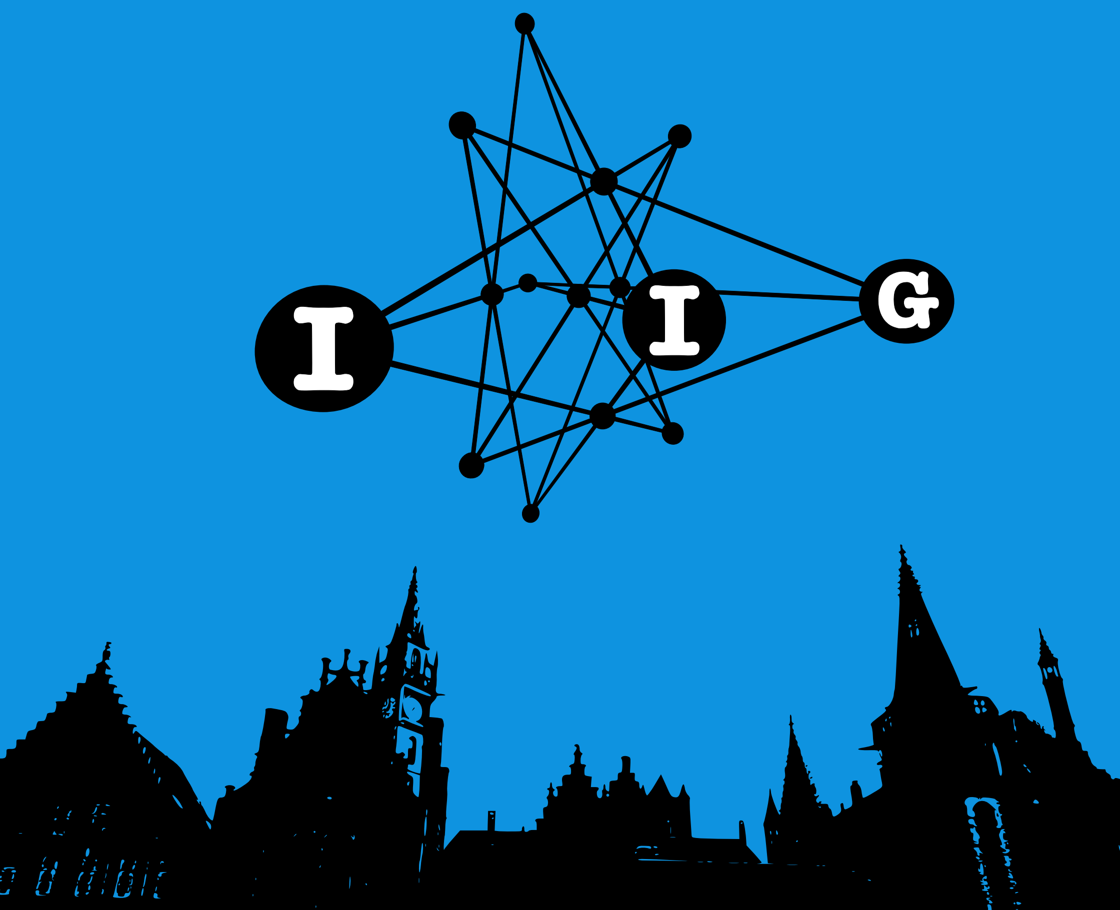
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Séminaire sur les algèbres de Banach

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.339

Séminaire sur les algèbres de Banach

Jacques Tits

[B4] Notes of the *Séminaire sur les Algèbres de Banach*, Université Libre de Bruxelles (Brussels, 1962–63). Reused with permission.

SEMINAIRE SUR LES ALGEBRES DE BANACH.

I. ESPACES ET ALGEBRES DE BANACH - DEFINITIONS

1. Espace de Banach.

1.1. Espace vectoriel normé.

Une application d'un espace vectoriel sur les réels non négatifs, définit une norme (la norme de x étant désignée par $\|x\|$), si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\|x\| = o \iff x = o$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$$

Il est facile de vérifier que le nombre $\rho(xy) = \|x - y\|$ vérifie les axiomes de la distance de deux points et donc que tout espace normé est métrique et par conséquent un espace topologique.

1.2. Espace complet.

a. Une suite de points $x_1 \ldots x_n \ldots$ d'un espace normé est une suite de Cauchy si, à tout ε correspond un nombre N tel que

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon \quad \text{pour } n > N$$

b. Un espace est complet si toute suite de Cauchy converge dans cet espace.

1.3. Espace de Banach.

<u>Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach</u>.

Nous ne considèrerons que des espaces de Banach sur les corps des nombres complexes.

Rappelons ici que tout espace normé non complet, X, peut être plongé dans un espace normé complet.

Désignons par $\tilde{X}$ l'ensemble de toutes les suites de Cauchy $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$ avec $x_n \in X$ modulo les suites de Cauchy tendant vers zéro.

Si l'on munit $\tilde{X}$ de la métrique définie par

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \lim \|x_n - y_n\|, \text{pour } n \to \infty,$$

on peut vérifier que le nombre $\|\tilde{x}\| = \lim \|x_n\|$, pour $n \to \infty$, vérifie les conditions d'une norme et que l'espace $\tilde{X}$ est complet pour cette métrique (1)

---

(1) Voir par exemple M.A. NAIMARK. Normed Rings § 4, n° 1, II.

Comme par ailleurs l'application

$X \to \hat{X} : x \to \hat{x} = (x, x, x, \ldots)$ est une isométrie, nous pouvons considérer X come un sous-espace de $\hat{X}$.

Il est immédiat que dans tout espace de Banach, la norme, la somme et le produit par un scalaire sont des fonctions continues.

1.4. Le théorème suivant est l'une des voies les plus importantes permettant de construire des espaces de Banach à partir d'un espace donné.

Théorème. <u>Si M est un sous-espace d'un espace vectoriel normé X, l'espace vectoriel quotient X/M devient un espace normé si l'on définit la norme d'une classe latérale y comme sa distance à l'origine : $\|y\| = \inf\{\|x\|, x \in y\}$. De plus si X est complet X/M est complet.</u>

<u>Démonstration</u> : Vérifions que $\|y\|$ satisfait bien aux conditions d'une norme.

1° $\|y\| = 0 \Leftrightarrow$ il existe une suite $x_n \in y$ telle que $\|x_n\| \to 0$. Puisque y est fermé, ceci aura lieu si et seulement si $0 \in y$;

donc $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = M$

$$
\begin{aligned}
2° \quad \|y_1 + y_2\| &= \inf\{\|x_1 + x_2\| ; x_1 \in y_1 \text{ et } x_2 \in y_2\} \\
&\leqslant \inf\{\|x_1\| + \|x_2\|\} \\
&= \inf\{\|x_1\| ; x_1 \in y_1\} + \inf\{\|x_2\| ; x_2 \in y_2\} \\
&= \|y_1\| + \|y_2\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3° \quad \|\lambda y\| &= \inf\{\|\lambda x\| ; x \in y\} \\
&= \inf\{|\lambda| . \|x\| ; x \in y\} \\
&= |\lambda| . \|y\|
\end{aligned}
$$

Ces trois points nous permettent de conclure que X/M est bien un espace normé.

Si $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy de X/M, nous pouvons supposer, en passant à une suite partielle si cela est nécessaire que $\|y_{n+1} - y_n\| < 2^{-n-1}$. Dès lors nous pouvons par induction déterminer des éléments $x_n \in y_n$ tels que

$$\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n} \text{ pour } \rho(x_n, y_{n+1}) = \rho(y_n, y_{n+1}) < 2^{-n-1}.$$

Si X est complet, la suite de Cauchy $\{x_n\}$ a une limite x_0 et en désignant par y_0 la classe latérale contenant x_0, il vient $\|y_n - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\|$ ce qui implique que $\{y_n\}$ a comme limite y_0.

Le fait que la suite initiale converge également vers y_0 résulte d'une propriété générale des espaces métriques, à savoir : toute suite de Cauchy possèdant une suite partielle convergente est convergente.

Donc pour autant que X soit complet, l'espace X/M est complet.

2. Algèbre de Banach

Un ensemble A est une algèbre de Banach, s'il vérifie les axiomes suivants

2.1 A est une algèbre sur le corps des nombres complexes
2.2 A est un espace de Banach.
2.3 $\forall x, y \in A$, $\|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$
2.4 Si A possède un neutre e, $\|e\| = 1$.

Remarquons immédiatement que toute algèbre de Banach sans élément neutre peut-être plongée dans une algèbre ayant un neutre.
En effet désignons par C, l'ensemble des complexes et considérons l'ensemble

$$A_1 = A \times \mathbb{C} = \{(x,c) \mid x \in A \text{ et } c \in C\}$$

Il est facile de vérifier que A_1 muni de la norme $\|(x,c)\| = \|x\| + |c|$ est une algèbre de Banach possèdant l'élément neutre (0,1).
De plus A est homéomorphe à la sous-algèbre fermée $\{(x,o)\}$ de A_1.

3. Exemples d'algèbre de Banach.

3.1. L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des transformations linéaires continues d'un espace de Banach E.

3.1.1. Théorème. Si T est une transformation linéaire d'un espace vectoriel normé X dans un espace vectoriel normé Y, les conditions suivantes sont équivalentes.

1. T est continue.
2. T est continue en un point.
3. T est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive C telle que $\forall x \in X$, $\|T(x)\| \leqslant C \|x\|$

Démonstration. Si T est continue au point x_o, il existe un nombre positif B tel que

$$\|T(x - x_o)\| = \|T(x) - T(x_o)\| \leqslant 1 \text{ pour } \|x - x_o\| \leqslant B$$

C'est-à-dire que pour tout $\|h\| \leqslant B$, $\|T(h)\| \leqslant 1$ et dès lors pour tout $y \neq o$

$$\|T(y)\| = (\|y\|/B).\|T(y(B/\|y\|))\| \leqslant \|y\|/B.$$

c'est-à-dire

$$\|T(y)\| \leqslant C.\|y\| \quad \text{avec } C = 1/B.$$

ce qui démontre le point 3.
Dès lors

$$\|T(x) - T(x_1)\| = \|T(x - x_1)\| \leqslant C \|x - x_1\| < \varepsilon$$

pour $\|x - x_1\| < \varepsilon/C$ et par conséquent T est continue en tout point x_1.

3.1.2. Ce théorème nous permet d'associer à toute transformation linéaire continue (ou bornée), le nombre $\|T\| = \sup \|T(x)\| / \|x\|$ et il est facile de vérifier que ce nombre satisfait aux conditions d'une norme ; d'où la proposition

<u>L'ensemble des transformations linéaires continues d'un espace vectoriel normé X dans un espace vectoriel normé Y est lui-même un espace vectoriel normé. De plus si Y est complet il en est de même pour cet espace d'application.</u>

3.1.3. L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des transformations linéaires continues d'un espace de Banach E est donc un espace de Banach.

Désignons le produit de 2 telles transformations T_1, T_2 par $T_1T_2(x) = T_1\,(T_2(x))$

Dès lors nous avons $$\|T_1T_2\| = \sup \frac{\|T_1T_2(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup \frac{\|T_1(T_2(x))\|}{\|x\|}$$

Or $\|T_1(T_2(x))\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2(x)\| \leq \|T_1\| \cdot \|T_2\| \cdot \|x\|$

donc

$$\|T_1T_2\| \leqslant \sup(\|T_1\| \cdot \|T_2\|) = \|T_1\| \cdot \|T_2\|$$

Comme d'autre part la norme de la transformation identique est 1, nous voyons que l'ensemble $\mathcal{B}(E)$ vérifie bien les conditions d'un algèbre de Banach.

3.2. <u>L'ensemble des fonctions continues bornées à valeurs complexes, sur un espace topologique.</u>

Soit X un espace topologique. L'ensemble C(X) de toutes les fonctions continues bornées f(x) sur X, forme un espace de Banach si l'on prend pour norme

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Il est immédiat que la convergence définie par cette norme est la convergence uniforme.
Si nous définissons la multiplication dans C(X) par $(fg)(x) = f(x).g(x)$ il est facile de voir que la condition $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ est vérifiée et donc que C(x) est une algèbre de Banach.
Remarquons que si X est compact, C(X) devient l'ensemble des fonctions continues sur X(puisque toute fonction continue sur un espace compact est bornée).

3.3. L'algèbre d'un groupe localement compact.

Soit G un groupe localement compact. L'algèbre du groupe G est constitué par les classes de fonctions f mesurables pour la mesure de Haar sur G telles que

$$\|f\| = \int_G |f(g)|\, dg < +\infty$$

et est notée $L^1(G)$. (Si G = R la mesure de Haar n'est autre que la mesure de Lebesgue). Pour cette norme $L^1(G)$ est complet. Dans $L^1(G)$ nous ne considérerons pas le produit ordinaire des fonctions (pour lequel $L^1(G)$ n'est pas stable) mais le produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(g_1) = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1} g_1)\, dg$$

On montre que $\|f_1 * f_2\| \leq \|f_1\| . \|f_2\|$. Si G n'est pas discret, $L^1(G)$ n'a pas d'élément unité .
(Démonstrations : NAIMARK , Normed Rings, pages 370-371).

4. Idéaux d'une algèbre de Banach.

Soit I un sous-espace d'une algèbre de Banach B.
Si, $\forall x \in B$ et $\forall y \in I$ nous avons $xy \in I$ (1) et $yx \in I$ (2)
on dit que I est un idéal bilatère de B.

Si une seule des conditions(1) ou (2) est remplie on dira que I est respectivement un idéal à gauche ou à droite de B.

4.1. Rappelons la propriété topologique suivante.
Si I est un idéal (resp. à gauche , à droite ou bilatère), l'adhérence de I est aussi un idéal (resp. à gauche, à droite ou bilatère).

4.2. Le théorème 1.4 , nous permet d'énoncer : l'espace quotient B/I d'une algèbre de Banach B, par un idéal fermé I, est une algèbre de Banach.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE :

NAIMARK : Normed Rings. Noordholland. Groningen
RICKART : A general theory of Banach Algebras-Van Nostrand Princeton.
LOOMIS : An Introduction to Harmonic Analysis-Van Nostrand. Princeton 1953
DIXMIER : Algèbres d'opérateurs dans les espaces de Hilbert
Gauthiers-Villars . Paris 1957.
Sur les espaces de Banach et les espaces vectoriels topologiques :
BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques - Hermann - Paris.
DAY : Normed linear spaces. Ergebnisse...Springen Berlin.
KOLMOGOROV et FOMIN : Volume 1 Metric and normed spaces.
KOTHE : Topologische lineare Räume Springer- Berlin 1961.

IV 2. ALGEBRES A INVERSE CONTINU.

1. Définitions et exemple.

1.1. Algèbre topologique

Un ensemble A constitue une algèbre topologique si les axiômes suivants sont vérifiés :

1.1.1 A est une algèbre(sur le champ des nombres complexes).
1.1.2 A est un espace vectoriel topologique localement convexe (1).
1.1.3 Le produit dans A est séparément continu, c'est-à-dire que pour tout x, y$\in$ A, le produit xy est continu pour chacune des variables séparément.

1.2. Algèbre à inverse continu

Un ensemble A constitue une algèbre à inverse continu, si A est une algèbre topologique possèdant une unité e, et s'il existe un voisinage V(e) de l'unité satisfaisant aux propriétés suivantes :

1.2.1 tout élément x $\in$ V(e) admet un inverse x^{-1}
1.2.2 cet inverse x^{-1} est une fonction continue de x au point e.

1.3. Exemple d'algèbre à inverse continu

Théorème : Toute algèbre de Banach à élément unité, est une algèbre à inverse continu.

Démonstration - Comme il est immédiat qu'une algèbre de Banach est une algèbre topologique, il nous suffit de montrer que dans tout algèbre de Banach possèdant une unité e, il est possible d'exhiber un voisinage de l'unité V(e), jouissant des propriétés 1.2.1 et 1.2.2

---

(1) Remarquons que pour un espace vectoriel topologique, il suffit de se donner une base de voisinages à l'origine. Du fait de la continuité de l'addition, pour tout voisinage U de l'origine, x + U est un voisinage de x.
Rappelons qu'un espace vectoriel topologique est localement convexe, si l'on peut prendre pour base de voisinages de l'origine, des ensembles convexes U tels que :

$$(a \in U \text{ et } |Z| \leq 1) \Longrightarrow Z\,a \in U$$

Considérons le voisinage de l'unité

$V(e) = \{ a \in A ; \|a - e\| < 1 \}$ c'est-à-dire

$V(e) = \{ a \in A ; a = e + y$ avec $\|y\| < 1 \}$

La série $e - y + y^2 - y^3 + \dots$ est une série convergente puisque $\|y\| < 1$. Si nous désignons par a' la somme, il vient :

$a' = e - y + y^2 - y^3 + \dots = e - y\,(e - y + y^2 - y^3 + \dots) = e - ya'$

d'où $a' + ya' = e$ et $(e + y)\,a' = e$ c'est-à-dire $a\,a' = e$

De même il est immédiat que $aa' = e$; par conséquent l'élément $a' = e - y + y^2 - y^3 + \dots$ est l'inverse de $a = e + y$ et tout élément de $V(e)$ est inversible.

Montrons que a^{-1} est une fonction continue de a au point e, c'est-à-dire que $\|a^{-1} - e\|$ peut-être rendu aussi petit que l'on veut pour $\|a - e\| = \|y\|$ suffisamment petit.

$$\|a^{-1} - e\| \leq \|y\| \cdot \|e - y + y^2 - y^3 + \dots\|$$

$$\leq \|y\| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \text{ pour } \|y\| \leq \varepsilon < 1$$

2. Eléments inversibles d'une algèbre à inverse continu

2.1 Propriété I - Dans toute algèbre à inverse continu, l'ensemble des éléments inversibles à gauche, à droite, ou bilatère, sont des sous-ensembles ouverts.

Démonstration - Soit $V(e)$ un voisinage de l'unité e, satisfaisant aux conditions 1.2.1 et 1.2.2. Désignons par $\bar{a}$ l'inverse à droite de l'élément $a \in A$: $a\,\bar{a} = e$

L'élément $e + \bar{a}\,y$ est une fonction continue de y dans toute l'algèbre et en particulier au point $y = o$. Il s'ensuit que pour tout voisinage $V(e)$, il est possible de déterminer un voisinage $U(o)$ tel que $\forall\, y \in U(o)$ $e + \bar{a}\,y \in V(e)$ ce qui implique que $(e + \bar{a}y)^{-1}$ existe pour tout $y \in U(o)$

Considèrons le voisinage $V(a) = a + U(o)$ de a et montrons que tout élément $x \in V(a)$ est inversible à droite.

$x = a + y = a\,(e + \bar{a}\,y)$ or $(e + \bar{a}\,y)^{-1}$ et $\bar{a}$ existent donc

$(e + \bar{a}\,y)^{-1}.\bar{a}$ existe et comme $(a(e + \bar{a}y))((e + \bar{a}\,y)^{-1}.\bar{a}) = e$

l'élément $(e + \bar{a}y)^{-1}.\bar{a}$ est l'inverse à droite, $\bar{x}$ de x.

Chaque élément inversible à droite possède un voisinage dont tous les éléments sont inversibles à droite. L'ensemble des inversibles à droite est donc un ouvert.

On démontre d'une manière analogue que l'ensemble des inversibles à gauche est un ouvert.

Comme l'ensemble des inversibles bilatères est l'intersection de l'ensemble des inversibles à droite et de l'ensemble des inversibles à gauche, ce sera également un ensemble ouvert.

2.1.1. Corollaire 1. L'ensemble des éléments non inversibles à gauche, à droite ou bilatère, sont des sous-ensembles fermés

Ils sont en effet respectivement les complémentaires de sous-ensembles ouverts.

2.1.2. Corollaire 2. La fermeture d'un idéal propre (resp. à gauche, à droite ou bilatère) est également un idéal propre (resp. à gauche , à droite ou bilatère).

Démonstration. Soit par exemple I_g un idéal à gauche de l'algèbre A et désignons par S_g l'ensemble des non inversibles à gauche ; il est clair, puisque I_g est propre et ne contient donc pas l'élément neutre, que $I_g \subset S_g$; il en résulte que la fermeture $\overline{I}_g$ de I_g est également contenue dans S_g, donc strictement contenue dans l'algèbre A. Pour tout $x \in \overline{I}_g$ et $y \in A$, l'application $f(x) = yx$ qui envoit I_g dans I_g étant continue, appliquera également $\overline{I}_g$ dans $\overline{I}_g$

c.q.f.d.

De ce corollaire on déduit immédiatement le

2.1.3. Corollaire 3. Tout idéal (à gauche , à droite ou bilatère) maximal est fermé (1).

2.2. Propriété II Un algèbre-à-inverse-continu est à inverse continu.

Démonstration. Nous avons vu au n°2.1 comment on pouvait construire autour de tout élément inversible, un voisinage d'éléments inversibles.

----

(1) Pour une algèbre de Banach sans élément unité, il faut remplacer , dans le corollaire 3, idéal propre par idéal modulaire. Un idéal I est dit modulaire s'il existe un $e \in A$ tel que $a - ea \in I$ pour tout $a \in A$. L'élément e induit alors l'identité sur le module A/I.

Soit $x = a + y = a(e + a^{-1}y)$ un élément de ce voisinage et montrons que $(a + y)^{-1}$ est une fonction continue au point a.

$(e + a^{-1}y)^{-1}$ est une fonction continue de $u = e + a^{-1}y$ au point $u = e$; mais u est une fonction continue de y au point $y = o$ et donc aussi de $a + y$ au point a.

Par conséquent $(e + a^{-1}y)^{-1}$ est une fonction continue de $a + y$ au point a ; il en est donc de même de

$$x^{-1} = (a + y)^{-1} = (e + a^{-1}y)^{-1} . a^{-1} \qquad \text{c.q.f.D.}$$

3. Spectre et Résolvente d'un élément.

Soit , comme précédemment, A une algèbre à inverse continu dont e est l'unité. On appelle spectre de $a \in A$, l'ensemble des nombres complexes z tels que $(a - ze)$ ne soit pas inversible :

$$sp(a) = \{ z \in C \mid (a - ze) \text{ n'a pas d'inverse} \}$$

La fonction $a(z) = (a - ze)^{-1}$ est appelée la résolvente de a ; elle définit une application de $C \setminus sp(a) \longrightarrow A$.

3.1 Propriété I - Pour tout $a \in A$, $sp(a)$ est fermé.

Montrons à cet effet que le complémentaire de sp(a) , à savoir $C \setminus sp(a)$ est un ouvert. Il suffit pour cela de montrer que tout $z_o \in C \setminus sp(a)$ possède un voisinage $W(z_o)$ dont aucun élément n'appartient à sp(a).

$z_o \in C \setminus sp(a)$ implique que $(a - z_oe)$ est inversible. Or nous savons (voir n°2.1)que tout élément inversible possède un voisinage $V(a - z_oe)$ d'éléments inversibles. L'application $C \longrightarrow A$: $z \longrightarrow (a - ze)$ étant continue, cela implique qu'au voisinage $V(a - z_oe)$ correspondant un voisinage $W(z_o)$ tel que pour tout $z \in W(z_o)$, $a - ze \in V(a - z_oe)$

Nous avons donc bien $W(z_o) \subset C \setminus sp(a)$ c.q.f.d.

3.2 Propriété II - La résolvente a(z) est une fonction analytique de z.

Il suffit pour cela de vérifier que pour tout $z_o \in C \setminus sp(a)$,

$$\lim_{z \to z_o} \frac{a(z) - a(z_o)}{z - z_o} \text{ existe.}$$

$$\text{Or } \lim_{z \to z_o} \frac{a(z) - a(z_o)}{z - z_o} = \lim_{z \to z_o} \frac{1}{z - z_o} \cdot \left(\frac{e}{a - ze} - \frac{e}{a - z_o e} \right)$$

$$= \lim_{z \to z_o} \frac{e}{(a - ze)(a - z_o e)}$$

$$= \frac{e}{(a - z_o e)^2}$$ puisque $(a - z_o e)^{-1}$ est une fonction continue de z.

3.3. <u>Propriété III. Le sp(a) est un sous-ensemble compact du corps des nombres complexes</u>.

Il suffit de montrer que Sp(a) est borné.
$sp(a) = \{ az \in C \mid (a - ze)$ est non inversible$\}$; nous allons montrer que, pour z suffisamment grand, (a - ze) est inversible.

Si nous posons $W = \frac{1}{z}$, il vient $a - ze = - z (e - Wa)$.
$e - Wa$ est une fonction continue de W , donc à tout voisinage V(e) (dont tous les éléments sont inversibles)correspond un voisinage de l'origine $U(o) \subset C$ tel que pour $W \in U(o)$,
$(e - W a) \in V(e)$.

En d'autres termes, il existe un ε tel que pour $|W| < \varepsilon$,
$(e - Wa)^{-1}$ existe.
Pour ces mêmes valeurs de W, $- W(e - Wa)^{-1}$ existe donc également

$$(a - ze)^{-1} = (-z(e - Wa))^{-1} = - W(e - Wa)^{-1}$$

Donc pour tout z tel que $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$, (a - ze) est inversible,

c'est-à-dire que $z \notin sp(a)$.
sp(a) est donc bien borné.

3.4. <u>Proposition IV</u> - <u>La résolvente a(z) est une fonction analytique à l'infini</u>.

Pour cela il suffit de montrer que la fonction $a(z) = (a-ze)^{-1}$ est dérivable à l'infini.
D'après la proposition III nous savons qu'il existe un voisinage de l'infini pour lequel a(z) est définie ou, ce qui est équivalent, qu'il existe un voisinage de l'origine où la fonction $b(W) = - W (e - Wa)^{-1}$ est définie. Pour montrer que la dérivée de a(z) existe à l'infini, il suffit de montrer que la dérivée de b(W) existe à l'origine.

$$\text{Or } \lim_{W \to o} \frac{b(W)}{W} = - \lim_{W \to o} (e - Wa)^{-1} = - e$$

c.q.f.d.

4. <u>Théorème de Liouville</u>.

<u>Lemme</u> : <u>Soit g une fonction analytique à valeur dans un espace vectoriel topologique E et soit f une forme linéaire continue sur E. Alors</u> $f \circ g$ <u>est une fonction analytique</u>.

Démonstration

$$\lim_{z' \to z} \frac{f(g(z')) - f(g(z))}{z' - z} = f\left(\lim \frac{g(z') - g(z)}{z' - z}\right)$$

$$= f (g' (z))$$

La première équation résulte de la continuité de f.

Théorème de Liouville : Soit g une fonction analytique sur toute la sphère de Riemann à valeur dans un espace vectoriel localement convexe E. Alors g est une fonction constante.

Démonstration:

Si f est une forme linéaire continue sur E, f o g est une fonction à valeur complexe analytique sur toute la sphère, donc constante. Pour tout $f \in E'$ et pour toute paire (z', z") on a alors $f(g(z_1)-g(z_2))=0$.
Comme dans un espace localement convexe le seul élément x tel pour toute forme linéaire continue f, $f(x) = o$, on en déduit que $g(z_1) = g(z_2)$ et que g est constante.

5. Théorème de Mazur

5.1. Théorème fondamental. Le spectre de tout élément a d'une algèbre à inverse continue est non vide.

Démonstration - Supposons $sp(a) = \emptyset$; dès lors la résolvente a(z) est analytique dans le plan des complexes tout entier , et en vertu du théorème de Liouville, a(z) se réduit à une constante : $(a - ze)^{-1} = c$.

Donc pour tout $z \in C$: $e = (a - ze)\, c = ac - zce$ (1) et en particulier pour $z = o$, $e = ac$ (2)

En comparant (1) et (2) il vient $zc = o$ ce qui implique $c = o$ puisque z est quelconque. Mais cette dernière égalité est en contradiction avec (2).
Conclusion : $sp(a) \neq \emptyset$.

5.2. Théorème de Mazur. Toute algèbre à division (*) à inverse continue est isomorphe au corps des nombres complexes.

Démonstration -

Montrons que pour tout $a \in A$ il existe un et un seul $z \in C$ tel que $a - ze = o$.
En effet , si pour tout z , $a - ze \neq o$, comme A est une algèbre à division , a - ze serait inversible. Donc a(z) serait définie dans tout le plan des nombres complexes , c'est-à-dire que $sp(a) = \emptyset$ ce qui est impossible en vertu de théorème précédent.

Donc il existe au moins un z tel que $a = ze$.

L'unicité de z étant immédiate , nous avons bien une correspondance biunivoque entre l'algèbre considérée et le corps des nombres complexes. Il est clair que cette bijection est un isomorphisme.

(*) Rappelons qu'une algèbre est à division, si cette algèbre est en plus un corps.

12.

III. ALGEBRES A INVERSE CONTINU COMMUTATIVES.

N.B. Toutes les algèbres considérées ont un élément unité et sont commutatives, sauf mention explicite du contraire.

Nous avons vu que l'ensemble $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace compact X est une algèbre de Banach commutative. Nous allons voir qu'une catégorie importante d'algèbres de Banach commutatives, les algèbres de Banach semi-simples, peut être caractérisée comme étant la catégorie des sous-algèbres topologiques de $C(X)$ (la norme n'étant pas nécessairement celle qui est induite par $C(X)$.

1. Rappel concernant la topologie faible sur le dual d'un espace vectoriel localement convexe.

1.1. Le dual d'un espace vectoriel topologique.

Si E est un espace vectoriel topologique, le dual (sous-entendu topologique) E' de E est constitué par l'ensemble des applications linéaires continues de E dans le corps des nombres complexes C. Il peut se réduire à $\{0\}$. Néanmoins, lorsque E est localement convexe, il découle du théorème de Hahn-Banach que E' est suffisamment grand, dans le sens suivant : pour toute paire de points distincts de E, il existe un élément de f de E' tel que $f(x) \neq f(y)$.

1.2. Topologie faible sur le dual.

Le dual d'un espace vectoriel localement convexe peut être muni de différentes topologies. Dans la suite la seule topologie utilisée sur le dual sera la topologie faible, (ou topologie de la convergence simple) : dans cette topologie

$$\lim_{i \in \Phi} f_i = f$$

si et seulement pour $x \in E$ $\lim f_i(x) = f(x)$.

13.

Le dual E' peut-être plongé dans l'espace C^E de toutes les applications (non nécessairement continues ou linéaires) de E dans C. L'espace C^E n'est autre que le produit $\prod_{x \in E} C_x$ d'une famille, paramétrée par les points de E, de copies de C. Si on munit C^E de la topologie produit, la topologie induite sur E' n'est autre que la topologie faible.

Chaque élément x de E définit une forme linéaire $\hat{x}$ sur E', à savoir :

$$\hat{x}(f) = f(x) \quad \text{pour} \quad f \in E'$$

La topologie faible est alors la moins fine des topologies pour lesquelles toutes les fonctions $\hat{x}$ sont continues.

On peut trouver un système fondamental de voisinages de 0 dans E', muni de la topologie faible, de la manière suivante : choisissons un sous-ensemble fini I de E et un nombre

$\varepsilon > 0$; posons

$$U_{I,\varepsilon} = \{ f \in E' \mid \forall\ x \in I,\ |f(x)| < \varepsilon \}$$

On obtient le système fondamental en faisant varier I et ε.

1.3. Définition d'une topologie localement convexe pour une famille de semi-normes.

Une fonction p définie sur un espace vectoriel E sur le corps des nombres complexes et à valeur réelle est appelée une semi-norme si :

1) $p(x) \geqslant 0$
2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$
3) $p(zx) = |z|\ p(x) \qquad z \in C, \quad x, y \in E.$

Une norme est une semi-norme qui, en plus, est définie positive. Si c est un nombre positif on vérifie facilement que :

$$U_{p,c} = \{ x \in E \mid p(x) \leqslant c \}$$

est un ensemble convexe, équilibré. (Un sous-ensemble d'un espace vectoriel est dit équilibré lorsque $x \in U$ implique $zx \in U$ pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leqslant 1$).

Étant donné une famille I de semi-normes p_i sur un espace vectoriel complexe E, elle définit sur E une topologie localement convexe de la manière suivante : les ensembles

$$U_{i,c} = \{ x \in E \mid p_i(x) \leqslant c \} \qquad \text{avec } c > 0$$

constituent un système fondamental de voisinages de zéro. Les relations 2 et 3 des semi-normes impliquent que l'addition et la multiplication sont continues. Cette topologie sera séparée, si pour tout point x de l'espace, il existe une semi-norme p_i de la famille telle que $p_i(x) \neq 0$.

Réciproquement on montre que étant donné un espace vectoriel topologique localement convexe, il existe une famille de semi-normes qui définit cette topologie (cf.p.ex. Naimark N.R. I § 3, n°4, ou Bourbaki, EVT, Chap.II § 5 n°4). Il en existe beaucoup d'ailleurs. Si E' est le dual d'un espace vectoriel localement convexe E, on peut définir une famille de semi-normes de la manière suivante : pour tout sous-ensemble fini I de E posons

$$p_I(f) = \min_{x \in I} |f(x)| \qquad \text{où } f \in E'.$$

On vérifie facilement que p_I est une semi-norme et que la famille des p_I définit la topologie faible de E'.

1.4. Ensembles équicontinus du dual.

Soit W un sous-ensemble du dual E' de E. Pour que W soit équicontinu, il suffit qu'il existe un voisinage ouvert U de l'origine que l'on peut supposer convexe et équilibré - tel que pour tout f de W, $|f(U)| < 1$. Soit p la semi-norme correspondant à U :

$$U = \{x \in E \mid p(x) < 1\}. \text{ Alors } \frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in U \text{ et } |f(x)| \leq p(x).$$

Réciproquement s'il existe une semi-norme telle que pour tout f de W, $|f(x)| \leq p(x)$, W est équicontinu.

Théorème.

Un ensemble équicontinu faiblement fermé est faiblement compact.

Démonstration.

Soit W équicontinu tel que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $f \in W$. Notons D_x le disque de rayon $p(x)$. Appliquons W dans $D = \prod_{x \in E} D_x$ par $F(f) = (f(x) \mid x \in E) \in D$.

15.

Cette application est manifestement injective. D'après la définition de la topologie faible, c'est un homéomorphisme. L'image de W est fermée dans D : Soit $G \in D$ tel que $G = \lim F(fi)$. Si π_x est la projection de D sur D_x posons $g(x) = \pi_x o G \in D_x$. $g(x) = \lim fi(x)$.

On vérifie facilement que g est une forme linéaire sur E. Comme $g(x) \in D_x$, $|g(x)| \leqslant p(x)$ et g est continue. g est limite faible dans E' d'éléments de W, g appartient à W et $G = F(g)$. W est homéomorphe à un sous-ensemble fermé de D, qui est compact. Il est donc aussi compact.

__Corollaire__ :

La boule unité du dual d'un espace de Banach est faiblement compacte. En effet, si f appartient à la boule unité, $|f(x)| \leqslant \|x\|$, ce qui montre qu'elle est équicontinue.

2. Le spectre d'une algèbre à inverse continu commutative.

2.1. Rapport entre un espace compact X et $C(X)$.

Il existe un rapport très étroit entre l'espace compact X et la structure algébrique de l'algèbre $C(X)$, comme il ressort du théorème suivant.

__Théorème__.

Il existe une bijection naturelle de l'espace compact X sur l'ensemble des idéaux maximaux de $C(X)$:

a chaque point p est associé l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent en p. La topologie de X est la topologie la moins fine qui rend tous les éléments de $C(X)$ continus.

Démonstration

Soit m l'idéal des fonctions continues qui s'annulent au point p. La réduction modulo m applique toute fonction f sur sa valeur f(p) ; on a donc $C(X)/m = C$. Ceci implique que m est un idéal maximal.

Soit m un idéal maximal. Supposons que pour tout $p \in X$, il existe $f_p \in m$ telle que $f_p(p) \neq 0$. Il existe un voisinage ouvert U_p de p tel que $f_p(x) \neq 0$ si $x \in U_p$. L'espace X étant compact, on peut extraire de cette famille un recouvrement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de X. La fonction $f = \Sigma_{i \in I} f_i \bar{f}_i$ appartient à m et est strictement positive sur X. Elle est donc inversible et $1 = f^{-1} f \in m$. Par conséquent, $m = C(X)$, ce qui est contraire à l'hypothèse que m est un idéal maximal. Il existe donc $p \in X$, tel que pour tout $f \in m$, $f(p) = 0$. On vérifie facilement que comme m est un idéal maximal ce point p est unique.

Soit T la topologie la moins fine qui rend toutes les fonctions f de C(X) continues (cf. Bourbaki Top. Chap.I § 7) L'espace X est compact, donc normal. Il existe alors pour toute paire $\{x,y\}$ de points dictints de X une fonction $f \in C(X)$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. On peut même prendre f à valeur dans le segment $[0,1]$. Cette fonction f est continue pour T $U_0 = f^{-1}([0,\frac{1}{2}[)$ et $U_1 = f^{-1}(]\frac{1}{2},1])$ sont alors des voisinages disjoints de x et de y. La topologie T est donc séparée. Comme elle est séparée et moins fine que la topologie compacte initiale, la topologie T coïncide avec la topologie initiale (les topologies compactes sont minimales dans l'ensemble des topologies séparées su un espace X, cf Bourbaki Top. Chap. I § 10 , n° 4 , 2è édit.)

2.2. Spectre d'une algèbre à inverse continu commutative

Définition

a) Le spectre d'une algèbre à inverse continu commutative A est l'ensemble des idéaux maximaux de A. Il est habituellement noté Sp(A).

b) Un homomorphisme continu h d'une algèbre à inverse continu commutative sur le corps des nombres complexes C est appelé un caractère. (Si h est un caractère $h(e) = 1$).

<u>Proposition</u> :

Il existe une bijection naturelle de l'ensemble des caractères d'une algèbre à inverse continu commutative A sur son spectre.

<u>Démonstration</u>.

Soit h un caractère de A. Comme $h(A) = C$, le noyau de h est un idéal maximal. Deux caractères différents définissent des idéaux maximaux différents. Soit m un idéal maximal. D'après le cor. 3 de II, § 2, il est fermé. Le quotient A/m est un corps à inverse continu. D'après le théorème de Mazur A/m est isomorphe au corps des nombres complexes. L'application canonique de A sur A/m est donc un caractère.

Nous noterons à l'avenir $\hat{m}$ le caractère qui correspond à l'idéal maximal m. Comme $\hat{m}$ est un homomorphisme d'algèbres, c'est en particulier une application linéaire. Il appartient donc au dual de A.

Lorsque l'algèbre A n'a pas d'élément unité, on prend pour $Sp(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux réguliers.

<u>2.3. Représentation d'une algèbre par une algèbre de fonctions continues</u>.

Chaque élément $a \in A$ définit une application $\hat{a}$ de $Sp(A)$ dans C en posant $\hat{a}(m) = \hat{m}(a)$ (ou encore, $\hat{a}(m)$ est la classe de a dans $A/m = C$). On voit facilement que $\hat{a}(m)$ est l'unique nombre complexe tel que $a - \hat{a}(m).e \in m$. Nous avons ainsi représenté A par une algèbre de fonctions sur $Sp(A)$. Comme $Sp(A) \subset A'$, nous pouvons considérer $Sp(A)$ comme un espace topologique muni de la topologie induite par la topologie faible sur A'. D'après la définition même de celle-ci, la topologie sur $Sp(A)$ est la moins fine qui rend toutes les fonctions $\hat{a}$ continues.

Proposition :

Sp(A) est fermé dans A'.

Démonstration.

Il faut montrer que si f appartient à l'adhérence de Sp(A) dans A', alors f est un caractère. Supposons $f = \lim \hat{m}_i$. Alors

$$
\begin{aligned}
f(x)\,f(y) &= \lim \hat{m}_i(x) . \lim \hat{m}_i(y) \\
&= \lim \hat{m}_i(x)\hat{m}_i(y) \quad \text{(continuité du produit)} \\
&= \lim \hat{m}_i(xy) \\
&= f(xy) \quad \text{(définition de la topologie faible)}
\end{aligned}
$$

2.4. Rayon spectral d'un élément.

Proposition 1.

L'application continue $\hat{a}$: Sp(A) $\to$ C, associée à l'élément $a \in A$, a comme image Sp(a).

Démonstration.

Si $m \in$ Sp(A), $(a - \hat{a}(m)e) \in m$. Comme m est un idéal propre, $a - \hat{a}(m)e$ n'est pas inversible, ce qui signifie que $\hat{a}(m) \in$ Sp(a). Soit réciproquement z un élément de Sp(a) ; alors $a - ze$ n'est pas inversible. Donc l'idéal principal $(a - ze)$ est propre et est contenu dans un idéal maximal m. Par conséquent $a - ze \in m$ et $\hat{a}(m) = z$.

Comme Sp(a) est compact, $|\hat{a}(m)|$ est borné supérieurement.

Définition :

Le nombre $\| a \|_{Sp} = \mathrm{Sup}_m |\hat{a}(m)|$ est appelé le rayon spectral de a.

Le rayon spectral est le rayon du plus petit disque fermé, centré à l'origine qui contient Sp(a). Il est une semi-norme.

19.

1°. $\|a\|_{Sp} \geqslant 0$

2°. $\|a+b\|_{Sp} = \operatorname{Sup}_m |(a+b)^\wedge(m)|$

$$\leqslant \operatorname{Sup}_m |\hat{a}(m)| + \operatorname{Sup}_m |\hat{b}(m)|$$

$$\leqslant \|a\|_{Sp} + \|b\|_{Sp}.$$

3°. $\|za\|_{Sp} = |z| \ \|a\|_{Sp}.$

Elle est continue. Comme A est à inverse continu, il existe un voisinage ouvert U convexe équilibré de l'origine tel que les éléments de $e + U$ soient inversibles. Pour $a \in U$, $\|a\|_{Sp} < 1$. En effet, si $\|a\|_{Sp} \geqslant 1$; il existe $m \in Sp(A)$ tel que $\hat{a}(m) = u$ avec $|u| \geqslant 1$. En posant $b = -a/u$; $\hat{b}(m) = -1$, c'est-à-dire $-1 \in Sp(b)$. Donc $e + b$ n'est pas inversible. Mais ceci est en contradiction avec la définition de U : comme U est équilibré et que $|1/u| \leqslant 1$, $b \in U$. L'ensemble $\{a \in A \mid \|a\|_{Sp} < 1\}$ contient U. Il en résulte que c'est un voisinage de l'origine et que le rayon spectral est une semi-norme continue. Ce n'est en général pas une norme.

2.5. Compacité de Sp(A). Représentation de A comme algèbre de fonctions continues sur Sp(A).

Soit $\hat{m}$ le caractère correspondant à $m \in Sp(A)$. Comme $|\hat{m}(a)| = |\hat{a}(m)| \leqslant \|a\|_{Sp}$, et que $Sp(A)$ est faiblement fermé dans A', $Sp(A)$ est compact (théorème 1.4.). La fonction $\hat{a}$ est continue sur $Sp(A) = X$. En posant $\Phi(a) = \hat{a}$, on définit un homomorphisme de A dans $C(X)$, l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexe sur X. L'algèbre $C(X)$ est munie de la norme $\|f\| = \operatorname{Sup}_{m \in X} |f(m)|$. On a alors $\|a\|_{Sp} = \|\hat{a}\|$. Comme le rayon spectral est une semi-norme continue, Φ est un homomorphisme continu. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

<u>Théorème</u> :

Soit A une algèbre à inverse continu. $Sp(A)$ est compact. La représentation $\Phi : A \to C(Sp(A))$ qui applique $a \in A$ sur $\hat{a} \in C(Sp(A))$ est continue et $\|\hat{a}\| = \|a\|_{Sp}$.

3. Système générateur.

Etant donné une partie $P \subset A$, pour tout $a \in P$ la fonction $\hat{a}$ applique $Sp(A)$ sur $Sp(a)$. Nous pouvons en déduire une application

$$F_P : Sp(A) \longrightarrow \prod_P Sp(a)$$

qui est le produit des applications $\hat{a}$, où $a \in P$. Comme toutes les fonctions $\hat{a}$ sont continues, F_P est aussi continue.

Définition.

Une partie $P \subset A$ est dite un système séparant, si pour toute paire d'idéaux maximaux distincts m'_i, m'' il existe $a \in p$ tel que $\hat{a}(m') \neq \hat{a}(m'')$.

Une partie $P \subset A$ est dite un système générateur si la plus petite sous-algèbre fermée à l'élément unité contenant P coïncide avec A.

Proposition 1.

Tout système générateur est un système séparant.

Démonstration.

Soient m' et m'' deux idéaux maximaux de A. Si pour tout $a \in P$, $\hat{a}(m') = \hat{a}(m'')$, il en est de même pour tout polynôme en des éléments de P. Puisque P engendre A, l'ensemble de ces polynômes est dense dans A et par raison de continuité, $\hat{a}(m') = \hat{a}(m'')$ pour tout $a \in A$. Ceci implique que $m' = m''$, car $m' = \{ a \in A \mid \hat{a}(m') = 0 \}$.

Proposition 2.

Si P est un système séparant, l'application

$$F_P : Sp(A) \to \prod_P Sp(a)$$

est un homéomorphisme de $Sp(A)$ sur un sous-ensemble de $\prod_P Sp(a)$.

Démonstration.

Si P est un système séparant, l'application F_P est injective : si $m' \neq m''$, $m', m'' \in Sp(A)$, il existe $a \in P$ tel que $a(m') \neq a(m'')$. A fortiori $F_P(m') \neq F_P(m'')$. Comme $Sp(A)$ est compact et F_P continue, l'image est compacte. La topologie induite sur l'image est séparée et moins fine que la topologie sur Sp(A). Comme Sp(A) est compact, ces deux topologies coïncident (Bourbaki, Top. Chap. I, § 10, n°4. 2è édit.)

Corollaire 1 :

Si l'algèbre A est engendrée par un nombre fini d'éléments $\{a_1, \ldots\ldots, a_n\}$, Sp(A) est un sous-espace compact de C^n.

Corollaire 2 :

Si l'algèbre A est engendrée par un élément a, Sp(A) $\cong$ Sp(a). En effet, l'application $\hat{a}$: Sp(A) $\to$ Sp(a) est surjective d'après la prop.1. D'après la prop. 3 c'est un homéomorphisme.

4. Expression du rayon spectral.

Proposition.

Lorsque A est une algèbre de Banach, $\|a\|_{sp} \leq \|a\|$. En effet, $\|a\|_{sp} = \sup |\hat{a}(m)| = \sup |\hat{m}(a)|$. Du fait que A/m est isométriquement isomorphe à C- d'après le théorème de Mazur- il vient $|\hat{m}(a)| = \inf \|x\|$, où x parcourt la classe de a modulo l'idéal maximal m(cf la définition de la norme dans le quotient d'un espace de Banach par un sous-espace fermé). En particulier $|\hat{m}(a)| \leq \|a\|$ et $\|a\|_{sp} \leq \|a\|$.

Théorème.

Soit $\{p_i\}_{i \in I}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de A, supposée à inverse continu et complète.

Alors $\|a\|_{sp} = \sup_i \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_i(a^n)}$

Démonstration

A. Soit U le voisinage dont il est question dans la démonstration de la proposition 2 du paragraphe précédent. Il existe une semi-norme de la famille I telle que $U_j = \{a \in A \mid p_j(a) \leq k\}$ soit contenu dans U, puisque les ensembles U_i, constituent un ensemble fondamental de voisinages de 0 lorsque i varie dans I et que k prend toutes les valeurs réelles positives. On a vu que lorsque $a \in U$, $\|a\|_{sp} \leq 1$. Il en résulte que $\|a\|_{sp} \leq Cp_j(a)$, où $c = 1/k > 0$. Dans $C(Sp(A))$,

$$\|\hat{a}\|^n = \|\hat{a}^n\|$$

Il résulte que

$$\|a\|^n_{sp} = \|a^n\|_{sp} \leq C\ p_j(a^n)$$

ou
$$\|a\|_{sp} \leq (C\ p_j(a^n))^{1/n}$$
$$\leq \underline{\lim}\ C^{1/n}(p_j(a^n))^{1/n}$$
$$\leq \underline{\lim}\ -p_j(a^n))^{1/n} \leq \overline{\lim}\ (p_j(a^n))^{1/n}$$

B. Soit x un nombre réel donné, tel que $x > \|a\|_{sp}$. Si $u \in C$ et $|u| > x$, $U \notin Sp(a)$. Donc $a-ue$ est inversible. La fonction $(e-za)^{-1}$ est analytique pour $|z| < 1/x$. Comme A est complète, elle peut-être développée en série de Taylor, dont le rayon de convergence est au moins égal à $1/x$:

$$(e - za)^{-1} = e + za + \dots + (za)^n + \dots$$

Cette série converge, donc $\lim\limits_{n \to \infty} (za)^n = o$, lorsque $|z| < 1/x$.

Pour toute semi-norme p_i, il existe alors un n_i tel que pour $n > n_i$

$$p_i(z^n a^n) = |z|^n\ p_i(a^n) \leq 1$$

ou
$$p_i(a^n) \leq |z|^{-n} \quad \text{pour tout } z \text{ tel que } |z| < 1/x$$

Donc
$$(p_i(a^n))^{1/n} \leq x$$

et
$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\ (p_i(a^n))^{1/n} \leq x$$

23.

Comme ceci est vrai quelque soit $x > \|a\|_{sp}$, on en déduit l'inégalité correspondante avec $\|a\|_{sp}$.
Le théorème découle alors de A et de B.

Corollaire 1 :

Si A est une algèbre de Banach, $\|a\|_{sp} = \lim\limits_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$

En effet alors $\|a\|_{sp} \leq \underline{\lim} \|a^n\|^{1/n} \leq \overline{\lim} \|a^n\|^{1/n} \leq \|a\|_{sp}$.

Corollaire 2 :

Si A est une algèbre de Banach, l'homomorphisme $A \to C(Sp(A))$, qui a chaque élément $a \in A$ associe la fonction $\hat{a}$, définie sur $Sp(A)$, est isométrique si et seulement si la norme sur A vérifie l'identité $\|a^2\| = \|a\|^2$.
En effet, s'il y a isométrie, nous avons

$$\|a\|_{sp} = \sup_{m \in Sp(A)} \|\hat{a}(m)\| = \|\hat{a}\|$$

d'où $\|a\|_{sp}^2 = (\mathrm{Sup}\,|\hat{a}(m)|)^2 = \|a\|^2$

or $(\mathrm{Sup}\,|\hat{a}(m)|)^2 = \mathrm{Sup}\,|\hat{a}(m)^2| = \|a^2\|_{sp} = \|a^2\|$

donc $\|a^2\| = \|a\|^2$

Réciproquement, cette dernière égalité implique

$$\|a^{2^m}\| = \|a\|^{2^m} \quad \text{d'où} \quad \sqrt[2^m]{\|a^{2^m}\|} = \|a\|$$

et en passant à la limité

$$\|a\|_{sp} = \lim_{m \to \infty} \sqrt[2^m]{\|a^{2^m}\|} = \|a\|$$

5. Algèbre Semi-Simple - Injectivité

5.1 Définition.

On dit qu'une algèbre commutative est semi-simple si son radical, c'est-a-dire l'intersection des idéaux maximaux, se réduit à zéro.

Reprenons l'homomorphisme $A \to C(Sp(A))$. Il sera injectif si son noyau se réduit à zéro. Or ce noyau est l'intersection des idéaux maximaux de A ; il coïncide donc avec le radical de A. On en arrive à la conclusion suivante :

Proposition :

L'homomorphisme $A \to C(Sp(A))$ est injectif si et seulement si A est semi-simple.

Remarque :

De ce qui précède on déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} \operatorname{Rad} A &= \{ a \in A \mid \|a\|_{sp} = 0 \} \\ &= \{ a \in A \mid \lim \sqrt[n]{\|a^n\|} = 0 \} \end{aligned}$$

lorsque A est une algèbre de Banach.

Il est à noter que dans le cas des algèbres commutatives de dimension finie, le radical est égal à l'ensemble des éléments nilpotents ; la deuxième équation généralise ce fait.

5.2 Unicité de la topologie des algèbres de Banach semi-simples.

Définition

Deux normes $\|x\|$ et $\|x\|_1$ d'un espace linéaire X, sont dites équivalentes s'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$C_1 \|x\| \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|$$

Il est clair que des normes équivalentes définissent la même topologie sur X.

Il est facile de voir que, inversément, deux normes qui définissent la même topologie sur X, sont équivalentes.

Théorème de Banach

Si un espace vectoriel E est un espace de Banach pour deux normes, telles que $\|x\| \geq \|x\|_1$, alors ces deux normes sont équivalentes.

(Démonstration : Naimark Chap.I § 4 ou Bourbaki EVT Chp.I § 3 n°3)

Théorème - <u>Une algèbre commutative semi-simple A a au plus une topologie d'algèbre de Banach</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soient $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$, deux normes définies sur l'algèbre commutative semi-simple A. Il est immédiat que le nombre $\|x\| = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$ (1) satisfait aux conditions d'une norme.

Montrons que l'espace A est complet pour cette norme.

Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy de l'espace A, pour la norme $\|x\|$; elle sera à fortiori une suite de Cauchy pour les normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$.

Cette suite $\{x_n\}$ converge donc pour la norme $\|x\|_1$ vers une limite y_1 et pour la norme $\|x\|_2$ vers une limite y_2.

Pour montrer que l'espace A est complet pour la norme $\|x\|$, il suffit de prouver que $y_1 = y_2$.

Il est immédiat que, pour tout $m \in Sp(A)$, $\{\hat{x}_n(m)\}$ est une suite de Cauchy du plan complexe.

Or, d'une part, nous avons

$\| y_1(m) - x_n(m)\| \leqslant \|y_1 - x_n\|_1$ et d'autre part

$\| y_2(m) - x_n(m)\| \leqslant \|y_2 - x_n\|_2$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_1 - x_n\|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_2 - x_n\|_2 = 0$ nous en déduisons $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n(m) = \hat{y}_1(m) = \hat{y}_2(m)$ et ceci pour tout $m \in Sp(A)$.

L'algèbre étant semi-simple, l'homomorphisme $A \longrightarrow C(Sp(A))$ est injectif ; il s'ensuit que $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$ implique $y_1 = y_2$.

Nous avons ainsi montré que A est complet pour la norme $\|x\|$.

Appliquons le théorème de Banach :

l'espace A étant complet pour les normes $\|x\|$ et $\|x\|_1$ avec $\|x\| \geqslant \|x\|_1$, ces normes sont équivalentes ; pour des raisons analogues, les normes $\|x\|$ et $\|x\|_2$ sont équivalentes ; donc finalement les normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ définissent la même topologie.

c.q.f.d.

6. Algèbre de Banach commutative, sans élément unité.

Soit A une algèbre de Banach commutative sans élément unité, et désignons par A_e l'algèbre obtenue par l'adjonction d'une unité.

A étant un idéal maximal de A_e, il représentera un point 0 du compact $Sp(A_e)$.

Tout $x \in A_e$ définit une application continue

$\hat{x} : Sp(A_e) \longrightarrow C$

En particulier, les éléments de A définissent des fonctions sur un espace compact, s'annulant en un certain point 0 de cet espace. Le point 0 n'est autre que le point à l'infini du compactifié d'Alexandrof de $Sp(A)$, tel qu'il a été défini au § 2.2

27.

IV. ALGEBRES DE BANACH A INVOLUTION

1. Définition :

On appelle involution d'une algèbre de Banach B une fonction $B \longrightarrow B$: notée $*$

telle que : (1) $x^{**} = x$

(2) $(x + y)^* = x^* + y^*$ et $(xy)^* = y^* x^*$

(3) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

Remarque : des conditions supplémentaires sont souvent remplies, notamment : (4) $\|x^*\| = \|x\|$ et (5) $\|xx^*\| = \|x\| \cdot \|x^*\|$

Exemples :

1) On a vu que si E est un espace de Hilbert, $\mathcal{B}(E)$ est une algèbre de Banach. Pour

$T \in \mathcal{B}(E)$, le transposé de T est un élément de $\mathcal{B}(E')$, où E' est le duel topologique de E, et, E' s'identifiant à E, s'identifie à un $T^* \in \mathcal{B}(E)$ caractérisé par :

$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. De cette formule résulte aussitôt que $*$ est une involution de $\mathcal{B}(E)$. En outre,

$$\|T\|^2 = \sup_{x \in E} \frac{\langle T(x), T(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} = \sup_{x \in E} \frac{\langle x, T^*T(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \sup_{x \in E} \frac{\|x\| \, \|T^*T(x)\|}{\langle x, x \rangle}$$

$\leq \|T^*\| \cdot \|T\|$ et donc $\|T\| \leq \|T^*\|$, $\|T^*\| \leq \|T^{**}\| = \|T\|$, d'où (4), et

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\|$$

A l'aide de (4) on en tire (5)

2) On a vu que si G est un groupe localement compact, $L^1(G)$ est une algèbre de Banach. Définissons * par : $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$. On démontre plus tard que (1) (2) (3) (4) (5) sont vérifiés.

3) L'ensemble $\mathcal{O}_c(D)$ des fonctions définies et continues sur le disque $D = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$ et holomorphes à l'intérieur forme une algèbre de Banach commutative à unité. Posons $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$. C'est une involution, (4) est vérifié, mais pas (5). On remarquera qu'en général $\hat{x}^*(m) \neq \overline{\hat{x}(m)}$ où $m \in Sp(\mathcal{O}_c(D))$ (N.B. - $Sp(\mathcal{O}_c(D)) = D$ parce que "z" est un générateur de $\mathcal{O}_c(D)$).

4) Dans $C(X)$ pour X compact (ou $C_0(X)$ pour X localement compact), posons $f^*(x) = \overline{f(x)}$. C'est une involution; (4) et (5) sont vérifiés.

2. Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème : Si X est un espace compact et B une sous-algèbre fermée de $C(X,R)$ qui sépare les points de X, B est soit $C(X,R)$, soit l'ensemble des éléments de $C(X,R)$ s'annulant en un certain point de X.

Lemme 1 : $\sqrt{x}$ peut-être approché uniformément par des polynomes sans terme constant, dans $[0,a]$ $(a \geqslant 0)$.

Développons $\sqrt{x+b}$ en série de Taylor au voisinage de $\frac{a}{2}$: dans C, le seul point exceptionnel étant $-b$, le rayon de convergence de la série sera $\frac{a}{2} + b$ et elle convergera uniformément dans $[0,a]$. Il existe $Q \in R[X]$ tel que $|\sqrt{x+b} - Q(x)| \leqslant \varepsilon$ et b tel que $|\sqrt{x+b} - \sqrt{x}| < \varepsilon$ pour $x \in [0,a]$; $|\sqrt{b} - Q(o)| < \varepsilon$, d'où $|Q(o)| < 2\varepsilon$. Si on pose $P = Q - Q(o)$, on en tire que $|\sqrt{x} - P(x)| < 4\varepsilon$ pour $x \in [o,a]$.

Lemme 2 : si $f, g \in B$, alors $\sup(f,g) \in B$ et $\inf(f,g) \in B$

D'après le lemme 1, pour tout $f \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q sans terme constant tel que $|\sqrt{x} - Q(x)| < \varepsilon$ pour $x \in [0, \|f\|^2]$, et donc tel que $\||f| - Q(f^2)\| < \varepsilon$: $|f| \in B$.
Le lemme résulte dès lors de ce que
$\inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ et $\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$.

Deux cas peuvent maintenant se présenter : il existe ou non un point de X où s'annulent tous les f B. S'il en existe un, il est unique puisque B sépare les points et nous le noteront x_o ; nous démontrerons que s'il n'en existe pas $B = C(X,R)$, indiquant entre parenthèses les modifications à apporter s'il en existe un.

Lemme 3 : Etant donnés deux points distincts p et q de X et une fonction $f \in C(X,R)$, il existe une fonction $g \in B$ telle que $g(p) = f(p)$ et $g(q) = f(q)$. (On suppose éventuellement $f(x_o) = o$).

Seul le cas $p \neq q$, $p \neq x_o$, $q \neq x_o$ est non trivial. Soient $a, b, c \in B$ tels que $a(p) \neq o$, $b(q) \neq o$, $C(p) \neq C(q)$.

Il existe $u, v \in C$ tels que la fonction $d = c + ua + vb$ satisfasse à $o \neq d(p) \neq d(q) \neq o$. Il suffit alors de prendre

$$g = f(p)\,\frac{d^2 - d(q)d}{d^2(p) - d(p)d(q)} + f(q)\,\frac{d^2 - d(p)d}{d^2(q) - d(p)d(q)}$$

Soit enfin $f \in C(X,R)$, s'annulant éventuellement en x_o. Pour toute paire de points p, q, soit $g_{pq} \in B$ telle que $f(p) = g_{pq}(p)$ et $f(q) = g_{pq}(q)$. Pour tout $\varepsilon > o$ et tout $q \in X$, il existe un voisinage ouvert U_q de q dans lequel $|f(q') - g_{pq}(q')| < \varepsilon$. Soit $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ un recouvrement fini de X, extrait de la famille U_q. Notons $g_{p1}, g_{p2}, \ldots, g_{pn}$ les fonctions correspondantes. Posons $g_p = \sup(g_{p1}, g_{p2}, \ldots, g_{pn})$.

Pour tout x de X, $g_p(x) \geqslant f(x) - \varepsilon$ et $g_p(p) = f(p)$. Chaque $p \in X$ a un voisinage V_p dans lequel $|g_p(p') - f(p')| < \varepsilon$ et X est recouvert par un nombre fini des V_p: $V_1, \ldots, V_m$.
Posons $g = \inf(g_1, \ldots, g_n)$
Elle satisfait à $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, ce qui prouve que f peut-être approchée uniformément par des éléments de B et achève la démonstration.

3. Théorème de Gelfand

On a vu que si B est une algèbre de Banach commutative à unité $Sp(B)$ est compact et que B s'applique canoniquement dans $C(Sp(B))$. Cette dernière algèbre est munie d'une involution naturelle (voir 2.1 ex.4), qui satisfait à (5) et lorsque l'application précédente est un isomorphisme isométrique, il en est de même de B, réciproquement.

Théorème de Gelfand : Pour que l'application canonique d'une algèbre de Banach commutative à involution B, ayant un élément unité, dans $(C(Sp(B)),*)$ soit un isomorphisme isométrique, il faut et suffit que $\|x\, x^*\| = \|x\| . \|x^*\|$.

Lemme 1: Sous les hypothèses du théorème, $\|x\| = \|x\|_{sp} = \|x^*\|$

$$\|x\|^2 \|x^*\|^2 = (\|x\| \|x^*\|)^2 = \|xx^*\|^2 = \|xx^*\| \|(xx^*)^*\| = \|(xx^*)(xx^*)^*\| =$$
$$\|x^2 . (x^2)^*\| = \|x^2\| . \|x^{*2}\| .$$

Donc puisque $\|x^2\| \leq \|x\|^2$, $\|x^{*2}\| \leq \|x^*\|^2$,
on a : $\|x\|^2 = \|x^2\|$ et $\|x\| = \|x\|_{sp}$.

$x - ze$ est inversible si et seulement si $x^* - \bar{z}e$ l'est :
$Sp(x) = \overline{Sp(x^*)}$, $\|x\|_{sp} = \|x^*\|_{sp}$ donc $\|x\| = \|x^*\|$

Définition : On dit que $x \in B$ est hermitien si $x^* = x$.

Lemme 2 : 1) tout élément x de B se met sous la forme $h + ih'$ où h et h' sont hermitiens
2) si h est hermitien, $\hat{h}$ est réel.

Il suffit, pour 1), de remarquer que
$x = \frac{(x + x^*)}{2} + i \frac{(x - x^*)}{2i}$. Pour 2), raisonnons par l'absurde :
si $\hat{h}$ n'était pas réel, on pourrait trouver en considérant une combinaison linéaire à coefficients réels de h et h^2 un élément hermitien h' tel que $\hat{h'}$ prenne la valeur i. Dès lors, si B a une unité, $(x + 1)^2 \leq \| h' + n i e \|^2_{sp} = \| h' + nie \| . \| (h'+nie)^* \|$ $= \| h'^2 + n^2 e \| \leq \| h' \|^2 + n^2$, donc $2n + 1 \leq \| h' \|^2$ pour tout n, ce qui est absurde.

Les $\hat{h}$ pour h hermitien forment une sous-algèbre à unité de $C(Sp(B)R)$ (resp. une sous-algèbre de $C_o(Sp(B), R)$; cette sous-algèbre sépare les points (car les éléments hermitiens engendrent B) et est fermée (car isométrique à l'ensemble des éléments hermitiens de B, fermé dans B car $*$ est continu ($\| x \| = \| x^* \|$), donc complet). D'après le théorème de Stone, cette sous-algèbre est l'algèbre entière, et puisque $C(Sp(B))$ est engendré par les éléments réels, l'application canonique $B \to C(Sp(B))$ est bijective et isométrique. Puisqu'en outre si $x = h + i h'$, $\hat{x^*} = (h + i h')^{\hat{}*} = (h - ih')^{\hat{}} = \hat{h} - i\hat{h'} = \hat{h}^* + (i\hat{h'})^* = (\hat{h} + i\hat{h'})^* = \hat{x}^*$, c'est un isomorphisme d'algèbre de Banach à involution.

Corollaire 1 Pour que l'application canonique d'une algèbre de Banach commutative à involution B, sans élément unité, dans $(C_o(Sp(B)), *)$ soit un isomorphisme isométrique, il faut et il suffit que $\| xx^* \| = \| x \| \| x^* \|$.

On se ramène immédiatement au théorème précédent en adjoignant un élément unité.

32.

Corollaire 2. Pour qu'une algèbre de Banach commutative soit isomorphe à une algèbre de Banach du type $C(X)$ pour X compact (resp. $C_o(X)$ pour X localement compact), il faut et il suffit qu'elle admettre une involution telle que (5) $\|x\ x^*\| = \|x\| . \|x^*\|$ et qu'elle ait un élément unité (resp. qu'elle n'ait pas d'élément unité).

Corollaire 3. Une algèbre commutative à involution B a au plus une norme satisfaisant à (5) qui en fait une algèbre de Banach.

En effet, si une telle norme existe, l'algèbre B est semi-simple et sa topologie d'algèbre de Banach est bien déterminée. Il en est de même de la topologie sur $Sp(B)$. Si la norme satisfait à (5) elle est égale à la norme spectrale ou à la norme sur $C(Sp(B))$. Ceci prouve l'unicité de la norme.

V. SPECTRE ET CALCUL OPERATIONEL

1. Le spectre de n éléments

1.1. Définition. Dans une algèbre de Banach, commutative et à élément unité*, A, le spectre d'un élément a, a été défini comme l'ensemble des nombres complexes, s, tels que a-s n'ait pas d'inverse. Et nous avons vu que cet ensemble était encore l'ensemble des $\hat{a}(m)$, $m \in \mathcal{M}$ si $\mathcal{M}$ est l'espace structurel de A, c'est-à-dire, l'ensemble des idéaux maximaux de A, et $\hat{a}$ est l'image de a par la représentation de Gelfand.

Dire que a-s n'a pas d'inverse revient à dire que $(a-s)u \neq 1$ quelque soit u, donc encore que l'idéal engendré par a-s est un idéal propre. Cette dernière définition se généralise bien, fournit une définition intéressante du spectre de n éléments :

Soit $(a_1,\dots,a_n) \in A^n$ (c'est-à-dire, soient $a_1,\dots,a_n$ des éléments de A). Le spectre de $(a_1,\dots,a_n)$ est l'ensemble des $(s_1,\dots,s_n) \in C^n$ tels que l'idéal engendré dans A par $a_1-s_1,\dots,a_n-s_n$ soit un idéal propre.

Cette définition s'exprime peut-être mieux sous forme négative : $(s_1,\dots,s_n) \notin sp(a_1,\dots,a_n)$ si, et uniquement si l'on peut trouver des $(u_1,\dots,u_n)$ dans A tels que $\Sigma(a_i-s_i)u_i = 1$. La relation $(a-s)u = 1$ est donc remplacée par $\Sigma(a_i-s_i)u_i = 1$.

Le spectre de n éléments se caractérise en fonction de l'espace structurel de manière tout à fait analogue au spectre d'un

---

* L'unité de A sera identifiée avec le nombre complexe 1, son produit par le complexe s avec S, lorsque cela n'entraine pas de confusion.

élément. Supposons que $(s_1,\dots,s_n)$ appartienne au spectre. Les éléments $a_1-s_1,\dots,a_n-s_n$ engendrent un idéal propre, qui est contenu dans un idéal maximal, m, et $s_i = \hat{a}_i(m)$ puisque $a_i-s_i \in m$. Réciproquement, s'il existe un idéal maximal, m, tel que $s_i = \hat{a}_i(m)$, les éléments a_i-s_i appartiennent à m, l'idéal qu'ils engendrent est contenu dans m, et donc propre.

Il en résulte que le spectre de $(a_1,\dots,a_n)$ est l'ensemble des $(\hat{a}_1(m),\dots,\hat{a}_n(m))$, $m \in \mathfrak{M}$.

Diverses propriétés du spectre découlent de cette caractérisation. D'abord, le spectre n'est pas vide, puisque $\mathfrak{M}$ ne l'est pas. Ensuite, l'application $m \to (\hat{a}_1(m),\dots,\hat{a}_n(m))$ est une application continue de $\mathfrak{M}$, qui est compact, dans C^n. Son image, le spectre de n éléments, est donc compacte.

Enfin, soit $n' < n$. Considérons les éléments $a_1,\dots,a_{n'}$, leur spectre, et l'application $(s_1,\dots,s_n) \to (s_1,\dots,s_{n'})$ de C^n dans $C^{n'}$. Une inspection sommaire de la définition montre que le spectre de $(a_1,\dots,a_n)$ est appliqué dans le spectre de $(a_1,\dots,a_{n'})$.

L'application est surjective. Supposons en effet que $(s_1,\dots,s_{n'}) \in Sp(a_1,\dots,a_{n'})$. Il existe un $m \in \mathfrak{M}$ tel que $s_i = \hat{a}_i(m)$, $i = 1,\dots,n'$, et nous définissons un élément de $sp(a_1,\dots,a_n)$ en posant $t_i = \hat{a}_i(m)$, $i = 1,\dots,n$. Bien entendu, $(s_1,\dots,s_{n'})$ est l'image de $(t_1,\dots,t_n)$ par l'application considérée.

Les raisonnements que nous venons de donner utilisent la théorie de Gelfand, donc, par son intermédiaire le lemme de Zorn, et l'axiôme du choix.

La démonstration du fait que le spectre d'un élément est compact (borné et fermé) peut évidemment être reprise, presque mot pour mot. Nous avons ainsi une démonstration de la compacité du spectre de n éléments, qui est indépendante de la théorie de Gelfand.

Il est d'autre part bon de savoir que le fait que le spectre n'est pas vide, et la surjectivité de l'application du spectre de $(a_1,\dots,a_n)$ dans celui de $(a_1,\dots,a_{n'})$ peuvent être démontrées indépendamment de la théorie de Gelfand (en intégrant des formes différentielles extérieures comme on le fait au paragraphe 3).
Je ne sais pas si ces démonstrations " directes " évitent l'axiôme de choix. Et même si elles le font, le gain ne serait pas grand.

Je vois deux bénéfices que l'on peut retirer de ces démonstrations directes. Tout d'abord, elles sont constructives ; lorsque $(s_1,\dots,s_{n'})$ n'appartient pas à l'image du spectre de $(a_1,\dots,a_n)$, il est possible d'exhiber des $u_1,\dots,u_{n'}$ vérifiant la relation $\sum_1^{n'}(a_i-s_i)u_i = 1$. Ensuite, surtout, elles peuvent se généraliser, elles permettent d'étendre la théorie des algèbres de Banach, et d'obtenir des propriétés intéressantes des algèbres localement convexes, sous des hypothèses convenables.(Voir [22]).

1.2. Ensembles polynomialement convexes. Les ensembles convexes par rapport à certains ensembles de fonctions jouent un rôle important dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. La théorie dont nous nous occupons se trouve à la limite de la théorie des fonctions de variables réelles et de la théorie des fonctions de variables complexes. Il n'est pas surprenant que l'on voie des notions de convexité apparaître ici.

Soit E un ensemble, soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions complexes définies sur E, soit X une partie de E. L'on dit que X est $\mathcal{F}$-convexe si à tout point de E qui n'appartient pas à X, l'on peut associer un $f \in \mathcal{F}$ tel que $|f(x)| > |f(y)|$ pour tout $y \in X$,

Dans R^n, les compacts convexes symétriques sont convexes par rapport aux formes linéaires, les compacts convexes sont convexes par rapport aux fonctions linéaires. (Une forme linéaire s'annule à l'origine, une fonction linéaire est la somme d'une forme linéaire et d'une constante).

Nous nous intéressons à des ensembles compacts polynialement convexes de C^n. Ces ensembles pourront être caractérisés de la manière suivante :

Le compact $X \subseteq C^n$ est polynialement convexe si, et uniquement si $x \in X$ dès que

$$|P(x)| \leq \max_{y \in X} |P(y)| \tag{1}$$

pour tout polynôme P.

Si X est un compact quelconque de C^n, sa fermeture polynomialement convexe est l'ensemble X_1 des $x \in C^n$ qui vérifient l'inégalité (1) quelque soit le polynôme P. C'est un compact polynômialement convexe, minimum parmi ceux qui contiennent X.

1.3. Algèbres de génération finie. Nous dirons que $a_1, \ldots, a_n$ engendrent topologiquement A si A n'a pas de sous-algèbre fermée qui contienne les éléments $a_1, \ldots, a_n$.

Dans ces hypothèses, l'espace structurel de $\mathcal{A}$ est une partie polynômialement convexe de C^n, l'idéal maximal m étant identifié avec $(\hat{a}_1(m), \ldots, \hat{a}_n(m)) \in C^n$.

Nous allons montrer qu'à tout élément $(s_1, \ldots, s_n)$ de la fermeture polynômialement convexe du spectre, il correspond un, et un seul caractère de A, soit φ, tel que $\varphi(a_i) = s_i$.

Cela suffira pour établir le résultat, étant donné ce que nous savons sur les relations entre l'ensemble des idéaux maximaux et les caractères de A.

Soit donc $X_1 \subseteq C^n$ la fermeture polynialement convexe du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$, et $s = (s_1, \ldots, s_n) \in X_1$. Soit P un polynôme. Alors $\operatorname{sp} P(a) = P(\operatorname{sp} a)$ et, si $h(b)$ est le rayon spectral de b, $h(P(a)) = \max_{t \in \operatorname{sp} a} |P(t)|$

Puisque P est un polynôme, et s dans X_1,

$$|P(s)| \leqslant \max_{t \in sp\ a} |P(t)| = h(P(a)) \leqslant \|P(a)\|$$

Ceci montre d'abord que $P(s)$ s'annule dès que $P(a)$ est nul. $P(s)$ ne dépend que de $P(a)$, et l'application $P(a) \to P(s)$ est bien entendu un homomorphisme de l'algèbre engendrée (algébriquement) par unité, et $a_1, \ldots, a_n$ dans les complexes, qui applique l'unité sur le complexe 1, et a_i sur s_i. Ensuite, nous observons que $P(s)$ dépend de $P(a)$ de manière (uniformément) continue. L'homomorphisme peut donc se prolonger au complété de l'algèbre engendrée algébriquement par $1, a_1, \ldots, a_n$, et ce complété n'est autre que A.

Nous avons ainsi trouvé un caractère qui prenait les valeurs requises aux points a_i. Il faut encore montrer que ce caractère est unique. Mais ses valeurs aux points a_i déterminent bien entendu ses valeurs sur l'algèbre engendrée par $a_1, \ldots, a_n$. D'autre part, les caractères étant continus, les valeurs du caractère sur l'ensemble des $P(a)$ déterminent ses valeurs sur le clôture de cet ensemble; donc sur toute l'algèbre.

L'application $m \to \hat{a}(m)$ est donc une bijection de l'espace structurel avec la fermeture polynômialement convexe du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$.

<u>Remarque</u> : Dans la démonstration, nous avons uniquement utilisé le fait que A était engendré par $a_1, \ldots, a_n$, et l'unité.

1.4. Exercices.

1. Montrer que toute partie compacte de R^n est polynômialement convexe, si nous identifions R^n d'une manière évidente avec une partie de C^n.
(Soit X la partie compacte considérée ; l'algèbre $C(X)$ est engendrée topologiquement par les variables et l'unité, et X est le spectre des variables dans $C(X)$).

2. Toute partie compacte de C^n est l'image par une application linéaire $C^{2n} \longrightarrow C^n$ d'une partie compacte polynômialement convexe de C^{2n}. (Utiliser l'exercice 1).

3. Soit $X \subseteq C^n$, et soit A la fermeture dans $C(X)$ de l'algèbre des polynômes en les variables $z_1,\dots,z_n$.

Le spectre de $(z_1,\dots,z_n)$ dans A est la fermeture polynômialement convexe de X, si z_i est la i^e fonction coordonnée.

(Le spectre de $(z_1,\dots,z_n)$ est polynômialement convexe ; il contient certainement X, donc sa fermeture polynialement convexe ; lorsque $(t_1,\dots,t_n) \in C^n$ est tel qu'il existe un polynôme P vérifiant la relation

$$|P(t)| > \max_{x \in X} |P(x)|$$

il faut encore trouver des fonctions continues sur X, limites uniformes de polynômes, et vérifiant $\Sigma(z_i-t_i)u_i(z) = 1$.

(Au sujet de cet exemple, nous pouvons observer que le convergence uniforme d'une suite de polynômes sur X entraîne sa convergence uniforme sur la fermeture polynômialement convexe de X.

4. L'algèbre $\tilde{\mathcal{O}}_\infty(D)$. Soit D le disque ouvert, $|z| < 1$. L'algèbre $\tilde{\mathcal{O}}_\infty(D)$ est l'algèbre des fonctions holomorphes bornées sur D avec la topologie de la convergence uniforme. C'est effectivement une algèbre de Banach.

A tout point s de D correspond un idéal maximal, m_s, qui est l'idéal des fonctions nulles au point s. Les idéaux m_s sont les "idéaux maximaux triviaux" de $\widetilde{\mathcal{O}}_{\infty}(D)$. L'application $s \longrightarrow m_s$ est une immersion topologique de D dans l'espace structurel $\mathfrak{M}$ de $\widetilde{\mathcal{O}}_{\infty}(D)$.

L'algèbre $\widetilde{\mathcal{O}}_{\infty}(D)$ a des idéaux maximaux "non triviaux". C'est évident : D n'est pas compact, et $\mathfrak{M}$ l'est. La fonction holomorphe $z-1$ n'a pas d'inverse dans $\widetilde{\mathcal{O}}_{\infty}$, appartient donc à un idéal maximal, mais n'appartient à aucun idéal maximal trivial.

Soit m un idéal maximal non trivial. On pose $\varphi(m) = z(m)$ si z est la variable. L'application $m \longrightarrow \varphi(m)$ est une application continue de l'ensemble des idéaux maximaux non triviaux dans la circonférence unité : $\varphi(m)$ est dans le spectre de z, donc $|\varphi(m)| \leq 1$; d'autre part, si $\varphi(m) < 1$, on constate que l'idéal maximal m est trivial.

Un problème resté ouvert longtemps est celui de savoir si l'ensemble des idéaux maximaux triviaux est dense dans celui des idéaux maximaux non triviaux. Carleson vient de lui apporter une réponse positive (travail présenté au Congrès de Stockholm). Il en résulte, si $f_1,\dots,f_k$ sont des éléments de $\widetilde{\mathcal{O}}_{\infty}$, que $sp(f_1,\dots,f_k)$ est la fermeture dans C^k de l'ensemble des $(f_1(z),\dots,f_k(z)), z \in D$.

Pour plus de détail au sujet de $\widetilde{\mathcal{O}}_{\infty}(D)$, et de l'espace de ses idéaux maximaux, qui a des propriétés topologiques curieuses, on renverra le lecteur à [13], voir aussi [24] .

2. Le calcul opérationel . n = 1.

Soit a un élément de A, et $P(z)$ un polynôme d'une variable à valeurs complexes , où même à valeurs dans A. On sait ce que l'on entend par $P(a)$. Si $r(z) = P(z)/Q(z)$, et si $Q(a)$ est inversible, on pose $r(a) = P(a)Q(a)^{-1}$. Ces définitions n'utilisent que la structure algébrique de A.

La topologie de A permet de définir f(a) lorsque f appartient à une algèbre plus étendue de fonctions. Nous allons définir f(a), ou $f(a_1,\dots,a_n)$ lorsque f est holomorphe près du spectre de a, ou du spectre de $(a_1,\dots,a_n)$. Cette opération aura des propriétés raisonnables.

Nous écrirons $f[a]$ plutôt que f(a) pour deux raisons. La première est formelle ; f est une fonction, f(a) n'est défini en principe que si a appartient au domaine de définition de f, ce qui n'est pas le cas. La seconde raison est plus sérieuse. L'écriture f(a) risque d'entraîner des conflits de notations tant qu'un certain nombre de théorèmes de compatibilité n'ont pas été établis.

Ce paragraphe-ci est consacré au cas $n=1$. La construction donnée au paragraphe 3 est valable pour $n \geq 1$, et est indépendante de la construction donnée ici. En principe, le lecteur pourrait donc sauter ce paragraphe 2, et ne retenir que quelques propriétés vraies si $n=1$, et en général fausses pour $n > 1$, propriétés liées au fait qu'à une dimension, tout domaine est un domaine d'holomorphie, et au théorème de Runge.

En pratique, il m'a semblé utile d'insérer cette construction uni-dimensionnelle. Son caractère naturel est très frappant. Les démonstrations ne nécessitent pas d'outil mathématique excessif. Enfin, la définition de $f[a]$ par une intégrale de Cauchy a des racines historiques relativement profondes (cf [6], [8]).

Au paragraphe 3, nous utiliserons un peu de technique homologique, dans l'algèbre des formes différentielles extérieures. Ces résultats admis, les raisonnements fourniront assez facilement le calcul opérationel, la définition de $f[a_1,\dots,a_n]$. Cette construction pourra assez facilement être adaptée au cas où A n'est plus une algèbre de Banach, mais est par exemple une algèbre topologique (ou une b-algèbre), et où $a_1,\dots,a_n$ ont des propriétés convenables.

D'ailleurs, pour tout dire, cette construction a été initialement développée dans le cas où A est une b-algèbre (cf [22]). Le lecteur trouvera ces raisonnements au paragraphe 3, avec les simplifications dues au fait que A est une algèbre de Banach.

2.1. La formule de Cauchy. Soit X une partie compacte du plan complexe, et U un voisinage de X. On sait qu'il est possible de trouver un contour fermé rectifiable, j, de $U \setminus X$, ou une somme de tels contours, de manière telle que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_j \frac{f(s)}{s-z} \, ds \tag{2}$$

dès que z appartient à un voisinage convenable de X. ($U \setminus X$ est l'ensemble des points de U qui n'appartiennent pas à X).

Le contour j n'est pas déterminé univoquement, mais sa classe d'homologie dans $U \setminus X$ est "naturelle". C'est-à-dire, soit $U' \subsetneq U$ un nouveau voisinage de X, et considérons la classe d'homologie de $U' \setminus X$ que l'on définit en appliquant les considérations ci-dessus, à U'. L'application identique de $U' \setminus X$ dans $U \setminus X$ induit une application de l'homologie de dimension 1 de $U' \setminus X$ dans celle de $U \setminus X$. Et la seconde classe d'homologie est appliquée sur la première de cette manière.

L'explication suivante permettra à certains de voir plus clairement ce qui se passe. Soit $V = U \setminus X$. Considèrons les homologies de dimension p de U, de V, et de U modulo V, puis la suite exacte d'homologie. Nous avons notamment une application

$$H_2(U \bmod V) \longrightarrow H_1(V)$$

L'ouvert U orienté positivement est un cycle à support compact de U modulo V. Un élément de $H_2(U \bmod V)$ est ainsi défini. La classe d'homologie de dimension 1 de $H_1(V)$ qui nous intéresse est l'image de cet élément de $H_2(U \bmod V)$.

De toute façon, quelle que soit l'explication que l'on donne, l'existence de cette classe d'homologie est fondamentale dans tout cours de fonctions d'une variable complexe.

2.2. Substitution. Soit f une fonction holomorphe sur U, il est naturel d'écrire

$$f[a] = \frac{1}{2\pi i}\int_j f(s)\,(s-a)^{-1}ds \qquad (3)$$

lorsque j appartient à la classe de cohomologie de $U \setminus (\mathrm{sp}\ a)$ décrite au numéro 2.1., si U est un voisinage du spectre de a. Cette définition n'est en fait qu'une extension de la formule de Cauchy (2).

La définition de $f[a]$ est légitime : l'intégrande, $f(s)(s-a)^{-1}$ est holomorphe sur $U \setminus \mathrm{sp}\ a$, l'intégrale ne dépend donc que de la classe d'homologie de j dans $U \setminus (\mathrm{sp}\ a)$.

Il est évident que $f[a]$ dépend de f d'une manière linéaire, et continue lorsque l'algèbre des fonctions holomorphes sur U est munie de la topologie de la convergence compacte.

Dans la définition de $f[a]$, nous n'avons nulle part utilisé le fait que f soit une fonction à valeurs complexes. Nous pouvons tout aussi bien définir $f[a]$ lorsque f est une fonction holomorphe à valeurs dans A.

Et si $f(s) = (z-a)g(z)$, $f[a]$ est l'intégrale de $g(z)$ sur le chemin fermé j ; ce chemin fermé est le bord d'une chaîne de dimension 2 dans U, l'intégrale est donc nulle :

$$f[a] = 0 \quad \text{si} \quad f(z) = (z-a)\,g(z)$$

avec g holomorphe sur U.

Si $f(z)$ est une fonction entière, nous pouvons prendre pour chemin j un cercle de rayon suffisamment grand, et orienté dans le sens positif. Et $f[a]$ est le résidu à l'infini de $f(z)(z-a)^{-1}$. En particulier, si $f(z)$ est la constante unité, $f[a]$ est le résidu à l'infini de $(z-a)^{-1} = z^{-1} + \ldots$ et est donc égal à l'unité.

Soit ensuite $r(z) = P(z)/Q(a)$ une fonction rationelle dont le dénominateur, Q, ne s'annule pas sur U : $Q(a)$ est alors inversible, on peut écrire $r(a) = P(a).Q(a)^{-1}$. (Nous supposons que le dénominateur est à coefficients complexes) Un calcul simple sur les polynômes montre que $r(z)-r(a)$ est divisible par $(z-a)$ dans l'algèbre des fonctions holomorphes sur U, par conséquent

$$r(a) = \frac{r(a)}{2\pi i} \int_\gamma (z-a)^{-1} dz = r(a)$$

On sait que les fonctions rationnelles sont denses dans l'algèbre des fonctions holomorphes d'une variable, sur un ouvert, cette algèbre étant munie de la topologie de la convergence compacte. C'est le théorème de Runge.

Revoyons les propriétés de l'application $f(z) \to f(a)$ qui ont été établies jusqu'à présent :

C'est une application linéaire continue dans A de l'algèbre $\tilde{\mathcal{O}}(U,A)$ des fonctions holomorphes sur U à valeurs dans A. Elle applique la constante 1 sur l'unité de A, la fonction z sur l'élément a, et sa restriction à une sous-algèbre dense est un homomorphisme. Par continuité, cette application est un homomorphisme de $\tilde{\mathcal{O}}(U,A)$ dans A.

2.3. <u>Fonctions holomorphes près d'un compact</u>. Si X est un compact de C^n, si E est un espace de Banach, $\tilde{\mathcal{O}}(X,E)$ est la limite inductive localement convexe des algèbres $\tilde{\mathcal{O}}(U,E)$, U un voisinage de X.

Cette définition demande à être précisée. Nous considérons les couples (U,f), où U est un voisinage de X, et f une fonction holomorphe sur U à valeurs dans E. Deux couples (U, f) et (U', f') sont dits équivalents si X a un voisinage U'' (contenu dans $U \cap U'$) sur lequel f et f' coïncident. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence entre couples (U, f). Les classes d'équivalence seront appelées " fonctions holomorphes près de X

et à valeurs dans E". Et $\tilde{O}(X,E)$ est l'ensemble de ces classes d'équivalence, avec une structure convenable.

Une structure d'espace vectoriel se définit d'une manière immédiate sur $\tilde{O}(X,E)$. Si E, F, G sont trois espaces de Banach, et $u : E \times F \to G$ est une application bilinéaire continue, alors u induit de manière évidente une application de $\tilde{O}(X,E) \times \tilde{O}(X,F)$ dans $\tilde{O}(X,G)$. En particulier, $\tilde{O}(X,A)$ est une algèbre si A est une algèbre de Banach, et $\tilde{O}(X,E)$ est un $\tilde{O}(X)$-module quelque soit l'espace de Banach E. (Nous écrirons généralement $\tilde{O}(X)$ pour $\tilde{O}(X,C)$ si C est le corps des complexes)

Une topologie est définie sur $\tilde{O}(X,E)$. Par définition, une partie convexe de cet espace est un voisinage de l'origine si, et uniquement si son image inverse par l'application structurelle $O(U,E) \to \tilde{O}(X,E)$ est un voisinage de l'origine pour la topologie de la convergence compacte de $O(U,E)$, ceci quelque soit le voisinage U de X. L'application structurelle $O(U,E) \to \tilde{O}(X,E)$ applique $f \in O(U,E)$ sur la classe d'équivalence de (U,f).

La topologie de $\tilde{O}(X,E)$ est donc la topologie localement convexe la plus fine telle que les applications structurelles soient toutes continues.

Je préfère ne pas trop m'avancer, au sujet des propriétés topologiques de $\tilde{O}(X,E)$. Il est clair que c'est un espace de Hausdorff : on peut trouver des formes linéaires qui ne s'annulent simultanément qu'à l'origine. Il est vraisemblable que l'application $\tilde{O}(X,E) \times \tilde{O}(X,F) \to \tilde{O}(X,G)$ associée à une application bilinéaire continue $E \times F \to G$ est continue, de même qu'il est vraisemblable que $\tilde{O}(X,E)$ est un espace complet.

Mais lorsque j'ai étudié ces espaces, en 1954 [21], je me suis borné à l'étude des espaces de fonctions holomorphes à valeurs complexes, $\tilde{O}(X)$. A leur sujet, on peut certainement affirmer que $\tilde{O}(X)$ est un espace complet, que la multiplication des fonctions est une opération continue, et que $\tilde{O}(X)$ est une algèbre à inverse continu. (L'application $(f,g) \to fg$ est continue, tandis que l'application $f \to 1/f$, qui est définie au voisinage de l'unité, y est continue).

Enfin, l'espace $\tilde{O}(X)$ est un espace de Montel, une partie bornée de $\tilde{O}(X)$ est l'image par l'application structurelle d'une partie bornée d'un espace $\tilde{O}(U)$. Les espaces $\tilde{O}(X,E)$ n'ont bien entendu aucune prétention à être de Montel, mais ils sont tonnelés, et leurs parties bornées sont des images de parties bornées d'espaces $\tilde{O}(U,E)$.

Le lecteur se demandera ce qu'il advient lorsque E n'est plus un espace de Banach, mais un espace localement convexe complet. Dans ce cas, je ne suis plus très sûr de ce qu'il faut appeler $\tilde{O}(X,E)$. L'espace E est une limite projective d'espaces de Banach E_i. On peut songer à définir $\tilde{O}(X,E)$, soit comme limite inductive d'espaces localement convexes $\tilde{O}(U, E)$, soit comme limite projective d'espaces $\tilde{O}(X, E_i)$. En général, ces opérations de limite inductive et de limite projective ne commutent pas. Il existe des indications que la limite projective des espaces $\tilde{O}(X, E_i)$ donne une définition plus intéressante d'un espace $\tilde{O}(X, E)$, que la limite inductive des espaces $\tilde{O}(U, E)$. Une étude de ce problème doit de toute manière être liée à celle des produits tensoriels topologiques d'espaces localement convexes complets.

2.4. Application de $\tilde{O}(X,A)$ dans A. L'algèbre $\tilde{O}(X,A)$ étant définie, il n'est pas difficile de définir une application, $f(z) \to f[a]$, de $\tilde{O}(X,A)$ dans A, en observant que les diverses applications $\tilde{O}(U, A) \to A$ que nous avons définies au paragraphe 2.2. vérifient les relations de compatibilité vis-à-vis des restrictions $\tilde{O}(U,A) \to \tilde{O}(U',A)$ (si $U' \subseteq U$), et induisent donc une application de la limite inductive.

La structure algébrique, et la structure topologique de $\tilde{O}(X,A)$ sont définies de manière telle que l'application $\tilde{O}(X, A) \to A$ est un homomorphisme continu.

Comme je l'ai déjà dit, je parlerai plus volontiers de $\tilde{O}(X)$, qui est une sous-algèbre de $\tilde{O}(X,A)$, que de $\tilde{O}(X, A)$, parce qu'il se fait que je connais mieux la topologie, et les propriétés de $\tilde{O}(X)$ que celles de $\tilde{O}(X, A)$.

2.5. Fonctions composées. Soit f une fonction analytique près de sp a ; alors sp $f[a] = f(\mathrm{sp}\ a)$. Etant donné la relation que nous connaissons entre le spectre d'un élément et l'espace structurel, il suffit de montrer que $\hat{b}(m) = f(\hat{a}(m))$ si $b = f[a]$. Mais soit $H : A \to A'$ un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach à unité A dans une algèbre de Banach à unité A', qui applique unité sur unité, et a sur a'. Il est évident que sp a' $\subseteq$ sp a, et si f est holomorphe près du spectre de a, que $f[a'] = H(f[a])$. Nous pouvons appliquer ce résultat lorsque A' est le corps des complexes, H étant le caractère associé à l'idéal maximal m, $\hat{b}(m)$ est l'image de $f[a]$ par le caractère, tandis que $f(\hat{a}(m)) = f[\hat{a}(m)]$.

Soit ensuite g une fonction analytique près de sp $f[a] = f(\mathrm{sp}\ a)$, alors $g(f)$ est analytique près de sp a. Nous pouvons définir $g[f[a]]$ en appliquant le calcul opérationel à $f[a]$; nous pouvons définir $g(f)[a]$ en appliquant le calcul opérationel à $g(f)$ et a. Nous allons montrer que ces deux éléments sont égaux :

$$g(f)[a] = g[f[a]]$$

(Nous avons supposé implicitement que f était une fonction numérique, mais g n'a aucune raison d'être numérique, peut-être un élément quelconque de $\tilde{O}(X, A)$).

La démonstration est très simple. Les applications $g \mapsto g(f)[a]$ et $g \mapsto g[f[a]]$ sont deux homomorphismes continus de $\tilde{O}(\mathrm{sp}\ f[a])$ dans A qui appliquent tous deux unité sur unité, et appliquent tous deux la variable sur $f[a]$ Ces deux homomorphismes coïncident donc sur l'ensemble des fonctions rationnelles, et cet ensemble est dense dans $\tilde{O}(\mathrm{sp}\ f[a])$.

2.6. Exercices.

1. Supposons que sp a ne rencontre pas l'axe réel négatif, ou un arc quelconque joignant l'origine au point à l'infini. Il est alors possible de définir a^t pour tout t réel l'application $t \to a^t$ est un homomorphisme continu du groupe additif des réels dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A.

2. Soit $t \to \varphi(t)$ un homomorphisme continu du demi-groupe additif des réels non négatifs, dans A, qui applique 0 sur l'unité de A. Le calcul opérationel permet de définir $\log \varphi(t)$ si t est suffisamment petit, et $t \to \log \varphi(t)$ est un homomorphisme continu d'un germe du demi-groupe R_+, + dans A, +. Cet homomorphisme doit être une application linéaire $t \to t.x$, pour $x \in A$, et $\varphi(t) = \exp(tx)$.

C'est le cas trivial du théorème de Hille-Yoshida [12] (semi-groupes uniformément continus).

3. Supposons que $\mathrm{sp}\, a = X_1 \cup X_2$ soit non connexe, X_1, X_2 étant fermés disjoints. Soit f nulle au voisinage de X_1, et égale à l'unité au voisinage de X_2, alors f est holomorphe près du spectre, et $f[a]$ est un idempotent non trivial (si ni X_1, ni X_2 n'est vide). (cf [16]).

3. Le calcul opérationel , n>1.

Nous construisons ici le calcul opérationel pour un nombre quelconque (fini) d'éléments de A. Lorsque n=1 la construction donnée ici, et celle du paragraphe précédent dérivent l'une de l'autre en appliquant la formule de Stokes.

Nous devrons introduire des formes différentielles extérieures sur C^n. Toutes les formes que nous considèrerons devront être multipliées par $ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n$ avant d'être intégrées. Dans cette optique, il sera raisonnable de considérer le quotient de l'algèbre des formes extérieures sur C^n (ou sur des ouverts de C^n), par l'idéal que les formes linéaires $ds_1, \dots, ds_n$ engendrent (si $s_1, \dots, s_n$ sont les variables complexes). Nous trouverons des formes différentielles extérieures non nulles de degrés 0, 1, ..., n, que nous pourrons identifier à des formes extérieures en $d\bar{s}_1, \dots, d\bar{s}_n$.

Il est intéressant d'observer que les fonctions holomorphes de $(s_1, \dots, s_n)$ sont des formes fermées modulo ds, et de degré 0.

La multiplication par $ds_1 \wedge \dots \wedge ds_n$ transforme une forme ou une classe de cohomologie modulo ds, de degré n et à support compact, en une forme ou une classe de cohomologie usuelle, mais de degré 2n. Cette dernière forme ou classe peut alors être intégrée sur son domaine.

3.1 Les coefficients $u_i(s)$. Nous avons défini le spectre de $(a_1, \dots, a_n)$ comme l'ensemble des $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ tels qu'il n'existe pas de $(u_1, \dots, u_n) \in A^n$ vérifiant la relation

$$\sum (a_i - s_i)\, u_i = 1 \qquad (4)$$

Nous pouvons donc trouver des fonctions $u_i(s)$, à valeurs dans A, sur $\mathbb{C}^n \setminus (\mathrm{sp}\,(a_1, \dots, a_n))$, qui vérifient identiquement la relation (4) sur leur domaine de définition. Cette relation ne détermine bien entendu pas univoquement les fonctions $u_i(s)$. Et il n'y a aucune raison de supposer que les fonctions $u_i(s)$ aient aucune propriété de régularité particulière.

Il est toutefois possible de les régulariser, de trouver par exemple des fonctions indéfiniment dérivables qui vérifient aussi la relation (4).

Considérons un point $t \notin \mathrm{sp}\, a$, puis un système de $u_{i.t}$ vérifiant la relation $\sum (a_i - t_i) u_{i.t} = I$. Alos

$$\sum (a_i - s_i)\, u_{i.t} = 1 + \sum (t_i - s_i) u_{i.t}$$

est inversible si s est voisin de t, notamment sur un voisinage V_t de t. Nous posons alors sur V_t :

$$u_{i.t}(s) = u_{i.t}\left[1 + \Sigma(t_i - s_i)u_{i.t}\right]^{-1}$$

afin que $u_{i,t}(s)$ soit une fonction indéfiniment dérivable sur V_t, qui vérifie identiquement sur V_t la relation (4).

Cette méthode permet de régulariser localement les fonctions $u_i(s)$, au voisinage de chaque point de leur domaine de définition. On régularise alors globalement ces fonctions à l'aide d'une partition de l'unité :

Il existe [19] une suite t_k de points de $C^n \setminus$ sp a, et une suite $g_k(s)$, de fonctions indéfiniment dérivables, non négatives, telles que

g_k soit à support compact dans V_{t_k},

aucun point de $C^n \setminus$ sp a n'appartient à une infinité de supports de fonctions g_k.

la somme $\Sigma g_k(s)$ est constante égale à l'unité.

On pose alors

$$u'_i(s) = \Sigma g_k(s)\, u_{i.t_k}(s)$$

la somme étant étendue à tous les k tels que $s \in V_{t_k}$. La fonction u'_i est indéfiniment dérivable, et

$$\Sigma(a_i - s_i)\, u'_i(s) = 1$$

Nous avons ainsi régularisé le coefficient u_i sur $C^n \setminus$ sp a.

3.2. <u>Une forme extérieure</u>. Soit V un voisinage de sp(a), puis y(s) une fonction à support compact dans V, indéfiniment dérivable, et identique à l'unité au voisinage du spectre. Prenons les fonctions $u'_i(s)$ que nous venons de construire; et définissons

$$v_i(s) = (1 - y(s))\, u'_i(s)$$

si $s \notin$ sp a),

$$v_i(s) = 0$$

si $s \in$ sp a. Les fonctions $v_i(s)$ sont indéfiniment dérivables à valeurs dans A, et

50.

$$\sum (a_i - s_i)\ v_i(s) + y(s) = 1 \qquad (5)$$

La fonction y est à support compact dans V.

Considérons la forme différentielle extérieure

$$\omega(v) = n!\ dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \qquad (6)$$

Cette forme différentielle est à support compact dans V.
(Rappelons que toutes les formes différentielles que nous considérons sont prise modulo les différentielles des variables complexes)

Différentiant la relation (5), nous obtenons la relation

$$\sum (a_i - s_i)\ dv_i + dy = 0 \qquad (7)$$

Appelons $\tilde{\omega}(v)$ la forme de degré $n-1$:

$$\tilde{\omega}(v) = \sum (-1)^{j-1}\ v_j\ dv_1 \wedge \dots \wedge \hat{dv_j} \wedge \dots \wedge dv_n$$

Alors

$$\begin{aligned} dy\,\tilde{\omega} &= -\sum (a_i - s_i)\ dv_i \\ &\qquad \wedge \sum (-1)^{j-1}\ v_j dv_1 \wedge \dots \wedge \hat{dv_j} \wedge \dots \wedge dv_n \\ &= -\sum (a_i - s_i)\ v_i\ dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \\ &= (y-1)\ dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat voulu :

$$\omega(v) = n!\ (y\ dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n - dy \wedge \tilde{\omega}(v))$$

Le support de ω est contenu dans celui de y.

3.3. Cohomologie de $\omega(v)$. A des fonctions $v_1, \dots, v_n$, y vérifiant la relation (5), y à support compact dans V, nous avons associé une forme extérieure $\omega(v)$, à support compact dans V, et définie par la relation (6). Considérons d'autres fonctions, $v'_1, \dots, v'_n$, y', de nouveau indéfiniment dérivables à valeurs dans A, sur C^n, y' à support compact dans V, et vérifiant elles aussi la relation (5), c'est-à-dire

$$\sum (a_i - s_i)\ u'_i(s) + y'(s) = 1$$

identiquement sur C^n. La forme extérieure $\omega(v')$ est aussi à support compact dans V.

Nous allons établir l'existence d'une forme Υ de degré $n-1$, et telle que

$$\omega(v) - \omega(v') = d\Upsilon$$

la forme Υ étant à support compact dans V elle aussi.

Nous observons d'abord que

$$\begin{aligned} v_i - v'_i &= \left[\Sigma (a_j - s_j)v'_j + y'\right] v_i \\ &\quad - v'_i \left[\Sigma (a_j - s_j) v_j + y\right] \\ &= \Sigma (a_j - s_j) \alpha_{ij} + \beta_i \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_{ij} = v'_j v_i - v'_i v_j$$

$$\beta_i = y' v_i - v'_i y$$

Les fonctions α_{ij}, β_i sont indéfiniment dérivables, $\alpha_{ij} = -\alpha_{ij}$, β_i est à support compact dans V. Il suffira donc d'établir le résultat $\omega(v) - \omega(v') = d\Upsilon$, Υ à support compact dans V, dans deux cas particuliers :

$$v'_1 = v_1 + \alpha(s)\ (a_2-s_2)$$

$$v'_2 = v_2 - \alpha\ (s)\ (a_1-s_1)$$

$$v'_3 = v_3,\ \ldots,\ v'_n = v_n$$

et

$$v'_1 = v_1 + \beta\ (s)$$

$$v'_2 = v_2,\ \ldots,\ v'_n = v_n,$$

β (s) étant supposé à support compact dans V. Le théorème général sera établi par une application successive de ces théorèmes partiels.

Dans la seconde hypothèse ,

$$\begin{aligned} dv'_1 \wedge \ldots \wedge dv'_n - dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n \\ = d\left[\beta dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n\right] \end{aligned}$$

ce qui est le résultat requis.

Il reste à envisager la première hypothèse :

$$dv'_1 \wedge \ldots \wedge dv'_n - dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n$$

$$= \left[d(v_1 + \alpha \cdot (a_2 - s_2)) \wedge d(v_2 - \alpha \cdot (a_1 - s_1)) - dv_1\, dv_2 \right]$$

$$\wedge dv_3 \wedge \ldots \wedge dv_n$$

$$= \left[(a_1 - s_1) dv_1 + (a_2 - s_2)\, dv_2 \right] \wedge d\alpha \wedge dv_3 \ldots dv_n$$

$$= dy \wedge d\alpha\, dv_3 \wedge \ldots \wedge dv_n$$

Le résultat annoncé est également vrai dans cette condition.

Une classe de cohomologie à support compact dans V est ainsi associée à $(a_1, \ldots, a_n)$, dès que V est un voisinage du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$. Cette classe de cohomologie contient la forme $n!\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n$ lorsque $v_1, \ldots, v_n$ sont des fonctions indéfiniment dérivables telles que $1 - \sum (a_i - s_i) v_i$ soit à support compact dans V.

Rappelons ici encore que nous parlons toujours de la cohomologie modulo $ds_1, \ldots, ds_n$.

3.4. __Produits directs.__ Considérons des éléments $a_1, \ldots, a_n$, puis $b_1, \ldots, b_k$, de A, un voisinage V de $sp(a_1, \ldots, a_n)$, un voisinage W de $sp(b_1, \ldots, b_k)$. L'ensemble $V \times W \subset C^{n+k}$ est un voisinage du spectre de $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k) = (a, b)$.

Une classe de cohomologie à support compact dans V est associée à (a), une classe de cohomologie à support compact dans W est associée à (b).

Dans $V \times W$, nous pouvons d'une part considérer le produit direct de la classe de cohomologie associée à (a) et de celle qui est associée à (b). D'autre part, nous pouvons considérer la classe de cohomologie qui est associée à (a, b).

__Ces deux classes de cohomologie sont égales.__

53.

Nous considérerons des fonctions u_i, y, indéfiniment dérivables sur C^n, avec y à support compact dans V, qui vérifient identiquement

$$\Sigma(a_i - s_i)\, u_i + y = 1$$

et des fonctions v_j, y', indéfiniment dérivables sur C^k, y' à support compact dans W, qui vérifient identiquement

$$\Sigma(b_j - t_j)v_j + y' = 1$$

Il est clair que

$$\Sigma(a_i - s_i)\, u_i(s) + \Sigma(b_j - t_j)\, y(s)\, v_j(t) + y(s)\, y'(t) = 1$$

identiquement sur C^{n+k}.

Le produit direct des classes de dohomologies associées à (a) et (b) contient la forme

$$n\,!\; k\,!\; du_1 \ldots du_n \;\; dv_1 \ldots dv_k$$

La classe de cohomologie associée à (a,b) contient la forme

$$(n+k)\,!\; du_1 \ldots du_n\; d(yv_1) \ldots d(yv_k)$$

cette seconde forme étant encore égale à

$$(n+k)\,!\; y^k\, du_1 \ldots du_n\, dv_1 \ldots dv_k$$

En effet, $u_1, \ldots, u_n$, et y ne dépendent que des variables $s_1, \ldots, s_n$, la différence entre ces deux formes ne contient que des termes de degré supérieur à n en ces variables.

Il suffira donc de montrer que

$$(n+r)\; y^r\, du_1 \ldots du_n - r y^{r-1}\, du_1 \ldots du_n$$

est la différentielle d'une forme extérieure à support compact dans V. Mais calculons

$$d\left[y^r \sum (-1)^{i-1} u_i \, du_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{u}_i \wedge \ldots \wedge du_n\right.$$

$$= r\, y^{r-1}\, dy \left[\sum (-1)^{i-1} u_i \, du_1 \ldots d\hat{u}_i \ldots du_n\right]$$

$$+ n\, y^r \; du_1 \ldots du_n$$

$$= - r\, y^{r-1} \left(\sum (a_j - s_j)\, du_j\right)$$

$$\wedge\left[\sum (-1)^{i-1} u_i \, du_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{u}_i \wedge \ldots \wedge du_n\right.$$

$$+ n\, y^r \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

$$= - r\, y^{r-1} \left[\sum (a_i - s_i) u_i\right] du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

$$+ n\, y^r \; du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

$$= (n + r)\, y^r \, du_1 \wedge \ldots \wedge du_n - r\, y^{r-1} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n$$

ce qui est le résultat recherché.

Les deux formes que nous considérons sont donc dans la même classe de cohomologie (modulo ds).

3.5. Définition de $f[a]$ Soit $f(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction holomorphe sur un voisinage V du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$. Nous définirons $f[a]$ en posant

$$f[a] = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int_V f(z)\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

les fonctions $v(z)$ étant choisies de manière telle que

$$1 - \sum (a_i - z_i)\, v_i\,(z)$$

soit à support compact dans V. La première partie de ce paragraphe avait notamment pour but de montrer que cette définition est légitime : l'intégrale est définie quelque soient les fonctions v choisies, et ne dépend pas du choix arbitraire de ces fonctions. Il est d'autre part clair que l'on définit ainsi $f[a]$ d'une manière compatible avec la limite inductive, c'est-à-dire que $f[a]$ est défini lorsque f est une fonction holomorphe "près du spectre" appartient à $\check{O}(\mathrm{sp}\ a, A)$.

55.

Supposons ensuite que $b_1, \ldots, b_k$ soient d'autres éléments de A, que $g(y_1, \ldots, y_k)$ soit holomorphe sur un voisinage du spectre de $b_1, \ldots, b_k$, puis que $h(z,y) = f(z)\, g(y)$. Nous avons montré, en fait, au numéro 3.4. que l'intégrale définissant $h\,[a,b]$ se décomposait en un produit direct d'intégrales, que

$$h\,[a,b] = f\,[a]\, g\,[b]$$

Supposons que la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ appartienne à $\check{O}(\mathrm{sp}\ a, A)$, et même à l'idéal engendré par $(z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n)$ dans cette algèbre. Dans ces conditions $f\,[a] = 0$. En fait nous allons montrer que $(z_i - a_i)\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n$ est la différentielle d'une forme à support compact. Par exemple

$$(z_1 - a_1) dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n = - dy \wedge dv_2 \wedge \ldots \wedge dv_n$$

ce qui est le résultat voulu. Le résultat analogue est établi pour $i \neq 1$ d'une manière tout à fait semblable.

$f\,[a]$ est l'unité de l'algèbre si f est la constante unité. Tout d'abord, la constante unité est le produit direct de n fonctions, ne dépendant chacune que d'une variable, constante et égale à l'unité. Il suffit donc d'établir ce résultat lorsque $n=1$. Pour f identique à l'unité, a un élément de A,

$$f\,[a] = \frac{1}{2\pi i} \int dv\, dz = - \frac{1}{2\pi i} \int_j v\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_j (z-a)^{-1}\, dz$$

Nous prenons pour j une circonférence, orientée positivement, et de rayon R suffisamment grand pour que $(a-z)\, v(z) = 1$ si $|z| \geqslant R$ mais $v(z) = (a-z)^{-1}$ sur j dans ces conditions.

On sait que l'intégrale définissant $f\,[a]$ est effectivement égale à l'unité (moyennant un choix convenable des orientations

Nous avons ainsi défini $f\,[a]$ lorsque f est holomorphe "près du spectre", et établi un certain nombre de propriétés de cette opération. Si le "théorème de Runge" était vrai, si les fonctions rationelles étaient denses dans les fonctions holomorphes, nous pourrions tirer de ces quelques observations toute sorte de propriétés du calcul opérationel que nous venons de définir. Tel n'est malheureusement pas le cas, nous devrons donc travailler un peu plus longuement avant d'obtenir les propriétés qui nous intéressent.

3.6. Invariance linéaire. Commençons par établir le résultat suivant : Soit $T:C^n \to C^k$ une application linéaire. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A, puis $b = (b_1, \ldots, b_k)$ l'image de $a = (a_1, \ldots, a_n)$ par l'application T. Le spectre de b est l'image par b du spectre de a. Si f est holomorphe près du spectre de b, f (T) est holomorphe près du spectre de a, soit $g = f(T)$, et $f[b] = g[a]$

Il s'agit d'un premier théorème de compatibilité du calcul opérationel avec la composition des fonctions.

Le théorème relatif aux spectres est évident, parce que pour chaque idéal maximal m, $B(m) = T(A(m))$.

Nous observons ensuite qu'une transformation linéaire T est toujours une composée $T_1 \circ T_2 \circ T_3 \circ T_4$, T_1 et T_4 inversibles, T_3 étant une projection $C^n \to C^{n'}$ $:(s_1, \ldots, s_n) \to (s_1, \ldots, s_{n'})$, et T_2 une injection $C^{n'} \to C^k$ $:(s_1, \ldots, s_{n'}) \to (s_1, \ldots, s_{n'}, 0, \ldots, 0)$. Le nombre n' est le rang de T.

Il suffira d'établir le théorème dans trois cas particuliers :

T inversible, T une projection $(s_1, \ldots, s_n) \to (s_1, \ldots, s_{n-1})$, et T une injection $(s_1, \ldots, s_n) \to (s_1, \ldots, s_n, 0)$.

Lorsque T est inversible, le résultat est obtenu par un changement de variables dans une intégrale multiple. Ce changement de variables n'a rien de particulièrement excitant, nous ne le ferons pas ici.

Dans le second cas que nous avons à considérer, $k=n-1$, $(b_1, \ldots, b_k) = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. La fonction f est holomorphe de $n-1$ variables, et $g(z_1, \ldots, z_n)$ est définie comme égale à

$f(z_1, \ldots, z_{n-1})$. La fonction g est donc le produit direct de f par la fonction de z_n qui est constante et égale à l'unité. Et $g[b] = f[a]\, 1 = f[a]$.

Il reste un troisième cas à considérer, $k=n+1$, $a_i = b_i$ $(i=1, \ldots, n)$, $b_{n+1} = 0$. Nous avons une fonction $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ et $g(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n, 0)$.

Le spectre de $(a_1, \ldots, a_n, 0)$ est le produit direct du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$ et de l'origine. Un voisinage du spectre contient le produit direct d'un voisinage du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$ et d'un voisinage de l'origine. Nous pouvons supposer sans nuire à la généralité que le domaine de définition de f se décompose en un produit direct de cette manière. Sur son domaine de définition,

$$f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = f(z_1, \ldots, z_n, 0) + Z_{n+1}\, h(z_1, \ldots, z_{n+1})$$
$$= g(z_1, \ldots, z_n) + z_{n+1}\, h(z_1, \ldots, z_{n+1}).$$

La fonction g est holomorphe sur un voisinage du spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$, la fonction h est holomorphe sur le domaine de f.

Nous voyons que f est la somme du produit direct de g par la constante unité, et d'un élément de l'idéal engendré par $z_{n+1} = z_{n+1} - b_{n+1}$. Et $f[b]$ sera la somme de $g[a]$ et de zéro.

C'est le résultat annoncé.

3.7. Propriété multiplicative. On démontre maintenant que l'application $f(z) \to f[a]$ est un homomorphisme en combinant l'invariance linéaire (pour l'application diagonale) et la multiplicativité établie pour les produits directs.

On doit démontrer que $f[a]\, g[a] = h[a]$ si $f(z)g(z) = h(z)$. Nous posons $H(z,y) = f(z)g(y)$, et appelons T l'application $z \to (z,z)$ de C^n dans C^{2n}.

58.

La fonction H est un produit direct de fonctions, $H[a,a] = f[a]\, g[a]$ D'autre part, $h(z) = H(Tz)$, et par conséquent $h[a] = H[Ta] = H[a,a]$ Nous avons effectivement le résultat demande : $f[a]\, g[a] = h[a]$.

3.8. Composition des fonctions. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A, et soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions holomorphes à valeurs complexes près du spectre de $a=(a_1, \ldots, a_n)$. Posons ensuite $b_i = f_i[a]$

Pour tout idéal maximal m, $\hat{b}_i(m) = f_i(\hat{a}(m))$. Le spectre de b est ainsi l'image par $f=(f_1, \ldots, f_k)$ du spectre de a.

Soit ensuite $g(y_1, \ldots, y_k)$ une fonction holomorphe près du spectre de b, la fonction $h(z) = g(f(z))$ est holomorphe près du spectre de a. Nous allons montrer que $g[b] = h[a]$.

Nous allons considérer le spectre de $(a,b) \subseteq C^{n+k}$, puis la fonction

$$F(z,y) = h(y) - g(z)$$

qui est un élément de $\mathcal{O}(sp(a,b))$. En vertu du théorème d'invariance linéaire, $F[a,b] = h[b] - g[a]$. Il suffira donc de montrer que $F[a,b] = 0$.

La fonction $F(z,y)$ s'annule si $y = f(z)$. Nous allons montrer qu'elle appartient à l'idéal ingendré dans $\mathcal{O}(sp\ a,b)$ par les fonctions $y_i - f_i(z)$, donc que l'on peut trouver des fonctions $\varphi_i(y,z)$ telles que

$$F(z,y) = \sum (y_i - f_i(z))\, \varphi_i(y,z).$$

Alors,

$$\begin{aligned} F[a,b] &= \sum (b_i - f_i[a])\, \varphi_i[a,b] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et l'existence des fonctions φ_i est assurée. On n'a qu'à poser

$$\varphi_i(z,y) = \frac{\left[F(y_1,\ldots,y_i,g_{i+1}(z),\ldots,g_k(z),z_1,\ldots,z_n) - F(y_1,\ldots,y_{i-1},g_i(z),\ldots,g_k(z),\ z_1,\ldots,z_n)\right]}{y_i - g_i(z)}$$

La démonstration est ainsi achevée.

3.9. Exercices.

1. Tous les théorèmes de ce chapitre sont vrais lorsque A est une algèbre localement convexe, complète, commutative et à unité, qui est une algèbre à inverse continu.

Toutes les propositions préliminaires que nous avons utilisées dans les démonstrations sont vraies lorsque A est à inverse continu. La théorie pourra donc être appliquée à l'algèbre $\tilde{O}(X)$, des fonctions holomorphes près d'un compact X de C^n, et à valeurs complexes.

2. Supposons A commutative et à unité, et d'autre part localement convexe complète. (Les hypothèses topologiques pourront même être fortement assouplies cf [2 2], ch I).
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A, et S une partie compacte de C^n. Dans certains cas, il est possible de trouver des fonctions indéfiniment dérivables sur le complément de S, à valeurs dans A, et bornées à l'infini, qui vérifient la relation

$$\sum (a_i - s_i)\ u_i(s) = 1$$

identiquement sur leur domaine de définition.

Nous dirons alors que $(a_1, \ldots, a_n)$ est un n-uple régulier; et que "S contient le spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$". Cette locution "S contient le spectre" a un sens, parce que l'on montre (avec une partition de l'unité) que l'intersection des compacts qui "contiennent le spectre" a encore la propriété considérée : il est raisonnable d'appeler cet ensemble "le spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$"

Adaptant convenablement les raisonnements ci-dessus, on définit de nouveau $f[a_1, \ldots, a_n]$, lorsque f est holomorphe "près du" spectre de $a_1, \ldots, a_n$. Et l'on montre notamment que l'application $f(z) \to f[a]$ est un homomorphisme.

3. Dans l'esprit de l'exercice 2, on constate que les coefficients $u_i(z)$ peuvent être choisis indéfiniment dérivables sur un ouvert, s'ils peuvent y être choisis bornés, ceci en appliquant convenablement les théorèmes établis dans [22].

4. Soit X une partie compacte de C^n qui a un système fondamental de voisinage qui sont des domaines d'holomorphies. L'algèbre $\tilde{O}(X)$ est une algèbre à inverse continu complète.
Les fonctions coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ (les variables) appartiennent à $\tilde{O}(X)$.

Le spectre de $(z_1, \ldots, z_n)$ dans l'algèbre $\tilde{O}(X)$ est l'ensemble X lui-même. Pour établir ce théorème, on applique le théorème qui affirme, lorsque D est un domaine d'holomorphie, que des fonctions holomorphes $u_1, \ldots, u_k(z)$, sur D, engendrent l'idéal unité de $\tilde{O}(D)$ si et uniquement si elles ne s'annulent pas simultanément sur D (cf H. Cartan [3], et K.Oka [18], H.Cartan [4]).

Dans les exercices suivants, nous dirons simplement que X est un compact d'holomorphie dans C^n lorsque X est un compact de C^n qui a un système fondamental de voisinages qui sont des domaines d'holomorphies.

5. Soit X un compact d'holomorphie, puis $H: \tilde{O}(X) \to A$ un homomorphisme continu de $\tilde{O}(X)$ dans une algèbre topologique A qui applique unité sur unité. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ les images dans A des variables, $z_1, \ldots, z_n$.

Alors $(a_1, \ldots, a_n)$ est un n(uple régulier, dont le "spectre" est contenu dans X, et H applique $f(z)$ sur $f[a]$.

Il s'agit d'un cas particulier du théorème, évident, affirmant que Ha est un n-uple régulier si a en est un, le spectre de Ha étant contenu dans le spectre de a, et $f[Ha] = H(f[a])$, lorsque $H : A_1 \to A_2$ est un homomorphisme d'algèbres topologiques complètes qui applique unité sur unité. Bien entendu, on vérifie que $f[z] = f(z)$.

Nous observons, entre autres, qu'un homomorphisme continu de $\tilde{\mathcal{O}}(X)$ dans une algèbre topologique qui applique unité sur unité est déterminé par l'image des variables $z_1, \ldots, z_n$, lorsque X est un compact d'holomorphie. Lorsque X est rationellement convexe, ce fait découle du théorème de Runge, mais si X n'est plus rationellement convexes, les fonctions rationelles ne sont plus denses dans $\tilde{\mathcal{O}}(X)$, et le théorème de Runge ne peut plus être appliqué.

6. Si X n'est pas un compact d'holomorphie, mais si sa cloture d'holomorphie, X_1, est univalente sur C^n, les algèbres $\tilde{\mathcal{O}}(X)$ et $\tilde{\mathcal{O}}(X_1)$ sont isomorphes, les théorèmes établis pour les compacts d'holomorphie sont applicables à $\tilde{\mathcal{O}}(X)$.

Si la cloture d'holomorphie X_1 de X n'est pas univalente, nous pouvons trouver deux points z, z', qui ont la même projection dans C^n. Les applications $f \to f(z)$, $f \to f(z')$ sont deux homomorphismes de $\tilde{\mathcal{O}}(X)$ dans C, qui sont continus, mais appliquent pourtant les fonctions coordonnées sur les mêmes nombres complexes.

7. Soit X un compact d'holomorphie, et soit E un espace de Banach. (ou un espace localement convexe complet). L'espace des applications linéaires $T : \tilde{\mathcal{O}}(X) \to E$ peut s'identifier avec une limite projective d'espaces de cohomologie (modulo $ds_1, \ldots, ds_n$ de formes de degré n, à coefficients indéfiniment dérivables, à valeurs dans E, et à support compact dans les voisinages de X.

Si V est un voisinage de X, si $v_1(s), \ldots, v_n(s)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables sur C^n à valeurs dans

$\tilde{O}(X)$, telles que $1-\sum(z_i-s_i)v_i(s)$ soit(comme fonction de s) à support compact dans V, alors $n!\, dv_1 \ldots dv_n$ définit une classe de cohomologie à support compact dans V et à valeurs dans $\check{O}(X)$. Faisant tendre V vers X, nous trouvons de cette manière un élément d'une limite projective de cohomologies à valeurs dans $\check{O}(X)$.

L'application $T: \tilde{O}(X) \to E$ applique cet (élément d'une limite projective d'espaces de) cohomologie à valeurs dans $O(X)$ sur un objet similaire à valeurs dans E.

Il faut encore établir l'isomorphisme entre les deux espaces. Mais soit f holomorphe sur V.

$$f(z) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int f(s)\, d_s v_1(s,z) \wedge \ldots \wedge d_s v_n(s,z) \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n$$

et

$$T f(z) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \int f(s)\, T\left[dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_n\right] \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n$$

c'est-à-dire, Tf se calcule à l'aide de l'image de notre classe de cohomologie.

8. Soit A une algèbre à inverse continu complète, commutative, à unité, soient $(a_1, \ldots, a_n)$ des éléments de A, soit S leur spectre, soit U un voisinage de S, et ε choisi suffisamment petit pour que $t \in U$ dès que $|s_i - t_i| < \varepsilon$ pour un $s \in S$ et tout $i = 1, \ldots, n$.

Soient ensuire $b_1, \ldots, b_n$ des éléments de A tels que $h(b_i) < \varepsilon$ pour tout i. (Si h est la semi-norme spectrale). Le spectre de $(a+b)$ est alors contenu dans S. (Considérer les $\hat{a}(m)+\hat{b}(m)$).

Enfin, supposons que f soit holomorphe sur U, puis $f[a]$, et $f[a+b]$, qui sont définis puisque U contient le spectre de l'un comme de l'autre.

$$f\,[a+b] = \Sigma \frac{1}{r!} \frac{\partial^r f}{\partial z^r}[a]\, b^r$$

ceci avec les notations condensées usuelles ($r=(r_1, \ldots, r_n)$, $r\,! = r_1! \ldots r_n!$, $b^r = b_1^{r_1} \ldots b_n^{r_n}$, etc).

La démonstration de cette "formule de Taylor" se fait en appliquant la formule de Taylor usuelle à $f(z+y)$, en observant que celle-ci converge sur le spectre de (a,b), puis en calculant $f(a+b)$ à l'aide de cette formule. (L'application $f \to f\,[a]$ est continue, le calcul est donc légitime).

9. La formule de Taylor ci-dessus pourra certainement être appliquée lorsque les éléments $b_1, \ldots, b_n$ sont dans le radical, par exemple nilpotents, puisque leur rayon spectral est nul.

10. Nous dirons que M est un A-module topologique lorsque M est un A-module et un espace vectoriel localement convexe, le produit $(a,m) \to a.m$ étant continu de $A \times M$ dans M. La somme directe $A \oplus M$ devient une algèbre topologique lorsque nous posons $(a,m).(a'm') = (a.a', am' + a'm)$. Les éléments de M sont de carré nul dans $A \oplus M$.

Une dérivation de A dans M est une application linéaire $D : A \to M$ qui vérifie l'identité $D(a.b) = a.Db + b.Da$. Dire que D est une dérivation signifie en fait que l'application $a \to (a, Da)$ est un homomorphisme de A dans $A \oplus M$.

Soit M un A-module topologique complet, soit D une dérivation continue de A dans M. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A, soit f holomorphe près du spectre de a, et à valeurs dans A. Dans ces conditions

$$D(f\,[a]) = (Df)\,[a] + \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i}[a] \,.\, Da_i$$

En fait, l'homomorphisme $x \to (x, Dx)$ applique $f\,[a]$ sur $(f, Df)\,[[a, Da]]$ (parce qu'il est continu et applique unité sur unité). Da étant de carré nul, nous pouvons appliquer la " formule de Taylor" de l'exercice 8,

64.

$$f\,[a, Da] = (f\,[a]\ , \sum \frac{\partial f}{\partial z_i}\,[a]\ Da_i\ )$$

11. **Soit X un compact d'holomorphie**, soit M un $\tilde{\mathcal{O}}(X)$-module topologique complet, et $D: \tilde{\mathcal{O}}(X) \to M$ une dérivation continue.

Alors, pour tout $f \in \tilde{\mathcal{O}}(X)$,

$$Df = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i}\ Dz_i$$

C'est un cas particulier du théorème établi dans l'exercice 10. La fonction f est à valeurs scalaires, $(Df)(z)$ est identiquement nulle.

12. <u>Clôtures d'holomorphie</u>. Si D est un domaine du plan complexe, on peut toujours trouver une fonction holomorphe sur D qui est singulière en tous les points frontières de D. Cette fonction ne peut-être prolongée à aucun domaine plus grand que D.

On sait qu'il existe des domaines de l'espace à 2 dimensions complexes, déjà, qui ont la propriété que toute fonction se prolonge à un domaine D_1 plus grand que D. Le premier exemple de tel domaine date de E.E.Levi [14] : D est la coquille sphérique, $1-\varepsilon < |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$, et D_1 la boule $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$. On obtient un résultat tout à fait analogue lorsque l'on remplace la coquille sphérique par son intersection avec le demi-espace $\mathcal{R}e\,(z_1) > 0$, et D_1 par la demi-boule correspondante.

Cartant et Thullen [5] montrent que tout domaine D peut être prolongé de manière unique en un " domaine d'holomorphie" si l'on souhaite qu'une fonction holomorphe sur D puisse toujours être prolongée, uniquement, en une fonction holomorphe sur la clôture d'holomorphie $\tilde{D}$ de D. Les algèbres topologiques $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(\tilde{D})$ sont isomorphes.

Seulement, dans le même article, ils montrent qu'il existe dans C^2 des "domaines univalents" dont la clôture d'holomorphie n'est pas "univalente". Pour être bref, disons qu'un domaine univalent est une partie ouverte connexe de C^n. A une dimension, la surface de Riemann de $z^{\frac{1}{2}}$(origine et infini exclus) est un exemple type de domaine non univalent. $\tilde{D}$. Une application de $\tilde{D}$ dans C^n est donnée, qui est localement un isomorphisme analytique, mais qui peut ne pas être injective. Un point de C^n peut être "recouvert plus d'une fois par le domaine".

Nous dirons que D est un domaine de C^n, ou un domaine de D_1 (si D_1 est un autre domaine) si D est univalent sur C^n, ou sur D_1. Sinon nous dirons que D est un domaine sur C^n, ou sur D_1. La clôture d'holomorphie d'un domaine de C^n ou de D_1 peut très bien n'être que sur C^n, ou sur D_1.

Les domaines d'holomorphie ont une propriété de <u>convexité</u> intéressante : si K est un compact d'un domaine d'holomorphie, si K_1 est la fermeture convexe de K pour l'ensemble des fonctions holomorphes sur le domaine, alors K_1 est compact. (la notion de fermeture convexe que nous utilisons ici a été définie au paragraphe 1.2).

Nous en arrivons maintenant aux clôtures d'holomorphie des compacts de C^n, qui motivent cette digression. X sera un compact de C^n, $U_1, \ldots, U_r, \ldots$ sera une suite fondamentale de voisinages de X, choisie de manière telle que la fermeture de U_r soit compacte dans U_{r-1}. Chaque U_r a une clôture d'holomorphie, $\breve{U}_r$. Si U_r n'est pas connexe, $\breve{U}_r$ sera la réunion disjoints des clôtures d'holomorphies des composantes connexes de U_r. Bien entendu, $\breve{U}_r$ sera de manière naturelle un domaine sur $\breve{U}_{r-1}$, pas "de" $\breve{U}_{r-1}$.

On sait que l'image de $\breve{U}_r$ dans $\breve{U}_{r-1}$(la partie de $\breve{U}_{r-1}$ qui est recouverte par $\breve{U}_r$) est contenue dans la fermeture convexe de U_r. La fermeture de U_r étant compacte dans U_{r-1}, $\breve{U}_r$ est projeté dans une partie compacte de $\breve{U}_{r-1}$.

Nous avons ainsi une suite d'espaces topologiques (même de variétés analytiques complexes), $\tilde{U}_r$, et pour chaque r une application continue $p_r : \tilde{U}_r \longrightarrow \tilde{U}_{r-1}$, qui applique $\tilde{U}_r$ dans une partie compacte de $\tilde{U}_{r-1}$. Il est bien naturel de définir la limite projective des espaces $\tilde{U}_r$ pour les applications p_r. Cette limite projective sera un espace compact, $\tilde{X}$. A un isomorphisme naturel près, ce compact ne dépend pas de la suite fondamentale de voisinages choisies.

<u>$\tilde{X}$ sera la fermeture d'holomorphie du compact X</u>.

Une fonction holomorphe près de X définit une fonction sur $\tilde{X}$, l'ensemble de ces fonctions sur $\tilde{X}$ sépare les points de $\tilde{X}$, l'espace $\tilde{X}$ s'identifie ainsi avec une partie de l'espace structurel de $\tilde{O}(X)$, la topologie de $\tilde{X}$ étant bien entendu la topologie induite.

<u>$\tilde{X}$ est l'espace de tous les idéaux maximaux de $\tilde{O}(X)$</u>.

Soit en effet α un idéal de A dont les fonctions représentatives n'ont pas de zéro commun sur $\tilde{X}$. Par un raisonnement de compacité, on trouve des éléments $f_1, \ldots, f_k$ de $\tilde{O}(X)$, qui appartiennent à un même $\tilde{O}(U_r)$ et n'ont pas de zéro commun sur $\tilde{U}_r$. Ces fonctions engendrent donc l'idéal unité de $\tilde{O}(U_r)$, et a fortiori de $\tilde{O}(X)$.

Pour chaque r, nous avons une application de $\tilde{U}_r$ dans C^n. Il existe ainsi une projection de $\tilde{X}$ dans C^n. A ma connaissance cette application n'a aucune raison d'être un homéomorphisme local, des points de C^n peuvent avoir une image inverse infinie dans $\tilde{X}$.

Cette image inverse sera bien entendu une limite projective d'ensembles finis, et sera donc un compact totalement discontinu.

4. Ensembles infinis d'indices.

On a fait observer, au cours de l'une ou l'autre séance de ce séminaire, qu'il n'y avait pas de raison majeure de ne considérer que des familles finies d'éléments de l'algèbre.

Soit I un ensemble, fini ou infini. Le spectre de $a = \{a_i\}_{i \in I} \in A^I$ sera l'ensemble des $s = \{s_i\}_{i \in I} \in C^I$ tels que l'ensemble des $a_i - s_i$, $i \in I$ engendrent un idéal propre de A. Cet ensemble est évidemment égal à celui des $\{\hat{a}_i(m)\}_{i \in I}$, avec m dans l'espace structurel. C'est donc une partie compacte de C^I. (C^I est muni de la topologie produit).

Si la famille a et l'unité engendrent topologiquement l'algèbre A, le spectre de a est une partie polynomialement convexe de C^I, qui s'identifie naturellement avec l'espace structurel.

On se demande ensuite comment définir des espaces $\tilde{O}(X)$, $\tilde{O}(X, A)$ lorsque X est une partie compacte de C^I. On songera tout d'abord à considérer les parties finies I_o de I, pour chaque I_o la projection X_{I_o} de X dans C^{I_o}, et la limite inductive des espaces, algèbres $\tilde{O}(X_{I_o})$, $\tilde{O}(X_{I_o}, A)$. Au sens de cette définition, une "fonction holomorphe d'une infinité de variables" ne dépend effectivement que d'un nombre fini de ces variables.

L'on peut songer à généraliser la définition classique de fonction holomorphe afin de la rendre applicable à des fonctions qui seraient définies sur des parties de C^I. Il se fait qu'une telle définition directe sera tout à fait équivalente à la précédente.

A n variables, une fonction holomorphe près d'un compact a un prolongement continu et holomorphe à un voisinage du compact ; ce prolongement est borné sur un voisinage U' qui est éventuellement plus petit que le voisinage initial.

Une définition naturelle applicable à C^I fournira des fonctions holomorphes, bornées sur un voisinage U de X, X compact, ces fonctions seront notamment bornées sur un ensemble $X + C^{I'}$, où I' est une partie de I dont le complément, I_o, est fini. Elles sont donc indépendantes des variables z_i, $i \in I'$, et ne dépendent que des variables $z_i, i \in I_o$.

Enfin, la définition de $f[a]$ est compatible avec le passage à la limite inductive définissant $\tilde{\mathcal{O}}(X)$, ou $\tilde{\mathcal{O}}(X, A)$, si bien qu'il est possible, lorsque a est une famille infinie et f holomorphe près du spectre de a, de définir $f[a]$.

J'hésite à faire ce passage à la limite inductive. D'abord, il me paraît trivial. Il ne fournit que peu de renseignements supplémentaires au sujet de l'algèbre. Mais il est bon de savoir que ce passage à la limite est possible. C'est par exemple la méthode qu'Arens et Calderon [2] ont utilisée pour généraliser les premiers résultats de Silov [20] relatifs au calcul opérationel.

Par contre, il est bon de se souvenir que les algèbres de fonctions d'un nombre fini de variables sont déjà suffisamment mal connues, et que les propriétés des algèbres de fonctions d'une infinité de variables que l'on connaît ne sont que des applications immédiates des propriétés connues dans le cas fini-dimensionel.

5. Considérations historiques.

5.1. Je ne puis situer l'origine du calcul opérationel à une dimension, tel qu'il est présenté dans le paragraphe 3. Des méthodes de ce type sont utilisées dans l'étude spectrale d'opérateurs normaux sur des espaces de Hilbert (où les raisonnements peuvent être poussé sensiblement plus loin, il est possible de définir des fonctions continues, et même mesurables d'opérateurs). Il semble que Poincaré et Fantappié aient étudié le cas où a est un opérateur sur un espace quelconque. Je connais en tout cas une note de Fantappié [7], dans laquelle il applique la formule de

Cauchy lorsque a est un opérateur sur un espace de dimension finie.

Le premier exposé systématique remonte à Gelfand [8] . Dunford [6] reprend la théorie, en la précisant, lorsque a est un opérateur continu sur un espace de Banach.

5.2. Les premiers résultats publiés, au sujet du calcul opérationel en n éléments d'une algèbre sont dûs à Silov [20] . Ces résultats sont valables lorsque l'algèbre A est semi-simple et de génération finie.

Des considérations largement analogues à celles que l'on trouve au paragraphe 4 ont permis à Arens et Calderon de lever l'hypothèse que A soit de génération finie [2] .

Enfin, l'auteur de ce chapitre a publié une construction du calcul opérationel qui était valable lorsque A n'est pas une algèbre semi-simple [21] .

5.3. La construction de Silov, et d'Arens et Calderon, est basée sur une formule intégrale d'A.Weil [23] , qui généralise la formule intégrale de Cauchy, et la rend applicable à des domaines rationellement convexes de l'espace C^n. Seulement, la forme différentielle intégrée, et le domaine d'intégration ont une expression compliquée, et peu maniable.

Il est difficile d'établir des propriétés de $f[a]$ de manière directe, lorsque $f[a]$ est défini à l'aide de l'intégrale de Weil. Seulement, lorsque A est semi-simple, A s'identifie à une algèbre de fonctions, et $f[a] = f(a)$. Toutes les propriétés que l'on pourrait souhaiter découlent de là.

5.4. Un raisonnement détourné permet ensuite d'obtenir des propriétés d'algèbres de Banach non semi-simple, de construire par exemple des idempotents (Silov [20]),ou de résoudre des équations analytiques (Arens et Calderon [2]).

70.

Soit A une algèbre de Banach, commutative à unité, soit R son radical, soit $A_1 = A/R$. On sait que A_1 est semi-simple et a le même espace structurel que A. Supposons que cet espace structurel soit non connexe, $\mathfrak{M} = X_1 \cup X_2$, avec X_1, X_2 fermés disjoints. On définit une fonction analytique près de $\mathfrak{M}$, qui est constante égale à l'unité près de X_1, et constante égale à zéro près de X_2. (cf paragraphe 4, pour les fonctions d'une infinité de variables).

Cette fonction est idempotente, elle définit un idempotent de A_1, qui se remonte en un élément de A, qui est certainement idempotent modulo le radical, soit e_1 l'élément de A,

$$e_1^2 - e_1 = x \in R.$$

On recherche alors un élément y du radical, tel que $(e_1 + y)$ soit vraiment un idempotent. Il s'agit donc d'une solution de l'équation $(e_1 + y)^2 - (e_1 + y) = 0$, donc de l'équation

$$y^2 + y + x = 0$$

Formellement,

$$y = \tfrac{1}{2}\,(-1 + (1 - 4x)^{\frac{1}{2}})$$

Le second membre a un développement Taylorien à l'origine, x peut-être substitué dans ce développement, parce qu'il appartient au radical, et on vérifie que l'élément y ainsi défini est la solution du problème.

Des raisonnements tout à fait analogues permettent de construire des solutions d'équations analytiques. Une première opération fournit une solution modulo le radical. La solution exacte est obtenue en substituant l'erreur éventuelle dans un développement en série de Taylor.

Le lecteur observera que la première opération, la substitution dans l'intégrale de Weil, fournit la solution du problème posé. Ceci parce qu'il est possible de construire le calcul opérationel à n dimensions lorsque l'algèbre n'est pas semi-simple.

5.5. La construction du calcul opérationel dans [21] est assez différente de celle qui est donnée ici. Au lieu d'utiliser la cohomologie (la d"-cohomologie) des espaces de formes extérieures, elle utilise l'intégrale de Cauchy, telle qu'on peut l'écrire sur des produits directs dans C^n, et un corrolaire de théorèmes établis par Oka [18] et Cartan [4] relatifs aux idéaux et modules de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

Soient $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_k$ des ouvertes du plan complexe, et $X \subseteq C^{n+k}$ leur produit direct. Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes, et soit $Y \subseteq C^n$ l'ensemble des $(z_1, \ldots, z_n)$ tels que $z_i \in U_i, P_j(z) \in V_j (i=1, \ldots, n; j=1, \ldots, k)$.

L'application $F(z,y) \to F(z,P(z))$ applique a priori $\mathcal{O}(X)$ dans $\mathcal{O}(Y)$, est un homomorphisme continu, et son noyau contient les fonctions $y_j - P_j(z)$. Oka et Cartan montrent, entre autres, que cet homomorphisme est surjectif, et que son noyau est engendré par les fonctions $y-P(z)$. On sait enfin qu'un homomorphisme surjectif d'espaces métrisables complets est ouvert, nous avons donc un isomorphisme de l'algèbre topologique $\mathcal{O}(Y)$ avec le quotient de $\mathcal{O}(X)$ par les polynômes $y-P(z)$.

Cette méthode permet de ramener l'étude de fonctions analytiques sur des ensembles compacts polynômialement convexes, par exemple, à celle des fonctions analytiques sur des produits directs. En la combinant avec la méthode exquissée au paragraphe 4, nous obtenons une méthode permettant de construire le calcul opérationel dans une algèbre de Banach. (Même dans une algèbre plus générale, moyennant des hypothèses convenables).

Il faut signaler que l'ensemble appelé par l'auteur "le spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$" dans [21] n'est pas le spectre défini et étudié ici, mais sa fermeture rationellement convexe.

5.6. La construction du calcul opérationel qui a été donnée ici est apparentée à celle que l'on trouve dans [22] .

Un objet apparaît intéressant ... peut-être autant que le calcul opérationel lui-même. Il s'agit de la d"-classe de cohomologie (à support compact dans les voisinages du spectre et à valeurs dans A) que nous associons à $(a_1, \ldots, a_n)$.

Cette classe de cohomologie a des liens étroits avec la formule intégrale de Cauchy à n dimensions. Signalons par exemple la formule de Cauchy-Fantappié, écrité par Leray [15] . Cette formule s'obtient en appliquant la formule de Stokes à cette classe de cohomologie. Signalons d'autre part un travail de F. Norguet [17] , qui établit le lien entre la formule de Cauchy-Fantappié et celle de A.Weil.

Enfin, dans un travail récent, Arens [1] construit un calcul opérationel basé sur une formule "à la" Weil. Il est vraisemblable que les calculs de Norguet permettraient d'établir le lien entre cette formule d'Arens et notre classe de cohomologie, tout comme ils établissent le lien entre la formule de Weil et celle de Cauchy-Fantappié.

Pour terminer, il faut signaler que le mémoire [22] contient des théorèmes plus généraux, et à bien des points de vue, que ceux qui sont établis ici.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. ARENS. The analytic functional calculus in commutative topological algebra. Pac.J. of Math. 11.1961. p. 405-429.

2. R. ARENS and A.P. CALDERON. Analytic functions of several Banach algebra elements. Ann. of Math. 62.1955.p.204-216.

3. H. CARTAN. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables. C.R.Paris.1934.

4. H. CARTAN. Idéaux et modules de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Bull.Soc.Math. France.78.1950.

5. H. CARTAN et P. THULLEN. Regularitäts und Konvergenzbereiche. Math. Ann. 106. 1932.

6. N. DUNFORD. Spectral Theory. Bull.A.M.Society.1943.p.637-651.

7. L. FANTAPPIE. Le calcul des Matrices. C.R. Paris.186. 1928. pp. 619-621.

8. I. GELFAND. Normierte Ringe. Mat.Sbornik.9.51.1941.p.3-24.

9. I. GELFAND. Ideale und Primärideale einer normierten Ringes. Mat. Sbornik. 9.51. 1941. p.41-58.

10. I. GELFAND. Zur Theorie der Charaktere der Abelschen Gruppe. Mat.Sbornik. 9.51. 1941. p.51-66.

11. I. GELFAND et G.E. SILOV. Uber verschiedene der Einführung einer Topologie in die Menge der Maximale Ideale einer normierten Ringes. Mat. Sbornik. 9.51. 1941. p.25-40.

12. E. HILLE et R.S. PHILIPPS. Functional analysis and semi-groups A.M.S. Coll.Pub. 31. 1957.

13. K. HOFFMANN. Banach spaces of analytic functions. Prentice Hall Publ. 1952.

14. E.E. LEVI. Sullc ipersupreficio dello spazio a quatro dimensione. Annali di Mat. P.e App.18.1911

15. J. LERAY. Fonction de variables complexes : sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctionnelles linéaires. R.C.Lincei. 1956. p.589-590.

16. E.R. LORCH. The spectrum of a linear transformation. Trans. A.M.S. 52. 1942. p. 238-248.

17. F. NORGUET. Intégration de formes différentielles non fermées. Rendiconti di Mat. 20.1961. p.355-372.

18. K.OKA. Fonctions de plusieurs variables complexes. VII. Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. France. 58.1950.

19. L. SCHWARTZ. Théorie des distributions. Paris. Hermann et Cie. 1950.

20. G.E. SILOV. Sur la décomposition d'un anneau normé commutatif en somme directe d'idéaux.(Russe).Mat.Sbornik.32(74) 1953. p.353-364.

21. L. WAELBROECK. Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. Journ. de Math. P. et App. 33.1954.p.147-186.

VI. REPRESENTATIONS UNITAIRES DES ALGEBRES A INVOLUTION

1. Rappel

1.1. On appelle algèbre à involution une algèbre A sur le champ des complexes C munie d'une fonction, appelée involution, de A dans A notée* et ayant les propriétés suivantes :

$a^{**} = a$

$(a+b)^* = a^* + b^*$

$(ka)^* = \bar{k}\,(a)^*$ si k est un nombre complexe

$(ab)^* = b^*a^*$

1.2. Nous dirons qu'un élément a appartenant à A est :

hermitien si $a^* = a$;

normal si $a^*a = aa^*$;

unitaire si $a^* = a^{-1}$.

1.3. Exemple d'une algèbre à involution

L'algèbre des opérateurs sur un espace de Hilbert H, notée B(H) possède une involution qui applique tout opérateur T sur son adjoint T^*, défini par la relation :

$(Tx,y) = (x,T^*y)$

On vérifie aisément que c'est une involution.

2. Représentantion unitaire d' une algèbre à involution A sur un espace hilbertien.

2.1. Définition

Une réprésentation unitaire d'une algèbre à involution A sur un espace de Hilbert H est un homomorphisme r de A dans B(H) permis pour l'involution* : $r(a^*) = [r(a)]^*$.

Dans la suite l'image r(a) de a par l'homomorphisme r sera notée $\tilde{a}$.

2.2. <u>Nous dirons que le sous-espace H_1 de l'espace H est invariant pour la représentation r si aH_1 est contenu dans H_1 pour tout élément a de A.</u>

<u>Proposition</u>

Si H_1 est un sous-espace de l'espace de Hilbert H et est invariant pour la représentation r, alors le sous-espace $H_1^{\perp}$ orthogonal à H_1 est aussi invariant pour la représentation.

<u>Démonstration</u>

soient y appartenant à $H_1^{\perp}$ et a appartenant à A

Pour tout vecteur x de l'espace H_1 nous avons

$$(a^*x, y) = 0$$

d'où $(x, ay) = 0$

mais ceci implique que ay fait partie de $H_1^{\perp}$.

Comme nous pouvons reprendre le même raisonnement pour tout vecteur y de l'espace $H_1^{\perp}$ et pour tout élément a de l'algèbre A, la proposition en découle.

<u>Corollaire</u>.

Si H_1 est un sous-espace invariant pour la représentation r, alors l'adhérence $\overline{H}_1$ de H_1 est aussi un sous-espace invariant. Ceci résulte du fait que $\overline{H}_1$ est égal au sous-espace $H_1^{\perp\perp}$, orthogonal à $H_1^{\perp}$.

2.3. <u>Le radical d'une représentation</u>.

<u>L'ensemble des vecteurs de l'espace H qui sont appliqués sur 0 par les images de l'algèbre A pour la représentation r est appelé le Radical de cette représentation</u>.

Représentons le radical par N ;

alors $N = \{ x \in H \mid ax = 0 \ \forall a \in A \}$

<u>Proposition.</u>

Le radical N d'une représentation r est un sous-espace invariant (pour cette représentation) de l'espace hilbertien H ;

77.

Démonstration.

Si x et y appartiennent à N il en sera de même de $x+y$ car les opérateurs de l'espace de Hilbert H sont linéaires par définition.

Si k représente un nombre complexe et si x fait partie du radical alors kx fait aussi partie du radical, ceci résultant encore de la linéarité des opérateurs.

Donc le radical N de la représentation est un sous-espace de l'espace H; manifestement invariant.

Remarque.

De la proposition 2.2. et 2.3. il suit que l'espace $N^{\perp}$, orthogonal au radical N, est un sous-espace invariant de l'espace H pour la représentation r. De cette façon nous pouvons considérer une nouvelle représentation de l'algèbre à involution A sur le sous-espace $N^{\perp}$ de l'espace hilbertien H. Il est clair que le radical de la nouvelle représentation de A sera nul. Dès lors, en passant éventuellement au sous-espace $N^{\perp}$ de l'espace H, nous pouvons supposer désormais que toute représentation r de l'algèbre A sur un espace hilbertien possède un radical nul.

2.4. Représentations unitaires irréductibles et représentations unitaires cycliques.

Définitions.

Une représentation unitaire r de l'algèbre à involution A sur un espace de Hilbert est irréductible si H ne contient pas de sous-espaces propres fermés invariant pour la représentation.

Une représentation unitaire r de l'algèbre à involution A sur l 'espace hilbertien H est cylcique s'il existe un élément g de H tel que l'espace H soit l'adhérence de $r(A)g$

Nous dirons que g est un vecteur cyclique pour la représentatic

Proposition.

Si r est une représentation unitaire cyclique de A sur le sous-espace M de l'espace H et si g est un vecteur cyclique de cette représentation, alors g appartient à l'espace M.

Démonstration.

$g = g' + g''$ avec g' appartenant à M

g'' appartenant à $M^{\perp}$

donc $\tilde{a}g = \tilde{a}g' + \tilde{a}g''$

mais $\tilde{a}g$ appartient à M

et $\tilde{a}g'$ appartient à M parce que r est une représentation sur M.

Il en résulte $\tilde{a}g''$ appartient à M,

mais $\tilde{a}g''$ fait aussi partie de $M^{\perp}$ puisque l'espace $M^{\perp}$ est invariant pour la représentation r ; comme le radical de la représentation est nul, il faut que $g'' = 0$ c.q.f.d.

Proposition.

Toute représentation unitaire irréductible de A sur l'espace H est cylcique pour chacun des vecteurs x non nuls de H.

2.5. Théorème.

Toute représentation r de l'algèbre à involution A sur un espace de Hilbert est la somme directe de représentations cycliques.

Démonstration :

Soit le vecteur x appartenant à H et posons $r(A)x = M_1$. L'adhérence $\overline{M}_1$ de M_1 est un sous-espace invariant de H. En effet, $r(A)x$ est invariant pour la représentation r : soit y appartenant à $r(A)x$; donc il existe un élément a de A tel que $y = r(a)x$; il en résulte que $r(A)y$ est égal à $r(A)r(a)x$, et, par conséquent, $r(A)y$ est contenu dans $r(A)x$.

Une proposition précédente nous montre que l'adhérence $\overline{M}_1$ de $r(A)x$ est un sous-espace invariant pour la représentation $\overline{M}_1^{\perp}$ est aussi un sous-espace fermé invariant.

Une application du théorème de Zorn termine la démonstration.

3. Fonctionnelles linéaires positives.

3.1. Définition

Une fonctionnelle linéaire f sur l'algèbre à involution A sera dite réelle si $f(a)$ est réel pour tout élément hermitien a de A.

Cette condition est équivalente à $\overline{f(a^*)} = f(a)$ pour tout élément a de A.

En effet : tout élément a de A peut se mettre sous la forme

$$a = \frac{a + a^*}{2} + \frac{a - a^*}{2i}\, i$$

ou $\frac{a + a^*}{2} = a'$ et $\frac{a - a^*}{2i} = a''$ sont des éléments hermitiens de A.

$$\begin{aligned} \text{alors } \overline{f(a' - a''i)} &= \overline{f(a') - if(a'')} \\ &= f(a') + if(a'') \text{ parce que } f \text{ est une fonctionnelle linéaire positive.} \\ &= f(a' + a''i) \end{aligned}$$

donc $\overline{f(a^*)} = f(a)$ pour tout élément a de l'algèbre A;

L'implication réciproque est évidente.

Une fonctionnelle linéaire f sur l'algèbre à involution A sera dite positive si elle est réelle et si $f(a^*a) \geqslant 0$ pour tout élément a de l'algèbre A.

3.2. Inégalité de Schwarz

Si f est une fonctionnelle linéaire positive sur l'algèbre A alors pour tout couple d'éléments a, b de A nous avons l'inégalité :

$$\boxed{|f(b^*a)|^2 \leqslant f(a^*a).f(b^*b)}$$

Démonstration

Comme f est une fonctionnelle linéaire positive

$$f\left[(a+kb)^*(a+kb)\right] \geqslant 0 \quad \text{où } k \text{ est un nombre}$$

complexe.

En effectuant cette inégalité nous obtenons

$$|k|^2 f(b^*b) + kf(a^*b) + \overline{k}\, f(b^*a) + f(a^*a) \geqslant 0$$

Posons maintenant respectivement k égal à 1 et k égal à i.

Cela nous donne

$$\operatorname{Im}\left[f(a^*b) + f(b^*a)\right] = 0$$

et $\operatorname{Re}\left[f(a^*b) - f(b^*a)\right] = 0$ ce qui entraîne

$$f(a^*b) = \overline{f(b^*a)}$$

Il s'ensuit que

$$|k|^2 f(b^*b) + 2|k|\,|f(a^*b)| + f(a^*a) \geqslant 0$$

D'où

$$|f(a^*b)|^2 \leqslant f(b^*b).f(a^*a) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

3.3. Chaque fonctionnelle linéaire positive sur l'algèbre à involution A définit sur cette algèbre un produit scalaire.

Posons $(a,b) = f(b^*a)$

De cette façon nous obtenons un produit scalaire ; en effet les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(a,b) = \overline{(b,a)}$$

$(a + c,b) = (a,b) + (c,b)$ si c est un autre élément de A

$$(a, b+ c) = (a,b) + (a,c)$$

$(ka,b) = k(a,b)$ où k est un nombre complexe

$$(a,kb) = \overline{k}(a,b)$$

3.4. Fonctionnelles linéaires positives prolongeables.

Supposons que l'algèbre à involution A ne possède pas d'unité.

Nous pouvons plonger A dans une algèbre à élément unité A_e (I. 2 page).

Une fonctionnelle linéaire positive f sur l'algèbre A sera dite "prolongeable" si nous pouvons étendre f en une fonctionnelle linéaire positive sur A_e.

Proposition

Une fonctionnelle linéaire positive f sur l'algèbre A sera prolongeable si et seulement si pour tout élément a de A l'inégalité $|f(a)|^2 \leqslant Nf(a^*a)$, où N est un nombre positif, est satisfaite.

La condition est nécessaire.

Notons $\hat{f}$ un prolongement de la fonctionnelle linéaire positive f sur A_e. L'inégalité de Schwarz nous donne

$$|\hat{f}(a)|^2 \leqslant \hat{f}(e).\hat{f}(a^*a)$$

posons $N = \hat{f}(e)$

Comme $\hat{f}$ est un prolongement de f nous concluons que

$$|f(a)|^2 \leqslant Nf(a^*a)$$

La condition est suffisante.

Par hypothèse nous avons $|f(a)|^2 \leqslant Nf(a^*a)$

Posons $\hat{f}(e) = N$

Alors $\hat{f}\left[(a+ke)^*(a+ke)\right] = \hat{f}(a^*a) + \bar{k}\,\hat{f}(a) + k\hat{f}(a^*) + |k|^2\hat{f}(e)$

si k est un nombre complexe

$$= \hat{f}(a^*a) + 2\,\mathrm{Re}\left[k\hat{f}(a)\right] + |k|^2\hat{f}(e)$$

$$\geqslant \hat{f}(a^*a) - 2\,|k|\,|f(a)| + |k|^2\hat{f}(e)$$

$$\geqslant \hat{f}(a^*a) - 2\,|k|\sqrt{Nf(a^*a)} + |k|^2 N$$

$$\geqslant \left[\hat{f}(a^*a)^{1/2} - |k|\,N^{1/2}\right]^2 \geqslant 0$$

ceci nous montre que $\hat{f}$ est une fonctionnelle linéaire positive sur A_e.

4. Fonctionnelle linéaire positive associée à une représentation unitaire r d'une algèbre à involution A sur un espace de Hilbert H.

4.1. Définition

Soit r une représentation unitaire cyclique de l'algèbre A sur l'espace hilbertien H. Ceci veut dire qu'il existe un vecteur g dans H tel que H soit l'adhérence de $r(A)g$.

Nous posons alors $f(a) = (\overset{\infty}{a}g, g)$

La fonctionnelle linéaire, ainsi définie est positive :

$$f(a^*a) = (\overset{\infty}{a}{}^* \overset{\infty}{a}(g), g)$$
$$= (\overset{\infty}{a}g, \overset{\infty}{a}g) \geq 0$$

Remarquons que la fonctionnelle f est toujours prolongeable

En effet l'opérateur $\overset{\infty}{e}$ est l'identité I ce qui implique que $\hat{f}(e) = (g, g)$

4.2. Représentations unitairement équivalentes.

Soient r_1 et r_2 deux représentations cycliques de l'algèbre A respectivement sur les espaces de Hilbert H_1 et H_2.

Ces deux représentations seront dites équivalentes s'il existe un opérateur unitaire U de H_1 dans H_2 satisfaisant à la condition $Ur_1(a) = r_2(a)U$ pour tout élément a de A.

Proposition.

Deux représentations cycliques unitairement équivalentes, dont les générateurs g_1 et g_2 se correspondent, donnent lieu à la même forme linéaire positive et réciproquement.

Démonstration.

Supposons que les deux représentations r_1 et r_2 de A soient unitairement équivalentes.

Alors $f_2(a) = (r_2(a)g_2, g_2)$ ceci étant la définition de f_2

$= (r_2(a)Ug_1, Ug_1)$ parce que g_1 et g_2 se correspondent

$= (Ur_1(a)g_1, Ug_1)$ comme r_1 et r_2 sont équivalentes

$= (r_1(a)g_1, g_1)$ étant donné que U est un opérateur unitaire

$= f_1(a)$

Réciproquement, deux représentations de l'algèbre A qui donnent lieu à la même fonctionnelle linéaire positive sont unitairement équivalentes (voir Naimark page 242).

4.3. <u>Les fonctionnelles linéaires positives "représentables".</u>

Soit f une fonctionnelle linéaire positive prolongeable.

Considérons l'ensemble I formé des éléments a de l'algèbre A qui satisfont à la condition $f(a^*a) = 0$

<u>Etablissons que I est un idéal à gauche de l'algèbre A.</u>

Si a et b font partie de I il en est de même de $a+b$

En effet

$$f\left[(a+b)^*(a+b)\right] = f(a^*a) + f(a^*b) + f(b^*a) + f(b^*b)$$

mais $f(a^*a)$ et $f(b^*b)$ sont nuls par hypothèse

En appliquant l'inégalité de Schwarz nous arrivons à $f(a^*b) = 0$ et $f(b^*a) = 0$.

Si a fait partie de I et si c est un élément quelconque de A alors ca fait encore partie de I.

En effet

$$|f(a^*c^*ca)|^2 \leq f\left[(a^*c^*c)^*(a^*c^*c)\right].f(a^*a) \text{ d'après l'inégalité de Schwarz}$$

Il en résulte que $f(a^*a) = 0$ entraîne $f(a^*c^*ca)=0$

c.q.f.d.

Nous pouvons donc considérer l'espace-quotient A/I que nous noterons H_1'.

Sur l'espace H_1' nous pouvons définir un produit scalaire de la façon suivante :

si $x = a+I$ et si $y = b+I$ alors

$$(x,y) = f(b^*a)$$

Muni de ce produit scalaire, H_1' s'érige en espace préhilbertien.

Nous définissons alors aisément une représentation r de l'algèbre A sur l'espace préhilbertien H_1' : à tout élément a de A nous faisons correspondre $r(a)$ de $B(H_1')$ tel que pour tout vecteur x de H_1' $r(a)x = ax$.

Mais nous voudrions pouvoir étendre la représentation r de A sur H_1' en une représentation de A sur l'espace de Hilbert H_1 correspondant. Ceci sera possible si les opérateurs $r(a)$ sont bornés sur H_1', en d'autres termes si

$$f(b^*a^*a\,b) \leq M_a f(b^*b) \text{ pour tout élément } b \text{ de } A.$$

Si la fonctionnelle linéaire positive f est telle qu'à tout élément a de A nous pouvons faire correspondre un nombre positif M_a de façon à ce que $f(b^*a^*ab)$ soit inférieur à $M_a f(b\,b)$ pour tout b de A, alors nous dirons que f est représentable.

Nous pouvons conclure que toute fonctionnelle linéaire positive représentable et prolongeable sur l'algèbre A donne une représentation cyclique unitaire de A sur un espace de Hilbert.

Noyau de la représentation.

C'est l'ensemble des éléments a de A pour lesquels $\tilde{a} =$ 0
La condition précédente est équivalente à la suivante :

$$f(b^*a^*ab) = 0 \text{ pour tout } b \text{ de } A.$$

VII. REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES DES ALGEBRES A INVOLUTION

Sauf mention du contraire, les algèbres considérées auront un élément unité.

I. Etude du commutant d'une représentation cyclique.

Soit f une fonctionnelle représentable et g le générateur de la représentation cyclique correspondante r sur H. Donc $f(a) = (\bar{a}(g), g)$ où $\bar{a}$ reppésente l'opérateur associé à a et g est le générateur de H.

I.I. Définition

Soit B l'image de A par r dans $B(H)$
$B(H)$ (ensemble des opérateurs commutant avec les éléments de B).

Le commutant B' de A pour la représentation r est l'ensemble des opérateurs de $B(H)$ qui commutent avec tous les éléments de H. Si l'on considère H comme A-module, ce ne sont autre que les A-eudomorphismes de H.

I.2. Fonctionnelles linéaires positives subordonnées à une fonctionnelle linéaire positive.

Supposons que f' et f soient des fonctionnelles linéaires positives sur A.

Nous disons que f' est subordonnée à f s'il existe un nombre C tel que $Cf-f'$ soit une fonctionnelle linéaire positive. (Remarquons que C est nécessairement > 0, sinon on aurait

$$Cf(a^*a) - f'(a^*a) < 0 \quad \text{lorsque} \quad f(a^*a) \neq 0).$$

I.3. Théorème

Toute fonctionnelle linéaire positive f' subordonnée à f est de la forme $f'(a) = (\bar{a}\, h(g), g)$ où h est un opérateur positif(et donc hermitien) de $B' \subset B(H)$. Réciproquement, tout opérateur positif de B' définit une fonctionnelle linéaire positive f' subordonnée à f.

1) Soit h un opérateur positif ; posons alors

$f_h(a) = (\tilde{a}h(g),g)$

la fonctionnelle linéaire ainsi définie est positive

$f_h(a^*a) = (\tilde{a}^*\,\tilde{a}h(g),g)$

$= (h\tilde{a}(g),\ \tilde{a}(g)) \geqslant 0$ puisque $h \geqslant 0$

D'autre part $(hx,x) < \| h \| (x,x)$ (en appliquant l'inégalité de Schwarz dans H) pour tout élément de H.

Posons alors $x = \tilde{a}(g)$

Donc $\| h \| (\tilde{a}(g),\tilde{a}(g)) - (h\tilde{a}(g),\tilde{a}(g)) \geqslant 0$

$\| h \| (\tilde{a}^*\tilde{a}(g),g) - (\tilde{a}^*\tilde{a}h(g),g) \geqslant 0$

$\| h \| f(a^*a) - f'(a^*a) \geqslant 0$

et ceci $\forall\ a \in A$

d'où $\| h \| f - f' \geqslant 0$

2) Réciproquement, soit f' une fonctionnelle linéaire positive subordonnée à f. Il existe un nombre C tel que

$$Cf(a^*a) \geqslant f'(a^*a)$$

Posons

$$(\tilde{a}(g),\tilde{b}(g))_1 = f'(b^*a)$$

Montrons que cette formule, définit un produit scalaire sur H

Si $\tilde{a}(g) = \tilde{c}(g)$ alors $f'(b^*a) = f'(b^*c)$

$f((a-c)^*(a-c)) = ((\tilde{a}-\tilde{c})(g),(\tilde{a}-\tilde{c})(g)) = 0$

et donc $f'((a-c)^*(a-c)) = 0$

l'inégalité de Schwarz donne alors ; pour tout élément b de A

$|f'(b^*(a-c))|^2 \leqslant f(b^*b)f((a-c)^*(a-c)) = 0$

d'où $= f(b^*a) = f(b^*c)$

On établit la même chose pour le second facteur.

Ainsi l'expression $(\tilde{a}(g),\tilde{b}(g))_1$ est uniquement déterminée dans $H' = \left\{ \{\tilde{a}(g)\}\ a \in A \right\}$. En outre c'est une forme bilinéaire.

87.

Comme $(\tilde{a}(g),\tilde{a}(g))_1 \leq C(\tilde{a}(g),\tilde{a}(g))$, la forme bilinéaire est bornée sur H' et peut donc être prolongée en une forme bilinéaire sur H, completion de H'.

Dans B(H) il existe un opérateur h tel que

$(x,y)_1 = (h(x),y)$. Comme $(x,x)_1 \geqslant 0$, h est un opérateur positif.

Montrons enfin que h appartient au commutant de la représentation :

$$(h\tilde{c}\tilde{a}(g),\tilde{b}(g)) = (\tilde{c}\tilde{a}(g),\tilde{b}(g))_1 = f'(b^*ca)$$
$$(\tilde{c}h\tilde{a}(g),\tilde{b}(g)) = (h\tilde{a}(g),\tilde{c}^*\tilde{b}(g))$$
$$= (\tilde{a}(g),\tilde{c}^*\tilde{b}(g))_1 = f'(b^*ca)$$

d'où $(h\tilde{c}\tilde{a}(g),\tilde{b}(g)) = (\tilde{c}h\tilde{a}(g),\tilde{b}(g))$

Mais comme H' est dense dans H on a

$$(h\tilde{c}x,y) = (\tilde{c}hx,y) \quad \forall \; x,y \in H$$

d'où $h\tilde{c} = \tilde{c}h$

Donc $h \in B'$.

<u>Conclusion</u>

Les fonctionnelles positives subordonnées à la fonctionnelle représentable f sont en correspondance biunivoque avec les éléments positifs du commutant de la représentation déterminée par f. La correspondance est positivement linéaire.

2. <u>Analogue hilbertien du lemme de Schur.-</u>

Rappelons que si r est une représentation irréductible de A sur l'espace hilbertien H alors tout vecteur non nul est (topologiquement) cyclique.

2.I. <u>Propriété</u>

<u>Le commutant B' d'une représentation est une sous-algèbre auto-adjointe fermée de B(H).</u>

Si h_1 et h_2 commutent avec B alors il est clair que h_1, h_1+h_2 et h_1h_2 possèdent la même propriété.

Si h commute avec tout opérateur de B il en sera de même de h^*

en effet : $h\hat{a} = \hat{a}h \quad \forall a \in A$

$(h\hat{a})^* = (\hat{a}h)^*$

$\hat{a}^* h^* = h^* \hat{a}^*$ et en posant $a^* = b$

$\hat{b}h^* = h^*\hat{b} \quad \forall b \in A$

La sous-algèbre est fermée

Soit $\{b_i\} \in B'$ une suite convergente vers b

Etablissons alors que $b\hat{a} = \hat{a}b \quad \forall a \in A$

Or $\|b\hat{a} - \hat{a}b\| \leq \|b\hat{a} - b_i\hat{a}\| + \|\hat{a}b_i - \hat{a}b\|$

$\leq \|\hat{a}\| \, \|b - b_i\| + \|\hat{a}\| \, \|b - b_i\|$ c.q.f.d.

2.2. <u>Théorème</u>

<u>Une représentation r de A sur H est irréductible si et seulement si le commutant B' est uniquement constitué d'opérateurs scalaires.</u>

1) Soit r une représentation réductible de A.

Il existe donc un sous-espace fermé invariant propre M de H.

Considérons alors l'opérateur projection p de H sur M ;

p est hermitien.

Démontrons que p appartient à B' :

il est clair que $p\hat{a}p = \hat{a}p$

ainsi $(p\hat{a}) = (\hat{a}^*p)^* = (p\hat{a}^*p)^* = p\hat{a}p = \hat{a}p$

Sachant que l'opérateur de projection sur un espace propre ne peut pas être un opérateur scalaire la condition nécessaire en résulte.

2) Supposons maintenant que la représentation est irréductible.

Rappelons que si x est un élément non nul de H, x est un générateur de H.

Considérons $u \in B'$: $u\hat{a}(x) = \hat{a}u(x)$.

Soit x un élément non nul du noyau de u.

Alors $\hat{a}u(x) = 0$ et $u\hat{a}(x) = 0$ pour tout élément a de A.

Comme $\{ \bar{a}(x) \mid a \in A \}$ est partout dense dans H, on a par continuité $u(y) = 0$ pour tout y dans H , ce qui implique $u = 0$.

Il en résulte que tous les opérateurs non nuls de B' sont injectifs.

Montrons que B' ne possèse pas de diviseurs de zéro.

Soit $0 \neq v \in B(H)$; donc il existe $x \in H$ tel que $v(x) \neq 0$

Prenons maintenant $u \in B'$ de façon à avoir $uv = 0$ ainsi $uv(x) = 0$ ce qui entraîne $u = 0$

En passant à l'adjoint on montre ainsi que $vu = 0$ implique $u = 0$.

Si h est un élément hermitien de B' notons R la sous-algèbre maximale commutative de B' contenant h.

R est une algèbre B^*.

Nous savons dès lors que R est isomorphe à $C(Sp(R))$ (cfr page : 30).

Or $C(Sp(R))$ contient toujours des diviseurs de zéro à moins que le $Sp(R)$ ne comprenne qu'un seul élément. Puisque $\hat{h}$ est une surjection de $Sp(R)$ sur $Sp(h)$ ce dernier est aussi réduit à un élément, qui est un nombre réel z.

Nous obtenons alors $Sp(h-zI) = \{0\}$ d'où $r(h-zI) = 0$

Comme $h - zI$ est aussi un opérateur hermitien,

$$\| h - zI \| = r(h - zI) = 0$$ ce qui entraîne $h=zI$.

Pour terminer la démonstration, il nous suffit de remarquer que tout opérateur $k \in B(H)$ peut se mettre sous la forme

$$k = \frac{k+\bar{k}}{2} + \frac{k-\bar{k}}{2i}i \quad \text{où } (k+\bar{k})/2 \text{ et } (k-\bar{k})/2i$$

sont hermitiens.

3. Fonctionnelles positives normalisées représentables.

3.1. Définition

L'ensemble des fonctionnelles linéaires positives représentables pour lesquelles $f(e) = 1$ sera noté P_A. Les fonctionnelles de P_A seront dites normalisées.

3.2. Théorème

P_A est un ensemble convexe.

Démonstration

Soient $f, g \in P_A$ alors $kf+hg \in P_A$ avec $k+h=1$
$k, h \geq 0$

En effet :

kf+hg est une fonctionnelle linéaire positive

Elle est normée : $(kf+hg)e = k + h = 1$

Il reste à établir que la fonctionnelle est représentable

$$f(x^*a^*ax) \leq C_a f(x^*x)$$

$$g(x^*a^*ax) \leq C_a' g(x^*x)$$

alors $(kf+hg)(x^*a^*ax) \leq C_a kf(x^*x) + C_a' hg(x^*x)$
$\max(C_a, C_a')(kf+hg)(x^*x)$ c.q.f.d.

3.3. Définition d'un point extrémal.

f est un élément extrémal de l'ensemble convexe K si

$$f = kf_1 + hf_2 \quad \text{avec} \begin{cases} K + h = 1 \\ k, h \geq 0 \end{cases}$$

entraîne $f = f_1$ ou $f = f_2$

3.4. Lemme

La fonctionnelle linéaire positive représentable f correspond à une représentation irréductible si et seulement si

$f_1 \leq f$ entraîne $f_1 = cf$

Dans ce cas nous disons que la fonctionnelle f est indécomposable.

1) Supposons la représentation non irréductible ;
dans ce cas il existe un sous-espace invariant propre H_1 de H
considérons alors la projection p de H sur H_1
comme nous avons déjà eu l'occasion de signaler les opérateurs de projection sur des sous-espaces invariants sont des éléments hermitiens positifs du commutant B'.
Un théorème précédent nous montre que $f_1(a)=(\mathfrak{a}p(g),g)$ est une fonctionnelle linéaire positive subordonnée à f
Or de ceci il résulte que $f_1 \neq cf$
2) Supposons maintenant la représentation irréductible.
Nous savons que tout opérateur de B' est scalaire.
Si $f_1 \leqslant f$, alors d'après 1.3., $f_1(a)=(\mathfrak{a}h(g),g)=$

$$f_1(a)=(\mathfrak{a}h(g),g) = z(\mathfrak{a}(g),g) \quad \text{si } h = zI$$
$$= zf(a) \quad \text{c.q.f.d.}$$

3.5. Théorème

Les éléments extrémaux de P_A correspondent aux représentations unitaires irréductibles de A et réciproquement.

En considérant le lemme précédent, il suffit d'établir que les éléments extrémaux de P_A donnent des fonctionnelles indécomposables et réciproquement ;

1) Admettons que f soit indécomposable et fasse partie du segment $[f_1-f_2]$
Ainsi $f = kf_1+hf_2$ avec $k+h=1$ $k,h \geqslant 0$
ou encore $f-kf_1=hf_2 \geqslant 0$; ainsi f domine f_1
donc $f = kf_1$ et $k=1$ puisque $f(e) = kf_1(e)$
il en résulte que f est extrémal.
2) Supposons à présent que f soit extrémale et que f_1 soit subordonnée à f.
ainsi $f-kf_1 = f' \geqslant 0$

posons $f'(e) = h$; alors $f-kf_1 = hf_2 \geqslant 0$

ou encore $f=kf_1+hf_2$ avec $k,h \geqslant 0$

et en posant $x=e$: $k+h=1$

ainsi $f \in [f_1, f_2]$ mais étant donné que f est extrémale nous obtenons $f=f_1$ ($f=f_2$ étant exclu, sinon $k=0$)

c.q.f.d.

4. Radical unitaire

4.1. Définition

Le radical unitaire de A est l'intersection des noyaux de toutes les représentations unitaires irréductibles de A sur un espace de Hilbert.

Le radical unitaire est un idéal autoadjoint(et donc bilatère).

4.2. L'idéal réducteur

L'idéal réducteur $I = \{ a \in A \mid f(a^*a)=0 \ \forall f \in P_A \}$

Nous démontrons aisément que I est un idéal. C'est l'ensemble des éléments de A qui sont appliquées sur 0 par toutes les représentations unitaires cycliques de A.

Proposition

Si A admet une représentation unitaire fidèle dans $B(H)$. Alors l'idéal réducteur est nul.

En effet toute représentation unitaire de A est somme directe de représentations cycliques.

Décomposons la représentation donnée en représentations cycliques.

Comme elle est fidèle, il existe pour tout élément de A au moins une représentation cyclique qui le représente non trivialement.

VIII.- REPRESENTATIONS UNITAIRES DES ALGEBRES A INVERSE CONTINU COMPLETES.

Dans la suite A sera une algèbre à inverse continu, à involution continue, complète.

a) Continuité des représentations unitaires

Notons H l'ensemble des éléments hermitiens.

Proposition : $A = H \oplus iH$, où la somme directe est topologique.

Démonstration : pour tout $a \in A$ $a = \dfrac{a+a^*}{2} + i\,\dfrac{a-a^*}{2i}$

et $\dfrac{a+a^*}{2} \in H$, $\dfrac{a-a^*}{2i} \in H$. Cette décomposition est unique, car si $a = a_1 + ia_2$ avec a_1 et a_2 éléments de H

$a^* = a_1 - ia_2$

donc $a_1 = \dfrac{a+a^*}{2}$ $\quad a = \dfrac{a-a^*}{2i}$

Ceci montre que $A = H \oplus iH$ algébriquement, et puisque l'involution est continue, les projections $a \to \dfrac{a+a^*}{2}$, $a \to \dfrac{a-a^*}{2}$ sont continues,

donc $A = H \oplus iH$ topologiquement c.q.f.d.

$r(a)$ n'est pas une semi-norme, si A n'est pas commutative, mais il existe une semi-norme $p(a)$ tel que $r(a) \leq p(a)$

Démonstration : $r(a) < 1$ contient un ouvert équilibré V, il existe donc une semi-norme $p(a)$, tel que $r(a) \leq p(a)$, à savoir la jauge de V.

Comme l'involution est continue, on peut même prendre $p(a) = p(a^*)$. Sinon, on remplace p par p' en posant $p'(a) = \sup(p(a), p(a^*))$. $p'(a)$ est alors la jauge de $V \cap V^*$, et comme l'involution est continue, V^* est ouvert, et p' est bien une semi-norme continue.

Remarques :

1) Une sous-algèbre fermée d'une algèbre à inverse continu, est à inverse continu.
2) a est un élément d'une sous-algèbre auto-adjointe commutative si et seulement si a est normal.

Théorème 1.

Une sous-algèbre auto-adjointe, commutative, maximale C de A est fermée, et si $a \in C$, $sp_A\, a = sp_C\, a$.

1) Il est clair que C est fermée, parce que C est maximale et que l'adhérence de C est aussi une algèbre auto-adjointe, commutative.

2) $a \in C$

On a $sp_C\, a \supset sp_A\, a$

On doit encore prouver que $sp_C\, a \subset sp_A\, a$

Supposons : $\lambda \notin sp_A\, a$

$$\Rightarrow \exists\, (a - \lambda e)^{-1} \in A$$

$$(a - \lambda e) \in C \quad \text{et} \quad b(a - \lambda e) = (a - \lambda e)b \quad \forall\, b \in C$$

$$\text{donc } (a - \lambda e)^{-1} b = b(a - \lambda e)^{-1} \quad \forall\, b \in C$$

$$(a - \lambda e)^{-1} \in C$$

$$\lambda \notin sp_C\, a$$

Le spectre d'un élément dépend en général de l'algèbre dans laquelle on le considère. Au contraire, le rayon spectral d'un élément est le même dans A, ou dans une sous-algèbre fermée B. Ceci découle de la formule qui donne le rayon spectral en fonction d'un système de semi-normes.

Nous pouvons en conclure ceci :

Proposition :

Si h est un opérateur hermitien d'un espace de Hilbert

$$\|h\| = r(h)$$

Démonstration :

Soit B l'algèbre auto-adjointe fermée d'opérateurs, engendrée par h. C'est une algèbre B^* commutative. D'après le théorème de Gelfand $||h|| = r_B(h) = r(h)$.

<u>Théorème II</u>

Toute représentation unitaire r de A est continue.

<u>Démonstration</u> :

On peut supposer que $r(e) = \tilde{e} = I$ (=identité), car de toute manière $\tilde{e}$ est un idempotent hermitien. C'est donc une projection sur un sous-espace. Celui-ci est invariant, et la représentation est nulle, sur le sous-espace orthogonal. On restreint la représentation à ce sous-espace, et on ne change rien à la norme de $\tilde{x}$.

Soit h un élément hermitien de A. Dans l'espace de Hilbert $||\tilde{h}|| = r(\tilde{h})$. D'autre part, $sp(\tilde{h}) \subset sp(h)$ car si $(h-ze)$ est inversible dans A, $(\tilde{h}- zI)$ est inversible, du fait que $\tilde{e}= I$; donc

$$r(\tilde{h}) \leqslant r(h) \quad \text{d'où} \quad ||\tilde{h}|| \leqslant r(h) \leqslant p(h)$$

La représentation est donc continue pour h hermitien, et puisque $A = H \oplus IH$, la représentation est continue.

b) Fonctionnelles positives sur une algèbre à inverse continue complète.

Remarque : C'est ici qu'on va employer le fait que A est complète.

<u>Lemme</u> :

Si h est un élément hermitien, et si $r(h) < I$, alors il existe un k hermitien tel que $k = (e + h)^{\frac{1}{2}}$

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de remarquer que o n'est pas élément de $sp(e + h)$, parce que $r(h)$ I et que $\sqrt{z}$ est une fonction holomorphe sur $sp(e + h)$. Donc il existe k tel que $k = \sqrt{e + h}$.

k est hermitien, en effet $k = \bullet \; {}^{*} h + \frac{I}{2} \quad \frac{h^2}{2} \, * \, \ldots\ldots$
Ceci montre que k est somme d'éléments hermitiens, et est donc hermitien.

<u>Proposition</u> :

Si h est hermitien, $|f(a^*ha)| \leqslant r(h) \quad f(a^*a)$

Démonstration :

1) Supposons $r(h) < I$

alors $f(a^*(I-h)a) = f(a^*\, k^*ka)$ (lemme)

$= f((ak)^*ak) \geqslant o$

donc $-f(a^*ha) \leqslant f(a^*a)$

$f(a^*(I+h)a) = f(a^*k^*ka)$

$= f((ak)^*ak) \geqslant o$

donc $-f(a^*ha) \leqslant f(a^*a)$

d'où $|f(a^*ha)| \leqslant f(a^*a)$

2) h quelconque

posons $h' = h/r(h) + \delta \quad \delta > o$

on a alors $r(h') < I$; donc de 1) découle que $|f(a^*h'a)| \leqslant f(a^*a)$

ou encore $|f(a^*(h/r(h)+\delta)a)| \leqslant f(a^*a)$

et donc $|f(a^*ha)| \leqslant (r(h)+\delta)f(a^*a)$.

On a ceci pour tout $\delta > o$; en laissant tendre δ vers o, on obtient

$|f(a^*ha)| \leqslant r(h) \; f(a^*a)$ c.q.f.d.

Corollaires

1) Si f est une fonctionnelle positive, alors f est continue

Démonstration :

Pour tout hermitien h et pour tout a de A, on a

$|f(a^*ha)| \leqslant r(h)f(a^*a)$

posons $a=e$; nous obtenons $|f(h)| \leqslant r(h) \quad f(e)$

Mais $r(h) \leqslant p(h)$, donc $|f(h)| \leqslant p(h) \quad f(e)$

Ceci implique que $f(h)$ est continue pour h hermitien, et aussi pour h anti-hermitien.

Puisque $A = H \oplus iH$, f est continue.

97.

2) Toute fonctionnelle positive est représentable.

f est représentable si et seulement si, pour tout a de A, il existe une constante C_a tel que $f(x^*a^*ax) \leq C_a \; f(x^*x)$.

a^*a étant hermitien, nous pouvons appliquer le théorème, on a donc $f(x^*a^*ax) \leq r(a^*a) \; f(x^*x)$

3) L'idéal réducteur contient le radical de Jacobson J

Idéal réducteur $= \{x \in A \mid f(x^*x) = o \;\; \forall f \;\; \text{pos. repr.}\} = I$

Le radical de Jacobson J :

-intersection des noyaux de toutes les représentations irréductibles

$- \{ x \in A \mid r(x) = o \}$

$f(x^*x) \leq r(x^*x) f(e) \qquad x \in J \Rightarrow r(x^*x) = o$

$\Rightarrow f(x^*x) = o \qquad \forall f \Rightarrow x \in I$

c) Ensemble des fonctionnelles positives normées

f est une fonctionnelle normée si et seulement si $f(e) = I$

A est une algèbre satisfaisant aux conditions énoncées.

$P_A = \{ f = \text{fonct. pos.} \mid f(e) = I \}$

Théorème III

P_A est compact pour la topologie faible du dual de H

Démonstration :

définition de la topologie faible :

$\lim f_i = f$ si et seulement si $\forall \; h \in H \; \lim f_i(h) = f(h)$

1) P_A est fermé

Prenons $f_i \in P_A$ et supposons $f = \lim f_i$

Alors $f(e) = \lim f_i(e) = I$; et $f(a^*a) = \lim f_i(a^*a) \geq I$

$\Rightarrow f \in P_A$

2) Les éléments de P_A sont majorés par p :

$|f(h)| \leq r(h)$ $f(e) \leq p(h)$. P_A est borné pour la topologie faible.

1) et 2) impliquent P_A est compact (cf théorème de III § 1.4).

Théorème IV (de Krein-Milman)

Si K est un ensemble convexe du dual d'un espace localement convexe et si K est compact pour la topologie faible, alors K est l'adhérence faible de la fermeture convexe de ses éléments extrémaux.

Démontration : voir Naimark p.62

Corollaires :

1) Dans une algèbre à involution à inverse continu, complète, le radical unitaire R est égal à l'idéal réducteur I.

Démonstration :

a) I est l'intersection des noyaux de toutes les représentations unitaires cycliques, R des noyaux des représentations unitaires irréductibles. Comme toute représentation irréductible est cyclique, il suit que $I \subset R$.

b) $R \subset I$

Supposons que a n'appartienne pas à I. Alors il existe un f dans P_A tel que $f(a^* a) \neq 0$. Le théorème de Krein-Milman affirme que nous pouvons approcher f faiblement par des f_i de P_A, qui sont des combinaisons linéaires positives des éléments extrémaux. Donc pour tout ε il existe des f_i, éléments extrémaux de P_A, et des nombres réels positifs z_i tels que $\left|\sum z_i f_i\ (a^* a) - f(a^* a)\right| < \varepsilon$

ou $f(a^* a) - \varepsilon < \sum z_i f_i(a^* a) < f(a^* a) + \varepsilon$.

Prenons ε tel que $f\ (a^* a) - \varepsilon > 0$, on a alors $0 < \sum z_i f_i (a^* a)$ et, puisque les f_i sont éléments de P_A, $f_i(a^* a) \geq 0$.

Il existe donc un i tel que $f_i(a^*a) > 0$. Ceci implique que dans la représentation unitaire associée à f_i, a n'est pas appliqué sur zéro. Donc a n'appartient pas au radical unitaire. c.q.f.d.

<u>Définition</u> :
Un système de représentations est complet, si et seulement si pour tout $a \neq 0$ de A il existe une représentation irréductible r dans le système tel que $r(a) \neq 0$.

2) <u>Théorème : Si une algèbre à involution à inverse continu complète possède une représentation fidèle, elle possède un système complet de représentations unitaires irréductibles</u>.

Démonstration :

S'il existe une représentation fidèle de A, l'idéal réducteur I est égal à zéro. Ceci implique que le radical unitaire est égal à zéro(Cor.1), et puisque le radical unitaire est égal à l'intersection des noyaux des représentations unitaires irréductibles, il existe pour tout a de A une représentation unitaire irréductible qui applique a sur un élément non nul.

Lorsque A est en plus symétrique, c'est-à-dire lorsque tout élément de la forme $e + a^*a$ est inversible, le radical unitaire s'avère être égal au radical de Jacobson. Plus généralement on montre que :

<u>Théorème</u> : Soit A une algèbre à involution à inverse continu complète. Alors A est symétrique si et seulement si

$$\sup_{f \in P_A} f(a^*a) = r(a^*a)$$

où r est le rayon spectral.

Démonstration : Rickart p.238.

IX.- REPRESENTATIONS DES FONCTIONNELLES D'UNE ALGEBRE A INVOLUTION, COMMUTATIVE.

Dans ce qui suit, A est une algèbre à inverse continue, à unité, à involution continue et complète.

A) Semi-norme régulière minimale.

Considérons f élément de P_A, (P_A est l'ensemble des fonctionnelles linéaires positives, normées), alors f définit une représentation cyclique de A sur un espace de Hilbert H_f.

Posons $f(a) = (\overset{\infty}{a}(g), g)$. le générateur de la représentation étant g.

Prenons la somme hilbertienne des H_f $H = \bigoplus_{f \in P_A} H_f$, alors A opère sur H en opérant sur chaque terme H_f, et $|a| = \sup |a_f| \leqslant (r(a^*a))^{\frac{1}{2}}$ (donc $|a|$ a un sens).

De cette manière nous définissons une représentation de A qui est à involution, et $|a^*a| = |a|^2$, ceci parce que $|a|$ est la norme d'opérateur sur un espace de Hilbert.

$|a|$ s'appelle la semi-norme régulière minimale.

Proposition I.

$$|a| = \sqrt{\sup_{f \in P_A} F(a^*a)}$$

Démonstration :

a) $$|a_f|^2 = \sup_{f(x^*x) = I} f(x^*a^*ax), \quad \text{posons} \quad f(x^*a^*a\,x) = f_x(a^*a)$$

$$= \sup_{f_x \in P_A} f_x\,(a^*a) \qquad (f_x \in P_A)$$

$$\leqslant \sup_{F \in P_A} F(a^*a) \leqslant r(a^*a) \text{ (la dernière inégalité implique que le sup existe)}$$

Donc $$|a| = \sup_{f \in P_A} |a_f| \leqslant (\sup_{F \in P_A} F(a^*a))^{\frac{1}{2}}$$

101.

b) $|f(a)| \; = |(\overset{\infty}{a}(g), g)| \leqslant \| \overset{\infty}{a}(g) \| \, \| g \|$ (Gauchy-Schwartz)

$\leqslant |a_f| \; \| g \|^2$

$\leqslant |a_f| \quad f(e)$ (la norme de g est $(f(e))^{\frac{1}{2}}$)

$|F(a^*a)| \leqslant \; |(a^*a)_F| \; = |a_F|^2$ d'ou $(F(a^*a))^{\frac{1}{2}} \leqslant | a_F| \leqslant | a|$

on a donc $(\sup F(a^*a))^{\frac{1}{2}} \leqslant | a |$

de a) et b) on déduit la proposition.

<u>Proposition 2</u>.

Toute fonctionnelle positive est bornée pour la semi-norme régulière minimale.

Démonstration : Ceci découle de la proposition I, en effet

$| f(a) | = |(\overset{\infty}{a}_f(g), g| \leqslant | a_f| \; f(e) \leqslant f(e) \, | a |$, d'ou $f(a)$ est bornée

En particulier, posons R = le noyau de la semi-norme. Alors $f \in P_A$ implique que f est nul sur R. (R n'est autre que l'idéal réducteur).

En effet $| f(ex) |^2 \leqslant f(e) \; f(x^*x)$ (Cauchy-Schwartz), et $f(x^*x) = 0$ quand x est élément de R. Donc $f(x) = 0$.

Autrement dit toute fonctionnelle positive sur A est une fonctionnelle positive bornée sur A/R, et peut donc être prolongée à la complètion $\hat{A}$ de A/R ($\hat{A}$ est une B^*-algèbre). On montre que la semi-norme construite plus haut est la plus petite norme sur A/R pour laquelle toutes les fonctionnelles positives sont continues.

B) <u>Représentation des fonctionnelles positives sur une B^*-algèbre commutative B.</u>

Si B est une B^*-algèbre sans unité, B_e est aussi une B^*-algèbre pour la norme : $\|ze + a\| = \sup | ze + ab | / | b|$ $z \in C$, $b \in B$. Cette norme prolonge la norme sur B. En effet pour une B^*-algèbre, la norme est égale à la norme de la représentation régulière :

$|a| = \sup |ab| \;/\; |b| \leqslant |a|$,

et $|a| = |a^2| \;/\; |a| \leqslant \sup |ab| \;/\; |b| = \|a\|$.

donc $\|a\| = |a|$.

Si B est une B*-algèbre commutative , avec une unité, elle satisfait aux conditions du théorème de Gelfand, donc B est isomorphe à $C(X)$, avec $X = sp(B)$.

Considérons f une fonctionnelle positive de B.
Si a est un élément de $C(X)$ tel que $\hat{a}(m) \geqslant 0$, il existe b de $C(X)$ (b hermitien), tel que $a = b^2$ et $f(a) = f(b^2) = f(b^*b) \geqslant 0$.

Il existe donc une mesure μ sur X tel que

$$f(a) = \int_X \hat{a}(m) \; d\mu(m)$$

Notons que $f(e) = \int_X d\mu(m)$.

C) Représentations des fonctionnelles positives sur une algèbre à inverse continue, complète, commutative.

A est une algèbre avec les propriétés énoncées. R est le radical unitaire de A, et $\hat{A}$ est la complétion de A/R.
$S = \{m \in sp(A) | \; m = m^*\}$. S est fermé, parce que l'involution est continue.

Proposition 3.

$\hat{A} = C(S)$

Démonstration : L'image de A dans l'application canonique $A \to \hat{A}$, est partout dense dans $\hat{A}$.

Ceci implique que l'application $sp(\hat{A}) \to sp(A)$ est injective. Nous avons aussi que $\mathrm{Im}\; sp(A) \subseteq S$. Ceci découle du fait que $\hat{A}$ est une B*-algèbre et satisfait aux conditions du théorème de Gelfand.

Il nous reste à démontrer que l'application $sp(\hat{A}) \to S$ est surjective.

Prenons m dans S, et posons $f(a) = \hat{a}(m)$.

f est une fonctionnelle positive, en effet nous avons $\hat{a}^*(m) = \overline{\hat{a}(m^*)}$

parce que $a - \hat{a}(m^*)\, e \in m^*$ (par définition)

donc $a^* - \overline{\hat{a}(m^*)}\, e \in m$

mais $a^* - a^*(m)\, e \in m$ (par définition)

d'où $a^*(m) = \overline{\hat{a}(m^*)}$

on a donc $f(a^*a) = \hat{a}^*(m)\ \hat{a}(m) = |\hat{a}(m)|^2 \geq 0$.

f définit une fonctionnelle positive F sur A, et F définit une application linéaire de A dans C, la restriction de F à A/R est un caractère de A/R et par continuité F est un caractère de $\hat{A}$ Ceci prouve que $sp(\hat{A}) \to S$ est surjective, d'où $sp(\hat{A}) = S$. C.q.f.d.

Si f est une fonctionnelle positive sur A, il existe une mesure μ telle que $f(a) = \int_S \hat{a}(m)\, d\mu(m)$ pour tout a de A.

Corollaire :

Si A est symétrique, ce qui implique que tout idéal maximal de A est self-adjoint, alors $f(a) = \int_{sp(A)} \hat{a}(m)\, d\mu(m)$

Proposition 4.

Toute fonctionnelle positive irréductible normée définit un idéal maximal symétrique et réciproquement.

Corollaire :

Si A est symétrique, alors on a une correspondance bi-univoque entre les idéaux maximaux et les fonctionnelles positives irréductibles normées.

D) Théorème de Bochner-Plancherel généralisé.

Dans ce qui suit, nous ne considérons plus des fonctionnelles positives définies sur toute l'alèbre A, mais sur un idéal partout dense de A. Nous voudrions aussi représenter une fonctionnelle de ce genre.

A est une algèbre à inverse continue, à involution continue, complète, commutative, symétrique, sans élément d'unité.

I est un idéal partout dense dans A, f une fonctionnelle positive, définie sur I.

Pour tout p de I et pour tout a de A, pa est un élément de I et $f(pa)$ a donc un sens. Posons $f_p(a) = f(pa)$ pour tout p de I.

f_p est définie sur A ; et sur A_e (parce que $f_p(p(ze + x)) = f_p(ze + x)$).

Posons $P = \{ p \in I \mid f_p$ soit positive sur $A_e \}$.

P est un cône convexe :

$P \neq \{0\}$ car si $y \in I$ tel que $p = y^*y \neq 0$, alors $p \in I$ et f_p est positif car : $f_p(x^*x) = f(y^*x^*yx) \geqslant 0$

f_p est prolongeable (c'est-à-dire, il existe C tel que $|f(a)|^2 \leqslant C\, f(a^*a)$ pour tout a de A) car :

$$|f_p(a)|^2 = |f(y^*ya)|^2 \leqslant f(y^*y)\, f(y^*a^*ya) = f(y^*y)\, f_p(a^*a)$$

<u>Théorème</u> :

Soit A une algèbre commutative, symétrique, complète, à inverse continue, à involution continue, sans élément unité, et I un idéal partout dense dans A ; Pour tout f positive sur I, il existe une mesure positive μ sur $sp(A)$ (localement compact), tel que :

a) pour tout p de P, $\hat{p}$ est élément de $L^1(\mu)$ et $f(pa) = \int \hat{a}(m)\, \hat{p}(m)\, d\mu(m)$.

b) la représentation $p \to \hat{p}$ se prolonge en une application isométrique de H'_f dans $L^2(\mu)$. Si I^2 est dense dans H_f on peut étendre la représentation dans $L^2(\mu)$ à H_f. (La densité s'entend pour la topologie d'espace de Hilbert de H_f).

H_f est l'espace de Hilbert engendré par les éléments de I, avec le produit scalaire $(x,y) = f(xy^*)$.

H'_f est le sous-espace fermé de H_f engendré par les éléments de P.

Démonstration :

Voir "Normed Rongs" de Naimark, p. 283 , § 20.

<u>Remarque</u> :

Une algèbre sans élément unité est dite symétrique, si l'algèbre obtenue en ajoutant une unité est symétrique.

REPRESENTATIONS DES GROUPES
ET ALGEBRES DE GROUPES.

1. Représentations des groupes.

1.1. Définitions. Soit G un groupe, et E un espace vectoriel. Une représentation de G sur E est un homomorphisme de G dans le groupe des transformations linéaires inversibles de E. La transformée de $x \in E$ par la transformation associée à l'élément $g \in G$ sera appelée $g_* x$.

Les propriétés suivantes caractérisent les représentations de G :

a. Soit e l'unité de G, et $x \in E$ quelconque, alors $e_* x = x$.

b. Soient $g_1, g_2 \in G$, soit $x \in E$, alors $g_{1*}(g_{2*} x) = (g_1 g_2)_* x$.

c. La transformée $g_* x$ dépend linéairement de x.

Le groupe G sera supposé localement compact, l'espace E localement convexe. Les conditions suivantes s'avèrent intéressantes :

d_1. La transformée $g_* x$ dépend continument de g pour tout x et de x pour tout g.

d_2. L'ensemble des transformations $x \to g_* x (g \in K)$ est équicontinu quelque soit K compact dans G.

e. L'ensemble des transformations $x \to g_* x (g \in G)$ est équicontinu.

Dans la condition d_2, il suffit de supposer que l'ensemble des transformations $x \to g_* x$, $g \in K$ est équicontinu pour un voisinage compact déterminé de l'unité.

Nous montrerons que la conjonction de d_1 et d_2 est équivalente à la condition.

d. La transformée $g_* x$ dépend continument de (g, x).

D'autre part si l'espace E est tonnelé, la condition d_1 implique d_2, et donc d, la condition e peut-être remplacée par la condition apparemment plus faible.

e_0. L'ensemble $G_* x$ des $g_* x (g \in G)$ est borné quelque soit $x \in E$.

Nous dirons qu'une représentation est séparément continue si d_1 est vérifié qu'elle est continue si d est vérifié, et qu'elle est continue et composée d'opérateurs équicontinus si d et e sont tous deux vérifiés. (Il suffit dans ce dernier cas d'établir d_1, et e bien entendu).

1.2. Démonstration. Montrons pour commencer que la condition d est vérifiée si d_1 et d_2 le sont toutes deux. Soit $g \in G$, $x \in E$, et V un voisinage de O dans E. Nous devons trouver un voisinage U de g, et un voisinage W de O tels que

$$g'_* x' - g_* x \in V$$

si $x' - x \in W$, $g' \in U$.

Nous considérons un voisinage compact K de g, puis un voisinage W de O, tels que $g_* y \in V$ dès que $g \in K$, $y \in W$. Nous considérons ensuite un voisinage U de g tel que $g'_* x - g_* x \in V$ si $g' \in U$. Le voisinage U sera choisi contenu dans K

$$g'_* x' - g_* x = g'_*(x' - x) + (g'_* x - g_* x) \in V + V$$

si $g' \in U$, $x' - x \in W$. Ceci établit la continuité de $g_* x$.

Il est immédiat que d implique d_1. Et le fait que d implique d_2 résulte du théorème de continuité uniforme sur les compacts. Nous avons ainsi établi l'équivalence de d avec la conjonction de d_1 et de d_2.

Supposons E tonnelé. Soit K compact dans G, soit V un voisinage convexe équilibré fermé de l'origine dans E, et soit W l'ensemble des $x \in E$ tels que $g_* x \in V$ quelque soit $g \in K$. L'ensemble W est évidemment convexe équilibré fermé; pour montrer que W est un voisinage de l'origine, il suffit de montrer que cet ensemble est absorbant.

Soit θ_V la "jauge" de V, θ_V est une semi-norme continue, V est l'ensemble $\theta_V(x) \leq 1$. La fonction $\theta_V(g_* x)$ est une fonction continue de g. Cette fonction est bornée sur K, soit M sa borne supérieure, $x/M \in W$. Ce qui montre effectivement que W est absorbant, et est donc un voisinage de l'origine.

Une démonstration en tout point analogue montre que e_o implique e lorsque l'espace E est tonnelé.

On sait que les espaces de Banach, et tous les espaces métriques complets sont tonnelés.

Exercice. Supposons la condition e vérifiée. Montrer que la topologie de E est définie par des semi-normes ν telles que $\nu(g_* x) = x$ quelque soit $g \in G$. En particulier, si E est un espace de Banach, nous pouvons trouver sur E une norme équivalente à la norme donnée, et telle que la représentation soit constituée d'opérateurs isométriques.

1.3. **Complétion.** Soit E un espace localement convexe non complet. Supposons donnée sur E une représentation continue de G. Soit E_1 le complété de E. La représentation de G sur E se prolonge, de manière unique, en une représentation continue de G sur E_1.

L'élément g étant donné, l'application $x \to g_* x$ se prolonge d'une seule manière en une transformation continue de E_1 ; une représentation de G sur E_1 est définie de cette manière ; l'ensemble des opérateurs de représentation est équicontinu sur tout compact (la condition d_2 est vérifiée). Il reste à montrer que $g_* x$ dépend continument de g pour chaque $x \in E_1$.

Soit V un voisinage de l'origine dans E_1. Considérons un élément x de E_1 et un élément g de G. Soit K un voisinage compact de g, et W un voisinage de l'origine dans E_1, tel que $g'_* y \in V$ lorsque $g' \in K$, $y \in W$. Soit x_1 un élément de E_0 tel que $x_1 - x \in W$;

$$g'_* x - g_* x = (g'_* x - g'_* x_1) + (g'_* x_1 - g_* x_1)$$
$$+ (g_* x_1 - g_* x) \in V + V + V$$

qui est un voisinage arbitrairement petit de l'origine, si $g' \in U$, U étant un voisinage de g, contenu dans K, et tel que $g'_* x_1 - g_* x_1 \in V$ si $g' \in U$.

1.4. La mesure de Haar. On sait qu'il existe sur un groupe localement compact une mesure positive, non nulle, invariante à gauche, et que celle-ci est unique à un facteur non négatif près. C'est la mesure de Haar. Si m est cette mesure, et si g_0 est un élément du groupe,

$$dm(g_0\, g) = dm(g)$$

en vertu de l'invariance à gauche. D'autre part, $dm(g\, g_0)$ est une nouvelle mesure invariante à gauche, il existe donc un scalaire réel positif, $\lambda(g_0)$ tel que

$$dm(g\, g_0) = \lambda\,(g_0)\; dm(g)$$

L'application $g_0 \longrightarrow \lambda(g_0)$ est évidemment un homomorphisme de G dans le groupe multiplicatif des réels positifs.

On vérifie aisément que

$$dm'(g) = \lambda(g)^{-1}\, dm(g)$$

est une mesure invariante à droite sur le groupe. D'autre part, $dm(g^{-1})$ est aussi une mesure invariante à droite, il existe une constante réelle positive, k, telle que

$$dm(g^{-1}) = k\;\; \lambda(g)^{-1}\;\; dm(g)$$

111.

Cette constante est égale à l'unité. Soit en effet S un voisinage compact symétrique de l'unité de G sur lequel $\lambda(g)$ est voisin de 1.

$$m(S) = m(S^{-1}) = \int_S k.\lambda(g)^{-1}.dm(g)$$

et, développant les calculs, on constate que k est aussi voisin de l'unité que l'on veut, donc que $k = 1$.

$$dm(g^{-1}) = \lambda(g)^{-1}\, dm(g)$$

(Nous avons supposé implicitement que $\lambda(g)$ est continu ; on établit ce résultat en considérant une fonction non négative à support compact, $f(g)$, et en observant que

$$\int f(g\, g_o)\, dm(g) = \lambda(g_o)^{-1} \int f(g)\, dm(g)$$

est une fonction continue de g_o).

1.5. <u>Exemples de représentations</u>. Les considérations du paragraphe 2 permettront d'introduire de nombreux exemples d'espaces de représentations. Mais ce ne sont pas ces exemples qui ont le plus fait progresser la théorie des représentations des groupes. En fin de compte les représentations les plus utiles(au moins jusqu'à présent) sont celles de G sur les espaces $L_p(G)$.

$L_p(G)$ est, par définition, l'espace des fonctions de puissance p sommable pour la mesure de Haar à gauche du groupe, avec la norme usuelle. On fait opérer G sur L_p en posant

$$g_* u(t) = u(g^{-1} t)$$

lorsque $u = u(t) \in L_p(G)$, et $g \in G$.

Nous allons montrer que la représentation est continue si $1 \leq p \leq \infty$. Il est évident que cette représentation est composée d'opérateurs équicontinus. D'autre part, $L_p(G)$ est le complètè de $L(G)$ (si $p \neq \infty$). La condition d_i se vérifie immédiatement, pour la représentation de G sur $L(G)$, lorsque $L(G)$ est muni de la norme $\| \ \|_p$, ceci en vertu notamment de la continuité uniforme des éléments de $L(G)$. La représentation de G sur $L(G)$ est donc une représentation continue, la représentation sur le complètè est également une représentation continue. (Rappelons que $L(G)$ est l'espace des fonctions continues à support compact sur G).

La représentation de G sur $L_\infty(G)$ est composée d'opérateurs équicontinus, mais n'est pas continue. Les éléments $u \in L_\infty$ tels que l'application $g \to g_* u$ soit continue sont les fonctions (presque partout égales à une fonction) uniformément continues pour la structure uniforme gauche.

Nous pouvons faire opérer G sur d'autres espaces de fonctions sur G. Soit $C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G, pour la topologie de la convergence compacte. La représentation de G sur $C(G)$ est continue, mais les opérateurs ne sont pas équicontinus. Soit $C_o(G)$ l'espace des fonctions continues sur G qui s'annulent à l'infini. La représentation de G sur $C_o(G)$ est composée d'opérateurs isométriques, et est continue.

1.6. Composée par une mesure. Soit E un espace de représentation séparément continue de G. Supposons E complet. (Des conditions plus faibles suffisent en général : E quasi-complet, dénombrablement complet, etc). Soit μ une mesure à support compact dans G.

La composée d'un élément x de E par μ sera définie par

$$\mu_* x = \int g_* x \, d\mu \qquad (1)$$

Nous constatons que $\delta_{g*} x = g_* x$. Cette relation nous permettra d'identifier un élément de G avec la mesure de Dirac correspondante.

L'application $x \to \mu_* x$ est continue si la représentation de G est continue. Ceci, en vertu de l'équicontinuité des opérateurs correspondants au support de μ.

L'intégrale (1) a encore un sens, lorsque μ est une mesure bornée sur G, si $G_* x$ est un ensemble borné. L'application $x \to \mu_* x$ est continue, si l'ensemble des opérateurs de la représentation est équicontinu (si la condition e est vérifiée).

L'opération définie par l'intégrale (1) a bien des aspects sympathiques. Le groupe G est immergé dans une algèbre de mesures. La représentation du groupe est prolongée en une représentation de l'algèbre de mesures.

Seulement, l'immersion de G dans l'algèbre de mesures n'est pas continue, tout au moins si l'algèbre des mesures bornées est munie de la topologie de la norme, ou si l'algèbre des mesures à support compact est munie d'une topologie limite inductive de ce type. Ces topologies ne sont pas adaptées à l'étude des représentations de G.

Les topologies faibles ne sont pas non plus adaptées. L'immersion de G dans une algèbre de mesures est faiblement continue. Mais les algèbres de mesures ne sont pas faiblement complètes. Et surtout, l'application $\mu \rightarrow \mu_* x$ n'est pas une application continue.

Le deuxième paragraphe sera consacré à l'étude topologique des espaces de mesures. Cette étude permettra de mieux comprendre certaines opérations telles la convolution des mesures. Mais, à l'heure actuelle tout au moins, c'est l'étude de $L_1(G)$ qui fournit les outils les plus puissants dans l'étude des représentations du groupe G. Quelques théorèmes importants relatifs aux représentations de $L_1(G)$ seront établis dans le quatrième paragraphe.

2. Espaces de mesures.

2.1. Introduction. Soit X un espace localement compact vérifiant la condition

A. La constante 1 est adhérente pour la topologie de la convergence simple à un ensemble équicontinu de fonctions à supports compacts.

Soit ΓX l'espace des combinaisons linéaires formelles d'éléments de X. Nous mettrons diverses topologies sur ΓX, et considérerons les complétés correspondants. Dans chacun des cas considérés le complété s'identifiera avec un espace de mesures sur X, pour une topologie qu'il n'est pas trop difficile de décrire.

Il est bon d'observer que la condition A est certainement vérifiée lorsqu'il existe une partition de l'unité, c'est-à-dire lorsque X est paracompact.

Soit $\mathcal{T}_1$ la plus fine des topologies localement convexes sur Γ X, qui induise sur X une topologie moins fine que la topologie donnée initialement. Le complété de Γ X pour $\mathcal{T}_1$ est l'espace des mesures à support compact sur X, avec la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de fonctions continues sur X qui sont équicontinus et bornés en chaque point de X.

Soit $\mathcal{T}_2$ la topologie localement convexe la plus fine sur X, qui induise sur X une topologie moins fine que la topologie donnée initialement, et telle que X soit borné pour $\mathcal{T}_2$. Le complété de Γ X pour $\mathcal{T}_2$ est l'espace des mesures bornées sur X, avec la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles de fonctions continues et bornées sur X qui sont équicontinus en chaque point, et uniformément bornés sur X.

Soit X=G, G étant un groupe localement compact. Soit $\mathcal{T}_3$ la topologie localement convexe la plus fine sur Γ G, telle que l'application identique de G dans Γ G soit continue et telle que la représentation de G sur Γ G que l'on définit par

$$g_* \Sigma u_i h_i = \Sigma u_i (g h_i)$$

soit composée d'opérateurs équicontinus. ($g \in G$, $\Sigma u_i h_i \in \Gamma G$, les u_i sont donc scalaires, h_i sont des éléments du groupe). Le complété de ΓG pour $\mathcal{T}_3$ est l'espace des mesures bornées sur G, avec la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles uniformément bornés, et uniformément équicontinus à gauche de fonctions sur G.

2.2. Considérations vectorielles-topologiques. La construction du complété de ΓX pour les topologies $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ utilisera chaque fois un théorème général de la théorie des espaces localement convexes :

Soit E un espace localement convexe séparé, et soit E^* son dual (l'espace des formes linéaires continues sur E). Le complété de E s'identifiera avec l'espace des formes linéaires sur E^*, dont la restriction aux parties équicontinues de E^* est continue pour la topologie faible. La topologie du complété est la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E^*.

(cf. Köthe, Topologische Lineare Räume. Paragraphe 21.9.(4).)

Rassurons tout de suite le lecteur en signalant que nous n'utilisons qu'une partie relativement facile de ce théorème dans la construction du complété. Il est évident que l'espace des formes linéaires sur E^* qui vérifient la condition de continuité décrite est complet pour la topologie indiquée. E est immergé naturellement dans cet espace. Le théorème du bipolaire montre que la topologie de E s'identifie avec la topologie induite.

La partie profonde du théorème cité affirme que E est dense dans l'espace vectoriel topologique construit. Mais il sera évident que E est dense dans chacun des cas que nous envisagerons.

Ce théorème donne le schéma de la construction du complété. Nous chercherons chaque fois le dual de ΓX, les parties équicontinues de ce dual, la topologie faible de ces parties équicontinues, et enfin, les formes linéaires sur le dual qui sont continues sur les parties équicontinues.

D'autre part, soit E un espace de Banach ; <u>une forme linéaire sur E est continue si elle est bornée sur les parties compactes de E</u>. (Il suffit même qu'elle soit bornée sur les suites convergeant vers zéro, mais une partie compacte de E est contenue dans la fermeture convexe fermée d'une telle suite). Ce théorème-ci sera utile pour relever les formes linéaires sur ΓX^* et montrer qu'il s'agit effectivement de mesures.

2.3. <u>Mesures à support compact</u>. Dans tout cet alinéa, nous considérerons sur ΓX la topologie $\mathcal{T}_1$, donc la plus fine des topologies localement convexes, parmi celles qui induisent sur X une topologie moins fine que la topologie donnée initialement.

a. Une application de X dans un espace vectoriel E a un prolongement linéaire unique de ΓX dans E. Si E est localement convexe, le prolongement est continu si, et uniquement si l'application donnée est continue.

En particulier, le dual ΓX^* de ΓX(pour $\mathcal{T}_1$ bien entendu) s'identifie avec l'espace $C(X)$ des fonctions continues sur X.

Soit T un ensemble, et BT l'espace de Banach des fonctions bornées sur T, avec la norme $\| u \| = \sup_{t \in T} |u(t)|$. L'espace $\mathcal{L}(\Gamma X, BT)$ des applications linéaires continues de ΓX dans BT s'identifie avec l'espace $C(X, BT)$, des fonctions continues et à valeurs dans BT. D'autre part, une application de ΓX dans BT s'identifie avec une fonction sur $\Gamma X \times T$, et donc avec une application de T dans le dual de ΓX. Les applications continues de ΓX dans BT s'identifient avec les applications de T dans ΓX^* qui appliquent T sur une partie équicontinue de ΓX^*.

D'autre part, une identification analogue fait correspondre aux applications continues de X dans BT des applications de T dans $C(X)$, qui appliquent T sur une partie de $C(X)$ qui est équicontinue et bornée en chaque point. Les diverses identifications considérées sont compatibles entre elles.

L'identification naturelle de ΓX^* avec $C(X)$ applique les parties équicontinues de ΓX^* sur les parties équicontinues et bornées en chaque point de $C(X)$.

Enfin, X engendrant ΓX, la topologie simple de ΓX^* s'identifie avec la topologie simple de $C(X)$. Nous savons par ailleurs que la topologie simple de $C(X)$ est identique avec la topologie de la convergence compacte sur les parties équicontinues et bornées en chaque point.

b. Il s'agit maintenant de retrouver les formes linéaires sur $C(X)$ dont la restriction aux parties équicontinues et bornées en chaque point sont continues pour la topologie de la convergence compacte.

Observons pour commencer qu'une telle forme linéaire est déterminée par sa restriction à l'espace $C_o(X)$ des fonctions continues sur X, qui s'annulent à l'infini. Elle est même déterminée par sa restriction à l'espace des fonctions continues et à support compact. Ceci parce que la condition A implique qu'une fonction continue est toujours adhérente à un ensemble équicontinu de fonctions à supports compacts.

Il existe des fonctions $u_i(x)$, équicontinues, à supports compacts, tels que $u_i(x) \to 1$ pour la convergence simple. Nous ne nuisons nullement à la généralité en supposant $u_i(x)$ réel, compris entre 0 et 1.

Soit $f(x) \in C(X)$, les fonctions $f(x).u_i(x)$ constituent un ensemble équicontinu et borné de fonctions à supports compacts, auquel $f(x)$ est adhérent. Une forme linéaire sur $C(X)$, qui est continue sur les parties équicontinues et bornées et nulle sur $C_o(X)$ s'annule au point f, est identiquement nulle.

c. Un élément du complété est donc déterminé par sa restriction à $C_o(X)$. L'espace $C_o(X)$ est un espace de Banach. Ses parties compactes sont des ensembles de fonctions qui sont équicontinus bornés. La restriction d'un élément du complété est continue, donc bornée sur ces ensembles compacts.

Mais nous savons qu'une forme linéaire sur $C_o(X)$ qui est bornée sur les parties compactes de $C_o(X)$ est continue pour la structure d'espace de Banach de $C_o(X)$. Les éléments du complété de ΓX s'identifient donc avec des mesures bornées sur X.

d. Montrons ensuite que la mesure bornée associée à un élément du complété est à support compact.

Soit φ un élément du complété et μ la mesure associée. Par hypothèse, $\varphi(u) = \int u(x)\, d\,\mu(x)$ pour tout $u \in C_o(X)$. D'autre part, la forme linéaire φ est bornée sur les parties de $C(X)$ qui sont équicontinues et bornées en chaque point. Soit B une partie de $C_o(X)$ qui est équicontinue et bornée en chaque point de X; il existe un nombre M tel que

$$\left|\int u(x)\, d\,\mu(x)\right| \leq M$$

pour tout $u \in B$. Nous allons montrer que cette propriété de la mesure μ implique que μ est à support compact.

Nous devrons considérer un ensemble équicontinu de fonctions à supports compacts auquel la constante 1 est adhérente pour la convergence simple. Soit $\mathfrak{F}$ cet ensemble. Nous savons que la convergence simple équivaut à la convergence compacte dans $\mathfrak{J}$. La constante 1 est donc adhérente à $\mathfrak{J}$ pour la convergence compacte.

Soit S le support de μ. Supposons S non compact. Soit $s_1 \in S$, soit U_1 un voisinage compact de s_1. Soit f_1 un élément de $\mathfrak{J}$ qui vérifie l'inégalité $f_1(x) \geq 3/4$ sur le compact U_1. Soit T_1 le support de f_1. L'ensemble T_1 est compact.

Soit s_2 un point de S qui n'appartient pas à T_1, puis U_2 un voisinage compact de s_2 qui ne rencontre pas T_1. Soit f_2 un élément de $\mathfrak{J}$ qui vérifie l'inégalité $f_2(x) \geq 3/4$ sur U_2, et soit T_2 le support de f_2.

Par récurrence, supposons s_i, f_i, U_i construits, pour $i=1, \dots, k-1$. Soit T_i le support de f_i. Le point s_k sera pris dans S, hors de la réunion des supports T_k (Cette réunion est compacte, et S n'est pas compact). U_k sera un voisinage de s_k qui ne rencontre pas cette réunion. Enfin, f_k sera pris dans $\mathfrak{J}$, tel que $f_k(x) \geq 3/4$ sur U_k, et T_k sera le support de f_k.

Chaque point $x \in X$ a un voisinage qui rencontre au maximum un des compacts U_k. Les fonctions f sont en effet équicontinues, nous pouvons trouver un voisinage V de x tel que $| f_k(x')-f_k(x) | < 1/4$ quelque soit k, pour $x' \in V$. Mais soit $k \neq k'$, $k < k'$ par exemple, soit $y \in U_k$, $y' \in U_{k'}$. Alors $f_k(y) \geq 3/4$, $f_k(y') = 0$, il est impossible que y et y' appartiennent tous deux à V.

Choisissons pour tout k une fonction $g_k(x)$ dont le support est contenu dans U_k, et telle que $\int g_k \, d\mu = 1$. Une telle fonction existe puisque U_k est un voisinage de s_k et que s_k est dans le support de μ. Soit Λ l'ensemble des suites $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots)$ de nombres réels, positifs, inférieurs à l'unité, et telles que $\lambda_k = 0$ pour toutes les valeurs de k sauf éventuellement un nombre fini d'entre elles.

Pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $h_\lambda = \Sigma \lambda_k g_k$. L'ensemble des fonctions h_λ est équicontinu et borné. Par conséquent $\varphi(h_\lambda)$ devrait être borné indépendamment de λ. Mais $h_\lambda \in C_o(X)$, et

$$\varphi(h_\lambda) = \Sigma \lambda_k \int g_k \, d\mu = \Sigma \lambda_k$$

n'est pas borné.

La mesure μ est effectivement à support compact.

e. Nous avons ainsi construit une application biunivoque du complété de ΓX dans l'espace des mesures à support compact sur X. Cette application est surjective. C'est évident. Si μ est une mesure à support compact,

$$\int_X x \, d\mu(x)$$

est un élément du complété de ΓX, qui est appliqué sur μ par l'application de ce complété dans l'espace des mesures sur X.

Bien entendu la forme linéaire sur $C(X)$ qui est associée à μ est la forme linéaire

$$u \to \int u \, d\mu$$

qui définit la dualité usuelle entre l'espace des mesures à support compact sur X, et l'espace des fonctions continues sur X. La topologie du complété est la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de ΓX^*. Cette topologie s'identifie avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues et bornées de $C(X)$, lorsque le complété est identifié avec l'espace des mesures à support compact sur X.

2.4. Mesures bornées. Nous mettrons dans cet alinéa-ci la topologie $\mathcal{T}_2$ sur ΓX, donc la plus fine des topologies localement convexes, parmi celles pour lesquelles X soit borné, et qui induisent sur X une topologie moins fine que la topologie donnée initialement. La construction du complété de ΓX ne diffèrera que par quelques détails de celle qui est donnée à l'alinéa 2.3.

a. Le prolongement linéaire $\Gamma X \to E$ (E localement convexe) d'une application $X \to E$ est continu si, et uniquement si l'application donnée est continue et applique X sur une partie bornée de E. Le dual ΓX^* s'identifie avec l'espace $C^*(X)$ des fonctions continues bornées sur X. L'espace $\mathcal{L}(\Gamma X, BT)$ des applications linéaires continues de ΓX dans BT s'identfie avec l'espace $C^*(X, BT)$ des applications continues et bornées de X dans BT, l'espace BT étant comme précédemment l'espace des fonctions bornées sur l'ensemble T, avec sa structure d'espace de Banach usuelle.

Bien entendu, $\mathcal{L}(\Gamma X, BT)$ peut-être identifié avec l'espace des applications de T dans ΓX^* qui appliquent T sur une partie équicontinue de ΓX^*. D'autre part, $C^*(X, BT)$ s'identifie avec l'espace des applications de T dans $C^*(X)$ qui appliquent T sur une partie uniformément bornée, et équicontinue en tout point de $C^*(X)$.

L'identification naturelle de ΓX^* avec $C^*(X)$ associe aux parties équicontinues de ΓX^* les parties uniformément bornées et ponctuellement équicontinues de $C^*(X)$.

Comme précédemment, X engendre ΓX, la topologie faible déterminée par ΓX s'identifie avec la topologie simple de $C^*(X)$. Sur les parties équicontinues et uniformément bornées de $C^*(X)$, cette topologie coïncide encore avec la topologie de la convergence compacte.

b. La démonstration donnée à l'alinéa précédent montre de nouveau qu'un élément du complété, c'est-à-dire une forme linéaire sur $C^*(X)$, dont la restriction aux parties équicontinues et uniformément bornées est continue pour la topologie simple, est déterminée par sa restriction à l'espace de Banach $C_o(X)$, et que cette restriction est une mesure bornée.

D'autre part, nous pouvons associer à toute mesure bornée μ un élément

$$\int x \, d\mu$$

du complété de ΓX. Le complété de ΓX s'identifie, ainsi que nous l'avons affirmé, avec l'espace des mesures bornées sur X.

et ceci, pour la topologie indiquée (puisque les parties équicontinues de ΓX^* s'identifient avec les parties uniformément bornées, et ponctuellement équicontinues de $C^*(X)$).

2.5. Représentations équicontinues des groupes. Dans cet alinéa, nous poserons $X=G$, G un groupe localement compact, et nous mettrons sur ΓG la topologie $\mathcal{T}_3$, c'est-à-dire, la topologie localement convexe la plus fine, qui induise sur G une topologie moins fine que la topologie donnée, et soit telle que la représentation de G sur ΓG soit composée d'opérateurs équicontinus. La construction du complété différera en quelques points de celle que nous avons exposée aux deux alinéas précédents

a. Observons pour commencer que G est une partie bornée de ΓG. C'est en effet l'ensemble des transformées de l'unité par les opérateurs de la représentation, et l'ensemble des opérateurs de la représentation est équicontinu.

De nouveau parce que cet ensemble d'opérateurs est équicontinu, $hg_i \to h$ uniformément pour $h \in G$, lorsque $g_i \to e$ (l'unité de G). La structure uniforme additive de ΓG est donc moins fine que la structure uniforme gauche de G.

Les formes linéaires continues sur ΓG s'identifient avec des fonctions uniformément bornées, et uniformément continues pour la structure uniforme gauche de G. Les parties équicontinues de ΓG^* s'identifient avec des ensembles uniformément bornés et uniformément équicontinus de fonctions sur G.

b. Soit ensuite B un ensemble uniformément borné et uniformément équicontinu de fonctions sur G. Nous allons montrer que B définit un ensemble équicontinu de formes linéaires sur ΓG. Sans nuire à la généralité, nous pouvons supposer B stable pour les translations, c'est-à-dire supposer que $t_* u \in B$ lorsque $t \in G$, $u \in B$, si $t_* u(g) = u(t^{-1} g)$. Si l'ensemble donné n'est pas stable, nous pouvons toujours le saturer.

Nous définissons sur ΓG une semi-norme ν_B en posant

$$\nu_B(\Sigma\, d_i\, h_i) = \sup_{u \in B} |\Sigma\, d_i\, u(h_i)|$$

Cette semi-norme induit sur G une topologie moins fine que la topologie donnée, parce que B est équicontinu et borné. D'autre part, B est stable pour les translations,

$$\nu_B(g_* \,\Sigma\, d_i\, h_i) = \nu_B(\Sigma\, d_i\, h_i)$$

Les opérateurs de la représentation sont isométriques pour ν_B.

Par conséquent, ν_B définit sur ΓG une topologie moins fine que $\mathcal{T}_3$. Cette semi-norme est continue, B correspond à un ensemble équicontinu de formes linéaires.

c. Nous avons retrouvé ainsi le dual de ΓG, et les parties équicontinues de ce dual.

Comme précédent, la topologie faible de ΓG^* correspond à la convergence simple des fonctions, sur ΓG^* et a fortiori sur les parties équicontinues de ΓG^*.

Considérons ensuite l'espace de Banach $C_o(G)$, des fonctions continues sur G qui s'annulent à l'infini. Les éléments de $C_o(G)$ sont uniformément continus et bornés. Les parties compactes de $C_o(G)$ sont des ensembles uniformément équicontinus et bornés de fonctions.

Nous pouvons reprendre les démonstrations données aux alinéas précédents. La restriction à $C_o(G)$ d'un élément du complété de ΓG est une mesure bornée sur G. L'opération de restriction est surjective. Si μ est une mesure bornée sur G,

$$\int g \, d \, \mu(g)$$

est un élément du complété de ΓG dont la restriction à $C_o(G)$ est la mesure donnée.

d. Nous achèverons la démonstration en montrant qu'un élément du complété est déterminé par sa restriction à $C_o(G)$. Il suffira de montrer que la constante 1 est adhérente à un ensemble uniformément équicontinu de fonctions à supports compacts.

Soit $\varphi(g)$ une fonction symétrique continue à support compact sur G. Soit

$$\delta(g) = \sup_{h\varepsilon G} |\varphi(hg) - \varphi(h)|$$

La fonction $\delta(g)$ est un"écart"sur G. C'est une fonction continue (parce que φ est uniformément continue), et

$$\delta(g^{-1}) = \delta(g)$$

$$\delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2)$$

De plus si φ prend des valeurs supérieures à l'unité, l'ensemble des points où $\delta(g) \leq 1$ est un voisinage compact de l'unité.

Soit K compact. Soit

$$u_K(g) = \sup \{ 0, 1 - \varphi(g^{-1} k) \mid k \in K \}$$

Chaque fonction u_K est à support compact, et égale à l'unité sur K. L'ensemble des fonctions u_K est uniformément continu parce que

$$| u_K(g) - u_K(g') | \angle \delta (g^{-1} g')$$

Enfin, la constante 1 est simplement adhérente à l'ensemble des fonctions u_K, K compact. Ceci achève la démonstration.

<u>Exercices</u>.

1. Soit $\mathcal{V}$ une variété indéfiniment différentiable, dénombrable à l'infini. Mettons sur $\Gamma \mathcal{V}$ la topologie localement convexe la plus fine, telle que l'application identique de $\mathcal{V}$ dans $\Gamma \mathcal{V}$ soit indéfiniment différentiable. Le complété de $\Gamma \mathcal{V}$ s'identifie avec l'espace $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact sur $\mathcal{V}$, avec sa topologie usuelle.

Il faut montrer que le dual de $\Gamma \mathcal{V}$ s'identifie avec l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $\mathcal{V}$, et que les parties équicontinues de ce dual s'identifient avec les parties de $\mathcal{E}$ qui sont bornées pour la topologie que l'on considère généralement sur $\mathcal{E}$.

La proposition énoncée découle des propriétés connues de $\mathcal{E}$.

D'autres espaces de distributions se définissent de manière analogue, en imposant à l'application de $\mathcal{V}$ dans $\Gamma\mathcal{V}$ des propriétés de croissance ou de décroissance à l'infini, complémentaires des propriétés de décroissance ou de croissance des distributions recherchées.

2. Les représentations isométriques et topologiquement cycliques de G sur les espaces de Banach sont en correspondance biunivoque avec les ensembles de fonctions continues sur G, qui sont convexes, symétriques, compacts pour la convergence simple, et stables pour les translations à gauche du groupe.

Dans cet énoncé, une représentation cyclique est un couple, composé d'une représentation et d'un générateur cyclique. A tout élément t du groupe, nous associons la translation $u \to t_* u$ avec $t_* u(g) = u(t^{-1} g)$. Les représentations sont classées à une isométrie près, pas à une équivalence près.

Il apparaît intéressant de classer les ensembles de fonctions continues, qui sont convexes, symétriques, simplement compacts, et stable pour les translations.

Si un tel ensemble n'est pas nul, il contient toujours une fonction u telle que $u(e) \neq 0$. A une homothétie près, nous pouvons supposer que $u(e) = 1$. Parmi les ensembles de fonctions continues qui ont les propriétés souhaitées, et contiennent une fonction u telle que $u(e) = 1$, il en existe des minimaux, en vertu du théorème de Zorn.

130.

Il serait déjà intéressant de trouver ces ensembles minimaux pour tel ou tel groupe. Ces ensembles correspondent à des représentations irréductibles du groupe, qui ont des propriétés supplémentaires.

3. Algèbres de mesures.

3.1. Composée par une mesure. Les espaces vectoriels topologiques de mesures que nous avons trouvés au paragraphe 2 permettent de mieux comprendre l'opération de composition définie au paragraphe 1.6.

Soit E un espace complet de représentation de G. Pour $\Sigma d_i h_i \in \Gamma G$, et $x \in E$, posons

$$(\Sigma d_i h_i)_* x = \Sigma d_i (h_{i*} x)$$

L'application $\Sigma d_i h_i \rightarrow (\Sigma d_i h_i)_* x$ est continue pour la topologie $\mathcal{T}_1$ lorsque $g_* x$ dépend continument de g, notamment lorsque la représentation est séparément continue. Elle est continue pour la topologie $\mathcal{T}_2$ si $g_* x$ dépend continument de g, l'ensemble $G_* x$ étant borné. Elle est continue pour la topologie $\mathcal{T}_3$ si la représentation est séparément continue, l'ensemble des opérateurs de représentation étant équicontinu.

Dans chaque cas particulier, nous pouvons prolonger cette application en une application continue du complété de ΓG dans E. C'est cette application du complété qui est définie au paragraphe 1.6. Les propriétés de continuité de $\mu_* x$ en fonction de x ont été explicitées au paragraphe 1.6. Celles de $\mu_* x$ en fonction de μ sont faciles à retrouver ici, lorsque les espaces de mesures sont munis des topologies étudiées au paragraphe 2.

3.2. Composition des mesures. Nous appellerons $M_c(G)$ l'espace vectoriel topologique obtenu en complètant ΓG pour $\mathcal{T}_1$; $M_1(G)$ sera l'espace vectoriel topologique obtenu en complètant ΓG pour $\mathcal{T}_2$; $M_2(G)$ sera l'espace vectoriel topologique obtenu en complètant ΓG pour $\mathcal{T}_3$. L'espace vectoriel sous-jacent de $M_1(G)$ coïncide avec celui de $M_2(G)$, n'est autre que l'espace $M(G)$ des mesures bornées sur G.

La représentation de G sur ΓG est continue, que l'on mette sur ΓG la topologie $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ou $\mathcal{T}_3$. En complètant, nous constatons que les représentations de G sur $M_c(G)$, sur $M_1(G)$ et sur $M_2(G)$ sont des représentations continues. On constate que $G_* \mu$ est borné dans $M_1(G)$ pour toute mesure bornée μ. Enfin, la représentation de G sur ΓG est composée d'opérateurs équicontinus pour $\mathcal{T}_3$, la représentation de G sur $M_2(G)$ est donc composée d'opérateurs équicontinus.

La construction du paragraphe 1.6. permet de définir $\mu_1 * \mu_2$ lorsque μ_1 et μ_2 sont, soit deux mesures à support compact, soit deux mesures bornées. La composée est encore une mesure à support compact, ou une mesure bornée selon le cas.

Il est clair, d'après les propriétés établies, que l'opération que nous définissons est séparément continue sur $M_c(G)$, et sur $M_2(G)$. Cette opération est également séparément continue sur $M_1(G)$, mais ce fait ne découle pas des propriétés établies, tout au moins pas immédiatement. Il est clair que $\mu_1 * \mu_2$ dépend continuement de μ_1. L'existence d'une involution continue dans

$M_1(G)$ nous permettra d'établir la continuité de la composition en le second facteur.

Il est intéressant de déterminer plus explicitement $\mu_{1*}\mu_2$. D'abord, $g_* \mu(S) = \mu(g^{-1}S)$ si S est borélien.

D'après la définition

$$\begin{aligned} \mu_{1*}\ \mu_2(S) &= \int g_*\ \mu_2(S)\ d\ \mu_1(g) \\ &= \int \mu_2(g^{-1}S)\ d\ \mu_1(g) \\ &= \mu_1 \times \mu_2(S_2) \end{aligned}$$

si $S_2 \subseteq G \times G$ est l'ensemble des (g_1, g_2) tels que $g_1 g_2 \in S$, $\mu_1 \times \mu_2$ étant la mesure produit.

De même

$$\mu_1 * \mu_2 * \mu_3(S) = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3(S_3)$$

où S_3 est l'ensemble des (g_1, g_2, g_3) avec $g_1 g_2 g_3 \in S$. L'associativité de la composition des mesures découle de cette observation. Il est intéressant d'observer que la composition interne de l'algèbre de mesures s'associe avec la composition externe des mesures avec les éléments des espaces de représentation de G.

$$\begin{aligned} (\mu_{1*}\ \mu_2)_*\ x &= \mu_{1*}(\ \mu_{2*}\ x) \\ &= \int (g_1 g_2)_*\ x\ d\ \mu_1(g_1)\ d\ \mu_2(g_2) \end{aligned}$$

puisque $g_{1*}(g_{2*}\ x) = (g_1 g_2)_*\ x$. Un espace de représentation de G est donc un module sur une algèbre de mesures.

3.3. <u>L'involution</u>. Posons, pour $\Sigma\, d_i\, h_i \in \Gamma\, G$,

$$(\Sigma\, d_i\, h_i)^* = \Sigma\, \bar{d}_i\, h_i^{-1}$$

Nous définissons ainsi une involution de l'algèbre $\Gamma\, G$.
Cette involution est continue lorsque $\Gamma\, G$ est munie, soit de la topologie $\mathcal{C}_1$, soit de la topologie $\mathcal{C}_2$. Elle se prolonge donc en une involution continue, soit de $M_c(G)$, soit de $M_1(G)$.

En passant, nous montrons que $\mu_1 * \mu_2$ dépend continument de μ_2 pour la topologie de $M_1(G)$ puisque

$$\mu_1 * \mu_2 = (\mu_2{}^* * \mu_1{}^*)^*$$

Il est clair d'autre part que l'involution n'est pas continue pour la topologie de $M_2(G)$. Elle définit, c'est trivial, un anti-isomorphisme de $M_2(G)$ avec l'algèbre $M_2^*(G)$ que l'on aurait construite en considérant sur $\Gamma\, G$ la plus fine des topologies telles que l'application identique de G dans $\Gamma\, G$ soit continue, et telles que l'ensemble des opérateurs

$$\Sigma\, d_i\, h_i \rightarrow \Sigma\, d_i\, (h_i\, t)$$

soit équicontinu. Le complété $M_2{}^*(G)$ est encore l'espace des mesures bornées sur G, mais avec une topologie différente de celle de $M_2(G)$, en tout cas lorsque les structures uniformes gauche et droite de G diffèrent.

4. Représentations de G et de $L_1(G)$.

Nous étudions l'espace des fonctions sommables par rapport à une mesure de Haar, ou mieux, des mesures bornées absolument continues par rapport aux mesures de Haar. Cet espace est une algèbre de Banach à involution.

Nous établissons l'équivalence de la théorie des représentations de $L_1(G)$, avec celle des représentations continues de G par des opérateurs équicontinus, ceci sur les espaces localement convexes complets.

4.1. L'espace $L_1(G)$. Nous avons défini $L_1(G)$ comme l'espace des fonctions sommables par rapport à une mesure de Haar.
Il est parfois préférable de considérer $L_1(G)$ comme l'espace des mesures absolument continues par rapport à une mesure de Haar.

Les deux définitions sont essentiellement équivalentes. Le théorème de Radon-Nikodym affirme que l'on peut trouver une fonction f, sommable par rapport à μ, et telle que $d\mu' = f\, d\mu$ si μ' est une mesure bornée, absolumentcontinue par rapport à la mesure positive μ.

(Rappelons que μ' est dite absolument continue par rapport à μ si un ensemble borélien μ-nul est μ'-nul).

L'espace des mesures absolument continues ne dépend pas du choix de la mesure de Haar. Deux mesures de Haar sont, en effet toujours absolument continues l'une par rapport à l'autre. Les opérations que nous introduirons sur $L_1(G)$ dépendront du choix de la mesure de Haar si nous considérons L_1 comme un espace de fonctions, mais n'en dépendront pas si nous considérons L_1 comme espace de mesures.

Les notations fonctionnelles seront toutefois plus simples. Nous choisirons donc, une fois pour toutes une mesure invariante à gauche, soit m. L'espace $L_1(G)$ sera l'espace de Banach $L_1(m)$. Si pour une raison quelconque, nous étions amenés à "changer de mesure de Haar", nous aurions par exemple $dm' = k\,\lambda\,(g)^{-1}\,dm$ (la mesure m' invariante à droite). L'élément $u \in L_1(m)$ serait associé à l'élément $u' \in L_1(m')$:

$$u'(g) = k^{-1}\,\lambda\,(g)\,u(g)$$

4.2. <u>Structure d'algèbre de Banach à involution</u>. L'espace des mesures bornées absolument continues par rapport aux mesures de Haar est auto-adjoint pour l'involution de l'espace des mesures sur le groupe. A la mesure $u(g)dm(g)$ correspond la mesure

$$\overline{u(g^{-1})}dm(g^{-1}) = \lambda\,(g)^{-1}\,\overline{u(g^{-1})}dm(g)$$

Nous définissons donc une involution sur l'espace $L_1(G)$ en posant

$$u^*(g) = \lambda\,(g)^{-1}\,\overline{u(g^{-1})}$$

Cette involution conserve la norme.

Considéré comme espace de mesures, $L_1(G)$ est un idéal bilatère de l'espace des mesures bornées sur G. Cela nous permet de composer un élément de $L_1(G)$ à gauche ou à droite par une mesure bornée sur G ;

$$\mu_* u(g) = \int u(t^{-1}g)\, d\mu(t)$$

$$u_* \mu(g) = \int u(gt^{-1})\, \lambda(t)^{-1}\, d\mu(t)$$

(si m est une mesure invariante à gauche, et si λ est défini ici, comme précédemment par $dm(gg_o) = \lambda(g_o)dm(g)$ pour g_o constant).

Un idéal est toujours un sous-anneau. Nous pouvons composer ainsi deux éléments de $L_1(G)$,

$$u_* v(g) = \int u(t)\, v(t^{-1}g)\, dm(t)$$

$$= \int u(gt^{-1})\, v(t)\, \lambda(t)^{-1}\, dm(t)$$

Toutes les intégrales ci-dessus convergent pour presque toutes les valeurs de g, la somme, ainsi définie presque partout, est une fonction sommable par rapport à la mesure de Haar. On remarque que les formes gauches sont légèrement différentes des formes droites, ceci parce que nous considérons une mesure invariante à gauche.

4.3. Approximations de l'unité. L'existence d'une approximation bornée de l'unité est une propriété intéressante de $L_1(G)$. En fait, $L_1(G)$ est un idéal dense de $M_2(G)$.

A tout voisinage U de l'unité de G, nous associons une fonction φ_U, à support dans U, positive, et telle que $\int \varphi_U\, dm = 1$. La mesure ψ_U donnée par $d\psi_U = \varphi_U\, dm$ tend vers la mesure de Dirac en l'unité de G, pour la topologie de $M_c(G)$.7 Par conséquent, $\psi_{U*}f \to f$ si f est un élément d'un espace de représentation séparément continue de G. C'est vrai en particulier si $f \in L_1(G)$.

Nous avons défini la composée de deux éléments de $L_1(G)$ de manière telle que $\psi_{U*} f = \varphi_{U*} f$. Une famille φ_U d'éléments de $L_1(G)$ a donc été construite, telle que $||\varphi_U|| = 1$ pour tout U, et telle que $\varphi_{U*} f \to f$ quelque soit $f \in L_1(G)$.

C'est cette famille d'éléments de $L_1(G)$ qui est appelée une "approximation bronée de l'unité".

4.4. Représentations de L_1 associées aux représentations de G.

Soit E un espace localement convexe complet. Considérons sur E une représentation de G qui est continue, et telle que les opérateurs de représentation soient équicontinus.

Posons

$$u_* x = \int u(g)\, g_* x \, dm(g)$$

lorsque $u = u(g) \in L_1(G)$. La composée $u_* x$ est encore la composée de x par la mesure absolument continue associée à u.

Une loi de composition externe $(u,x) \to u_* x$ est ainsi définie sur $L_1(G) \times E$. Nous avons l'associativité externe

$$u_*(v_* x) = (u_* v)_* x$$

L'application $(u,x) \to u_* x$ est continue. Enfin, l'espace vectoriel engendré par les images $u_* x$ est dense dans E.

Ces propriétés sont évidentes, ou essentiellement établies L'associativité externe n'est qu'un cas particulier de la propriété que nous avons établie pour les représentations des groupes et des algèbres de mesures. La continuité découle de l'équicontinuité de l'ensemble des opérateurs de représentation. Enfin, $\varphi_{V*}x \to x$, si φ_V est une approximation de l'identité dans $L_1(G)$, l'ensemble des composées $u_* x$ est dense, l'espace vectoriel que ces composées engendrent l'est a fortiori.

Une représentation de $L_1(G)$ sera par définition une application de $L_1(G) \times E$ dans E, qui est continue, à la propriété d'associativité externe indiquée, et est telle que l'espace engendré par les composées soit dense.

4.5. Relèvement d'une représentation de $L_1(G)$. Nous venons d'associer une représentation de $L_1(G)$ à toute représentation continue de G par des opérateurs équicontinus. Nous allons associer réciproquement une représentation continue de G par des opérateurs équicontinus à toute représentation de $L_1(G)$.

La composition interne de $L_1(G)$, et la composition externe définie sur E, avec opérateurs dans $L_1(G)$ seront notées $u_* v$, $u_* x$. Nous devrons considérer d'autre part la représentation de G sur $L_1(G)$; la transformée d'un élément f de $L_1(G)$ par un élément t du groupe sera notée $t.f$, donc

$$t.f(g) = f(t^{-1} g)$$

Nous définirons une représentation de G sur E. La transformée d'un vecteur $x \in E$ par un élément t du groupe sera notée $t.x$.

Soit E_1 l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des éléments $f_* x$, $f \in L_1$, $x \in E$. Par hypothèse, E_1 est dense dans E. Nous allons définir $t.x$ pour $t \in G$, $x \in E_1$ par la relation

$$t. \Sigma f_{i*} x_i = \Sigma (t. f_i)_* x_i \qquad (1)$$

Il n'est pas évident que cette définition soit admissible. Si elle l'est, il est encore moins évident que l'ensemble des opérateurs que l'on définirait ainsi dans E_1 est équicontinu. La démonstration de ces propriétés utilise l'existence d'une approximation bornée de l'identité dans $L_1(G)$.

Soit $\Sigma f_{i*} x_i \in E_1$. Il est clair que $t.f_i = \lim (t.\varphi_U)_* f_i$ et

$$(t.\varphi_U)_* \Sigma f_{i*} x_i = \Sigma (t.\varphi_U)_* f_{i*} x_i$$
$$\to \Sigma (t.f_i)_* x_i$$

Ceci montre que $\Sigma (t.f_i)_* x_i$ ne dépend que de $\Sigma f_{i*} x_i$. La définition de $t.x$ par la relation (1) est légitime.

Ensuite, l'ensemble des fonctions $t.\varphi_U$ est borné dans $L_1(G)$. L'ensemble des opérateurs $x \longrightarrow (t.\varphi_U)_* x$ est un ensemble équicontinu d'opérateurs de E_1. (Puisque la représentation de $L_1(G)$ est continue). L'adhérence simple d'un ensemble équicontinu d'applications est encore équicontinu. Nous montrons ainsi que l'ensemble des applications $x \to t.x$ de E_1 dans E_1 est équicontinu.

Inspectant la définition (1), nous constatons immédiatement que $e.x = x$, et que $t_1.(t_2.x) = (t_1.t_2).x$. Ensuite, $t.f_1$ dépend continument de t, $t.x$ dépend continument de x.

Une représentation continue de G, par des opérateurs équicontinus a ainsi été définie sur l'espace E_1. Cette représentation de G sur E_1 se prolonge en une représentation de G sur le complété de E_1. Ce complété s'identifie avec E, puisque E_1 est supposé dense dans E, qui est complet.

4.6. Théorème d'équivalence. Soit E un espace localement convexe complet. A toute représentation continue, composée d'opérateurs équicontinus de G sur E, nous associons une représentation de $L_1(G)$ sur E. A toute représentation de $L_1(G)$ sur E, nous associons une représentation continue, composée d'opérateurs équicontinus, de G sur E.

Pour pouvoir affirmer que les deux notions que nous étudions sont équivalentes, nous devons montrer que les deux applications que nous avons construites sont inverses l'une de l'autre.

Partons par exemple d'une représentation de G; Nous définissons $g_* x$ pour $g \in G$, $x \in E$. Soit alors $u(g) \in L_1(G)$, la composée $u_* x$ est définie par

$$u_* x = \int u(g)\, g_* x \, dm(g)$$

Si $x \in E_1$, $g \in G$, nous définissons $g.x$ par

$$g.x = \lim (g.\varphi_U)_* x$$

Et $g.x = g_* x$ parce que $x = \Sigma f_{i*} x_i$, et $(g.\varphi_U)_* f_i \longrightarrow f_i$.
Par conséquent $g.x = g_* x$ pour tout $x \in E_1$, et par continuité pour tout $x \in E$.

Partons ensuite d'une représentation de $L_1(G)$; la composée $u_* x$ est définie pour $u \in L_1(G)$, $x \in E$. Dans ces conditions, nous avons défini $g.x$, pour $g \in G$, $x \in E_1$ de manière telle que

$$g.\Sigma f_{i*} x_i = \Sigma (g.f_i)_* x_i$$

et prolongé $g.x$ à tout l'espace E par continuité. La représentation de $L_1(G)$ qui est associée à cette représentation de G sera donnée par

$$u.x = \int u(g)\, g.x\, dm(g)$$

Il est clair que $u.x = u_* x$ si $x \in E_1$. Cette relation se prolonge continument, $u.x = u_* x$ pour tout $x \in E$.

Le résultat souhaité est établi.

4.7. Remarques. Nous avons observé que $g.x = \lim(g.\varphi_U)_* x$ pour tout $x \in E_1$. Cette relation étant établie pour tout élément x d'un espace de représentation continue de G, elle est donc vraie pour tout $x \in E$.

Ce qui est plus important, c'est que les sous-espaces fermés de E qui sont stables pour $L_1(G)$ sont stables pour G. Ce sont en effet des sous-espaces complets de représentation de $L_1(G)$.

Les notions de représentation irréductibles de G, et de $L_1(G)$ sont équivalentes.

143.

<u>Exercices</u>. Commençons par voir ce que l'on peut dire, si l'on connaît une application de $L_1(G) \times E$ dans E, E localement convexe complet, qui est continue et vérifie la condition d'associativité externe. Nous levons donc l'hypothèse que E_1 soit dense dans E.

1. Soit $\overline{E_1}$ la fermeture de l'espace E_1, engendré par les $u_* x$, $x \in E$, $u \in L_1(G)$. L'ensemble des $u_* x$, $x \in \overline{E_1}$, $u \in L_1(G)$ est dense dans $\overline{E_1}$. Cet espace est donc un espace de représentation de G.

2. Supposons que E soit un espace de Hilbert, et que l'ensemble des opérateurs de représentation soit self-adjoint. La "représentation" s'annule alors sur $E_1^{\perp}$. Elle se compose donc de la projection de E sur $\overline{E_1}$, et d'une représentation de G sur $\overline{E_1}$.

La condition indiquée sera notamment vérifiée si l'adjointe de l'opérateur associé à un élément u est l'opérateur associé à u^*. La représentation de $L_1(G)$ est alors "unitaire", la représentation de G sur $\overline{E_1}$ qu'on lui associe est composée d'opérateurs unitaires.

3. Une situation toute différente se présente déjà dans la théorie des espaces de Banach. On peut faire opérer $L_1(G)$ sur $L_\infty(G)$ en posant

$$u_* v(g) = \int u(t)\, v(t^{-1}g)\, dm(t)$$

pour $u \in L_1(G)$, $v \in L_\infty(G)$. La composée est une fonction uniformément continue pour la structure uniforme gauche. L'espace $\overline{E}_1$ est l'espace des fonctions uniformément continues et bornées, pour la structure uniforme gauche de G.

Si $u \in \overline{E}_1$, et si φ_U est une approximation de l'identité la composée $\varphi_U * u$ ne peut tendre vers aucune limite. En effet cette composée tend vers u pour la topologie faible déterminée par L_1 sur L_∞, donc pour une topologie moins fine que la topologie de L_∞. Si une limite existait pour L_∞, cette limite ne pourrait être que u, et cette limite ne peut-être u.

Indiquons ensuite comment des raisonnements analogues à ceux que nous avons développés dans cet alinéa peuvent être appliqués aux représentations continues de G.

4. Considérons l'espace $L_{1.c}(G)$ des fonctions sommables à support compact dans G. Appelons "bornées" dans $L_{1.c}(G)$ les ensembles de fonctions qui sont bornés pour la structure de $L_1(G)$, et ont leur support contenu dans un compact fixe. Le produit de composition définit sur $L_{1.c}(G)$ une structure de b-algèbre (d'algèbre à bornés complètes, cf "Etude spectrale des algèbres complètes", et autres travaux du même auteur).

145.

Une représentation continue de G sur un espace complet E induit une représentation de $L_{1,c}(G)$ sur E, qui vérifie la condition d'associativité externe, telle que l'ensemble des composées $u_* x$, ou des combinaisons linéaires de composées soit dense, et telle que l'ensemble des opérateurs de représentation associés à une partie bornée de $L_{1,c}(G)$ soit équicontinu.

Réciproquement, une représentation de $L_{1,c}(G)$ qui a les propriétés indiquées est toujours associée à une représentation continue de G. Il y a équivalence entre la théorie des représentations de G et celle des représentations de $L_{1,c}(G)$.

TABLE DES MATIERES.

-!-!-!-!-!-!-!-!-!-!-

Bibliographie sommaire : voir I in fine

Plusieurs exposés suivent d'assez près le livre de Naimark(Normed Rings)

Avec tous nos remerciements à madame Puule Liégeois, secrétaire du Département de Mathématique de l'ULB, pour tout le soin et la patience qu'elle a mis à dactilographier ces notes.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.