J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
12 (1977) 345-376

QUELQUES PROBLEMES D'INTERSECTIONS EN GEOMETRIE RIEMANNIENNE

PIERRE MARRY & JEAN-LOUIS VERDIER

Cet article constitue essentiellement un travail de mise au point. On y exploite systématiquement certaines idées de S. S. Chern (cf. [6]). Quelques progrès ont été faits dans la présentation des calculs, certaines formes différentielles introduites par Chern apparaissant naturellement comme intégrales sur les fibres d'un fibré en sphères de formes classiques. Ces calculs se rattachent à ceux de certains caractères différentiels.

Les auteurs se sont beaucoup inspiré du travail fondamental de R. Bott et S. S. Chern (cf. [3]) qui traite de problèmes analogues en géométrie $\boldsymbol{C}$-analytique.

1. Elément d'aire relatif

1.1. Courant de Dirac. Soient X une variété différentielle C^∞ de dimension n, Y une sous-variété de X de dimension $p < n$, T_X le faisceau d'orientation de X et $i\colon Y \to X$ l'injection canonique. Soit T un faisceau localement libre de rang 1 sur X, égal à son inverse, induisant sur Y le faisceau d'orientation de Y.

A toute p-forme différentielle T-tordue à support compact α sur X, le courant de Dirac δ_Y de Y associe le nombre réel $\langle \delta_Y, \alpha\rangle = \int_Y i^*(\alpha)$.

Si α est fermée, ce nombre ne dépend que de la classe de cohomologie à support compact de α, donc δ_Y détermine un élément de Hom $(H_c^p(X, T), \boldsymbol{R})$. La dualité de Poincaré nous donne un isomorphisme Hom $(H_c^p(X, T), \boldsymbol{R}) \approx$ $\mathrm{Ext}^{n-p}\,(T, T_X)$ et, comme T est localement libre, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^{n-p}\,(T, T_X) \approx H^{n-p}(X, \mathrm{Hom}\,(T, T_X)) = H^{n-p}(X, T \otimes T_X)\ .$$

L'image de δ_Y dans $H^{n-p}(X, T \otimes T_X)$ est la *classe fondamentale* $[Y]$ de Y dans X (par rapport à T). Elle provient en fait d'un élément de $H_Y^{n-p}(X, T \otimes T_X)$ par le morphisme canonique $H_Y^{n-p}(X, T \otimes T_X) \to H^{n-p}(X, T \otimes T_X)$.

Si V est un voisinage ouvert quelconque de Y dans X, $[Y]$ a donc des représentants qui sont des formes différentielles fermées, à support dans V, et $T \otimes T_X$ -tordues.

Received July 1, 1975.

Si ω_V est un tel représentant, $\omega_V \in \Gamma(X, \Omega_X^{n-p} \otimes (T \otimes T_X))$ et

(a) $d\omega_V = 0$,

(b) $\operatorname{supp} \omega_V \subset V$,

(c) pour toute forme fermée $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_X^{n-p} \otimes T)$ on a $\int_Y i^*(\alpha) = \int_X \alpha \wedge \omega_V$.

Dans la suite de cet article, on montre que, lorsque X est riemannienne, on peut déterminer de telles formes ω_V de manière canonique. On en tire quelques conséquences pour des calculs de nombres de Lefschetz.

1.2. Cas des fibrés vectoriels. Soit $\Xi \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel réel de rang $r > 0$ sur une variété différentielle X de dimension n, muni d'une métrique sur les fibres. Comme les fibres de π sont orientables, le faisceau sur Ξ d'orientation relative de Ξ au-dessus de X est l'image réciproque d'un faisceau $t(\Xi)$ sur X, et le fibré vectoriel de rang 1 sur X associé à $t(\Xi)$ n'est autre que $\bigwedge^r \Xi$. Notons T_X le faisceau d'orientation de X.

Soit $S \xrightarrow{\pi_S} X$ le fibré sur X en sphères unités de Ξ.

Definition 1.2.1. On appelle *élément d'aire relatif sur S* toute $(r-1)$-forme σ sur S, C^∞ et $\pi_S^*(t(\Xi))$-tordue, telle que

(i) $\int_{\pi_S} \sigma = 1$,

(ii) il existe une r-forme χ sur X, C^∞ et $t(\Xi)$-tordue telle que $d\sigma = -\pi_S^*\chi$.

(Dans cette définition, le symbole $\int_{\pi_S}$ désigne l'opération d'intégration le long des fibres de π_S, cf. [4, § 10].)

Comme on le verra au § 1.3, il existe toujours des éléments d'aire relatifs.

Remarquons que la condition (i) n'est qu'une condition de normalisation. En effet, sous l'hypothèse (ii) on a

$$d\int_{\pi_S} \sigma = \int_{\pi_S} d\sigma = \int_{\pi_S} -\pi_S^*\chi = 0$$

et par suite, $\int_{\pi_S} \sigma$ est une fonction localement constante.

Proposition 1.2.2. *Soient σ_1 et σ_2 deux éléments d'aire relatifs sur S. Il existe alors une $(r-1)$-forme β sur X et une $(r-2)$-forme γ sur S telles que $\sigma_1 - \sigma_2 = \pi_S^*\beta + d\gamma$. Réciproquement, si σ_1 est un élément d'aire relatif sur S, β une $(r-1)$-forme sur X et γ une $(r-2)$-forme sur S, $\sigma_2 = \sigma_1 + \pi_S^*\beta + d\gamma$ est aussi un élément d'aire relatif sur S.*

Posons $\tau = \sigma_2 - \sigma_1$. On a $\int_{\pi_S} \tau = 0$ et $d\tau = \pi_S^*(\phi)$ où ϕ est une r-forme sur X. Soit ε un nombre réel strictement positif, soit $\Phi_\varepsilon : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ une fonction C^∞, à support dans $[0, \varepsilon[$ et égale à 1 sur le segment $[0, \frac{1}{2}\varepsilon]$. Notons p la projection canonique de $\Xi - X$ sur S (on identifie X à la section nulle de Ξ).

Soit $\rho : \Xi \to \boldsymbol{R}_+$ la norme sur les fibres de Ξ. La forme $d(\Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau)$ est C^∞ sur $\Xi - X$ et se prolonge à Ξ en une r-forme fermée θ_ε, C^∞ et $\pi^*t(\Xi)$-tordue, à support dans le voisinage tubulaire $\Xi_\varepsilon = \{\xi \in \Xi \mid \rho(\xi) < \varepsilon\}$ de X. En effet, sur $\Xi - X$ on a

$$d(\Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau) = \Phi'_\varepsilon(\rho)d\rho \wedge p^*\tau + \Phi_\varepsilon(\rho)p^*(d\tau) ,$$

et, comme $\Phi'_\varepsilon(\rho)$ est nulle au voisinage de X et $d\tau = \pi_S^*\phi$, chaque terme se prolonge à Ξ tout entier. Sur $\Xi - X$, $d\theta_\varepsilon = 0$, donc, comme $\dim X < \dim \Xi$, $d\theta_\varepsilon = 0$ sur Ξ. Notons K la famille des supports de Ξ dont la projection sur X est compacte. On a, pour toute forme $\alpha \in \Gamma_K(\Xi, \Omega_\Xi^n \otimes \pi^* T_X)$ fermée, $\int_\Xi \alpha \wedge \theta_\varepsilon = 0$.

En effet, soit Ξ_h le voisinage tubulaire de rayon $h \geq 0$ de X dans Ξ, π_h la projection de $S_h = \partial \Xi_h$ sur X. On a

$$\int_\Xi \alpha \wedge \theta_\varepsilon = \lim_{h\to 0} \int_{\Xi - \Xi_h} \alpha \wedge \theta_\varepsilon = \lim_{h\to 0} \int_X \int_{\pi \mid \Xi - \Xi_h} \alpha \wedge \theta_\varepsilon$$
$$= \lim_{h\to 0} \int_X \int_{\pi \mid \Xi - \Xi_h} (-1)^n d(\alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau) .$$

Par la formule de Stokes relative, on a, car $\partial(\Xi - \Xi_h) = -S_h$,

$$\int_{\pi \mid \Xi - \Xi_h} d(\alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\pi)p^*\tau)$$
$$= d\int_{\pi \mid \Xi - \Xi_h} \alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau - (-1)^{n-1} \int_{\pi \mid \partial(\Xi - \Xi_h)} \alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau \mid_{\partial(\Xi - \Xi_h)}$$
$$= d\int_{\pi \mid \Xi - \Xi_h} \alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau - (-1)^n \int_{\pi_h} \alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau \mid_{S_h} .$$

Donc

$$(1) \qquad \int_X \int_{\pi \mid \Xi - \Xi_h} \alpha \wedge \theta_\varepsilon = -\int_X \int_{\pi_h} (-1)^n \alpha \wedge \Phi_\varepsilon(\rho)p^*\tau \mid_{S_h} .$$

D'autre part, on a le lemme suivant.

Lemme 1.2.3. *Soit α une forme C^0 sur Ξ. Soit $i_h \colon S \to S_h$ la projection naturelle du fibré en sphères de rayon 1 de Ξ sur le fibré en sphères de rayon h. Soit η une forme C^∞ sur Ξ telle que $i_h^*(\eta \mid_{S_h})$ soit localement bornée sur S, uniformément par rapport à h, et telle que $\int_{\pi_h} \eta \mid_{S_h}$ converge uniformément sur tout compact vers une limite η_0 lorsque h tend vers 0. Alors $\int_{\pi_h} (\alpha \wedge \eta) \mid_{S_h}$ admet une limite uniforme lorsque h tend vers 0, qui n'est autre que $(\alpha \mid_X) \wedge \eta_0$.*

Cela résulte trivialement du fait que α est C^0 et que $\alpha \mid_{S_h} - \pi_h^*(\alpha \mid_X)$ converge uniformément vers 0 lorsque h tend vers 0.

Appliquant à ce lemme l'égalité (1), il vient

$$\lim_{h\to 0}\int_X\int_{\pi|\Xi-\Xi_h}\alpha\wedge\theta_\varepsilon = -\int_X(\alpha|_X)\wedge\lim_{h\to 0}\int_{\pi_h}(p^*\tau|_{S_h}) = 0 \ .$$

Donc $\int_\Xi \alpha\wedge\theta_\varepsilon = 0$ pour toute forme $\alpha\in\Gamma_K(\Xi, \Omega^n_\Xi\otimes\pi^*T_X)$ fermée. La dualité de Poincaré nous montre l'existence d'une $(r-1)$-forme $C^\infty\beta'$, sur Ξ telle que $\theta_\varepsilon = d\beta'$.

Sur $\Xi_{\varepsilon/2} - X$ on a $\theta_\varepsilon = \pi^*\phi = d\beta'$. Toutes ces formes étant C^∞ sur $\Xi_{\varepsilon/2}$, cette égalité reste vraie sur $\Xi_{\varepsilon/2}$ tout entier. En particulier, par restriction à X, on voit que $\phi = d(\beta'|_X)$. Notons $\beta_1 = \beta'|_X$. On a $d\tau = \pi_S^*(d\beta_1) = d(\pi_S^*\beta_1)$, donc $\tau = \pi_S^*\beta_1 + \gamma'$, où γ' est une $(r-1)$-forme sur S telle que $d\gamma' = 0$ et $\int_{\pi_S}\gamma' = 0$.

On a une suite exacte de cohomologie (cf. § 2.2 de cet article)

$$0 \longrightarrow H^{r-1}(X, t(\Xi)) \xrightarrow{\pi_S^*} H^{r-1}(S, \pi_S^* t(\Xi)) \xrightarrow{\int_{\pi_S}} H^0(X, \mathbf{R}) \longrightarrow \cdots \ .$$

Donc, il existe une $(r-1)$-forme β_2 sur X, fermée, C^∞ et $t(\Xi)$-tordue telle que $\gamma' = \pi_S^*\beta_2 + d\gamma$, où $d\gamma$ est une $(r-2)$-forme sur S. En posant $\beta = \beta_1 + \beta_2$ on trouve bien pour τ l'expression désirée. La réciproque est immédiate.

On déduit directement de cette proposition le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.4. *Si σ est un élément d'aire relatif sur S, la r-forme χ sur X telle que $d\sigma = -\pi_S^*\chi$ est fermée, et sa classe de cohomologie ne dépend pas de l'élément d'aire relatif σ choisi.*

On a la proposition suivante.

Proposition 1.2.5. *Soient $p: \Xi - X \to S$ la surjection canonique, ε un nombre réel strictement positif et $\Phi_\varepsilon: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ à support dans* $[0, \varepsilon[$, *égale à* 1 *sur* $[0, \varepsilon/2]$. *Notons ρ la norme sur Ξ et Ξ_ε l'ensemble des éléments de Ξ de norme strictement inférieure à ε. Soit σ un élément d'aire relatif sur S. Alors:*

(a) *la forme $\gamma_\varepsilon = (-1)^n\Phi_\varepsilon(\rho)p^*\sigma$ sur $\Xi - X$ est une section localement L^1 de $\Omega^{r-1}_\Xi\otimes\pi^*t(\Xi)$, c'est-à-dire que pour toute $(n+1)$-forme ψ sur Ξ, à support compact, C^0 et π^*T_X-tordue, $\psi\wedge\gamma_\varepsilon$ est intégrable sur Ξ;*

(b) *la forme $-d\gamma_\varepsilon$ sur $\Xi - X$ se prolonge à Ξ en une r-forme ω_ε fermée, C^∞ et $\pi^*t(\Xi)$-tordue, à support dans Ξ_ε;*

(c) *si $\tilde\omega_\varepsilon$ et $\tilde\gamma_\varepsilon$ sont les courants sur Ξ associés aux formes ω_ε et γ_ε, δ_X le courant de Dirac de la section nulle X de Ξ, on a $\delta_X = \tilde\omega_\varepsilon + d\tilde\gamma_\varepsilon$.*

(a) Pour que γ_ε soit localement L^1, il suffit que $p^*\sigma$ le soit. Soit ψ une (n + 1)-forme de classe C^0 sur Ξ à support compact. On a

$$\int_{\Xi-X}\psi\wedge p^*\sigma = \int_X\int_0^\infty\left[\int_{\pi_h}\psi_h\wedge(p^*\sigma|_{S_h})\right]dh \ ,$$

où ψ_h est, au signe près, le coefficient de dh dans l'expression de ψ en coordonnées polaires. Comme $\int_{\pi_h} \psi_h \wedge (p^*\sigma|_{S_h})$ tend uniformément vers 0 lorsque h tend vers 0 (lemme 1.2.3), la fonction $h \mapsto \int_{\pi_h} \psi_h \wedge (p^*\sigma|_{S_h})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) Résulte du fait que $d\Phi_\varepsilon(\rho) = 0$ au voisinage de X.

(c) Soit α une n-forme différentielle sur Ξ, à support compact C^∞, et π^*T_X-tordue. On a

$$\langle d\gamma_\varepsilon, \alpha\rangle = (-1)^{n+1}\langle\tilde{\gamma}_\varepsilon, d\alpha\rangle = (-1)^{n+1}\int_{\Xi - X} (d\alpha) \wedge \gamma_\varepsilon ,$$

donc

$$\langle\tilde{\omega}_\varepsilon + d\tilde{\gamma}_\varepsilon, \alpha\rangle = \int_\Xi \alpha \wedge \omega_\varepsilon + (-1)^{n+1}\int_{\Xi - X} (d\alpha) \wedge \gamma_\varepsilon ,$$

$$\int_\Xi \alpha \wedge \omega_\varepsilon = \int_{\Xi - X} \alpha \wedge \omega_\varepsilon = -\int_{\Xi - X} \alpha \wedge d\gamma_\varepsilon ,$$

donc on a

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\omega}_\varepsilon + d\tilde{\gamma}_\varepsilon, \alpha\rangle &= (-1)^{n+1}\int_{\Xi - X} d(\alpha \wedge \gamma_\varepsilon) = (-1)^{n+1} \lim_{h\to 0}\int_{\Xi - \Xi_h} d(\alpha \wedge \gamma_\varepsilon) \\ &= \lim_{h\to 0}(-1)^n \int_{S_h} \alpha \wedge \gamma_\varepsilon = \lim_{h\to 0}\int_X\int_{\pi_h} (\alpha \wedge p^*\sigma)|_{S_h} = \int_X \alpha|_X .\end{aligned}$$

La dernière égalité étant justifiée par le lemme 1.2.3.

En particulier, pour toute forme fermée $\alpha \in \Gamma_c(\Xi, \Omega^n_\Xi \otimes \pi^*T_X)$ on a

$$\int_X \alpha|_X = \int_\Xi \alpha \wedge \omega_\varepsilon .$$

Dans les cas où Y est une sous-variété compacte de dimension $p < n$ de X, variété riemannienne de dimension n, notons N_Y le fibré normal à Y. On peut trouver un nombre réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, l'exponentielle induise un C^∞-difféomorphisme du Y-fibré en boules ouvertes de rayon ε de N_Y sur le voisinage tubulaire V_ε de rayon ε de Y dans X. L'image d'une forme ω_ε, construite sur N_Y comme ci-dessus par l'exponentielle, représente la classe fondamentale de Y dans X (par rapport à tout faisceau T localement libre de rang 1 égal à son inverse, et induisant sur Y le faisceau d'orientation de Y).

1.3. L'élément d'aire relatif canonique. On reprend dans ce paragraphe les notations du paragraphe précédent. Notons ∇ une connexion sur le fibré Ξ qui préserve la métrique. On sait qu'il en existe une. Notons d'autre part $E = \pi_S^*(\Xi)$ le S-fibré image réciproque de Ξ par π_S, π_E la projection canonique de E sur S, $\nu: S \to E$ la section normale à S, définie par $\nu(\xi_x) = (\xi_x, \xi_x)$ pour tout $\xi_x \in S_x$, où S_x désigne la fibre de S au-dessus de $x \in X$, et N le sous-fibré de rang 1 de E engendré par ν.

Le S-fibré vectoriel de rang r, $E \xrightarrow{\pi_E} S$ est muni d'une métrique sur les fibres et d'une connexion ∇_1, images réciproques de la métrique sur les fibres de Ξ et de la connexion ∇ sur Ξ.

Notons $N^\perp$ l'orthogonal de N dans E, ∇_N et $\nabla_{N^\perp}$ les connexions sur N et $N^\perp$ respectivement, induites par ∇_1, et ∇_0 la connexion sur E somme de Whitney de ∇_N et $\nabla_{N^\perp}$. Pour tout élément t de l'intervalle $I = [0, 1]$, on définit sur E la connexion $\nabla_t = t\nabla_1 + (1 - t)\nabla_0$.

Notons pr la projection de $S \times I$ sur S. Il existe sur $\mathrm{pr}^*(E)$ une connexion unique $\bar{\nabla}$ telle que

(a) pour toute section s de E, $\bar{\nabla}_{\partial/\partial t}(\mathrm{pr}^*s) = 0$,

(b) la restriction de $\bar{\nabla}$ à $\mathrm{pr}^*E|_{S\times\{t\}}$ est ∇_t.

Les tenseurs de courbure de ∇_0, ∇_1 et $\bar{\nabla}$ peuvent être considérés comme des 2-formes sur S et $S \times I$ à valeurs dans $E^* \otimes E$ et $\mathrm{pr}^*(E^* \otimes E)$ respectivement. Du fait de l'existence d'une métrique sur les fibres, on peut les considérer comme des 2-formes Ω_0, Ω_1 et $\bar{\Omega}$ sur S et $S \times I$, à valeurs dans $\bigwedge^2 E$ et $\mathrm{pr}^*(\bigwedge^2 E)$ respectivement. De même, le tenseur de courbure de ∇ peut être considéré comme une 2-forme Ω sur X à valeurs dans $\bigwedge^2 \Xi$.

Notons aussi $\bar{\nabla}_0$ et $\bar{\nabla}_1$ les connexions images réciproques sur pr^*E de ∇_0 et ∇_1, $\bar{\Omega}_0$ et $\bar{\Omega}_1$ les images réciproques sur $S \times I$ de Ω_0 et Ω_1. On peut écrire

$$\bar{\nabla} = t\bar{\nabla}_1 + (1 - t)\bar{\nabla}_0 = \bar{\nabla}_1 + (1 - t)R\ ,$$

où $R = \bar{\nabla}_0 - \bar{\nabla}_1$ est C^∞-linéaire. Si α est une p-forme sur $S \times I$ à valeurs dans pr^*E, on a

$$R(\alpha) = \langle \bar{\nabla}_1\bar{\nu}, \alpha\rangle\bar{\nu} + (-1)^{p+1}\langle\bar{\nu}, \alpha\rangle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}\ ,$$

où $\bar{\nu} = \mathrm{pr}^*\nu$. On a

$$\bar{\nabla}\circ\bar{\nabla} = \bar{\nabla}_1\circ\bar{\nabla}_1 + (1 - t)[\bar{\nabla}_1\circ R + R\circ\bar{\nabla}_1] + (1 - t)^2 R\circ R + R \wedge dt\ .$$

Lemme 1.3.0. *Sur les sections de* pr^*E, *on a les égalités suivantes entre les opérateurs*

$$\bar{\nabla}_1\circ R + R\circ\bar{\nabla}_1 = \langle\bar{\nabla}_1^2\bar{\nu}, \cdot\rangle\bar{\nu} - \langle\bar{\nu}, \cdot\rangle\bar{\nabla}_1^2\bar{\nu} - 2\langle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}, \cdot\rangle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}\ ,$$
$$R\circ R = \langle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}, \cdot\rangle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}\ .$$

Ce lemme résulte directement de l'expression de R, donnée plus haut, et des égalités $\langle\bar{\nu}, \bar{\nu}\rangle = 1$, $\langle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}, \bar{\nu}\rangle = \langle\bar{\nu}, \bar{\nabla}_1\bar{\nu}\rangle = 0$ et $\langle\bar{\nabla}_1\bar{\nu}, \bar{\nabla}_1\bar{\nu}\rangle = 0$ (cette dernière égalité étant vraie parce que $\bar{\nabla}_1\bar{\nu}$ est une forme de degré 1 à valeurs dans pr^*E).

En passant aux 2-formes correspondantes[1] sur $S \times I$, à valeurs dans $\mathrm{pr}^*(\bigwedge^2 E)$

[1] à tout endomorphisme antisymétrique f d'un espace vectoriel V euclidien, on associe $\mathrm{alt}(f) \in \bigwedge^2 V$ tel que $\langle x \wedge y, \mathrm{alt}(f)\rangle = 2\langle f(x), y\rangle$ pour tout x et tout y de V.

on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 &+ 2(1-t)[\bar{V}_1^2\bar{\nu} \wedge \bar{\nu} - \bar{V}_1\bar{\nu} \wedge \bar{V}_1\bar{\nu}] \\ &+ (1-t)^2\bar{V}_1\bar{\nu} \wedge \bar{V}_1\bar{\nu} + 2\bar{V}_1\bar{\nu} \wedge \bar{\nu} \wedge dt\,,\end{aligned}$$

ou encore

$$(*) \qquad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 + 2(1-t)\bar{V}_1^2\bar{\nu} \wedge \bar{\nu} + (t^2-1)\bar{V}_1\bar{\nu} \wedge \bar{V}_1\bar{\nu} + 2\bar{V}_1\bar{\nu} \wedge \bar{\nu} \wedge dt\,.$$

Soit σ_Ξ la $(r-1)$-forme C^∞ sur S, à valeurs dans $\bigwedge^r E$ définie par

$$(1) \qquad \sigma_\Xi = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\int_{pr}\bar{\Omega}^m \qquad \text{si } r = 2m\,,$$

$$(2) \qquad \sigma_\Xi = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^m m!}\nu \wedge \Omega_0^m \qquad \text{si } r = 2m+1\,.$$

Comme $\bigwedge^r E$ est le fibré vectoriel de rang 1 associé à $\pi_S^* t(\Xi)$, σ_Ξ est une $(r-1)$-forme C^∞ sur S et $\pi_S^* t(\Xi)$-tordue.

Proposition 1.3.1. *σ_Ξ est un élément d'aire relatif sur S.*

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants.

Lemme 1.3.2. *$d\sigma_\Xi = -\pi_S^*(((-1)^m/2^{2m}\pi^m m!)\Omega^m)$, lorsque $r = 2m$ et $d\sigma_\Xi = 0$ lorsque $r = 2m+1$.*

Remarquons tout d'abord que les connexions naturellement induites sur $\bigwedge^r E$ et $\mathrm{pr}^*(\bigwedge^r E)$ par V_0 et V_1, $\bar{V}_1$ et $\bar{V}$ respectivement préservent la métrique. Comme ces deux fibrés sont de rang 1, V_0 est égale à V_1 et $\bar{V}_1$ est égale à $\bar{V}$ sur ces fibrés.

(a) cas où $r = 2m$. Nous utilisons la connexion V_1.

D'après la formule de Stokes relative, on a

$$\begin{aligned}V_1\sigma_\Xi &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}V^1\int_{\mathrm{pr}}\bar{\Omega}^m \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\left[\int_{\mathrm{pr}}\bar{V}(\bar{\Omega}^m) + (-1)^{2m-1}\int_{\mathrm{pr}|\partial(S\times I)}\bar{\Omega}^m\Big|_{\partial(S\times I)}\right].\end{aligned}$$

Par l'identité de Bianchi, $\bar{V}(\bar{\Omega}^m) = 0$. D'autre part, comme $\partial(S \times I) = S \times \{1\} - S \times \{0\}$ on a

$$\int_{\mathrm{pr}|\partial(S\times I)}\bar{\Omega}^m|_{\partial(S\times I)} = \Omega_1^m - \Omega_0^m\,.$$

De plus $\Omega_0^m = 0$ car $V_0 = V_N \oplus V_{N\perp}$ donc $\Omega_0 = \Omega_N + \Omega_{N\perp}$ et en élevant à la puissance m tous les facteurs sont nuls. Donc

$$V_1\sigma_\Xi = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\Omega_1^m = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\pi^m m!}\pi_S^*(\Omega^m)\,.$$

(b) cas où $r = 2m + 1$. Nous utilisons la connexion ∇_0.

$$\nabla_0(\nu \wedge \Omega_0^m) = \nabla_0\nu \wedge \Omega_0^m + \nu \wedge \nabla_0(\Omega_0^m) = 0$$

car $\nabla_0\nu = 0$ et $\nabla_0(\Omega_0^m) = 0$ par l'identité de Bianchi.

Lemme 1.3.3. $\int_{\pi_S} \sigma_E = 1$.

(a) cas $r = 2m$.

L'expression de $\bar{\Omega}$ (cf. $(*)$) nous donne

$$\bar{\Omega}^m = \sum_{p+q+s=m-1} \frac{m!}{p!q!s!} \bar{\Omega}_1^p \wedge [2(1-t)\bar{\nabla}_1\bar{\nu} \wedge \bar{\nu}]^q$$
$$\wedge [(t^2-1)\bar{\nabla}_1\bar{\nu} \wedge \bar{\nabla}_1\bar{\nu}]^s \wedge 2\bar{\nabla}_1\bar{\nu} \wedge \bar{\nu} \wedge dt + A \ ,$$

où A est la somme des termes qui ne contiennent pas dt, et dont l'intégrale sur les fibres de $X \times I \xrightarrow{\mathrm{pr}} S$ est nulle.

D'autre part, les termes où $q \geq 1$ sont nuls car $\bar{\nu} \wedge \bar{\nu} = 0$. Il reste

$$\int_{\mathrm{pr}} \bar{\Omega}^m = \sum_{p+s=m-1} \frac{m!}{p!s!} 2(-1)\nu \wedge (\nabla_1\nu)^{2s+1} \wedge \Omega_1^p \cdot \int_0^1 (t^2-1)^s dt \ ,$$

ou encore

$$\int_{\mathrm{pr}} \bar{\Omega}^m = \sum_{p+s=m-1} \frac{m!(-1)^{s+1}2^{2s+1}(s!)^2}{p!s!(2s+1)!} \nu \wedge (\nabla_1\nu)^{2s+1} \wedge \Omega_1^p \ ,$$

ce qui donne pour σ_E l'expression

$$\text{(1 bis)} \qquad \sigma_E = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(-1)^p(m-p-1)!}{(2m-2p-1)!p!2^{2p+1}\pi^m} \nu \wedge (\nabla_1\nu)^{2m-2p-1} \wedge \Omega_1^p \ .$$

Le seul terme, dont l'intégrale sur les fibres de π_S n'est pas nulle, est celui où $p = 0$ et donc

$$\int_{\pi_S} \sigma_E = \frac{(m-1)!}{(2m-1)!2\cdot\pi^m} \int_{\pi_S} \nu \wedge (\nabla_1\nu)^{2m-1}$$
$$= \frac{(m-1)!}{(2m-1)!2\cdot\pi^m}(2m-1)!\frac{2\pi^m}{(m-1)!} = 1 \ ,$$

car la restriction de $\nu \wedge (\nabla_1\nu)^{2m-1}$ à chaque fibre de $S \xrightarrow{\pi_S} X$ est $(2m-1)!$ fois la forme volume de cette fibre, dont le volume est $2\pi^m/(m-1)!$.

(b) cas $r = 2m + 1$.

D'après $(*)$ on a $\Omega_0^m = (\Omega_1 + 2\nabla_1\nu \wedge \nu - \nabla_1\nu \wedge \nabla_1\nu)^m$ ce qui s'écrit

$$\Omega_0^m = \sum_{p+q+s=m} \frac{(-1)^s m!}{p!q!s!} \Omega_1^p \wedge (2\nabla_1 \nu \wedge \nu)^q \wedge (\nabla_1 \nu)^{2s} ,$$

ce qui donne

$$\nu \wedge \Omega_0^m = \sum_{p+s=m} \frac{(-1)^s m!}{p!s!} \nu \wedge (\nabla_1 \nu)^{2s} \wedge \Omega_1^p$$

et par conséquent

$$\text{(2 bis)} \qquad \sigma_\Xi = \sum_{p=0}^{m} \frac{(-1)^p}{2^{2m+1}\pi^m p!(m-p)!} \nu \wedge (\nabla_1 \nu)^{2m-2p} \wedge \Omega_1^p .$$

Le seul terme dont l'intégrale sur les fibres de π_S n'est pas nulle est celui où $p = 0$, ce qui donne

$$\int_{\pi_S} \sigma_\Xi = \frac{1}{2^{2m+1}\pi^m m!} \int_{\pi_S} \nu \wedge (\nabla_1 \nu)^{2m} = \frac{1}{2^{2m+1}\pi^m m!} (2m)! \frac{2^{2m+1}\pi^m m!}{(2m)!} = 1 .$$

Definition 1.3.4. La forme σ_Ξ définie sur S par l'égalité (1) si le rang de Ξ est pair, par l'égalité (2) si le rang de Ξ est impair s'appelle *l'élément d'aire relatif canonique* de S associé à la connexion ∇.[2]

Remarque. La connexion ∇ sur Ξ donne naturellement un scindage f de la suite exacte de S-fibrés

$$0 \longrightarrow \pi_S^* \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_S^1 \underset{f}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \Omega_{S/X}^1 \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit une décomposition de Ω_S^{r-1} en somme directe

$$\Omega_S^{r-1} = \bigoplus_{\alpha+\beta=r-1} \pi_S^*(\Omega_X^\alpha) \otimes \Omega_{S/X}^\beta$$

et une décomposition des $(r-1)$-formes sur S, $t(\Xi)$-tordues

$$\Omega_S^{r-1} \otimes \pi_S^* t(\Xi) = \bigoplus_{\alpha+\beta=r-1} \pi_S^*(\Omega_X^\alpha) \otimes \Omega_{S/X}^\beta \otimes \pi_S^* t(\Xi) .$$

En particulier σ_Ξ se décompose selon cette somme directe. On peut aisément vérifier que cette décomposition coïncide avec la décomposition (1 bis) ou (2 bis), selon la parité de r.

Soit $\chi_\Xi \in \Gamma(X, \Omega_X^r \otimes t(\Xi))$ la forme définie ci-dessus telle que $-d\sigma_\Xi = \pi_S^*(\chi_\Xi)$. On a $d\chi_\Xi = 0$, donc χ_Ξ définit une classe de cohomologie $[\chi_\Xi]$ appartenant à $H^r(X, t(\Xi))$. La proposition 1.2.2 montre que cette classe ne dépend pas de

[2] on retrouve en (1 bis) une expression donnée par Chern dans [6] dans le cas du fibré tangent à une variété riemannienne de dimension paire.

l'élément d'aire relatif choisi, donc de la connexion utilisée pour le construire. Lorsque r est impair, $\chi_\Xi = 0$.

Definition 1.3.5. La forme χ_Ξ définie ci-dessus s'appelle la *forme d'Euler du fibré associée à la connexion* ∇, et sa classe $[\chi_\Xi]$ s'appelle la *classe d'Euler* de Ξ.

Lorsque $rg\Xi = 0$, on pose par convention $\chi_\Xi = 1$.

2. Propriétés de l'élément d'aire relatif canonique

2.1. Fonctorialité par rapport à la base. Soient $\Xi \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel défini comme au § 1, et $f\colon Y \to X$ une application C^∞ d'une variété différentielle Y dans X. Notons $f^*(\Xi)$ le Y-fibré vectoriel image réciproque de Ξ par f, muni de la connexion image réciproque de ∇ par f. Alors

$$\sigma_{f^*(\Xi)} = f^*(\sigma_\Xi) \quad \text{et} \quad \chi_{f^*(\Xi)} = f^*(\chi_\Xi) .$$

2.2. Homomorphisme de Thom-Gysin. Dans ce numéro, $\mathscr{F}$ désigne soit le faisceau d'orientation $\mathscr{T}_X$ de X, soit le faisceau simple de fibre $\boldsymbol{R}$ sur X, et $\mathscr{G}$ désigne le faisceau inversible $\mathscr{F} \otimes t(\Xi)$.

Remarquons tout d'abord que pour tout faisceau inversible $\mathscr{A}$ sur X, et tout nombre entier k, nous avons des isomorphismes

$$p^*: H^k(S, \pi_S^*\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} H^k(\Xi - X, \pi^*\mathscr{A}\,|_{\Xi - X}) ,$$
$$\pi^*: H^k(X, \mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} H^k(\Xi, \pi^*\mathscr{A})$$

car S (resp. X) est rétract de $\Xi - X$ (resp. Ξ). Les isomorphismes réciproques sont les morphismes de restriction correspondants.

De même, si $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{K}$) désigne la famille des supports de Ξ propres au dessus de X (resp. de projection sur X relativement compacte) on a pour tout nombre entier k un isomorphisme

$$w: H^k_X(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \to H^k_{\mathscr{P}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A})$$

et comme X est rétract de Ξ, un isomorphisme

$$\pi: H^l_c(X, \mathscr{A}) \to H^l_{\mathscr{K}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A})$$

pour tout nombre entier l. On a donc, par dualité de Poincaré un isomorphisme transposé

$$H^{n+r-l}_{\mathscr{P}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A} \otimes \pi^*\mathscr{T}_X \otimes \pi^*t(\Xi)) \to H^{n-l}(X, \mathscr{A} \otimes \mathscr{T}_X) .$$

Donc, quitte à changer les notations, on a pour tout faisceau inversible et tout nombre entier k un isomorphisme

$$\int_\pi : H^k_{\mathscr{P}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} H^{k-r}(X, \mathscr{A} \otimes t(\Xi)) ,$$

qui n'est autre que l'intégration sur les fibres de π et dont l'isomorphisme réciproque est l'application u qui à la classe $[\alpha]$ de $H^{k-r}(X, \mathscr{A} \otimes t(\Xi))$ de représentant α associe la classe de $\pi^*\alpha \wedge \omega_\varepsilon$, où ω_ε est définie comme dans la proposition 1.2.5.

Proposition 2.2.1. *L'unique application de $H^{k-r}(X, \mathscr{A} \otimes t(\Xi))$ dans $H^k(X, \mathscr{A})$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
H^k_{\mathscr{P}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & H^k(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[d] \\
H^{k-r}(X, \mathscr{A} \otimes t(\Xi)) \arrow[r] & H^k(X, \mathscr{A})
\end{tikzcd}$$

où u est l'application naturelle, est l'application $\cup [\chi_\Xi]$ qui à un élément de $H^{k-r}(X, \mathscr{A} \otimes t(\Xi))$ fait correspondre son cup-produit à droite par $[\chi_\Xi]$.

Cette proposition se déduit immédiatement de ce qui précède.

Soit ε un nombre reél compris strictement entre 0 et 1 et Φ_ε la fonction définie comme en 1.2.5. Posons $\psi = 1 - \Phi_\varepsilon$. On note toujours $\rho : \Xi \to \boldsymbol{R}_+$ la norme sur les fibres de Ξ, $p : \Xi - X \to S$ la surjection canonique.

Notons $\delta : H^{k-1}(S, \pi_S^*\mathscr{A}) \to H^k_{\mathscr{P}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A})$ l'application qui, à la classe $[\alpha]$ de $H^{k-1}(S, \pi_S^*\mathscr{A})$ de représentant α associe la classe de $d(\psi(\rho)p^*\alpha)$.

On a la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *On a un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes et les colonnes des isomorphismes:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots H^{k-1}(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[r, "|_{\Xi-X}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & H^{k-1}(\Xi - X, \pi^*\mathscr{A}|_{\Xi-X}) \arrow[r] \arrow[d, "|_S"'] & H^k_X(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[d, "w"'] \\
\cdots H^{k-1}(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[r, "|_S"] & H^{k-1}(S, \pi_S^*\mathscr{A}) \arrow[r, "\delta"] & H^k_{\mathscr{P}}(\Xi, \pi^*\mathscr{A})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^k(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[r, "|_{\Xi-X}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & H^k(\Xi - X, \pi^*\mathscr{A}|_{\Xi-X}) \cdots \arrow[d, "|_S"'] \\
\arrow[r, "u"] & H^k(\Xi, \pi^*\mathscr{A}) \arrow[r, "|_S"] & H^k(S, \pi_S^*\mathscr{A}) \cdots
\end{tikzcd}$$

où la ligne supérieure est la suite exacte de cohomologie associée au fermé X de Ξ.

La deuxième ligne est la suite exacte de cohomologie à supports propres sur X de Ξ, en interprétant S comme l'ensemble de points à l'infini de Ξ. Par construction δ n'est autre que le cobord de cette suite exacte. La commutativité du diagramme résulte alors des compatibilités entre cohomologies à support.

Corollaire 2.2.3. *On a une suite exacte* (*suite exacte de Thom-Gysin*)

$$\cdots H^{k-1}(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\pi_S^*} H^{k-1}(S, \pi_S^*\mathscr{G}) \xrightarrow{\int_{\pi_S}} H^{k-r}(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cup[\chi_\Xi]} H^k(X, \mathscr{G}) \cdots .$$

Ce corollaire résulte des deux propositions précédentes (en prenant $\mathscr{A} = \mathscr{G}$) et du fait que $|_S \circ \pi^* = \pi_S^*$ et que $\int_\pi \circ \delta = \int_{\pi_S}$.

2.3. Lien avec la classe de Pontriaguine de degré maximum. On sait que, dans le cas où le rang du fibré Ξ est pair, le carré de sa classe d'Euler est égal à sa classe de Pontriaguine de degré maximum. On a une propriété du même type lorsque le rang de Ξ est impair.

Proposition 2.3.1. *Si* $rg\Xi = r = 2m+1$, *et si* σ_Ξ *désigne l'élément d'aire relatif canonique de* S_Ξ, *alors* $2\sigma_\Xi$ *définit une classe de cohomologie dans* $H^{2m}(S_\Xi, \pi_S^* t(\Xi))$ *dont le carré est égal à la classe de Pontriaguine de degré maximum de* $\pi_S^*\Xi = E$.

Le fait que $2\sigma_\Xi$ définisse une classe de cohomologie résulte de ce que σ_Ξ est fermée si r est impair (cf. § 1.3).

Notons p_m la forme de Pontriaguine de degré maximum $4m$ de Ξ pour la connexion ∇ et $\bar{p}_m$ celle de $\mathrm{pr}^* E$ pour la connexion $\bar{\nabla}$ (pr, E et $\bar{\nabla}$ étant définis comme au paragraphe précédent). Enfin, notons $x = \int_{\mathrm{pr}} \bar{p}_m$. La proposition ci-dessus résulte alors du lemme suivant.

Lemme 2.3.2. *Le carré scalaire* $\langle 2\sigma_\Xi, 2\sigma_\Xi\rangle$ *de* $2\sigma_\Xi$ *dans le fibré de rang* 1 $\bigwedge^r E$ *est égal à* $\pi_S^* p_m + dx$.

En effet, $2\sigma_\Xi = ((-1)^m/2^{2m}\pi^m m!)\nu \wedge \Omega_0^m$, où $\Omega_0 = \Omega_N + \Omega_{N^\perp}$ (pour ces notations, se reporter à § 1.3) et, comme le rang de N est 1, $\Omega_N = 0$. Donc puisque $\langle \nu, \nu\rangle = 1$, il vient

$$\langle \nu \wedge \Omega_0^m, \nu \wedge \Omega_0^m\rangle = \langle \Omega_{N^\perp}^m, \Omega_{N^\perp}^m\rangle_{\bigwedge^{r-1} N^\perp} ,$$

d'où

$$\langle 2\sigma_\Xi, 2\sigma_\Xi\rangle = \langle \chi_{N^\perp}, \chi_{N^\perp}\rangle_{\bigwedge^{r-1} N^\perp} = p_m(N^\perp, \nabla_{N^\perp}) .$$

Comme N est de rang 1, on a

$$p_m(N^\perp, \nabla_{N^\perp}) = p_m(E, \nabla_0) = p_m(E, \nabla_1) + dx$$

et d'autre part $p_m(E, \nabla_1) = \pi_S^* p_m$.

2.4. Classe d'homotopie rationnelle de S. Notons $\Omega_X^\cdot$ (resp. $\tilde{\Omega}_X^\cdot$) l'algèbre différentielle graduée (resp. le $\Omega_X^\cdot$-module gradué) des formes différentielles C^∞ (resp. C^∞ et $t(\Xi)$-tordues) sur X et soit $\Omega_X^\cdot(\xi, \eta)$ (resp. $\tilde{\Omega}_X^\cdot(\xi, \eta)$) l'algèbre anticommutative libre sur $\Omega_X^\cdot$ engendrée par ξ et η (resp. le $\Omega_X^\cdot(\xi, \eta)$-module $\tilde{\Omega}_X^\cdot \otimes_{\Omega_X^\cdot} \Omega_X^\cdot(\xi, \eta)$) tels que

(a) $d^0\xi = 2r - 3$, $d^0\eta = 2r = 2$,

(b) $\xi = 0$ et $\eta = 0$ dans le cas où r est pair.

Munissons cette algèbre (resp. ce module) de la différentielle d prolongeant celle de $\Omega^{\cdot}_X$ (resp. $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X$) et telle que $\eta = d\xi$.

Lemme 2.4.1. *$\Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta)$ (resp. $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta)$) et $\Omega^{\cdot}_X$ (resp. $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X$) ont même cohomologie.*

Soit $\alpha \in \Omega^q_X(\xi, \eta)$ (resp. $\tilde{\Omega}^q_X(\xi, \eta)$). On peut écrire, car $\xi^2 = 0$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta$, où $\alpha_0 \in \Omega^q_X$ (resp. $\tilde{\Omega}^q_X$), $\alpha_1 \in \Omega^{q-2r+3}_X$ (resp. $\tilde{\Omega}^{q-2r+3}_X$) et $\alpha_2 \in \Omega^{q-2r+2}_X(\xi, \eta)$ (resp. $\tilde{\Omega}^{q-2r+2}_X(\xi, \eta)$).

Si α est fermée, on doit avoir $d\alpha_0 + d\alpha_1 \cdot \xi + (d\alpha_2 - (-1)^q\alpha_1)\eta = 0$ et par conséquent $d\alpha_0 = 0$, $d\alpha_1 = 0$ et $d\alpha_2 = (-1)^q\alpha_1$.

On a, dans ce cas, $d((-1)^q\alpha_2\xi) = (-1)^q d\alpha_2 \cdot \xi + \alpha_2 \cdot \eta = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta$ et par suite α est dans la même classe de cohomologie que α_0. L'injection $H^q(\Omega^{\cdot}_X) \to H^q(\Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta))$ (resp. $H^q(\tilde{\Omega}^{\cdot}_X) \to H^q(\tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta))$) induite par l'injection canonique $\Omega^{\cdot}_X \to \Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta)$ (resp. $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X \to \tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta)$) est donc aussi surjective, ce qui démontre le lemme.

Définissons l'algèbre différentielle graduée $A^{\cdot}$ par

(a) Pour tout $q \in \boldsymbol{Z}$, $A^q = \Omega^q_X(\xi, \eta) \oplus \tilde{\Omega}^{q-r+1}_X(\xi, \eta)$.

(b) Pour $(\alpha, \beta) \in A^q$ et $(\alpha', \beta') \in A^{q'}$,

$$(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' + \beta\beta' p + \beta\beta'\eta, \alpha\beta' + (-1)^{qq'}\alpha'\beta)\ ,$$

où $p = 0$ si r est pair et $p = \frac{1}{4}p_m$ si $r = 2m + 1$.

(c) Pour $(\alpha, \beta) \in A^q$, $d(\alpha, \beta) = (d\alpha + (-1)^{q-r}\beta \wedge \chi, d\beta)$,

où χ est la forme d'Euler de Ξ pour la connexion ∇.

On définit un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées i (resp. $\tilde{i}$) de $\Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta)$ (resp. $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta)$) dans $\Omega^{\cdot}_S$ (resp. $\tilde{\Omega}^{\cdot}_S$) par $i|_{\Omega^{\cdot}_X} = \pi^*_S$ (resp. $\tilde{i}|_{\tilde{\Omega}^{\cdot}_X} = \pi^*_S$) et, lorsque $r = 2m + 1$, $i(\xi) = \tilde{i}(\xi) = \frac{1}{4}x$ et $i(\eta) = \tilde{i}(\eta) = \frac{1}{4}dx$, et $i(\xi) = \tilde{i}(\xi) = i(\eta) = \tilde{i}(\eta) = 0$ lorsque r est pair.

Notons $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta)[-r + 1]$ le module différentiel gradué tel que $\tilde{\Omega}^q_X(\xi, \eta)[-r + 1] = \Omega^{q-r+1}_X(\xi, \eta)$, et j l'application linéaire de $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta)[-r + 1]$ dans $\Omega^{\cdot}_S$ telle que $j(\beta) = \tilde{i}(\beta) \wedge \sigma_\Xi$. Notons u l'application linéaire (i, j) de $A^{\cdot}$ dans $\Omega^{\cdot}_S$. Il résulte de ce qui précède que u est un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées.

Proposition 2.4.2. *u induit un isomorphisme entre la cohomologie de $A^{\cdot}$ et celle de $\Omega^{\cdot}_S$.*

On a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & A^{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \tilde{\Omega}^{\cdot}_X(\xi, \eta)[-r+1] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "j"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta) \arrow[r, "i"] & \Omega^{\cdot}_S \arrow[r] & \Omega^{\cdot}_S / i\Omega^{\cdot}_X(\xi, \eta) \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

En passant aux longues suites exactes de cohomologie associées, et en tenant compte du lemme 2.4.1, on a un diagramme commutatif (traits pleins)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots\ H^{k-r}(\tilde{\Omega}^{\cdot}_X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^k(\Omega^{\cdot}_X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & H^k(A^{\cdot}) \arrow[r] \arrow[d, "H(u)"'] & H^{k-r+1}(\tilde{\Omega}^{\cdot}_X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^{k+1}(\Omega^{\cdot}_X)\ \cdots \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \\
\cdots\ H^{k-1}(\Omega^{\cdot}_S/i\Omega^{\cdot}_X(\xi,\eta)) \arrow[r, "\delta'"] & H^k(\Omega^{\cdot}_X) \arrow[r, "\pi_S^*"] & H^k(\Omega^{\cdot}_S) \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\int_{\pi_S}"] & H^k(\Omega^{\cdot}_S/i\Omega^{\cdot}_X(\xi,\eta)) \arrow[r, "\delta'"] & H^{k+1}(\Omega^{\cdot}_X)\ \cdots
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes.

Le diagramme obtenu en ajoutant la flèche en pointillé est toujours commutatif. En effet, si $\beta \in \Omega^k_S$ est une forme fermée, posons $\tau = \left(\pi_S^* \int_{\pi_S} \beta\right) \wedge \sigma_\Xi - \beta$. Alors $d\tau = \pi_S^*\left[(-1)^{k-r}\left(\int_{\pi_S} \beta\right) \wedge \chi\right]$ et $\int_{\pi_S} \tau = 0$. On en déduit, comme dans la proposition 1.2.2, qu'il existe des formes a et b, sur X et S respectivement, telles que $\tau = \pi_S^* a + db$. Par conséquent β et $j\left(\int_{\pi_S} \beta\right)$ sont dans la même classe de $H^k(\Omega^{\cdot}_S/i\Omega^{\cdot}_X(\xi,\eta))$.

En revenant à la définition de la différentielle sur $A^{\cdot}$, on voit que δ n'est autre que le cup-produit à droite par $[\chi]$, ce qui fait apparaître la suite exacte de Gysin

$$\cdots\ H^{k-r}(\Omega^{\cdot}_X) \xrightarrow{\ \delta\ } H^k(\Omega^{\cdot}_X) \xrightarrow{\ \pi_S^*\ } H^k(\Omega^{\cdot}_S) \xrightarrow{\ \int_{\pi_S}\ } H^{k-r+1}(\Omega^{\cdot}_X)\ .$$

Comme la ligne inférieure est exacte aussi, on en déduit que la flèche verticale non-nommée induit un isomorphisme sur la cohomologie. D'après le lemme des cinq, $H(u)$ en est aussi un.

Corollaire 2.4.3. *Si* $[\chi] = 0$ (*ce qui est le cas par exemple lorsque* r *est impair*) *on a*

$$H^*(S) \simeq H^*(X) \oplus H^*(X, t(\Xi))\sigma\ ,$$

où σ *est tel que* $\sigma^2 = 0$ *si* r *est pair, et* $\sigma^2 = \frac{1}{4}p_m$ *si* $r = 2m+1$ *et où* $d^0\sigma = r - 1$.

D'autres conséquences de la proposition 2.4.2 sont données dans [10].

2.5. Restriction à un sous-fibré. Soient V une variété différentielle C^∞ et $F \xrightarrow{\ \pi\ } V$ un fibré vectoriel de rang r sur V, muni d'une métrique sur les fibres et d'une connexion ∇ compatible avec cette métrique.

Etant donné un drapeau D d'ordre n de F, c'est-à-dire une suite strictement décroissante de n sous-fibrés vectoriels de F telle que $F = F_1 \supset F_2 \cdots \supset F_n$, si nous notons $I = [0, 1]$ et p_k la projection $V \times I^{k-1} \to V$ pour $1 \leq k \leq n$, nous définissons par récurrence une connexion ∇_k sur le fibré $p_k^* F$ de la manière suivante:

(a) pour $k = 1$, $\nabla_1 = \nabla$,

(b) pour $k > 1$, désignons par q_k la projection de $V \times I^{k-1} = (V \times I^{k-2}) \times I$ sur $V \times I^{k-2}$. Alors ∇_k est la connexion sur $p_k^* F$ qui réalise l'homotopie entre la somme de Whitney de $q_k^* \nabla_{k-1}|_{p_k^* F_k}$ et de $q_k^* \nabla_{k-1}|_{p_k^* F_k^\perp}$, et $q_k^* \nabla_{k-1}$ ($F_k^\perp$ étant l'orthogonal de F_k dans F).

On note $\Omega_k(D)$ la forme de courbure de la connexion ∇_k et $\chi_k(D)$ la forme d'Euler de p_k^*F muni de la connexion ∇_k.

On note $\Phi(D)$ la $(r-n+1)$-forme $\int_{p_n} \chi_n(D)$ sur V.

Remarquons que lorsque le rang du fibré Ξ défini dans les numéros précédents est pair, l'élément d'aire relatif canonique sur S_Ξ est la forme $\Phi(D)$ correspondant à un drapeau D d'ordre 2 particulier.

Dans le cas où D est un drapeau d'ordre 2 de F, la forme $\Phi(D)$ est la *forme de courbure totale relative* de F_2 dans $F_1 = F$.

Soient $\Xi \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel défini comme dans les numéros précédents, $\Sigma \xrightarrow{\varpi} X$ un sous-fibré strict de Ξ, $S \xrightarrow{\pi_S} X$ et $S' \xrightarrow{\varpi_{S'}} X$ les fibrés en sphères unité associés respectivement à Ξ et Σ, i l'injection canonique de S' dans S.

Soient σ_Ξ et σ_Σ les éléments d'aire relatifs canoniques sur S et S', $\Sigma^\perp$ le sous-fibré de Ξ orthogonal à Σ, muni de la connexion induite par celle de Ξ, $\chi_{\Sigma^\perp}$ sa forme d'Euler.

On note ∇ (resp. ∇') la connexion sur $\pi_S^*\Xi = E$ (resp. $\varpi_{S'}^*\Xi = E'$) image réciproque de celle de Ξ, N (resp. N') le sous-fibré de E (resp. E') engendré par la section ν (resp. ν') normale à S (resp. S').

On note aussi A la forme de courbure totale relative de Σ dans Ξ et B la forme sur S' égale à $\Phi(D)$, où D est le drapeau $E' \supset \omega_{S'}^*\Sigma \supset N'$ de E' si le rang de Ξ est pair, et $B = \nu' \wedge B'$ où B' est la courbure relative de $\varpi_{S'}^*\Sigma \cap N'^\perp$ dans $N'^\perp$ muni de la connexion induite par ∇' si le rang de Ξ est impair.

Théorème 2.5.1. *On a* $i^*\sigma_\Xi = \sigma_\Sigma \wedge \varpi_{S'}^*\chi_{\Sigma^\perp} + \varpi_{S'}^*A - dB$.

Démonstration. (a) $rg\Xi = 2m$.

On considère le drapeau d'ordre 2 de E', $D = (E' \supset F' \supset N')$, où $F' = \varpi_{S'}^*\Sigma$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S' \times I^2 \arrow[rr, "q_3"] \arrow[dr, "p_3"'] & & S' \times I \arrow[dl, "p_2"] \\ & S' & \end{tikzcd}$$

où I, p_3, p_2, q_3 sont définis comme plus haut.

On définit, comme au début de ce numéro, les connexions $\nabla_1 = \nabla'$, ∇_2 et ∇_3 sur E', p_2^*E' et p_3^*E' et les formes de courbure correspondantes $\Omega_1(D)$, $\Omega_2(D)$ et $\Omega_3(D)$ sur S', $S' \times I$ et $S' \times I^2$, ainsi que les formes d'Euler $\chi_1(D)$, $\chi_2(D)$ et $\chi_3(D)$.

On a

$$\begin{aligned} d\Phi(D) &= d\int_{p_3} \chi_3(D) = d\int_{p_2}\int_{q_3} \chi_3(D) \\ &= \int_{p_2} d\int_{q_3} \chi_3(D) + (-1)^{2m-2}\int_{p_2|\partial(S'\times I)}\int_{q_3} \chi_3(D) \end{aligned}$$

$$= \int_{p_2} d \int_{q_3} \chi_3(D) + \int_{p_3|S'\times\{1\}\times I} \chi_3(D) - \int_{p_3|S'\times\{0\}\times I} \chi_3(D) .$$

De plus, $\chi_3(D)|_{S'\times\{0\}\times I} = 0$ car c'est la forme d'Euler de la connexion somme de Whitney des connexions induites par ∇_3 sur p_3^*N' et $p_3^*N'^{\perp}$, et p_3^*N' est de rang 1, et $\chi_3(D)|_{S'\times\{1\}\times I}$ est la forme d'Euler de la connexion qui réalise l'homotopie entre la connexion somme de Whitney des restrictions à p_3^*F' et $p_3^*F'^{\perp}$ de $p_3\nabla'$. Son intégrale sur les fibres de $p_3|_{S'\times\{1\}\times I}$ est donc la forme de courbure totale relative de F' dans F, et par fonctorialité est égale à l'image réciproque par ϖ_S, de la forme de courbure totale relative de Σ dans Ξ. On a de plus

$$d \int_{q_3} \chi_3(D) = \int_{q_3} d\chi_3(D) + (-1)^{2m-1}\left[\int_{q_3|S'\times I\times\{1\}} \chi_3(D) - \int_{q_3|S'\times I\times\{0\}} \chi_3(D)\right] ,$$

ou encore

$$\int_{p_2} d \int_{q_3} \chi_3(D) = \int_{p_2} \overbrace{\int_{q_3|S'\times I\times\{0\}} \chi_3(D)}^{①} - \int_{p_2} \overbrace{\int_{q_3|S'\times I\times\{1\}} \chi_3(D)}^{②} .$$

La forme $\int_{p_2}$ ② est la forme de courbure totale relative de N' dans E', donc c'est $i^*\sigma_\Xi$.

D'autre part ① n'est autre que $((-1)^m/2^{2m}\pi^m m!)(\bar{\Omega}_F + p_2^*\Omega_{F^\perp})^m$ où $\Omega_{F^\perp}$ est la forme de courbure de $F^\perp$ muni de la connexion induite par ∇', et $\bar{\Omega}_F$ est la forme de courbure de la connexion sur p_2^*F qui réalise l'homotopie entre la somme de Whitney des connexions induites par $p_2^*\nabla'$ sur p_2^*N' et son orthogonal dans p_2^*F, et $p_2^*\nabla'$.

Le seul terme non nul dans la décomposition de $(\bar{\Omega}_F + p_2^*\Omega_{F^\perp})^m$ est, pour des raisons de dimensions de fibrés le terme $(m!/l!(m-l)!)(\bar{\Omega}_F^1 \wedge p_2^*(\Omega_{F^\perp}^{m-1}))$, si le rang de Σ est pair et égal à $2l$.

En intégrant sur les fibres de p_2, on trouve, si $rg\,\Sigma$ est pair,

$$\int_{p_2} \int_{q_3|S'\times I\times\{0\}} \chi_3(D) = \sigma_\Sigma \wedge \chi_{F^\perp} = \sigma_\Sigma \wedge \varpi_{S'}^*\chi_{\Sigma^\perp}$$

formule qui reste vraie si $rg\,\Sigma$ est impair, car alors $\chi_\Sigma = 0$.

On a donc $dB = \sigma_\Sigma \wedge \varpi_{S'}^*\chi_\Sigma - i^*\sigma_\Xi + \varpi_{S'}^*A$, ce qui donne dans ce cas le résultat recherché.

(b) $rg = 2m + 1$.

On note ∇_0' la connexion sur E', somme de Whitney des connexions induites par ∇' sur N' et $N'^\perp$, Ω_0' la forme de courbure associée.

Soit $\bar{\nabla}_0'$ la connexion sur p_2^*E' qui réalise l'homotopie entre $\nabla_0'|_{F'} \oplus \nabla_0'|_{F'^\perp}$ et ∇_0', et soit $\bar{\Omega}_0'$ la forme de courbure associée. On a

$$i^*\sigma_\Xi = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1}\pi^m m!}\nu' \wedge \Omega_0'^m \quad \text{et} \quad \Omega_0'^m = (\Omega_0'|_{F'} + \Omega_0'|_{F'^\perp})^m + \nabla_0' \int_{p_2} \bar{\Omega}_0'^m .$$

D'autre part

$$\Omega_0'|_{F'^\perp} = \varpi_{S'}^* \Omega_{\Sigma^\perp} ,$$

$$\nu' \wedge \nabla_0' \int_{p_2} \bar{\Omega}_0'^m = \nabla_0'\Big(\nu' \wedge \int_{p_2} \bar{\Omega}_0'^m\Big) = d\Big(\nu' \wedge \int_{p_2} \bar{\Omega}_0'^m\Big) \qquad \text{car } \nabla_0'\nu' = 0 .$$

En décomposant $(\Omega_0'|_{F'} + \Omega_0'|_{F'^\perp})^m$ et en éliminant les termes nuls, on trouve le résultat attendu.

Corollaire 2.5.2. *$\chi_\Xi = \chi_\Sigma \wedge \chi_{\Sigma^\perp} + dA$ et par conséquent $[\chi_\Xi] = [\chi_\Sigma] \cup [\chi_{\Sigma^\perp}]$.*

2.6. Homotopie relative et formule de degré. Etant données deux fibrations $F_1 \xrightarrow{\pi_1} X$ et $F_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ au-dessus de X et deux applications fibrées f et g de F_1 dans F_2, C^∞, on appelle *homotopie fibrée C^∞* de f sur g toute application C^∞ $h: F_1 \times I \to F_2$ telle que pour tout x de F_1, on ait $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$ et pour t dans $[0, 1]$, on ait $\pi_2 \circ h(x, t) = x$.

Soit $\Xi \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel de rang r défini comme dans les numéros précédents, $S \xrightarrow{\pi_S} X$ le fibré en sphères unités associé, $Z \xrightarrow{\pi_Z} X$ une X-fibration propre, à fibres connexes et orientables et de dimension strictement positive, tel que le faisceau d'orientation relative de Z par rapport à X soit $\pi_Z^* t(Z)$, où $t(Z)$ est un faisceau inversible sur X.

Proposition 2.6.1. *Pour toute application C^∞ et X-fibrée Φ de Z dans S, et tout élément d'aire relatif σ sur S, $\int_{\pi_Z} \Phi^*\sigma$ est une forme fermée C^∞, $t(\Xi) \otimes t(Z)$-tordue sur X, dont la classe ne dépend que de la classe d'homotopie fibrée de Φ. De plus, si le rang de la fibration $Z \to X$ est $r - 1$, cette forme est une section à valeurs entières de $t(\Xi) \otimes t(Z)$ dont la valeur en tout point x de X est le degré de l'application $\Phi_x = \Phi|_{Z_x}$.*

On a

$$d\int_{\pi_Z} \Phi^*\sigma = \int_{\pi_Z} \Phi^*(d\sigma) = \int_{\pi_Z} \Phi^*\pi_S^*\chi = \int_{\pi_Z} \pi_Z^*\chi = 0 .$$

D'autre part, soient $I = [0, 1]$, Φ_0 et Φ_1 deux applications X-fibrées de Z dans S, $\Phi: Z \times I \to Z$ la projection canonique. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \xrightarrow{\Phi} & S \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z & \xrightarrow{\pi_Z} & X . \end{array}$$

Si $r = rg\Xi$ on a $d\int_q \Phi^*\sigma = \int_q \Phi^*(d\sigma) + (-1)^{(r-1)-1}[\Phi_1^*\sigma - \Phi_0^*\sigma]$ et par suite

$$d\int_{\pi_Z\circ q}\Phi^*\sigma=\int_{\pi_Z}d\int_q\Phi^*\sigma=\int_{\pi_Z\circ q}\Phi^*(d\sigma)+(-1)^r\left[\int_{\pi_Z}\Phi_1^*\sigma-\int_{\pi_Z}\Phi_0^*\sigma\right].$$

Comme $\Phi^*(d\sigma)=\Phi^*\pi_S^*\chi=(\pi_Z\circ q)^*\chi$, on a $\int_{\pi_Z\circ q}\Phi^*(d\sigma)=0$ et

$$\int_{\pi_Z}\Phi_1^*\sigma-\int_{\pi_Z}\Phi_0^*\sigma=d\left[(-1)^r\int_{\pi_Z\circ q}\Phi^*\sigma\right]\quad\text{donc}\quad\left[\int_{\pi_Z}\Phi_1^*\sigma\right]=\left[\int_{\pi_Z}\Phi_0^*\sigma\right].$$

Si $rgZ=r-1=rgS$, alors $\int_{\pi_Z}\Phi^*\sigma$ est une 0-forme fermée, donc une section localement constante de $t(\Xi)\otimes t(Z)$.

Cette section se calcule fibre par fibre et l'on retrouve la définition classique du degré d'une application.

Remarque 2.6.2. Soit $\Phi: X\to S$ une section de $S\xrightarrow{\pi_S}X$. Alors $\Phi^*\sigma_\Xi$ n'est pas nécessairement une forme fermée car $d(\Phi^*\sigma_\Xi)=-\chi_\Xi$. Cependant, si Φ_0 et Φ_1 sont deux sections X-homotopes, il résulte de la démonstration de la proposition précédente qu'il existe une forme B telle que $\Phi_1^*\sigma_\Xi-\Phi_0^*\sigma_\Xi=dB$.

Si $r=1$, $\Phi^*\sigma_\Xi$ est une section de valeur $\frac{1}{2}\Phi$.

Corollaire 2.6.3. *Si le rang de Z est $r-s-1$, et Σ un sous-fibré de Ξ de rang s tel que $\Phi(Z)\cap S'=\emptyset$ (où S' est le fibré en sphères unité de Σ) on a*

$$\left[\int_{\pi_Z}\Phi^*\sigma_\Xi\right]=\delta(\Phi)[\chi_\Sigma],$$

où $[\chi_\Sigma]$ est la classe d'Euler de Σ et $\delta(\Phi)$ une section entière de $t(\Xi)\otimes t(Z)\otimes t(\Sigma)$.

Soient $\Sigma^\perp$ le sous-fibré de Ξ orthogonal à Σ, S'' le fibré en sphères unité associé, $i: S''\to S$ l'injection canonique.

La classe $\left[\int_{\pi_Z}\Phi^*\sigma_\Xi\right]$ ne dépend que de la classe d'homotopie fibrée de Φ. Comme $\Phi(Z)\cap S'=\emptyset$, Φ est X-homotope à une application fibrée de Z dans S''. On a alors

$$\int_{\pi_Z}\Phi^*\sigma_\Xi=\int_{\pi_Z}\Phi^*i^*\sigma_\Xi,$$

et, d'après le numéro précédent,

$$\int_{\pi_Z}\Phi^*i^*\sigma_\Xi=\int_{\pi_Z}\Phi^*(\sigma_{\Sigma^\perp}\wedge\varpi_{S''}^*\chi_\Sigma+\varpi_{S''}^*A-dB),$$

où $\varpi_{S''}$ est la projection de S'' sur X. Comme $\varpi_{S''}\circ\Phi=\pi_Z$ cette égalité donne

$$\int_{\pi_Z}\Phi^*\sigma_\Xi=\chi_\Sigma\wedge\int_{\pi_Z}(-1)^s\Phi^*\sigma_\Sigma-d\int_{\pi_Z}\Phi^*B,$$

donc

$$\left[\int_{\pi_Z} \Phi^*\sigma_\Xi\right] = [\chi_\Sigma]\cdot\int_{\pi_Z} (-1)^s \Phi^*\sigma_{\Sigma^\perp} = \delta(\Phi)[\chi_\Sigma] \ .$$

Remarque 2.6.4. Soit $\Phi : X \to S$ une section de $S \to X$ et notons Σ le sous-fibré orthogonal au sous-fibré de rang 1 de Ξ engendré par Φ. On a théorème 2.5.1 :

$$\Phi^*\sigma_\Xi = \tfrac{1}{2}\Phi \otimes \chi_\Sigma + A - dB \ ,$$

où A est la courbure totale relative de $\Sigma^\perp$ dans Ξ. On retrouve ainsi les assertions de remarque 2.6.2. Lorsque $rg\Xi$ est pair, χ_Σ est nul. Lorsque $rg\Xi$ est impair, A et B sont nuls.

3. Intersections

3.1. Caractéristique d'Euler-Poincaré. Soient X une variété à bord de dimension n, $\Xi \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel de rang r sur X, muni d'une métrique sur les fibres, $S \xrightarrow{\pi_S} X$ le fibré en sphères unités de Ξ, p la projection de $\Xi - X$ sur S, τ_X le faisceau d'orientation de X, $t(\Xi)$ le X-faisceau inversible dont l'image réciproque sur Ξ est le faisceau d'orientation relative de Ξ au-dessus de X.

Soient σ un élément d'aire relatif sur S, χ la forme sur X telle que $d\sigma = -\pi_S^*(\chi)$ et $s : \partial X \to \Xi$ une section *partout non-nulle* de Ξ au-dessus de ∂X. Pour toute $(n - r)$-forme β sur X, C^∞, fermée à support compact et $\tau_X \otimes t(\Xi)$-tordue, posons

$$E(X, \Xi, s\,; \beta) = (-1)^n \int_X \beta \wedge \chi + (-1)^r \int_X \beta \wedge s^*p^*\sigma \ .$$

Proposition 3.1.1. (1) *La forme linéaire $\beta \mapsto E(X, \Xi, s\,; \beta)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme à support dans un compact fixe. Elle est nulle sur les formes exactes.*

(2) *Elle ne dépend ni de la métrique sur les fibres de Ξ, ni de l'élément d'aire relatif choisi sur S.*

(3) *Elle ne dépend de s que par l'intermédiaire de sa classe de ∂X-homotopie.*

(4) *Soient Y une sous-variété à bord de $\mathring{X}$ telle que* $\dim Y = \dim X = n$, *et $\bar{s} : X - \mathring{Y} \to Z$ une section de Ξ partout non nulle au-dessus de $X - \mathring{Y}$, telle que $\bar{s}|_{\partial X} = s$. Alors*

$$E(X, \Xi, s\,; \beta) = E(Y, \Xi|_Y, \bar{s}|_{\partial Y}\,; \beta|_Y) \ .$$

Les assertions (1) et (4) résultent de la formule de Stokes et du fait que $d\sigma = -\pi_S^*\chi$.

L'assertion (3) résulte de proposition 2.6.1. Démontrons (2). Soient g et g' deux métriques sur les fibres de Ξ, $S \xrightarrow{\pi_S} X$ et $S' \xrightarrow{\pi_{S'}} X$ les fibrés en sphères unités associés à ces métriques, $p: \Xi - X \to S$ et $p': \Xi - X \to S'$ les projections canoniques et σ' un élément d'aire relatif sur S'. Alors $\sigma = p'^*\sigma'|_S$ est un élément d'aire relatif sur S, $p^*\sigma = p'^*\sigma'$ et il existe une r-forme χ sur X telle que $d\sigma = -\pi_S^*\chi$ et $d\sigma' = -\pi_{S'}^*\chi$. Donc si $E(X, \Xi, s; \beta)$ ne dépend pas de l'élément d'aire relatif choisi, il ne dépend pas non plus de la métrique.

Soient σ_0 et σ_1 deux éléments d'aire relatifs sur S. D'après proposition 1.2.2, il existe une $(r-1)$-forme η sur X et une $(r-2)$-forme γ sur S telles que $\sigma_1 = \sigma_0 + \pi_S^*\eta + d\gamma$. Si χ_0 et χ_1 sont les r-formes sur X telles que $d\sigma_0 = -\pi_S^*\chi_0$ et $d\sigma_1 = -\pi_S^*\chi_1$, on a $\chi_1 = \chi_0 - d\eta$. Donc

$$\int_{\partial X} \beta \wedge s^*p^*\sigma_1 = \int_{\partial X} \beta \wedge s^*p^*\sigma_0 + \int_{\partial X} \beta \wedge \eta + \int_{\partial X} \beta \wedge s^*p^*(d\gamma) .$$

D'après la formule de Stokes, comme $d\beta = 0$, le dernier terme est nul et le second est $\int_X d(\beta \wedge \eta)$, ou encore $(-1)^{n-r} \int_X \beta \wedge d\eta$. Donc

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_X \beta \wedge \chi_1 &+ (-1)^r \int_{\partial X} \beta \wedge s^*p^*\sigma_1 \\ &= (-1)^n \int_X \beta \wedge \chi_1 + (-1)^r \left[\int_{\partial X} \beta \wedge s^*p^*\sigma_0 + (-1)^{n-r} \int_X \beta \wedge d\eta\right] \\ &= (-1)^n \int_X \beta \wedge (\chi_1 + d\eta) + (-1)^r \int_{\partial X} \beta \wedge s^*p^*\sigma_0 ,\end{aligned}$$

d'où (2) puisque $\chi_1 + d\eta = \chi_0$.

Supposons X compacte et prenons pour fibré Ξ le fibré T_X tangent à X, pour section s la section normale sortante ν, et pour β la section canonique. Posons alors $E(X) = E(X, T_X, \nu; \beta)$.

Proposition 3.1.2. *On a* $E(X) = EP(X)$, *où* $EP(X) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \boldsymbol{R})$ (*cohomologie singulière*) *est la caractéristique d'Euler-Poincaré de* X.

Supposons que la dimension de X soit paire. Soit $\bar{\nu}$ un champ de vecteurs sur un voisinage de ∂X qui prolonge la section normale sortante ν sur ∂X. On peut munir T_X d'une métrique et d'une connexion compatible ∇ telle que $\nabla\bar{\nu} = 0$. La forme A de courbure totale relative de $\bar{\nu}$ dans T_X est alors nulle.

D'après remarqe 2.6.4, on a donc

$$(*) \qquad \int_{\partial X} \nu^*\rho^*\sigma_{T_X} = \int_{\partial X} A = 0 .$$

Notons $\bar{\bar{X}}$ la variété sans bord obtenue en recollant deux copies X_1 et X_2 de X le long de leur bord . On a, d'après $(*)$,

$$E(\bar{\bar{X}}) = \int_{X_1} \chi_{T_{\bar{\bar{X}}}} + \int_{X_2} \chi_{T_{\bar{\bar{X}}}} = 2E(X) .$$

Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, on a

$$E(\bar{\bar{X}}) = EP(\bar{\bar{X}}) = 2EP(X) - EP(\partial X)$$

et, comme dim (∂X) est impaire, $EP(\partial X) = 0$, d'où la proposition dans ce cas.

Supposons que la dimension de X soit impaire. On a alors, d'après remarque 2.6.4, comme le sous-fibré de T_X normal à ν au-dessus de ∂X n'est autre que le fibré tangent à ∂X, et comme $\chi_{T_X} = 0$,

$$E(X) = \tfrac{1}{2}E(\partial X) = \tfrac{1}{2}EP(\partial X) .$$

On a la suite exacte

$$\begin{tikzcd} & H^*(X, \boldsymbol{R}) \arrow[dr] & \\ H_c^*(\mathring{X}, \boldsymbol{R}) \arrow[ur] & & H^*(\partial X, \boldsymbol{R}) \arrow[ll, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

d'où $EP(\partial X) = EP(X) - \sum_i (-1)^i \dim H_c^i(\mathring{X}, \boldsymbol{R})$.

Par la dualité de Poincaré de X, on a

$$-\sum_i (-1)^i \dim H_c^i(\mathring{X}, \boldsymbol{R}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, T_X) .$$

Lorsque X est orientable on a donc $EP(\partial X) = 2EP(X)$. Dans le cas contraire soit $\tilde{X}$ le revêtement canonique à deux feuillets orientable de X. On a

$$H^i(\tilde{X}, \boldsymbol{R}) = H^i(X, \boldsymbol{R}) \oplus H^i(X, T_X) ,$$

d'où

$$EP(X) + \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, T_X) = EP(\tilde{X}) = 2EP(X)$$

puisque $\tilde{X}$ est un revêtement d'ordre 2. Donc $EP(\partial X) = 2EP(X)$ ce qui démontre la proposition.

Corollaire 3.1.3. *Soit $Z \subset X$ un fermé dont X soit un voisinage cotubulaire. Pour tout i, $H^i(Z, \boldsymbol{R})$ est un $\boldsymbol{R}$-espace vectoriel de dimension finie isomorphe à $H^i(X, \boldsymbol{R})$. On a*

$$EP(Z) = EP(X) = (-1)^{\dim X} \int_X \chi_{T_X} + (-1)^{\dim X} \int_{\partial X} \nu^* \sigma_{T_X} .$$

En effet, comme Z admet un système fondamental de voisinages rétracts de X, on a $H^i(Z, \boldsymbol{R}) \approx H^i(X, \boldsymbol{R})$.

3.2. Termes locaux. Dans ce numéro, on conserve les notations du numéro précédent, sauf pour s, qui désigne à présent une section de Ξ au-dessus de X tout entier, partout non nulle sur X.

Soit W une partie ouverte et fermée de $s(X) \cap X$.

Proposition & définition 3.2.1. (a) *Soient V et V' deux sous-variétés à bord de $\mathring{X}$ de dimension n, voisinages de W dans X, telles que s ne s'annule pas sur $V - W$ et $V' - W$, et β une $(n - r)$-forme fermée, C^∞ sur X, à support compact et $\tau_X \otimes t(\Xi)$-tordue. Alors*

$$E(V, \Xi|_V, s|_{\partial V}\,; \beta) = E(V', \Xi|_{V'}, s|_{\partial V'}\,; \beta)\ .$$

(b) *On appelle terme local relatif à W, s et β le terme*

$$\Phi(W, s, \beta) = E(V, \Xi|_V, s|_{\partial V}\,; \beta)\ .$$

Il est possible de construire une sous-variété à bord V'' de $\mathring{X}$ de dimension n, voisinage de W dans X, telle que s ne s'annule pas sur $V'' - W$ et que $V'' \subset \overset{\circ}{\widehat{V \cap V'}}$. On peut donc se borner à considérer le cas où $V' \subset \mathring{V}$ et l'assertion (a) résulte alors de la proposition 3.1.1, 4°.

Proposition 3.2.2. (1) *La forme linéaire $\beta \to \Phi(W, s, \beta)$ sur les formes fermées à support compact, est continue pour la topologie de la convergence uniforme à support dans un compact fixe. Elle est nulle sur les formes exactes.*

(2) *Si $W = W' \cup W''$ est réunion de deux parties ouvertes et fermées disjointes W' et W'', on a*

$$\Phi(W, s, \alpha) = \Phi(W', s, \alpha) + \Phi(W'', s, \alpha)\ .$$

(3) *Soient V une sous-variété à bord de $\mathring{X}$ de dimension n, voisinage de W dans X, s_1 et s_2 deux sections de Ξ nulles sur W, ne s'annulant pas sur $V - W$ et telles que $s_1|_{\partial V}$ et $s_2|_{\partial V}$ soient ∂V-homotopes. Alors*

$$\Phi(W, s_1, \alpha) = \Phi(W, s_2, \alpha)\ .$$

Les assertions (1) et (3) résultent de la proposition 3.1.1. L'assertion (2) est immédiate.

3.3. Formule de Gauss-Bonnet. Dans le cas où $\partial X = \emptyset$, il existe une r-forme ω sur Ξ, à support propre sur X, $\pi^* t(\Xi)$-tordue qui représente la classe fondamentale $[X]$ de X dans Ξ (proposition 1.2.5). Donc $[X] \cup [X]$ est représenté par $\omega \wedge \omega$ qui appartient à $\Gamma_{\mathscr{P}}(\Xi, \Omega_\Xi^{2r})$ où $\mathscr{P}$ désigne la famille des supports de Ξ propres au-dessus de X.

Proposition 3.3.1. *Pour toute forme C^∞ fermée α sur Ξ de degré $n - r$, τ_Ξ-tordue, dont le support a une projection dans X relativement compacte, on a*

$$\int_\Xi \alpha \wedge (\omega \wedge \omega) = (-1)^n \int_X (\alpha|_X) \wedge \chi\ .$$

Dans le cas où $\partial X \neq \emptyset$, soit $s : X \to \Xi$ une section de π ne s'annulant pas sur ∂X. Soient $(W_i)_{i \in I}$ les composantes connexes de $s(X) \cap X$. On a la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. *Pour toute forme C^∞ fermée α sur Ξ, de degré $n - r$, τ_Ξ-tordue, dont le support a une projection dans X relativement compacte on a*

$$(-1)^n \int_X (\alpha|_X) \wedge \chi = \sum_{i \in I} \Phi(W_i, s, \alpha|_X) - (-1)^r \int_{\partial X} [(\alpha|_X) \wedge s^* p^* \sigma]|_{\partial X} .$$

Cette proposition résulte du fait que

$$(-1)^n \int_X (\alpha|_X) \wedge \chi + (-1)^r \int_{\partial X} [(\alpha|_X) \wedge s^* p^* \sigma]|_{\partial X}$$

est égal à $E(X, \Xi, s|_{\partial X}; \alpha|_X)$, donc à $\Phi(s(X) \cap X, s, \alpha|_X)$, et de proposition 3.2.2.

Etudions le terme au bord $\int_{\partial X} [(\alpha|_X) \wedge s^* p^* \sigma]|_{\partial X}$. Soit N le sous-fibré de rang 1 de $\Xi|_{\partial X}$ engendré par la section s, et soit ν la section de $\Xi|_{\partial X}$ égale à $p \circ s|_{\partial X}$. Supposons Ξ muni d'une connexion compatible avec la métrique et $\sigma = \sigma_\Xi$ élément d'aire relatif canonique.

Proposition 3.3.3. (1) *Si r est pair, on a*

$$\int_{\partial X} [(\alpha|_X) \wedge s^* p^* \sigma_\Xi]|_{\partial X} = \int_{\partial X} [(\alpha|_{\partial X}) \wedge A] ,$$

où A est la courbure totale relative de N dans $\Xi|_{\partial X}$ (cf. § 2.5).

(2) *Si r est impair, on a*

$$\int_{\partial X} [(\alpha|_X) \wedge s^* p^* \sigma_\Xi]|_{\partial X} = \frac{1}{2} \int_{\partial X} (\alpha|_{\partial X}) \wedge (\nu \otimes \chi_{\Xi/N}) .$$

Résulte de la remarque 2.6.4.

3.4. Calcul des termes locaux. On suppose à présent que $s(X) \cap X$ est de mesure différentielle nulle, et soit W une partie ouverte et fermée de $s(X) \cap X$.

Soit $(V_k)_{k \in N}$ une suite décroissante de sous-variétés à bord de X, fermées dans X, telle que $V_{k+1} \subset \mathring{V}_k$ et $\bigcap_k V_k = W$, et que, de plus, s ne s'annule pas sur $V_0 - W$. Il existe toujours une telle suite. Il suffit de prendre V_0 répondant à la question et de poser

$$V_k = \{x \in V_0 / \|s(x)\| + f(x) \leq \varepsilon_k\} ,$$

où f est une fonction C^∞ sur V_0, valant 1 sur ∂V_0 et 0 sur W, et où ε_k est une suite strictement décroissante de nombres réels inférieurs à 1, tendant vers 0 et telle que les V_k soient des variétés à bord (théorème de Sard).

Proposition 3.4.1. *Pour toute forme C^∞ fermée β sur X, de degré $n-r$ et $\tau_X \otimes t(\Xi)$-tordue, à support compact, on a*

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \lim_{k\to\infty} \int_{\partial V_k} \beta \wedge s^*p^*\sigma \ .$$

En effet, par la définition 3.2.1 on a, pour tout k,

$$\Phi(W, s, \beta) = E(V_k, \Xi|_{V_k}, s|_{\partial V_k}; \beta) = (-1)^n \int_{V_k} \beta \wedge \chi + (-1)^r \int_{\partial V_k} \beta \wedge s^*p^*\sigma \ ,$$

et la première intégrale tend vers zéro avec la mesure de V_k lorsque k tend vers l'infini.

Considérons le cas où Ξ est muni d'une connexion compatible avec la métrique. Supposons qu'il existe un voisinage V de W dans X qui soit une sous-variété à bord de X, fermée dans X, tel que s ne s'annule pas sur $V - W$ et qu'il existe un difféomorphisme $F: V \times]0, 1] \xrightarrow{\sim} V - W$. Un tel voisinage et un tel difféomorphisme existent par exemple dès que la variété X, le fibré Ξ et la section s sont analytiques d'après les résultats de Lojasiewicz. Notons $s': V - W \to S$ l'unique section telle que

(a) $s'|_{\partial V} = (s/\|s\|)|_{\partial V} = p \circ s|_{\partial V}$,

(b) $\langle \nabla s', \partial/\partial t\rangle = 0$, où $\partial/\partial t$ est le champ de vecteurs tangents verticaux de la fibration $pr \circ F^{-1}: V - W \to \partial V$. Pour $t \in]0, 1]$, notons $\Delta s_t: \partial V \to S$ l'application $x \to s'(F(x, t))$.

Proposition 3.4.2. *Pour toute forme C^∞ fermée β sur X, de degré $n-r$ et $\tau_X \otimes t(\Xi)$-tordue, à support compact, on a*

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \lim_{t\to 0} \int_{\partial V} \Delta s_t^*(\pi^*\beta|_S \wedge \sigma) \ .$$

D'après la proposition 3.4.1, on a

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \lim_{t\to 0} \int_{\partial V \times \{t\}} \beta \wedge s^*p^*\sigma \ .$$

Sur $V - W$, les sections $p \circ s$ et $(x, t) \mapsto \Delta s_t(x)$ sont $(V - W)$-homotopes. Il résulte alors de la remarque 2.6.2 que

$$\int_{\partial V \times \{t\}} \beta \wedge s^*p^*\sigma = \int_{\partial V} \Delta s_t^*(\pi^*\beta|_S \wedge \sigma) \ .$$

Lorsque W est localement une réunion de sous-variétés qui se coupent transversalement, cas auquel on peut se ramener lorsqu'on dispose de la résolution des singularités, le calcul de la limite dans la proposition 3.4.2 fait intervenir des résidus associés aux différentes intersections des composantes de W. Nous traiterons le cas où W est une *sous-variété connexe*.

Soit alors V un voisinage tubulaire de W dans X ; c'est une sous-variété à bord, voisinage de W dans X, munie d'une rétraction $\pi_V : V \to W$ qui est une fibration en boules. Posons $\pi_{\partial V} = \pi_V|_{\partial V}$, de sorte que $\pi_{\partial V}$ est une fibration en sphères. Lorsque t tend vers 0, la famille de morphismes Δs_t tend uniformément sur tout compact ainsi que tous ses jets vers un morphisme de variétés fibrées sur W, noté $\Delta s : \partial V \to S_{\Xi|W}$. On constate que la classe de W-homotopie de Δs ne dépend pas du voisinage tubulaire choisi.

Corollaire 3.4.3. *On a*

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_W \left((\beta|_W) \wedge \int_{\pi_{\partial V}} \Delta s^* \sigma_{\Xi|W}\right) .$$

Comme $\pi \circ \Delta s_t$ tend vers $\pi_{\partial V}$, on a, d'après proposition 3.4.2,

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_{\partial V} \pi_{\partial V}^*(\beta|_W) \wedge \Delta s^* \sigma_{\Xi|W} ,$$

d'où le corollaire.

Corollaire 3.4.4. *Supposons qu'il existe un sous-fibré Σ de $\Xi\,|\,W$ tel que $rg\Xi - rg\Sigma =$* codim *W et un voisinage tubulaire V de W tel que l'application $\Delta s : \partial V \to S_{\Xi|W}$ correspondante prenne ses valeurs dans $S_{\Xi|W} - S_\Sigma$. Alors si* codim $W > 1$ *ou bien si* codim $W = 1$ *et $rg\Xi$ impair, on a*

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_W \beta \otimes \varepsilon(\Delta s) \wedge \chi_\Sigma ,$$

où ε est une section à valeurs entières de $t(\Xi) \otimes t(V) \otimes t(\Sigma)$. Lorsque codim $W = 1$ *et $rg\Xi$ est pair il faut remplacer dans la formule précédente χ_Σ par la forme de courbure totale relative A de Σ dans Ξ.*

Résulte des corollaires 3.4.3 et 2.6.3 dans le cas codim $W > 1$ et de la remarque 2.6.4 dans le cas codim $W = 1$.

Corollaire 3.4.5. *Si $rg\Xi =$* codim *W on a*

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_W \beta \otimes \varepsilon(\Delta s) .$$

Dans certains cas on peut déterminer la classe d'homotopie de Δs par le calcul différentiel d'ordre 1. On a, sur Ξ, la suite exacte de fibrés

$$0 \to \pi^*\Xi \to T_\Xi \to \pi^* T_X \to 0$$

où T_X et T_Ξ sont les fibrés tangents, d'où une suite exacte sur X en prenant l'image inverse par s

$$(*) \qquad 0 \to \Xi \to s^* T_\Xi \to T_X \to 0 .$$

L'application tangente $Ts : T_X \to s^* T_\Xi$ est un scindage de $(*)$. On a sur W, supposé être une sous-variété de X, la relation $s = i$ où i est la section nulle, d'où $s^*T_\Xi|_W = i^*T_\Xi|_W$, et deux scindages Ts et Ti de la suite exacte

$$0 \to \Xi|_W \to s^*T_\Xi|_W \to T_X|_W \to 0 \ .$$

La différence $Ts - Ti$ est un morphisme de fibrés vectoriels $T_X|_W \to \Xi|_W = \Xi_W$ qui s'annule sur le fibré tangent T_W, d'où par passage au quotient un morphisme $Ds\colon N_W \to \Xi_W$ où $N_W = T_X|_W/T_W$.

Corollaire 3.4.6. *Si* $Ds\colon N_W \to \Xi_W$ *est un isomorphisme de* N_W *sur un sous-fibré de* Ξ_W,[3] *on a, lorsque* codim $W > 1$, *ou bien lorsque* codim $W = 1$ *et* $rg\Xi$ *impair*

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_W \beta \otimes \varepsilon \wedge \chi_{Ds(N_W)^\perp} \ ,$$

où ε *est une section de module* 1 *de* $t(\Xi) \otimes t(\partial V) \otimes t(\Sigma)$. *Lorsque* codim $W = 1$ *et* $rg\Xi$ *est pair, il faut remplacer dans la formule ci-dessus la forme* $\chi_{Ds(N_W)^\perp}$ *par la forme* $2A$ *où* A *est la forme de courbure totale relative de* $Ds(N_w)$ *dans* Ξ_W *et la section* ε *est de module* 0 *ou* 1.

Donnons-nous une métrique sur N_W. Notons $S_{N_W} \to W$ le fibré en sphères unités correspondant. C'est le fibré en sphères d'un voisinage tubulaire de W dans X. L'application Ds induit un homomorphisme de fibrés $\Delta's\colon S_{N_W} \to S_{\Xi_W}$. On constate que $\Delta's$ est dans la classe de W-homotopie de l'application Δs introduite en proposition 3.4.2. Le corollaire résulte alors de 3.4.4 compte tenu de ce que le degré local ε est de module 1 et de module 0 ou 1 lorsque codim $W = 1$ et $rg\Xi$ pair.

3.5. Degré local. Précisons maintenant comment on utilise et comment on détermine la section ε de $t(\Xi) \otimes t(\partial V) \otimes t(\Sigma)$ du corollaire 3.4.4. En utilisant les isomorphismes canoniques $t(\Xi) \otimes t(\Xi) \simeq \boldsymbol{R}$ et $\tau_X \otimes t(\partial V) \simeq \tau_W$, [4]le produit tensoriel par ε induit un morphisme de faisceaux localement libres de rang 1 sur W, $\tau_X \otimes t(\Xi) \to \tau_W \otimes t(\Sigma)$. Ceci permet d'interpréter dans le corollaire 2.2.3 $\beta \otimes \varepsilon$ comme une forme $\tau_W \otimes t(\Sigma)$-tordue sur W et par suite $\beta \otimes \varepsilon \wedge \chi_\Sigma$ (resp. $\beta \otimes \varepsilon \wedge A$) est bien une mesure sur W. Lorsque $rg\Xi =$ codim W, on a $rg\Sigma = 0$ et il faut prendre par convention $t(\Sigma) = \boldsymbol{R}$. La forme $\beta \otimes \varepsilon$ est alors τ_W-tordue sur W et est donc une mesure sur W. Lorsque de plus, W est un point, $\tau_W = \boldsymbol{R}$ et β est une section de $\tau_X \otimes t(\Xi)$. Supposons $\beta \neq 0$; il existe alors un unique nombre réel $|\beta| > 0$ tel que $\beta/|\beta|$ soit une section entière qui engendre $\tau_X \otimes t(\Xi)$. Donc $(\beta/|\beta|) \otimes \varepsilon$ est un nombre entier applé le *degré local* de s relativement à β. Il existe parfois un choix canonique de β, lorsque par exemple $\Xi = T_X$ le fibré tangent à X, et on omet de préciser

---

[3] ce qui revient à dire que pour tout $x \in W$, $Ds(x)$ est injectif.

[4] si e est une base de $t(\Xi)$, à $e \otimes e$ correspond 1. Si Or (∂V), Or (X) sont des orientations, à Or $(X) \otimes$ Or (∂V) correspond Or (W) tel que Or $(W) \otimes$ Or $(\partial V) =$ Or X dans l'isomorphisme naturel $\tau_W \otimes t(\partial V) \simeq \tau_X$.

dans ce cas que le degré local considéré est pris relativement à β.

Pour déterminer la section ε, on procède comme suit. Plaçons-nous sous les hypothèses de 3.4.4 et *supposons de plus que* codim $W > 1$. Soient $x \in W$, $\Delta s_x : \partial V_x \to S_{\Xi,x}$ l'application induite sur les fibres en x par Δs, Σ_x le sous-espace orthogonal à Σ_x et $\Delta s_x : V_x \to S_{\Sigma_x}$ une application qui, composée avec l'injection $S_{\Sigma_x} \to S_\Xi$ donne une application homotope à Δs_x dans $S_\Xi - S_\Sigma$. Donnons-nous au voisinage de x, une orientation Or (Ξ) de Ξ, une orientation Or (∂V) de ∂V et une orientation Or (Σ) de Σ. L'isomorphisme canonique $t(\Sigma) \simeq t(\Xi) \otimes t(\Sigma)\Big($déduit de l'isomorphisme canonique $\overset{\max}{\wedge}\Xi \simeq \overset{\max}{\wedge}\Sigma \otimes \overset{\max}{\wedge}\Sigma\Big)$ permet alors d'orienter S_{Σ_x} à l'aide de Or (Ξ) et Or (Σ). Notons deg (s) le degré topologique de l'application Δs_x entre les sphères ∂V_x et $S_{\Sigma\perp,x}$ munies des orientations Or (∂V_x) et Or $(S_{\Sigma\perp,x})$ respectivement.

Proposition 3.5.1. *On a* $\varepsilon(\Delta s)_x = \deg(s)\cdot \mathrm{Or}(\Xi) \otimes \mathrm{Or}(\partial V_x) \otimes \mathrm{Or}(\Sigma)$.

D'après le corollaire 3.4.3 on a

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_W \beta|_W \wedge \int_{\pi_{\partial V}} \Delta s^* \sigma_{\Xi|W} \,.$$

Comme Δs est homotope à une application $\tilde{\Delta} s : \partial V \to S_\Sigma$ on a, vertu de la proposition 2.6.1 et du théorème 2.5.1,

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^r \int_W \beta_{|W} \wedge \int_{\pi_{\partial V}} \tilde{\Delta} s^*(\sigma_{\Sigma\perp} \wedge \pi_{\partial V}^* \chi_\Sigma) \,.$$

Mais on a

$$\sigma_{\Sigma\perp} \wedge \pi_{\partial V}^* \chi_\Sigma = (-1)^{rm} \pi_{\partial V}^* \wedge \sigma_{\Sigma\perp}$$

avec $m = rg\Sigma$ compte tenu de l'isomorphisme canonique de commutation $t(\Sigma^\perp) \otimes t(\Sigma) \xrightarrow[\sim]{i} t(\Sigma) \otimes t(\Sigma^\perp)$. Donc, par définition de l'intégration par fibre,

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^{r-rm} \int_W \beta|_W \wedge \chi_\Sigma \int_{\pi_{\partial V}} \tilde{\Delta} s^*(\sigma_{\Sigma\perp}) \,.$$

Par définition on a

$$\chi_\Sigma \int_{\pi_{\partial V}} \tilde{\Delta} s^*(\sigma_{\Sigma\perp}) = \deg(s)\cdot \mathrm{Or}(\Sigma^\perp) \otimes \mathrm{Or}(\partial V)$$

par suite

$$\chi_\Sigma \int_{\pi_{\partial V}} \tilde{\Delta} s^*(\sigma_{\Sigma\perp}) = \varepsilon\chi_\Sigma$$

compte tenu de l'isomorphisme i décrit plus haut et des isomorphismes de commutation de $t(\partial V)$ avec $t(\Sigma)$ et $t(\Sigma^{\perp})$.

On a donc

$$\Phi(W, s, \beta) = (-1)^{rm} \cdot (-1)^{r} \int_{W} \beta|_{W} \cdot \varepsilon \wedge \chi_{\Sigma}$$

avec la section ε décrite par la proposition 3.5.1. Mais si m est impair et $m < r - 1$, on a $\chi_{\Sigma} = 0$ et on peut toujours prendre le signe indiqué dans la proposition 3.5.1.

La description de ε dans le cas codim $W = 1$ demande une étude particulière laissée au lecteur. Notons seulement que le module de ε est 0 ou 1 et que la formule 3.5.1, convenablement interprétée est encore valable lorsque $rg\Xi$ est impair.

3.6. Intersections de sous-variétés. Soient Z une variété de dimension n connexe sans bord, X et Y deux sous-varétés connexes de dimensions respectives p et q, τ_X et τ_Y des $\boldsymbol{R}$-faisceaux inversibles d'ordre 2 sur Z qui induisent sur X et Y respectivement les faisceaux d'orientation.

On a donc des classes fondamentales $[X] \in H^{n-p}(Z, \tau_X)$ et $[Y] \in H^{n-q}(Z, \tau_Y)$. Pour toute forme fermée α sur Z, à support compact, $\tau_Z \otimes \tau_X \otimes \tau_Y$-tordue et de degré $p + q - n$, on a $[\alpha] \cup [X] \cup [Y] \in H^n_c(Z, \tau_Z) \simeq \boldsymbol{R}$. On se propose de donner une autre expression de l'application $\alpha \mapsto [\alpha] \cup [X] \cup [Y]$.

Soient N_X le fibré normal à X, V un voisinage tubulaire de X, $\rho: V \to N_X$ un X-difféomorphisme de V sur le fibré en boule unité de N_X pour une métrique sur N_X, $\tilde{N}$ le fibré vectoriel $\rho^* q^* N_X$ sur V où $q: N_X \to X$ est la projection canonique. Soit $\tilde{s}: V \to \tilde{N}$ la section déduite par changement de base de la section diagonale de $q^* N_X$ sur N_X. Notons $\bar{N}$ le fibré $\tilde{N}|_{Y \cap \mathring{V}}$ et $s: Y \cap \mathring{V} \to \bar{N}$ la section $\tilde{s}$ restreinte à $Y \cap \mathring{V}$. Notons que l'ensemble des zéros de s est $X \cap Y$.

Proposition 3.6.1. *Si $X \cap Y$ est de mesure différentielle nulle dans Y, on a*

$$[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = \Phi(X \cap Y, s, \alpha|_Y) .$$

Soient ω_X et ω_Y des formes fermées sur Z dans les classes $[X]$ et $[Y]$ respectivement. On a

$$[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = \int_Z \alpha \wedge \omega_X \wedge \omega_Y = \int_Y \alpha|_Y \wedge \omega_X|_Y$$

on peut prendre pour forme ω_X la forme $\rho^* \omega_{1/2}$ (proposition 1.2.5), et comme le support de $\alpha \wedge \omega_X$ est alors un compact contenu dans $\mathring{V}$, on a

$$[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = \int_{Y \cap \mathring{V}} \alpha|_Y \wedge \rho^* \omega_{1/2} \,.$$

Soit U_k une suite de sous-variétés à bord de $Y \cap \mathring{V}$, fermées dans $Y \cap V$ telle que $U_{k+1} \subset \mathring{U}_k$ et $\bigcap_k U_k = X \cap Y$. Comme $X \cap Y$ est de mesure nulle, on a

$$[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = \lim_{k \to \infty} \int_{Y \cap \mathring{V} - U_k} \alpha|_Y \wedge \rho^* \omega_{1/2} \,.$$

Mais sur $Y \cap \mathring{V} - U_k$, $\rho^* \omega_{1/2} = \rho^*(-d\gamma_{1/2})$ (proposition 1.2.5). Par suite

$$[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = (-1)^{rg \overline{N}} \lim_{k \to \infty} \int_{\partial U_k} \alpha|_Y \wedge \rho^* \gamma_{1/2} \,.$$

On a donc

$$[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = \lim_{k \to \infty} (-1)^{rg \overline{N}} \int_{\partial U_k} \alpha|_Y \wedge s^* p^* \sigma_{\overline{N}} \,,$$

d'où la proposition d'après la formule (1) du § 2.1.

Si W est un ouvert fermé de $X \cap Y$, on a $[\alpha] \cup [X] \cup [Y] = \Phi(X \cap Y, s, \alpha|_Y) = \Phi(W, s, \alpha|_Y) + \Phi(X \cap Y - W, s, \alpha|_Y)$.

L'application $\alpha \mapsto \Phi(W, s, \alpha|_Y)$ est appelée *le terme local de l'intersection* de X avec Y relatif à W et noté $\Psi(X, Y; W, \alpha)$.

Soient W un ouvert fermé de $X \cap Y$ qui soit une variété connexe de dimension strictement inférieure à celle de Y. On a, sur W, un diagramme de sous-fibrés de $T_Z|_W$:

$$\begin{tikzcd}
& T_X|_W \arrow[dr, hook, "i_3"] & \\
T_W \arrow[ur, hook, "i_1"] \arrow[dr, hook, "i_3"'] & & T_Z|_W \\
& T_Y|_W \arrow[ur, hook, "i_4"'] &
\end{tikzcd}$$

d'où une suite de fibrés sur W et de morphismes de fibrés :

$$(1) \qquad T_W \xrightarrow{\;i\;} T_X|_W \oplus T_Y|_W \xrightarrow{\;j\;} T_Z|_W$$

avec $i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ et $j = (i_3, -i_4)$. On a $j \circ i = 0$ et i est injectif.

Corollaire 3.6.2. *Si l'image de j dans* (1) *est un sous-fibré et si* (1) *est une suite exacte de fibrés, la section ε du corollaire* 3.4.4 *est de module* 1.

Résulte do corollaire 3.4.6.

3.7. Formule de Lefschetz. Soient X une variété compacte connexe riemannienne de dimension n et $f\colon X \to X$ une application différentiable.

Soient $\Delta \subset X \times X$ la diagonale, $\Gamma_f \subset X \times X$ le graphe de f, p_1, p_2 les première et deuxième projections de $X \times X$ sur X. Comme $p_1^* T_X$ induit sur Γ_f le faisceau d'orientation de Γ_f on a une classe fondamentale $[\Gamma_f] \in H^n(X \times X, p_1^* \tau_X)$. On a de même une classe fondamentale $[\Delta] \in H^n(X \times X, p_2^* \tau_X)$.

Posons

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Lef}(X, f) = [\Delta] \cup [\Gamma_f] .$$

A l'aide de la dualité de Poincaré on vérifie immédiatement que

$$\operatorname{Lef}(X, f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{Tr}(f, H^i(X)) .$$

Pour $f = \mathrm{Id}_X$ on obtient

$$\operatorname{Lef}(X, \mathrm{Id}_X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rg}(H^i(X)) .$$

On a donc $\operatorname{Lef}(X, \mathrm{Id}_X) = EP(X)$ *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X.

Proposition 3.7.1. *On a* $EP(X) = \int_X \chi_{T_X} = [\chi_{T_X}]$.

En effet si ω_Δ est une forme différentielle fermée sur $X \times X$ dans la classe $[\Delta]$ (proposition 1.2.5), on a

$$EP(X) = [\Delta] \cup [\Delta] = \int_{X \times X} \omega_\Delta \wedge \omega_\Delta = \int_\Delta \omega_\Delta|_\Delta = (-1)^n \int_X \chi_{T_X} .$$

Remarque 3.7.2. Pour des raisons de parité on a $EP(X) = 0$ lorsque n est impair. Ceci résulte de la proposition 3.7.1 car dans ce cas $\chi_{T_X} = 0$. Ceci résulte aussi de la dualité de Poincaré lorsque X est orientable.

Supposons dorénavant que $\Delta \cap \Gamma_f$ soit de *mesure différentielle nulle dans* Δ. Notons α la section $\tau_{X \times X} \otimes p_1^* \tau_X \otimes p_2^* \tau_X$ qui au voisinage de tout point (x, y) s'écrit

$$\operatorname{Or}_{x,y}(X \times X) \otimes \operatorname{Or}_x(X) \otimes \operatorname{Or}_y(X) \ \text{ avec } \ \operatorname{Or}_{x,y}(X \times X) = \operatorname{Or}_x(X) \operatorname{Or}_y(X) .$$

L'ensemble $\Delta \cap \Gamma_f$ s'identifie par les projections à l'ensemble des points fixes de f. Pour toute partie ouverte et fermée W de $\Delta \cap \Gamma_f$ posons (cf. § 3.6)

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Lef}(X, f; W) = \Psi(\Delta, \Gamma_f; W, \alpha) .$$

Si $\Delta \cap \Gamma_f$ est une réunion finie de parties fermées disjointes W_i, on a donc

$$\text{Lef}\,(X, f) = \sum_i \text{Lef}\,(X, f\,;\, W_i)\ .$$

Le nombre Lef $(X, f\,;\, W_i)$ est appelé *le nombre de Lefschetz local* de f relatif à W_i.

Soit W une partie ouverte et fermée de $\Delta \cap \Gamma_f$ qui soit une sous-variété connexe de Δ. Notons T_X le fibré tangent à X, T_W le fibré tangent à W, N_W le sous-fibré de $T_X|_W$ orthogonal à T_W, $p_X\colon T_X \to X$ et $p_W\colon N_W \to W$ les projections canoniques, $\exp\colon T_X \to X$ l'application exponentielle. L'application $\xi \mapsto (p(\xi), \exp(\xi))$ de T_X dans $X \times X$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de la section nulle sur un voisinage V de la diagonale.

Notons $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} \in T_{X,x}$, l'application inverse. L'application $\exp|_{N_W}\colon N_W \to X$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de la section nulle sur un voisinage U de W dans X. Pour $x \in U$, posons $\pi(x) = p_W \circ \exp^{-1}(x) \in W$. L'inverse au voisinage de W de $\exp|_{N_W}$ est donc $x \mapsto \overrightarrow{\pi(x)x}$. Comme W est fixé par f, il existe un voisinage U' de W tel que $U' \subset U$, $f(U') \subset U$, et tel que pour tout $x \in U'$, $(x, f(x)) \in V$.

De plus le chemin $t \to \exp t\overrightarrow{\pi(x)x}$, $t \in [0, 1]$ est un chemin géodésique noté $g(\pi(x), x)$ joignant $\pi(x)$ à x.

Notons $\theta_g\colon T_{X,x} \to T_{X,\pi(x)}$ le transport parallèle le long de $g(\pi(x), x)$. L'application $x \to \theta_g(\overrightarrow{xf(x)})$ est une W-application car on a $p_X \circ \theta_g(\overrightarrow{xf(x)}) = \pi(x)$ et pour $x \in U' - W$, $\theta_g(\overrightarrow{xf(x)}) \neq 0$. Notons $S_X|_W$ le fibré en sphères unités de $T_X|_W$.

Definition 3.7.3. On appelle indicatrice de f au voisinage de W, et on note $I_W(f)\colon U' - W \to S_X|_W$ l'application $x \mapsto \theta_g(\overrightarrow{xf(x)})/\|\theta_g(\overrightarrow{xf(x)})\|$.

Proposition 3.7.4. *Soit $V \subset U'$ un voisinage tubulaire de W pour l'application π. On a* Lef $(X, f\,;\, W) = (-1)^n \int_V I_W(f)^*(\sigma_{T_X})$.

Par la définition (2), on a Lef $(X, f\,;\, W) = \Psi(\Delta, \Gamma_f\,;\, W, \alpha)$ et d'après 2.4, on a $\Psi(\Delta, \Gamma_f\,;\, W, \alpha) = \Phi(W, s, \alpha|_Y)$.

En utilisant le voisinage tubulaire de Δ donné par l'application $(x, y) \to \overrightarrow{xy}$, on voit que le fibré $\tilde{N}$ du § 3.4 n'est autre que $p_1^* T_X$. Il induit donc sur Γ_f, identifié à X par la première projection, le fibré T_X. La section s du § 3.6 est alors la section $x \mapsto \overrightarrow{xf(x)}$ et $I_W(f)\colon U' - W \to S_X|_W$ n'est autre que l'application Δs du § 3.4. La proposition résulte alors du corollaire 3.4.3.

Notons S_W, le fibré en sphères unités de T_W.

Definition 3.7.5. Nous dirons que f est sans glissement au voisinage de W, s'il existe un voisinage tubulaire $V \subset U'$ de W pour l'application π, tel que $S_W \cap [I_W(f)(\partial V)] = \emptyset$.

Supposons f sans glissement. Soient $V \subset U'$ un voisinage tubulaire de W tel que $S_W \cap [I_W(f)(\partial V)] = \emptyset$ et $x \in W$.

L'application $I_W(f)|_{\partial V_x} : \partial V_x \to S_X|_{W,x} - S_{W,x}$ est homotope à une application $\tilde{I}_{W,x}(f) : \partial V_x \to S_{N_W,x}$ où $S_{N_W,x}$ est la sphère unité de l'espace normal à W en x. Une orientation de X et de W au voisinage de x permet d'orienter V_x et $S_{N_W,x}$ et pour ces orientations, $\tilde{I}_{W,x}(f)$ *possède un degré noté* $\deg(W,f)$. Ce degré ne dépend pas des orientations choisies ni du point x choisi.

Théorème 3.7.6. *Supposons f sans glissement au voisinage de W. Si* $\operatorname{codim}(W,X) > 1$, *ou bien si X est de dimension impaire, on a*

$$\operatorname{Lef}(X,f;W) = (-1)^n \deg(W,f)\cdot EP(W) .$$

Résulte de la proposition 3.7.4, du corollaire 3.4.4 et de la proposition 3.5.1.

Notons $T_W(f) : T_X|_W \to T_X|_W$ l'endomorphisme de $T_X|_W$ induit par la différentielle de f. Dans la décomposition: $T_X|_W = T_W \oplus N_W$, $T_W(f)$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & L \\ 0 & \mathrm{Id}+M \end{pmatrix}$.

Proposition 3.7.7. *Pour que f soit sans glissement au voisinage de W, il suffit que* $\det M \neq 0$. *On a alors* $\deg(W,f) = \text{signe}(\det M)$.

Immédiate.

Bibliographie

[1] R. Bott, *Vector fields and characteristic numbers,* Michigan Math. J. **14** (1967) 231–244.

[2] ———, *A residue formula for holomorphic vector fields,* J. Differential Geometry **1** (1967) 311–330.

[3] R. Bott & S. S. Chern, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections,* Acta Math. **114** (1965) 71–112.

[4] N. Bourbaki, *Variété différentielles et analytiques,* Actualités Sci. Indust., No. 1347, Hermann, Paris, 1971, §§ 10–11.

[5] J. Cheeger & J. Simons, *Differential characters and geometric invariants,* preprint, 1973.

[6] S. S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds,* Ann. of Math. **45** (1944) 747–752.

[7] ——, *On the curvatura integra in a Riemannian manifold,* Ann. of Math. **46** (1945) 647–684.

[8] H. Flanders, *Development of an extended exterior differential calculus,* Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953) 311–326.

[9] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vol. II, Interscience, New York, 1969.

[10] P. Marry, *Type d'homotopie rationnelle relative des fibrés en variétés de Stiefel,* Compositio Math. **34** (1977) 91–98.

[11] F. Takens, *On the differential forms representing the Chern and Euler classes,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **14** (1969) 693–702.

École Normale Supérieure, Paris