propres alors $M/\mathscr{F} = M/\bar{\bar{\mathscr{F}}}$ est T_0, alors que si $\mathscr{F}$ possède une feuille non propre contenue dans un $(E.M.L)$ (par exemple le feuilletage irrationnel de T^2), alors $M/\mathscr{F}$ n'est pas T_0.

Proposition 3.5. *L'espace topologique $X - X_0$ possède une base d'ouverts quasi-compacts.*

On établit d'abord le lemme suivant:

Lemme 3.6. *Un ouvert V de X est $(Q.C)$ si et seulement si l'ouvert $U = p^{-1}(V)$ est $(C.P.S)$.*

Démonstration. Supposons que V est $(Q.C)$ et soit $U = p^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} U_i$ avec $(U_i, i \in I)$ une famille d'ouverts saturés. On a $V = \bigcup_{i\in I} p(U_i)$, étant donné que U_i est saturé et que V est $(Q.C)$ on a $V = p(U_{i_1}) \cup \cdots \cup p(U_{i_n})$ et $U = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Réciproquement, soit $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ avec $(V_i, i \in I)$ une famille d'ouverts de X. Comme les ensembles $p^{-1}(V_i)$ sont des ouverts saturés et $U = p^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} p^{-1}(V_i)$ étant $(C.P.S)$, il existe $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_n}$ tels que: $U = p^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup p^{-1}(V_{i_n})$ et $V = V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup \cdots \cup V_{i_n}$. $\square$

DÉMONSTRATION DE (3.5). Il suffit de prouver que pour tout ouvert V de $X - X_0$ et tout point a de V, il existe W un ouvert $(Q.C)$ de $X - X_0$ tel que $a \in W \subseteq V$.

Soit F une feuille telle que $a = p(F)$, notons $U = p^{-1}(V)$, on envisage quatre cas; 1^er^ cas: La feuille F est non propre, dans ce cas il existe une transversale fermée θ contenue dans U et coupant F, on prend $W = p(\mathrm{Sat}(\theta)) - X_0$(*cf.* Exemple 2.4 a) et c)).

2^ème^ cas: La feuille F est propre attractante des deux côtés.

Soit x un point de F et I_x un arc transverse identifié à $]-1,1[$ où x correspond à zéro. Il existe $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $\mathrm{Sat}(]-\varepsilon,\varepsilon[) = \mathrm{Sat}([-\varepsilon/2,\varepsilon/2]) \subseteq U$, et l'ouvert $W = p(\mathrm{Sat}(]-\varepsilon,\varepsilon[)) - X_0$ répond à la question.

3^ème^ cas: La feuille F est propre attractante d'un côté, non attractante de l'autre (par exemple F^+ non attractante et F^- attractante).

$-$Si F^+ est non stable, il existe une suite $(y_n, n \in \boldsymbol{N})$ dans $]0,\varepsilon[$ qui ne correspond à aucun point fixe de PF_x^+, on désigne par $]a_n, b_n[$ la composante connexe de $]0,1[-\mathrm{Fix}(PF_x^+)$ contenant y_n. Puisque F^+ est non attractante et non stable, les suites $(a_n, n \in \boldsymbol{N})$ et $(b_n, n \in \boldsymbol{N})$ sont des suites infinies convergeantes vers zéro.

Pour n assez grand, l'ouvert $W = p(\mathrm{Sat}(]-\varepsilon, b_n[)) - X_0 = p\left(\mathrm{Sat}\left(\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b_n - a_n}{2} + a_n\right]\right)\right) - X_0$ répond à la question.

$-$Si F^+ est stable, pour $\varepsilon > 0$ très petit on a, compte tenu du fait que F^+ est stable, $\mathrm{Sat}(]-\varepsilon,\varepsilon[) - \mathscr{U}_0 = \mathrm{Sat}(]-\varepsilon,0]) - \mathscr{U}_0 \subseteq U$.

Le fait que F^- est attractante permet d'écrire $\mathrm{Sat}(]-\varepsilon,0]) - \mathscr{U}_0 = \mathrm{Sat}([-\varepsilon/2,0]) - \mathscr{U}_0$, de sorte que $W = p(\mathrm{Sat}(]-\varepsilon,0])) - X_0 = p\ (\mathrm{Sat}([-\varepsilon/2,0])) - X_0$ est un ouvert $(Q.C)$ de $X - X_0$ qui répond à la question.

4^ème^ cas: F est propre non attractante des deux côtés, vu que $a \in X - X_0$, la feuille F est non stable au moins d'un côté. On suppose que F^- non stable et on raisonne comme dans le 3^ème^ cas, suivant que F^+ est stable ou non. $\square$

PROPOSITION 3.7. *Si le feuilletage $\mathscr{F}$ a une hauteur définie, alors l'intersection de deux ouverts $(Q.C)$ de $X - X_0$ est un ouvert $(Q.C)$ de $X - X_0$.*

Pour la démonstration on a besoin du lemme suivant:

LEMME 3.8. *Si le feuilletage $\mathscr{F}$ a une hauteur définie alors l'intersection de deux ouverts $(Q.C)$ de X est un ouvert $(Q.C)$ de X.*

Démonstration. Si U et V sont des ouverts $(Q.C)$ de X, alors $p^{-1}(U)$ et $p^{-1}(V)$ sont $(C.P.S)$ dans M. Compte tenu du corollaire 2.8, l'ensemble $p^{-1}(U \cap V) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$ est $(C.P.S)$. Il en résulte que $U \cap V = p(p^{-1}(U \cap V))$ est $(Q.C)$ (*cf.* Lemme 3.6). □

Le résultat du lemme précédent peut être mis en défaut si le niveau de $\mathscr{F}$ n'est pas défini (voir exemple 2.9 et lemme 3.6).

Démonstration de (3.7). Notons U_1 et U_2 deux ouverts $(Q.C)$ non vides de $X - X_0$. Soient V_i $(i = 1, 2)$ deux ouverts de X tels que $U_i = V_i - X_0$, posons $U_i' = p^{-1}(U_i)$ et $V_i' = p^{-1}(V_i)$ $(i = 1, 2)$, U_i' est un $(C.P.S)$ de $M - \mathscr{U}_0$ et V_i' est un ouvert de M tel que $U_i' = V_i' - \mathscr{U}_0$. On se propose de montrer que V_i' peut être choisi $(C.P.S)$ et par suite V_i $(Q.C)$. Pour cela, il suffit de montrer que V_i' peut être choisi tel que toute feuille L contenue dans $\delta^{\varepsilon} V_i'$ $(\varepsilon = \pm)$ est attractante du côté ε (*cf.* Corollaire 2.7).

En effet, s'il existe une feuille L de $\delta^{\varepsilon} V_i'$ non attractante du côté ε, on suppose $\varepsilon = +$, considérons un point x de L et un arc transverse I_x identifié à $]-1, 1[$ où x correspond à 0. Il existe ainsi une suite $(x_n, n \in \boldsymbol{N})$ strictement monotone dans $]0, 1[$, convergeante vers zéro et correspondante à des points fixes de PL_x^+. La suite d'ouverts $V_{i,n}' = V_i' - \mathrm{Sat}([0, x_n])$ est strictement croissante et vérifie $V_i' = \bigcup_n V_{i,n}'$. Par ailleurs, vu que, $U_i' = V_i' - \mathscr{U}_0$, on a $U_i' = \bigcup_n (V_{i,n}' - \mathscr{U}_0)$, la famille $(V_{i,n}' - \mathscr{U}_0, n \in \boldsymbol{N})$ est un recouvrement par des ouverts saturés du $(C.P.S)$ U_i', on peut en extraire un recouvrement fini et on a: $U_i' = \bigcup_{n=1}^{p} (V_{i,n}' - \mathscr{U}_0)$. Etant donné que la famille $(V_{i,n}' - \mathscr{U}_0, n \in \boldsymbol{N})$ est croissante, on a pour tout $n \geq p$, $V_{i,n}' - \mathscr{U}_0 = V_{i,p}' - \mathscr{U}_0$ et on déduit que $\mathrm{Sat}(]0, x_p[) \subseteq \mathscr{U}_0$.

L'ouvert U_i' étant non vide, il n'est pas contenu dans $\mathscr{U}_0$, il existe ainsi $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\mathrm{Sat}(]0, \varepsilon_0[) \subseteq \mathscr{U}_0$ et tel que la feuille L_{ε_0} n'est pas stable du côté positif. On choisit ainsi au lieu de V_i' l'ouvert $V_i' - \mathrm{Sat}([0, \varepsilon_0])$. Dans ces conditions L_{ε_0} est attractante du côté positif et est contenue dans $\delta^+ V_i'$. Le même procédé permet de construire V_i' tel que toute feuille de $\delta^{\varepsilon} V_i'$ est attractante du côté ε et $U_i' = (V_i' \cup \delta V_i') - \mathscr{U}_0$.

D'après le corollaire 2.7, V_i' est $(C.P.S)$, le corollaire 2.8 permet d'affirmer que $V_1' \cap V_2'$ est $(C.P.S)$, de même, en tant que réunion finie de feuilles, $\delta V_i'$ est $(C.P.S)$. Puisque $U_1' \cap U_2'$ est un fermé de l'ouvert $(C.P.S)$ $V_1' \cap V_2'$, il est un $(C.P.S)$ (*cf.* exemple 2.4) et en conclusion $U_1 \cap U_2$ est $(Q.C)$ (*cf.* Lemme 3.6). □

Proposition 3.9. *Tout fermé irréductible B de X possède un point générique.*

On établit d'abord le lemme suivant:

LEMME 3.10. *Le point $a = p(F)$ est un point non générique du fermé irréductible B de X si et seulement si, il existe une feuille G de $A = p^{-1}(B)$ avec $F < G$. (i.e $\bar{F} \subset \bar{G}$).*

DÉMONSTRATION. Le fait que B est irréductible signifie que $A = p^{-1}(B)$ est un fermé saturé tel que l'intersection de deux de ses ouverts saturés non vides U et V est non vide.

Un point $a = p(F)$ de B est non générique signifie qu'il existe un ouvert saturé U_0 de A ne contenant pas F.

Soient x un point de F et I_x un arc transverse de la feuille T_x de τ passant par x, on identifie I_x à $]-1,1[$ où x correspond à zéro. Puisque, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, $U_0 \cap \mathrm{Sat}(]-1/n, 1/n[) \neq \emptyset$, il existe une feuille F_n de U_0 coupant $]-1/n, 1/n[$ en un point x_n, ce procédé permet de construire une suite infinie $(x_n, n \in \boldsymbol{N})$, et quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer $x_n \in]0, 1/n[$. On distingue les cas suivants:

1^er^ cas: F^+ est propre, on montre qu'elle est attractante et par suite on peut prendre $G = F_n$ pour n assez grand.

Supposons que F^+ n'est pas attractante, alors il existe une suite $(y_n, n \in \boldsymbol{N})$ de $]0,1[$ convergeant vers zéro et correspondant à une suite de points fixes de PF_x^+. Quitte à considérer une sous-suite, on peut prendre $y_n < x_n < y_{n+1} < x_{n+1} < y_{n+2} < \cdots$ ainsi $\mathrm{Sat}(]y_n, y_{n+1}[) \cap A$ et $\mathrm{Sat}(]y_{n+1}, y_{n+2}[) \cap A$ sont des ouverts non vides de A d'intersection vide ce qui contredit le fait que B est irréductible.

2^ème^ cas: F^+ non propre, soit V_0 un ouvert saturé de M (qu'on peut choisir connexe) avec $U_0 = V_0 \cap A$ et soit $]a_n, b_n[$ la composante connexe de $V_0 \cap]0,1[$ contenant le point x_n.

Le fait que F est non propre du côté positif et qu'elle n'est pas contenue dans U_0 implique que les suites $(a_n, n \in \boldsymbol{N})$ et $(b_n, n \in \boldsymbol{N})$ sont infinies et convergent vers zéro. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que tous les intervalles $]a_n, b_n[$ sont des arcs de feuilles transverses d'un même bras de V_0, de sorte que toute feuille coupant $]a_n, b_n[$ se rapproche de F^+. Ainsi on peut prendre $G = F_n$ pour n assez grand.

Réciproquement, s'il existe une feuille G de A avec $F < G$, alors $a = p(F) < p(G)$, ce qui implique que $\overline{\{a\}} =]\downarrow, a] \subset B$ (*cf.* Propriétés 1.1 et 1.4) et par suite a n'est pas générique. □

LEMME 3.11. [**10**] *Soit $\mathscr{C} = (F_i, i \in I)$ une famille totalement ordonnée de feuilles, alors $\mathscr{C}$ admet une borne supérieure G, de plus $\bar{G} = \cup \bar{F}_i$.*

DÉMONSTRATION de 3.9. On suppose que B n'a pas de points génériques et on pose $A = p^{-1}(B)$. Soit $\mathscr{C} = (F_i, i \in I)$ une chaîne maximale de feuilles de A, d'après le lemme 3.11, $\mathscr{C}$ admet une borne supérieure F vérifiant $\bar{F} = \cup \bar{F}_i$., le fait que A est fermé montre que F est une feuille contenue dans A. Le lemme 3.10 assure l'existence d'une feuille G de A telle que $F < G$, ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{C}$. Il s'en suit que B possède un point générique. $\square$

Puisque $X - X_0$ est un fermé de X, on a:

Corollaire 3.13. *Tout fermé irréductible de $X - X_0$ possède un point générique.*

Lemme 3.14. i) *Si le niveau de $\mathscr{F}$ est défini alors l'ordinal* $\mathrm{ht}\mathscr{F} = \mathrm{Sup}\{\mathrm{niv}(F)/F$ *est une feuille de* $\mathscr{F}\}$ *est dénombrable* [**12**].

ii) *Si $\mathscr{F}$ est de classe C^r $(r \geq 2)$ alors $\mathscr{F}$ a une hauteur définie et sa hauteur* $\mathrm{ht}\mathscr{F}$ *est inférieure ou égale au premier ordinal limite ω.*

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de ce papier.

Théorème 3.15. *Soient M une variété fermée connexe et $\mathscr{F}$ un feuilletage sur M, de codimension* 1, *de classe C^r $(r \geq 0)$ et transversalement orientable. On note $X = M/\bar{\bar{\mathscr{F}}}$ l'espace des classes de feuilles et X_0 la réunion des ouverts de X homéomorphes à* **R** *ou à S^1. Si $\mathscr{F}$ a une hauteur définie, alors $X - X_0$ est un espace topologique spectral. De plus la hauteur de X est un ordinal dénombrable.*

Corollaire 3.16. *Si $\mathscr{F}$ est de classe C^2 alors l'espace $X - X_0$ est spectral et la hauteur de X est inférieure ou égale au premier ordinal limite ω.*

Si le niveau de $\mathscr{F}$ n'est pas défini alors $X - X_0$ peut être spectral (exemple 2.9 et lemme 3.6) ou non spectral, il suffit de considérer le feuilletage associé (comme dans l'exemple 2.9) au groupe K de difféomorphismes de $[0, 1/2]$ obtenu par les restrictions des éléments de H (voir 2.9) à $[0, 1/2]$.

Pour l'espace des feuilles $Z = M/\mathscr{F}$, on établit par les mêmes techniques le résultat analogue suivant:

Théorème 3.17. *Soient M une variété fermée connexe et $\mathscr{F}$ un feuilletage sur M, de codimension* 1, *de classe C^r $(r \geq 0)$ et transversalement orientable. On note $Z = M/\mathscr{F}$ l'espace des feuilles et Z_0 la réunion des ouverts de Z homéomorphes à* **R** *ou à S^1. Si $\mathscr{F}$ a une hauteur définie, alors l'espace $Z - Z_0$ vérifie les propriétés suivantes*:

i) *$Z - Z_0$ est $(Q.C)$ et possède une base d'ouverts $(Q.C)$.*

ii) *l'intersection de deux ouverts $(Q.C)$ de $Z - Z_0$ est un ouvert $(Q.C)$ de $Z - Z_0$.*

iii) *tout fermé irréductible de $Z - Z_0$ possède un point générique.*

(*On dira suivant* [**1**] *que $Z - Z_0$ est un espace quasi-spectral*).

Exemple 3.18. Un espace topologique spectral dénombrable de hauteur le premier ordinal limite ω qui n'est pas homéomorphe à un $X - X_0$.

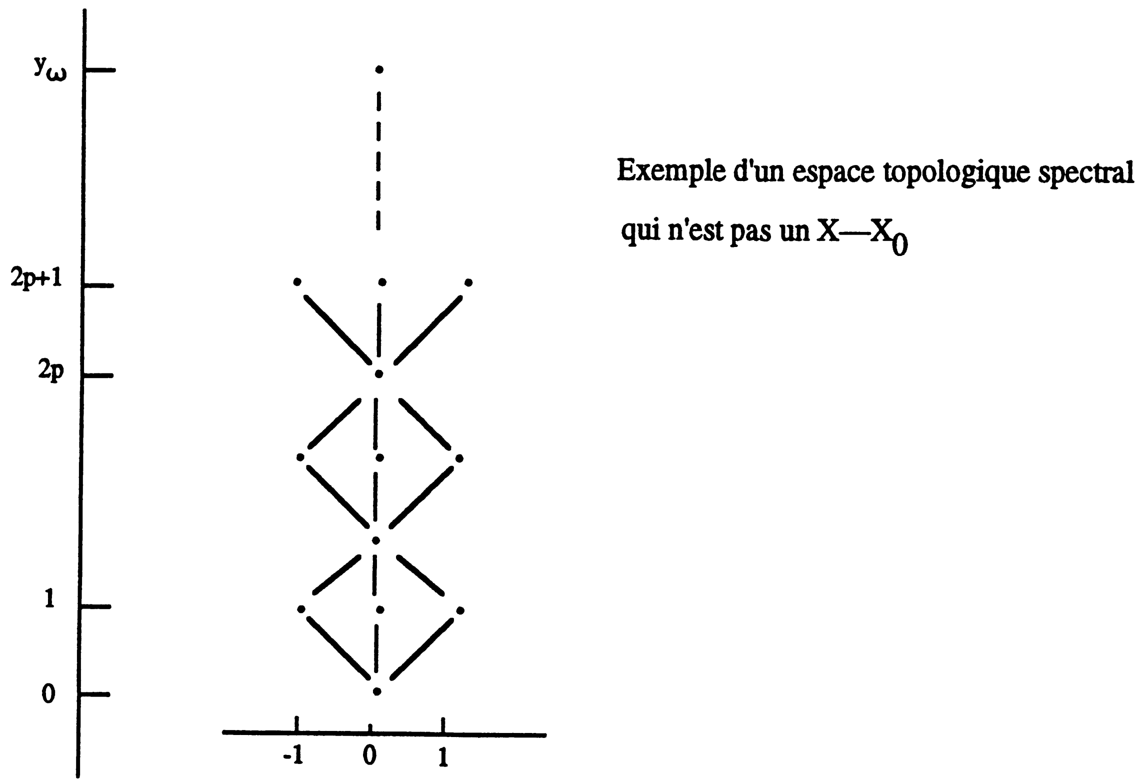


Figure (3).

On donne: $Y = \{(0,p)/p \in \boldsymbol{N}\} \cup \{(q, 2p+1)/p \in \boldsymbol{N}, q = \pm 1\} \cup \{y_\omega\}$. On munit Y de la relation d'ordre: $(r,s) \leq (r',s')$ signifie ($s \leq s'$ et $s \neq s'$) ou $(r,s) = (r',s')$ et pour tout a de Y on a; $a \leq y_\omega$ (voir figure 3).

La famille $([y, \uparrow[, y \neq y_\omega, y \in Y)$ est une base d'ouverts d'une topologie définie sur Y compatible avec l'ordre $\geq$. En effet, si $(a,b) \in Y \times Y$, il existe $c \in Y$ tel que: $[a,\uparrow[\cap[b,\uparrow[=[c,\uparrow[$, de plus, pour tout élément y de Y on a $\overline{\{y\}} =]\downarrow, y]$.

L'espace Y muni de cette topologie est spectral, en effet:
– Il est clair que Y est $(Q.C)$, que $([y,\uparrow[, y \neq y_\omega)$ est une base d'ouverts $(Q.C)$, que l'intersection de deux ouverts $(Q.C)$ est $(Q.C)$.
– Un fermé irréductible de Y est de la forme $]\downarrow, a] = \overline{\{a\}}$, (en fait les fermés de Y sont de l'une des trois formes: $]\downarrow, a]$, $]\downarrow, a] \cup]\downarrow, b]$ ou $]\downarrow, a] \cup]\downarrow, b] \cup]\downarrow, c]$), il possède ainsi un point générique.

L'espace topologique Y est spectral, pourtant ce n'est pas un espace $X - X_0$ comme dans le théorème (3.15). En effet, soit M une variété fermée connexe et $\mathscr{F}$ un feuilletage de classe C^r $(r \geq 0)$ de codimension 1 et transversalement orientable et $M/\bar{\mathscr{F}}$. On sait que, sous ces hypothèses, il existe une nombre fini de feuilles non maximales $L_1, L_2, \ldots, L_n$ telles que $M - \overline{(L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n)}$ est un produit feuilleté et que dans un produit feuilleté l'adhérence de toute feuille contient au plus deux classes de hauteur donnée [**10**]. La contradiction vient du fait que si Y était $X - X_0$, on aurait une feuille de hauteur $2p$ qui contient dans son adhérence trois classes distinctes de hauteur $2p - 1$ et ceci pour tout entier p.

Exemples 3.19. a) Le spectre d'un anneau nœthérien A de dimension ≥ 2 n'est pas homéomorphe à un $X - X_0$. Supposons que $\mathrm{Spec}(A)$ est homéomorphe à $X - X_0$ comme dans le théorème 3.15, considérons ensuite un élément q de $\mathrm{Spec}(A)$ de hauteur 2, comme A est nœthérien il existe une infinité d'éléments r_i de $\mathrm{Spec}(A)$ de hauteur 1 tels que $r_i \subset p$. Ce qui contredit le fait que dans l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage il y a au plus un nombre fini de feuilles de hauteur donnée.

b) On considère $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[T])$ muni de la topologie de Zariski et de l'ordre $\supseteq$, $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[T]) - \mathrm{Max}(\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[T]))$ est un ensemble non dénombrable qui a la puissance du continu, donc $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[T])$ n'est pas un $X - X_0$.

On remarque qu'en particulier le spectre de $A = K[X_1 \cdots X_n]$ (l'anneau de polynômes en n indéterminées à coefficients dans un corps K) ne peut être homéomorphe à un $X - X_0$.

Exemple 3.20. Un espace topologique spectral dénombrable de hauteur 2 non homéomorphe à un $X - X_0$.

On pose $Y = \{(0,0)\} \cup \{(n,1)/n \in \boldsymbol{N}\} \cup \{(0,2)\}$ et on définit sur Y la relation d'ordre: $(n,m) \leq (n',m')$ signifie $(n = m = 0)$ ou $(n' = 0$ et $m' = 2)$. Muni de la topologie droite, Y est spectral. Pourtant il ne peut être homéomorphe à un $X - X_0$ car l'adhérence de $(0,2)$ contient une infinité d'éléments de hauteur 1.

Exemple 3.21. L'exemple (3.3) de [**2**] permet de donner un espace topologique spectral de type fini (i.e. toute chaîne est finie), de hauteur 2ω, qui n'est pas homéomorphe à un espace $X - X_0$ comme dans le théorème 3.15.

Références

[1] E. Bouacida, O. Echi, E. Salhi. Topologies associées à une relation binaire et relation binaire spectrale. Boll. Un. Mat. Ital. (7), 10-B (1996) 417–439.

[2] E. Bouacida, O. Echi, E. Salhi. Nonfinite Heights. Lect. Notes. Pure Appl. Math. Dekker, **185** (1997)113–130.

[3] J. Cantwell, L. Conlon. Analytic foliations and the theory of levels. Math. Ann. **265** (1983) 253–261.

[4] P. R. Dippolito. Codimension one foliations of closed manifolds. Ann. of Math. **107** (1978) 403–453.

[5] C. Godbillon. Feuilletage, étude géometrique. Birkhäuser-Verlag. (1991).

[6] G. Hector. Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension 1. Thèse d'Etat Publication de l'IRMA (1972). Strasbourg. France.

[7] G. Hector. Architecture des feuilletages de classe C^2. Astérisque (107–108) (1983) 243–258.

[8] M. Hochster. Prime ideal stucture in commutative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969) 43–60.

[9] E. Salhi. Problème de structure dans les feuilletages de codimension un de classe C^0. Thèse d'Etat, publication de l'IRMA Strasbourg (1984).
[10] E. Salhi. Sur les ensembles minimaux locaux. C. R. A. S. Paris, **295** (1982) 691–694.
[11] E. Salhi. Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension un. C. R. A. S. Paris, **300** (1985) 635–638.
[12] E. Salhi. Niveau des feuilles. C. R. A. S. Paris, **301** (1985) 219–222.

Ezzeddine Bouacida and Ezzeddine Salhi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Sfax
B.P. 802
3038 Sfax, Tunisie

Othman Echi
Department of Mathematics
College of Teachers Riyadh
P.O. Box 4341, 11491 Riyadh
Kingdom of Saudi Arabia