REPRESENTATION DES MESURES DE PROBABILITE SUR LE PRODUIT DE DEUX ESPACES DENOMBRABLES, DE MARGES DONNEES

PAR
GÉRARD LETAC

Introduction

X et Y étant deux ensembles finis ou dénombrables, munis de la topologie discrète, soient r et s des mesures de probabilité sur X et Y, c'est-à-dire des mesures de Radon positives de masse 1. On se propose ici de représenter l'ensemble $\mathfrak{M}(r, s)$ des mesures p de probabilité sur le produit cartésien $Z = X \times Y$ dont les projections sur X et Y sont r et s, c'est-à-dire sont telles que

$$\textstyle\sum_{y \in Y} p(x, y) = r(x), \qquad \sum_{x \in X} p(x, y) = s(y).$$

Par exemple on sait [1] que les matrices bistochastiques sont barycentres des matrices de permutation. Plus généralement, ici, $\mathfrak{M}(r, s)$ ayant une structure d'ensemble convexe, compact, métrisable, lorsqu'il est muni de la topologie faible des mesures, le Théorème de Choquet [3] permet de représenter $\mathfrak{M}(r, s)$ comme l'ensemble des barycentres des extrêmales de $\mathfrak{M}(r, s)$ (théorème 1).

Nous porterons notre attention essentiellement sur ces extrêmales, dont une caractérisation abstraite a été donnée dans [4]. Appelons ensemble d'unicité toute partie non vide de Z qui ne puisse porter deux mesures de probabilité différentes et de mêmes marges. $x(z)$ et $y(z)$ étant les projections de $z \in Z$ sur X et Y, E étant une partie de Z, appelons arc dans E une suite $z_1, \cdots, z_n$ de points de E telle que l'on ait:

$$x(z_{2k}) = x(z_{2k-1}) \quad \text{et} \quad y(z_{2k+1}) = y(z_{2k}) \qquad \text{pour tout} \quad k$$

ou bien

$$y(z_{2k}) = y(z_{2k-1}) \quad \text{et} \quad x(z_{2k+1}) = x(z_{2k}) \qquad \text{pour tout} \quad k,$$

z_1 et z_n étant les extrémités de l'arc. Le théorème 3, fondamental, montre que E est ensemble d'unicité si et seulement si il ne contient pas d'arc fermé (c'est-à-dire à extrémités confondues) non trivial. Le théorème 4 caractérise alors les extrêmales de $\mathfrak{M}(r, s)$: p est extrêmale si et seulement si le support $S(p)$ est ensemble d'unicité.

Après avoir montré que la famille des ensembles d'unicité est inductive, il est naturel de s'intéresser à ses éléments maximaux. Le théorème 6 montre que ceux-ci sont connexes par arc; le théorème 7 donne une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'un ensemble d'unicité maximal porte une extrêmale de $\mathfrak{M}(r, s)$.

L'étude des extrêmales est faite par un formalisme emprunté à la théorie des graphes, décrit dans le paragraphe 2.

Received May 11, 1965.

I. Représentation de $\mathfrak{M}(r, s)$

$\mathfrak{M}_1$ désignant l'ensemble des mesures de Radon sur Z positives et de masse ≤ 1, on a l'inclusion $\mathfrak{M}(r, s) \subseteq \mathfrak{M}_1$. La topologie sur $\mathfrak{M}_1$ de la convergence faible des mesures est équivalente à la convergence simple:

$$p_n \to_{n\to\infty} p \quad \Leftrightarrow \quad p_n(z) \to_{n\to\infty} p(z). \qquad \forall z.$$

Il est bien connu que pour cette topologie $\mathfrak{M}_1$ est compact et métrisable.

LEMME 1. *$\mathfrak{M}(r, s)$ est compact.*

$\mathfrak{M}_1$ étant compact, il suffit de montrer que $\mathfrak{M}(r, s)$ est fermé. Soit $p_n \in \mathfrak{M}(r, s)$ avec $p_n \to_{n\to\infty} p \in \mathfrak{M}_1$. Alors:

$$\textstyle\sum_{x\in X} p(x, y_0) = s(y_0) + \sum_{x\in X} (p - p_n)(x, y_0).$$

ε étant un nombre positif donné, on peut trouver une partie finie X_1 de X telle que

$$\textstyle\sum_{x\in \bar{X}_1} r(x) < \varepsilon/3, \qquad \sum_{x\in \bar{X}_1} p(x, y_0) < \varepsilon/3$$

($\bar{X}_1$ est le complèmentaire de X_1 relativement à X). X_1 étant ainsi choisi, on peut trouver N assez grand tel que $n > N$ entraine

$$\textstyle\sum_{x\in X_1} |(p - p_n)(x, y_0)| < \varepsilon/3.$$

Comme

$$\textstyle\sum_{x\in \bar{X}_1} p_n(x, y_0) \leq \sum_{x\in \bar{X}_1, y\in Y} p_n(x, y) = \sum_{x\in \bar{X}_1} r(x)$$

il est clair que

$$\textstyle\sum_{x\in X} (p - p_n)(x, y_0) < \varepsilon$$

et donc que $p \in \mathfrak{M}(r, s)$. $\mathfrak{M}(r, s)$ est donc un sous ensemble convexe compact de l'espace des mesures de Radon sur Z muni de la topologie faible. Celui ci étant alors métrisable, nous sommes dans les conditions d'application du Théorème de Choquet et nous pouvons énoncer:

THÉORÈME 1. *Toute mesure de p de $\mathfrak{M}(r, s)$ est barycentre d'une mesure de Radon μ positive de masse 1 du compact $\mathfrak{M}(r, s)$, la mesure μ étantportée par les extrêmales de $\mathfrak{M}(r, s)$.*

II. Définitions et propriétés du formalisme

E étant un ensemble quelconque, on appelle *graphe sur E* une application f de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E dans lui-même telle que quelle que soit la famille $(E_t)_{t\in T}$ de parties de E, on ait

$$f(\textstyle\bigcup_{t\in T} E_t) = \bigcup_{t\in T} f(E_t).$$

Cette définition entraine naturellement que $f(\emptyset) = \emptyset$ et que f est complètement déterminé par les $f(e)$, où e décrit E.

Si $e \in f(e)$ e est appelé *point fixe* de f.

L'ensemble $G(E)$ des graphes sur E est muni d'une *addition* et d'un *produit* de la manière suivante:

Si f et g appartiennent à $G(E)$, alors

$$(f + g)(e) = f(e) \cup g(e), \qquad (fg)(e) = f[g(e)].$$

L'addition est associative et commutative, le produit est associatif, distributif par rapport à l'addition et possède une unité, notée 1, telle que $1(e) = e$.

Tous les graphes que nous allons rencontrer sont tels que $E \subset Z$. Nous considèrerons en particulier les graphes suivants:

$$\alpha(e) = \{z \in E - \{e\} \mid y(e) = y(z)\}$$

$$\beta(e) = \{z \in E - \{e\} \mid x(e) = x(z)\}$$

$$\alpha_0 = 1, \qquad \beta_0 = 1,$$

$$\alpha_{2n} = (\beta\alpha)^n, \qquad \beta_{2n} = (\alpha\beta)^n$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha\alpha_{2n}, \qquad \beta_{2n+1} = \beta\beta_{2n}$$

$$\Gamma = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k).$$

Ainsi $z_1 \in \Gamma(z_2)$ signifie qu'il existe un arc d'extrémités z_1 et z_2 dans E. Ces graphes sont définis relativement à E. Nous écrivons parfois α_E, Γ_E, etc. pour éviter toute ambiguité. On note $x(E)$ et $y(E)$ les projections de E sur X et Y.

Enfin on appelle cycle dans E un ensemble de $2n$ points de E:

$$C = \{z_1, \cdots, z_{2n}\}$$

tels que

$$z_i \in \alpha(z_{2k-1}) \Leftrightarrow i = 2k \quad \text{si } 1 \leq k \leq n$$

$$z_i \in \beta(z_{2k}) \Leftrightarrow \begin{cases} i = 1 & \text{si } k = n \\ i = 2k + 1 & \text{si } 1 \leq k < n. \end{cases}$$

n est l'ordre du cycle. Les points d'un cycle sont distincts.

E étant une partie non vide de Z fixée, établissons quelques propriétés utiles des applications α et β.

LEMME 2. *Le graphe $\alpha_n + \beta_n$ est sans points fixes pour $n = 1, 2, 3$.*

LEMME 3.

$$z_1 \in \alpha_{2n}(z_2) \Leftrightarrow z_2 \in \beta_{2n}(z_1)$$

$$z_1 \in \alpha_{2n+1}(z_2) \Leftrightarrow z_2 \in \alpha_{2n+1}(z_1)$$

$$z_1 \in \beta_{2n+1}(z_2) \Leftrightarrow z_2 \in \beta_{2n+1}(z_1).$$

Les preuves de ces deux lemmes sont évidentes.

THÉORÈME 2. *Γ_E a un point fixe si et seulement si il existe un cycle dans E.*

(a) La condition est évidemment suffisante, tout point d'un cycle dans E étant point fixe de Γ.

(b) Pour montrer qu'elle est nécessaire, établissons d'abord la propriété suivante: Si $\alpha_{2n+1} + \beta_{2n+1}$ a un point fixe, alors il existe m compris entre 2 et n tel que α_{2m} ait un point fixe.

Pour procéder par récurrence montrons la propriété pour $n = 2$. Si e est un point fixe de α_5 il existe donc z tel que

$$e \in \beta_4(z) \quad \text{et} \quad z \in \alpha(e).$$

Par le lemme 3:

$$z \in \alpha_4(e) \quad \text{et} \quad e \in \alpha(z)$$

cela entraine

$$z \in (\beta_3\alpha^2)(z).$$

Or, comme on le vérifie facilement, on a toujours

$$\alpha^2(z) \subset (1 + \alpha)(z),$$

il vient donc $z \in \beta_3(1 + \alpha)(z)$, ce qui entraine, $z \in \beta_3(z)$ étant exclu (lemme 2), $z \in \alpha_4(z)$.

Supposons maintenant la propriété vraie pour tout entier compris entre 2 et $n - 1$ $(n > 2)$. Si $e \in \alpha_{2n+1}(e)$ le même raisonnement montre qu'il existe z tel que

$$z \in (\beta_{2n-1} + \alpha_{2n})(z).$$

Si $z \in \alpha_{2n}(z)$ la propriété est établie. Si $z \in \beta_{2n-1}(z)$ on utilise l'hypothèse de récurrence.

Montrons maintenant que si α_{2m} a un point fixe $(m \geq 2)$ il existe un cycle d'ordre $n \leq m$.

La propriété étant évidemment vraie pour $m = 2$, supposons la vraie pour tout entier compris entre 2 et $m - 1$ $(m > 2)$. Si e est un point fixe de α_{2m}, il existe une suite $z_1 = e, z_2, \cdots, z_{2m}$ telle que

$$z_{2k} \in \alpha(z_{2k-1}) \quad \text{si } 1 \leq k \leq m$$

$$z_1 \in \beta(z_{2m})$$

$$z_{2k+1} \in \beta(z_{2k}) \quad \text{si } 1 \leq k < m.$$

Si cette suite n'est pas un cycle il existe par exemple k et k' tels que $k > k'$ et tels que

$$z_{2k'} \in (1 + \alpha)(z_{2k-1})$$

comme

$$z_{2k} \in \alpha_{2k-2k'}(z_{2k'})$$

comme

$$z_{2k-1} \in \alpha(z_{2k})$$

il vient

$$z_{2k-1} \in (\alpha \cdot \alpha_{2k-2k'}(1 + \alpha))(z_{2k-1})$$

comme

$$\alpha^2(z) \subset (1 + \alpha)(z)$$

on obtient

$$z_{2k-1} \in (\beta_{2k-2k'-1} + \alpha_{2(k-k')})(z_{2k-1})$$

comme $k - k' < m$, l'hypothèse de récurrence entraine le résultat.

III. Ensembles d'unicité

U étant une partie quelconque de Z, on note $\mathfrak{M}(U)$ l'ensemble des mesures de probabilité Z à support dans U.

DÉFINITION. Une partie U non vide de Z est appelée ensemble d'unicité si pour tous r et s, $\mathfrak{M}(U) \cap \mathfrak{M}(r, s)$ comprend au plus une mesure.

$\mathfrak{U}$ désigne la famille de ces ensembles.

THÉORÈME 3. *U est un ensemble d'unicité si et seulement si il n'existe pas de cycle dans U.*

(a) La condition est nécessaire; cela résulte de lemme suivant.

LEMME 4. *Tout cycle C est le support d'une mesure m_C, de marges nulles, telle que $|m_C|$ soit de masse* 1.

En effet si $C = \{z_1, \cdots, z_{2n}\}$, la mesure m_C

$$m_C(z) = 0, \quad z \notin C$$
$$m_C(z_k) = (-1)^k/2n$$

convient. Si U comprend un cycle $C = \{z_1, \cdots, z_{2n}\}$ les deux mesures p et p' définies par $p(z) = 0$ si $z \notin C$, $p(z) = 1/2n$ si $z \in C$ et $p' = p + m_C$, sont des mesures de probabilité de mêmes marges, ce qui contredit $U \in \mathfrak{U}$.

(b) La condition est suffisante. Notons

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k}, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_{2k}$$
$$A = \lim_{n\to\infty} A_n, \qquad B = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Nous avons besoin de deux lemmes.

LEMME 5. *Si Γ_U est sans point fixe et si z_1 et z_2 appartiennent simultanément à $A(u)$ ou bien à $\beta B(u)$ (resp. à $B(u)$ ou bien $\alpha A(u)$) alors il est impossible que z appartienne à $\alpha(z_2)$ (resp. $\beta(z_2)$).*

En effet dans le premier cas:

$$z_2 \in \alpha_{2k_2}(u), \qquad u \in \beta_{2k_1}(z_1) \qquad \text{(lemme 3)};$$

si $z_1 \in \alpha(z_2)$ alors $u \in \alpha_{2k_1+2k_2+1}(u)$. Dans le second cas:

$$z_2 \in \beta_{2k_2+1}(u), \qquad u \in \beta_{2k_1+1}(z_1) \qquad \text{(lemme 3)};$$

si $z_1 \in \alpha(z_2)$ alors $u \in \beta_{2k_1+2k_2+3}(u)$. Dans les 2 cas u est point fixe de Γ, ce qui contredit l'hypothèse.

LEMME 6. *Si Γ_U est sans point fixe, pour tout compact K de Z et pour tout u de U, il existe un entier $n(K, u)$ tel que $K \cap \alpha_n(u) = \emptyset$ si $n \geq n(K, u)$ (resp $K \cap \beta_n(u) = \emptyset$).*

En effet sinon il existe $u \in U$, un compact K, une suite $n_1, \cdots, n_k, \cdots$ d'entiers et une suite $z_1, \cdots, z_k, \cdots$ de points de K tels que

$$z_k \in \alpha_{n_k}(u).$$

K étant compact, il existe k et k' tels que $k < k'$ et $z_k = z_{k'}$. Il est clair que z_k est un point fixe de Γ, ce qui contredit l'hypothèse.

Passons à la démonstration de la deuxième partie du théorème 3. Grâce au théorème 2, nous pouvons supposer que Γ_U est sans point fixe. Si $\mathfrak{M}(U) \cap \mathfrak{M}(r, s)$ n'est pas vide, il comprend au moins une mesure p. Nous allons voir en calculant $p(u)$, que p est complètement déterminé par r et s. Noun convenons qu'une somme est nulle lorsque nous effectuons la sommation sur un ensemble vide d'indices.

$$(1) \qquad p(u) + \sum_{z \in \beta(u)} p(z) = r(x(u))$$

$$(2) \qquad p(z) + \sum_{z' \in \alpha(z)} p(z') = s(y(z)).$$

Si on somme (2) par rapport à z quand z décrit $\beta(u)$ et qu'on retranche de (1) il vient

$$p(u) - \sum_{z \in \beta_2(u)} p(z) = r(x(u)) - \sum_{z \in \beta(u)} s(y(z))$$

et, plus généralement:

$$(3) \qquad p(u) - \sum_{z \in \beta_{2n}(u)} p(z) = \sum_{z \in B_{n-1}(u)} r(x(z)) - \sum_{z \in \beta B_{n-1}(u)} s(y(z))$$

$$(3') \qquad p(u) + \sum_{z \in \beta_{2n+1}(u)} p(z) = \sum_{z \in B_n(u)} r(x(z)) - \sum_{z \in \beta B_{n-1}(u)} s(y(z)).$$

Les sommes des seconds membres de 3 et 3′ ont un sens: d'après le lemme 5

$$\sum_{z \in B_n(u)} r(x(z)) \leq \sum_{x \in X} r(x) = 1$$

$$\sum_{z \in \beta B_n(u)} s(y(z)) \leq \sum_{y \in Y} s(y) = 1.$$

Enfin pour tout ε positif il est possible de trouver un compact K tel que

$$\sum_{z \in \bar{K}} p(z) \leq \varepsilon$$

où $\bar{K}$ est le complémentaire de K dans Z.

D'après le lemme 6, pour $n \geq n(K, u)$, $\beta_n(u) \subset \bar{K}$ et donc

$$\sum_{z \in \beta_n(u)} p(z) \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\sum_{z \in \beta_n(u)} p(z) \to_{n \to \infty} 0$$

et nous avons l'expression de $p(u)$:

$$(4) \qquad p(u) = \sum_{x \in B(u)} r(x(z)) - \sum_{z \in \beta B(u)} s(y(z))$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.

Remarque. Le calcul conduit en échangeant les rôles de α et β fournit une expression symétrique de $p(u)$, qui, en raison de l'unicité, lui est nécessairement égale.

Exemple d'ensemble d'unicité. X et Y étant l'ensemble des entiers positifs, soit U l'ensemble des (x, y) satisfaisant à l'une des cinq conditions:

$$x = y = 1; \quad y = 2x - 1; \quad y = 2x; \quad x = 2y - 1; \quad x = 2y.$$

Il est facile de constater que U est sans cycles et donc appartient à $\mathfrak{U}$.

THÉORÈME 4. *Si $p \in \mathfrak{M}(r, s)$, p est une extrêmale si et seulement si son support est un ensemble d'unicité.*

(a) La condition est nécessaire. En effet si le support $S(p)$ de p n'est d'unicité, il existe un cycle C dans $S(p)$ d'après le théorème 3. Si $\varepsilon = \min_{z \in C} p(z)$, d'après le lemme 4 les mesures $p' = p + \varepsilon m_C$ et $p'' = p - \varepsilon m_C$ appartiennent à $\mathfrak{M}(r, s)$ et sont telles que

$$P = (p' + p'')/2$$

p n'est donc pas extrêmale.

(b) La condition est évidemment suffisante, par définition des ensembles d'unicité.

COROLLAIRE (Douglas). *Soit $p \in \mathfrak{M}(r, s)$. Si les fonctions $f(x) + g(y)$, où $f \in L_1(r)$ et $g \in L_1(s)$, sont denses dans $L_1(p)$, p est extrêmale.*

(Douglas [4] montre également que cette condition est nécessaire, mais les techniques utilisées ici ne permettent pas une démonstration rapide de ce fait.)

Si p est non extrêmale, il existe d'après le théorème 4 un cycle C dans $S(p)$, d'ordre $2n$. Soit $h \in L_1(p)$ nulle en dehors de C. C étant compact, d'après l'hypothèse il existe f et g tels que

$$h(z) = f(x(z)) + g(y(z)). \qquad \forall z \in C.$$

Mais il est facile de constater que les deux sommes

$$\textstyle\sum_{x \in A_{n-1}(u)} h(z) \quad \text{et} \quad \sum_{z \in \alpha A_{n-1}(u)} h(z) \qquad u \in C$$

(les graphes α et A_{n-1} étant relatifs à C) sont toutes deux égales à

$$\textstyle\sum_{x \in x(C)} f(x) + \sum_{y \in y(C)} g(y).$$

$A_{n-1}(u)$ et $\alpha A_{n-1}(u)$ étant disjoints, il suffit de choisir h de sorte que les deux sommes soient distinctes pour obtenir la contradiction.

Voici maintenant un autre test de l'unicité. On appelle rectangle une partie de Z de la forme $X_1 \times Y_1$, où X_1 et Y_1 sont des parties de X et Y.

U étant une partie de Z on considère l'application a_U de l'ensemble des rectangles dans lui-même qui associe à tout rectangle R le rectangle R' défini par:

(1) $x(R') = x(R)$

(2) $y(R')$ est l'ensemble des y de $y(R)$ tels qu'il existe au moins deux points z_1 et z_2 dans $U \cap R$ tels que $y(z_1) = y(z_2) = y$.

On définit symétriquement b_U et on note

$$C_U(R) = b_U[a_U(R)].$$

THÉORÈME 5. *U est ensemble d'unicité si et seulement si pour tout rectangle compact R il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $C_U^n(R) = \emptyset$.

(a) La condition est nécessaire, Si elle n'est pas vérifiée il existe un rectangle compact R tel que $C_U(R) = R$, ce qui contredit le lemme 6.

(b) La condition est suffisante. Sinon, d'après le théorème 3 il existe un cycle C dans U. Si $R = x(C) \times y(C)$, $C_U(R) = R$.

Remarque. Ce théorème est d'application particulièrement commode quand Z est fini, car il entraine

$$U \in \mathfrak{U} \Leftrightarrow \exists n \text{ entier tel que } C_U^n(Z) = \emptyset.$$

IV. Ensembles d'unicité maximaux

Le théorème 3 est un théorème d'unicité. Il est naturel de se poser la question: étant donnés r et s et $U \in \mathfrak{U}$, à quelles conditions

$$\mathfrak{M}(U) \cap \mathfrak{M}(r, s)$$

est-il non vide? Nous répondrons à cette question dans le théorème 7, mais la réponse sera plus simple sur certains ensembles d'unicité que nous allons définir.

Remarquons d'abord que d'après le théorème 3, si $U \in \mathfrak{U}$ alors $U' \in \mathfrak{U}$ quand U' est non vide et est contenu dans U.

LEMME 7. $\mathfrak{U}$, *ordonné par la relation d'inclusion est inductif.*

S'il existe une famille $(U_t)_{t \in T}$ (T ordonné) croissante d'éléments de $\mathfrak{U}$ telle que

$$\bigcup_{t \in T} U_t \notin \mathfrak{U}$$

il existe d'après le théorème 3 un cycle C dans $\bigcup_{t \in T} U_t$; mais C appartient à un U_{t_0}, ce qui contredit $U_{t_0} \in \mathfrak{U}$.

Le théorème de Zorn permet d'affirmer [2] l'existence d'éléments maximaux de $\mathfrak{U}$ dont on note la famille par $\mathfrak{S}$.

THÉORÈME 6. $U \in \mathfrak{S}$ *si et seulement si les* 3 *conditions sont vérifiées.*

(1) $U \in \mathfrak{U}$.

(2) $x(U) = X, y(U) = Y$.

(3) $(1 + \Gamma)(u) = U, \forall u \in U$.

La troisième condition se traduit en termes de connexité par arc: pour tous z_1 et z_2 dans U il existe un arc dans U d'extrémités z_1 et z_2.

(a) Les conditions sont nécessaires. (1)et (2) évident. (3) Soient z_1 et $z_2 \in U$; définissons

$$z_0 = (x(z_2), y(z_1)).$$

Si $z_0 \in U$, on a bien $z_2 \in (1 + \Gamma)(z_1)$. Si $z_0 \notin U$, notons $U_0 = U \cup \{z_0\}$. U étant maximal, il existe d'après le théorème 3 un cycle C dans U_0 passant par z_0.

On a donc dans U_0 les relations

$$z_0 \in \alpha_{2n}(z_0), \qquad z_0 \in \beta(z_1), \qquad z_2 \in \alpha(z_0)$$

qui entrainent dans U

$$z_1 \in (1 + \beta)\beta_{2n-2}(1 + \alpha)(z_2)$$

ce qui établit la propriété.

(b) Les conditions sont suffisantes. Si $U \notin \mathfrak{S}$ il existe donc $z_0 \notin U$ tel que

$$U_0 = U \cup \{z_0\} \in \mathfrak{U}.$$

D'après le (2) il existe z_1 et z_2 distincts dans U tels que

$$z_1 \in \beta_{U_0}(z_0), \qquad z_2 \in \alpha_{U_0}(z_0)$$

comme d'après le (3) $z_1 \in \Gamma_U(z_2)$ cela entraine $z_0 \in \Gamma_{U_0}(z_0)$ ce qui d'après les théorèmes 2 et 3 contredit $U_0 \in \mathfrak{U}$.

Ainsi on constate, à l'aide de ce théorème, que l'ensemble d'unicité donné en exemple à la fin du théorème 3 est également maximal.

THÉORÈME 7. *r et s étant donnés, si $U \in \mathfrak{U}$, $\mathfrak{M}(U) \cap \mathfrak{M}(r, s)$ n'est pas vide si et seulement si, quel que soit u dans U*

$$\sum_{z \in B(u)} r(x(z)) - \sum_{z \in \beta B(u)} s(y(z)) = \sum_{z \in A(u)} s(y(z) - \sum_{z \in \alpha A(u)} r(x(z)) \geq 0. \tag{5}$$

Si $U \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}(U) \cap \mathfrak{M}(r, s)$ n'est pas vide si et seulement si quel que soit u dans U l'un des deux membres de l'équalité (5) *est positif.*

Montrons d'abord le théorème pour $U \in \mathfrak{U}$.

(a) La condition est nécessaire, d'après la remarque faite à la fin de la démonstration du théorème 3.

(b) La condition est suffisante. Notons par $p(u)$ la valeur commune des deux membres de (5), et montrons que p ainsi défini appartient à $\mathfrak{M}(r, s)$.

$$p(u) + \sum_{z \in \beta(u)} p(z)$$
$$= \sum_{z \in B(u)} r(x(z)) - \sum_{z \in \beta B(u)} s(y(z)) + \sum_{z \in A\beta(u)} s(y(z)) - \sum_{z \in \alpha A\beta(u)} r(x(z)).$$

Compte tenu du fait que $B = 1 + \alpha A \beta$ et $\beta B = A\beta$ la valeur de la dernière expression est $r(x(u))$.

Si maintenant $U \in \mathfrak{S}$, il suffit d'établir l'égalité des deux membres de (5). Montrons d'abord que

$$x((B + \alpha A)(u)) = X, \qquad y((A + \beta B)(u)) = Y.$$

En effet $1 + \Gamma = (1 + \beta)(B + \alpha A)$. D'après le théorème 6,

$$x((1 + \Gamma)(u)) = X;$$

si $x \notin x((B + \alpha A)(u))$ alors $x \in x(\beta(B + \alpha A)(u))$ et il est clair que ce dernier ensemble est contenu dans $x((B + \alpha A)(u))$. Par conséquent, d'après le lemme 5,

$$\sum_{z\epsilon(B+\alpha A)(u)} r(x(z)) = \sum_{x\epsilon X} r(x) = \sum_{z\epsilon(A+\beta B)(u)} s(y(z)) = \sum_{y\epsilon Y} s(y) = 1.$$

Or les ensembles A et βB, B et αA sont disjoints puisque U est d'unicité. Donc

$$\sum_{z\epsilon(B+\alpha A)(u)} = \sum_{z\epsilon B(u)} + \sum_{z\epsilon \alpha A(u)} r(x(z))$$
$$\sum_{z\epsilon(A+\beta B)(u)} = \sum_{z\epsilon A(u)} + \sum_{z\epsilon \beta B(u)} s(y(z))$$

ce qui nous donne l'égalité (5).

Si maintenant on désigne par $\mathfrak{S}(r, s)$ la famille des $U \in \mathfrak{S}$ telle que la condition de positivité du théorème 7 soit réalisée, on voit qu'à tout U de $\mathfrak{S}(r, s)$ on fait correspondre une extrêmale de $\mathfrak{M}(r, s)$ et une seule.

Remarque. L'égalité (5) étant réalisée (par exemple quand $U \in \mathfrak{S}$) mais non nécessairement la positivité, il est facile de constater qu'on peut avoir

$$\sum_{u\epsilon U} | p(u) | = +\infty$$

où $p(u)$ est défini par (5); c'est dire que p n'est pas alors une mesure de masse finie. Mais p posséde encore la propriété de s'annuler à l'infini:

THÉORÈME 8. *U étant d'unicité, et l'égalité (5) étant réalisée, alors pour tout ε positif il existe un compact $K(\varepsilon)$ tel que $| p(u) | \leq \varepsilon$ si $u \notin K(\varepsilon)$.*

La démonstration nécessite le lemme:

LEMME 8. *Si U est d'unicité, pour tout compact $K' \subset U$ il existe un compact K tel que si $u \notin K$, au moins l'un des deux ensembles*

$$K' \cap (1 + \beta)B(u) \quad et \quad K' \cap (1 + \alpha)A(u)$$

est vide.

En effet, à tout couple (u_1, u_2) d'éléments de K', associons l'ensemble $K(u_1, u_2)$ défini de la manière suivante: si $u_2 \notin \Gamma(u_1)$,

$$K(u_1, u_2) = \{u_1, u_2\}.$$

Si $u_2 \in \Gamma(u_1)$ on a, par exemple, $u_1 \in \alpha_n(u_2)$. Il existe donc une suite

$$z_1 = u_1, \quad z_2, \cdots, z_n, \quad z_{n+1} = u_2$$

telle que

$$z_{2k} \in \alpha(z_{2k-1}) \quad \text{et} \quad z_{2k+1} \in \beta(z_{2k}).$$

Cette suite est unique, puisque $U \in \mathfrak{U}$. On note alors

$$K(u_1, u_2) = \{z_1, \cdots, z_{n+1}\}.$$

Le cas où $u_1 \in \beta_n(u_2)$ est analogue. On définit alors

$$K = \bigcup_{u_1, u_2 \epsilon K'} K(u_1, u_2).$$

K est ainsi l'ensemble des points de arcs ayant pour extrémités deux points de K'. K' étant compact, K l'est également.

Si il existe $u \in U$ et $u \notin K$ tel qu'il existe u_1 et u_2 dans K' tels que

$$u_1 \in (1 + \beta)B(u) \quad \text{et} \quad u_2 \in (1 + \alpha)A(u),$$

alors (lemme 3) $u \in (B + \alpha A)(u_2)$ et donc

$$u_1 \in (1 + \beta)B(B + \alpha A)(u_2) = (1 + \Gamma)(u_2).$$

Si $u_1 \neq u_2$ alors $u_1 \in \Gamma(u_2)$ et $u \in K$. Si $u_1 = u_2$ il est facile de constater que u_1 est point fixe de Γ_U.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 8. ε étant un nombre positif donné, il existe un rectangle compact $R(\varepsilon) = X_1 \times Y_1$ tel que

$$\textstyle\sum_{x \in \bar{X}_1} r(x) \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \sum_{y \in \bar{Y}_1} s(y) \leq \varepsilon/2$$

où $\bar{X}_1$ et $\bar{Y}_1$ sont les complémentaires de X_1 et Y_1 relativement à X et Y. Notons $K'(\varepsilon) = R(\varepsilon) \cap U$. Le compact $K(\varepsilon)$ associé dans le lemme 8 à $K'(\varepsilon)$ répond à la question; en effet si $u \notin K$ ou bien

$$R \cap (1 + \beta)B(u) = \emptyset$$

et donc

$$\left| \textstyle\sum_{z \in B(u)} r(x(z)) - \sum_{z \in \beta B(u)} s(y(z)) \right| \leq \sum_{x \in \bar{X}_1} r(x) + \sum_{y \in \bar{Y}_1} s(y) < \varepsilon$$

ou bien

$$R \cap (1 + \alpha)A(u) = \emptyset$$

et on a l'inégalité analogue, ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

1. C. Berge, *Théorie des graphes et applications*, Paris, Dunod, 1958.
2. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, *Théorie des ensembles*, *Chapitre 3*, Paris, Hermann, 2 ème édition, 1963.
3. G. Choquet et P. A. Meyer, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques*. Ann. Inst. Fourier. Grenoble., vol. 13 (1963), pp. 439–454.
4. R. G. Douglas, *On extremal measures and subspace density*, Michigan Math. J., vol. 11 (1964), pp. 243–246.

Faculté des Sciences d'Orsay

France