Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

Isotropie des espaces de Klein

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.67

msp

Isotropie des espaces de Klein

Jacques Tits

[34] Originally published in *Colloque de géométrie différentielle globale*, Bruxelles, 19–22 décembre 1958, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Librairie Universitaire, Louvain, and Gauthier-Villars, Paris, 1959, 153–161. Reused with permission.

ISOTROPIE DES ESPACES DE KLEIN

PAR

M. J. TITS (Bruxelles)

1. *Espaces de Klein*

Pour Klein, une « géométrie » est constituée par l'ensemble des notions et propriétés invariantes pour un groupe de transformations donné. Nous avons proposé [12] (1) d'appeler *espace de Klein* une paire (E,G) constituée par un ensemble E et un groupe G de transformations de cet ensemble. Ici, nous supposerons en outre, comme on a coutume de le faire (cf. par exemple [10]),

que E est une variété analytique connexe,

que le groupe « abstrait » G est un groupe analytique, possédant au plus une infinité dénombrable de composantes connexes (2),

que G opère analytiquement sur E (3),

que G est transitif sur E.

L'existence de ces structures additionnelles et les conditions imposées à E et G sont d'ailleurs — implicitement ou explicitement — postulées par Klein. La transitivité de G exprime l'*homogénéité* de l'espace, c'est-à-dire, dans le langage de Klein, le fait qu'aucune propriété appartenant à la géométrie considérée ne permet de distinguer un point d'un autre.

Soient p un point de E et H le groupe des éléments de G conservant ce point. Des hypothèses faites sur E et G, il résulte que H est un sous-groupe fermé de G (ne contenant aucun sous-groupe invariant de G : cf. note (3)), et que E peut être identifié canoniquement à l'espace G/H des classes latérales à droite de H dans G (cf. par exemple [9], [10]).

Il convient d'insister sur le fait que, contrairement à ce qui se passe par exemple lorsqu'on étudie les propriétés topologiques des espaces homogènes, ce n'est pas seulement l'existence d'un groupe analytique transitif sur E qui importe ici, mais la donnée

(1) Cf. les remarques faites à ce propos loc. cit., p. 41, note (1).

(2) On suppose souvent G connexe.

(3) Il va sans dire que G, qui est au départ un groupe de transformations, est supposé opérer effectivement sur E.

du groupe lui-même, deux espaces (E,G) et (E,G_1) devant être considérés comme essentiellement différents dès que les groupes G et G_1 le sont.

Nous dirons que deux espaces $(E = G/H, G)$ et $(E_1 = G_1/H_1, G_1)$ sont *localement isomorphes* s'il en est ainsi des paires (G,H) et (G_1, H_1). Un espace $(E = G/H,G)$ est donc déterminé à un isomorphisme local près par la paire $(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$ formée de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G et de la sous-algèbre $\mathfrak{H}$ correspondant à H. Une propriété d'un espace (E,G) sera dite *locale* si elle appartient aussi à tout espace localement isomorphe à (E,G), c'est-à-dire, si c'est en fait une propriété de la paire $(\mathfrak{G},\mathfrak{H})$.

A. Les espaces isotropes (4)

2. *Définitions. Conventions préliminaires.*

2.1. Nous disons qu'un espace (E,G) est *isotrope* si G est transitif sur l'ensemble (espace fibré à fibres projectives) des éléments de contact du premier ordre (point + direction) de E.

Soient p et H définis comme au § 1, et P_p l'espace projectif des éléments de contact en p, c'est-à-dire l'espace projectif quotient de l'espace vectoriel V_p tangent à E en p. Le groupe H induit sur P_p un groupe de projectivités H_p, et (E,G) est isotrope si et seulement si H_p est transitif sur P_p.

Notons que

2.1.1. *L'isotropie d'un espace de Klein est une propriété locale.*

Cette proposition, quoique facile à démontrer, n'est pas absolument évidente, et cesse d'ailleurs d'être vraie lorsqu'on admet des groupes G possédant une infinité non dénombrable de composantes connexes.

2.2. La détermination des espaces de Klein isotropes a été réalisée dans [12]. Nous rappelerons l'essentiel de ces résultats au § suivant. Cependant, pour permettre une énumération assez courte des espaces en question, nous ferons deux conventions simplificatrices.

(4) Les résultats brièvement exposés ici font l'objet du chapitre IV, D, de [12].

En premier lieu, *nous considérerons seulement les espaces donnés à un isomorphisme local près.* Une liste complète devrait comprendre notamment, outre les espaces mentionnés, les espaces orientés correspondants ([5]), les revêtements eventuels (par exemple les sphères euclidiennes, revêtements des espaces elliptiques), etc.

Notre seconde convention concerne les espaces à structure affine. Nous disons qu'un espace de Klein (E,G) a une structure affine réelle, complexe, quaternionienne ou octavienne si E est un espace affin réel, complexe, ..., et si G est un groupe de collinéations de cet espaces. Deux espaces (E,G), (E,G_1), définis à partir du même espace affin E seront appelés *homothétiques* (sur le corps des réels, des complexes, ...) si G et G_1 induisent le même groupe de collinéations de l'espace projectif (réel, complexe, ...) des points à l'infini de E. Dans l'énumération du nº 3.1, *nous ne ferons pas de différence entre des espaces homothétiques entre eux*, c'est-à-dire que les expressions utilisées dans cette énumération désigneront non pas des espaces bien déterminés, mais des classes d'équivalence par rapport à l'homothétie. Cette convention est justifiée par le fait que les espaces isotropes homothétiques à un espace isotrope donné se déterminent aisément à l'aide des propriétés suivantes, faciles à démontrer :

Soient K le corps des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions, E un espace affin sur K de dimension $n \geqslant 2$, G un groupe connexe de collinéations de cet espace, G^u l'intersection de ce groupe avec le groupe des transformations linéaires (sur K) de déterminant 1 de E ([6]), et Γ_p le groupe des homothéties de E de centre donné p. Dans le cas réel, on supposera en outre qu'il n'existe pas sur E de structure affine complexe invariante par G. Alors, *si (E,G) est isotrope il en est de même de (E,G^u), et G est le produit (localement direct) de G^u et d'un sous-groupe de Γ_p; de plus, deux espaces isotropes (E,G) et (E,G_1) sont homothétiques si et seulement si $G^u = G_1^u$* (G_1 satisfaisant aux mêmes

([5]) Certains de ces espaces sont orientés naturellement; c'est par exemple le cas des espaces projectifs quaternioniens et du plan projectif des octaves. Il en est de même des espaces projectifs complexes, *considérés comme variétés analytiques complexes* (dont le groupe d'automorphisme est le groupe des *projectivités*); par contre, si on les considère seulement en tant qu'*espaces projectifs topologiques* (dont le groupe d'automorphismes est le groupe des *collinéations*), seuls les espaces de dimension (complexe) paire ont une orientation naturelle.

([6]) Pour la définition du déterminant dans le cas quaternionien, cf. [4].

conditions que G, et G_1^u étant défini comme G^u). Pour ce qui concerne le cas octavien, *deux espaces à structure affine octavienne sont homothétiques sur les octaves si et seulement s'ils sont homothétiques sur les réels.*

3. *Enumération des espaces isotropes.*

Moyennant les conventions susdites (n° 2.2), les seuls espaces de Klein isotropes sont (7)

3.1. *Espaces à structure affine* :

Les espaces *affins* réels, complexes, quaternioniens et octavien (dim. 2);

Les espaces *hermitiens* (espaces affins concrétisés par une forme hermitienne définie positive) réels (espaces euclidiens), complexes, quaternioniens et octavien;

Les espaces *symplectiques* (espaces affins concrétisés par une forme alternée) réels et complexes;

Les espaces euclidiens de dimension $n = 7$ ou 8 concrétisés par un *spineur* ($n = 7$) ou un *semi-spineur* ($n = 8$) (ces espaces seront désignés plus loin par Es_n);

3.2. *Espaces sans structure affine* :

Les espaces *projectifs* réels, complexes, quaternioniens et octavien (dim. 2);

Les espaces *elliptiques* (espace projectif concrétisés par une polarité hermitienne uniforme, i.e. sans point autoconjugué) réels, complexes, quaternioniens et octavien (8);

Les espaces *hyperboliques* (intérieur d'une hyperquadrique

(7) La signification des termes utilisés dans cette énumération est évidente par elle-même. Plus exactement, l'ambiguïté qui peut apparaître dans l'interprétation de certains de ces termes, est sans importance en raison des conventions exposées au n° 2.2. Par exemple, pour définir ce que nous entendons par un espace euclidien — considéré comme espace de Klein — il nous faudrait préciser s'il s'agit de l'espace avec groupe des déplacements, groupe des déplacements et retournements, groupe des similitudes, etc.; le choix de ce groupe est cependant indifférent, tous les espaces correspondants à ces divers groupes étant, à un isomorphisme local près, homothétiques entre eux. Autre exemple : les espaces projectifs complexes avec groupe des projectivités, et les espaces projectifs complexes avec groupe des collinéations (projectivités et antiprojectivités) sont localement isomorphes.

(8) Pour le cas octavien, cf. par exemple [11], [14].

hermitienne ovale dans un espace projectif) réels, complexes, quaternioniens et octavien (9);

Les espaces *conformes* (sphères euclidiennes avec groupe engendré par les inversions);

Les espaces de points à l'infini de Es_n ($n = 7,8$) (cf. 3.1) (ces espaces seront désignés par ∞ Es_n).

4. *Applications*

Nous noterons à présent quelques conséquences immédiates des résultats du § 3.

4.1. *Espaces de Riemann homogènes et isotropes. Espaces métriques 2-points homogènes.*

Soit E un espace de Riemann homogène, c'est-à-dire tel que le groupe G de toutes les isométries de l'espace soit transitif. Nous dirons que E est isotrope s'il en est ainsi de l'espace de Klein (E,G). Du § 3 il résulte que *les seuls espaces de Riemann connexes homogènes et isotropes sont les espaces euclidiens, hyperboliques, elliptiques et sphériques.*

Un espace métrique (i.e. un ensemble avec distance $d(x,y)$ satisfaisant aux axiomes usuels) est 2-*points homogène* [1] si, étant donnés deux couples de points p,q et p',q' tels que $d(p,q) = d(p',q')$, il existe toujours une isométrie de l'espace amenant p en p' et q en q'. On peut constater que les espaces de Riemann énumérés ci-dessus sont 2-points homogènes; réciproquement, il est évident qu'un espace de Riemann 2-points homogènes est isotrope. Plus généralement, *les espaces de Riemann connexes homogènes et isotropes sont les seuls espaces métriques convexes* (10), *localement compacts,* 2-*points homogènes* ([14], ([12, IV E]).

4.2. *Structures presque complexes et presque quaternioniennes isotropes.*

Nous écartant quelque peu de la terminologie usuelle, nous appellerons ici structure presque complexe (resp. presque quaternionienne) de dimension k sur une variété E de dimension $2k$

(9) Pour le cas octavien, cf. [11].

(1) Un espace métrique est dit convexe si deux points quelconques x,y ont au moins un « milieu » z : $d(x,z) = d(z,y) = \frac{1}{2}\, d(x,y)$.

(resp. $4k$), une structure résultant de la donnée, dans chaque espace vectoriel tangent à E, d'une structure d'espace vectoriel complexe (resp. quaternionien) *donnée à une collinéation près*; de la structure presque complexe (presque quaternionienne) usuelle, nous retenons donc seulement la sous-structure constituée par l'ensemble des éléments de contact complexes (quaternioniens) (dans le cas complexe, cela a pour effet d'identifier des structure presque complexes conjuguées). Une structure presque complexe (presque quaternionienne) sur un espace de Klein (E,G) sera naturellement une structure presque complexe (presque quaternionienne) sur E invariante par G, et nous dirons qu'une telle structure est isotrope ([11]) si G est transitif sur les éléments de contact complexes (quaternioniens). On peut montrer [[12], IV D 2] qu'un espace de Klein de dimension > 2 (resp. > 4) possédant une structure presque complexe (resp. presque quaternionienne) isotrope est lui-même isotrope. D'autre part, il est facile de déterminer, parmi les espaces isotropes énumérés au § 3, ceux qui possèdent une structure presque complexe ou presque quaternionienne, et on trouve alors, moyennant toujours les conventions du n° 2.2, que

Les seuls espaces de Klein de dimension supérieure à 2 qui possèdent une structure presque complexe isotrope sont les espaces affins, hermitiens, symplectiques, projectifs, elliptiques et hyperboliques complexes, les espaces affins et hermitiens quaternioniens ([12]), *et l'espace* ∞Es_7 .

([11]) Cette expression est employé dans un sens très différent par Mlle Liebermann [[7]].

([12]) Le cas des espaces affins et hermitiens quaternioniens demande quelques précisions. Soient E un espace afin quaternionien à gauche, de dimension quelconque, G^u le groupe de toutes les transformations linéaires (non homogènes) de déterminant 1 de E, ou le sous-groupe formé par les transformations linéaires conservant une forme hermitienne définie positive (en les accroissements des coordonnées, de telle sorte que G^u contienne les translations), M un sous-groupe du groupe multiplicatif des quaternions, $\Gamma(M)$ le groupe des homothéties d'équations $x'_i = a . x_i$ avec $a \in M$ (x_i désignant un système de coordonnées dans E), et $G = \Gamma(M). G^u$, le produit (localement direct) des groupes $\Gamma(M)$ et G^u. Alors, (E,G) possède autant de structures presque-complexes qu'il existe dans le corps des quaternions de sous-corps complexes invariants par tous les automorphismes intérieurs correspondant aux éléments de M. Exemples : Si M est le groupe des nombres réels $\neq 0$, (E,G) possède une infinité de structures presque-complexes ; si M est le groupe des nombres complexes $\neq 0$, (E,G) possède une seule structure presque-complexe; si M se compose des éléments x, xi, xj, xk (x réel $\neq 0$), (E,G) possède 3 structures presque complexes; si M est le groupe de tous les quater-

Les seuls espaces de Klein de dimension supérieure à 4 qui possèdent une structure presque quaternionienne isotrope sont les espaces affins, hermitiens, projectifs, elliptiques et hyperboliques quaternioniens.

4.3. *Espaces isotropes d'ordre supérieur.*

Nous dirons qu'un espace de Klein (E,G) est *isotrope d'ordre n* si G est transitif sur les éléments de contact d'ordre n de E. En parcourant la liste des espaces isotropes, on voit que

Les espaces conformes (orientés ou non [13]*) sont les seuls espaces de Klein isotropes d'ordre 2; il n'existe aucun espace de Klein isotrope d'ordre supérieur.*

5. *Généralités sur la méthode de démonstration*

La démonstration des résultats du § 3 est basée sur les remarques suivantes, où (E,G) désigne un espace isotrope, n est la dimension de E, p, V_p, P_p, H, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont définis comme au § 2, et $V(\mathfrak{X})$ représente l'espace vectoriel sous-jacent de l'algèbre $\mathfrak{X}$. On notera qu'il existe un isomorphisme naturel entre $V(\mathfrak{G})/V(\mathfrak{H})$ et V_p.

5.1. $\mathfrak{H}$ *est une sous-algèbre maximale de* $\mathfrak{G}$.

En effet, soit $\mathfrak{K}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$ telle que $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{G}$, et soit $W \subset V_p$ la sous-variété de V_p correspondant à $V(\mathfrak{K})/V(\mathfrak{H}) \subseteq V(\mathfrak{G})/V(\mathfrak{H})$. W étant invariante par la composante connexe de H, ses transformées distinctes par les éléments de H sont au plus une infinité dénombrable. Leur réunion étant l'espace V_p lui-même, en vertu de l'isotropie, on doit avoir $W = V_p$, d'où $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$.

5.2. Soient $\mathfrak{R}$ le radical de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ le premier terme commutatif de la suite dérivée $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}' \supset \mathfrak{R}''$ ..., et A le sous-groupe connexe de G engendré par $\mathfrak{A}$. On a

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A} + \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}.$$

nions $\neq 0$, (E,G) ne possède aucune structure presque complexe. (Notons que toutes les structures presque complexes dont il est question ici sont en fait des structures complexes, ou, plus exactement, des paires de structures complexes conjuguées).

[13] Cette précision est nécessaire si on considère des espaces définis exactement, et non à un isomorphisme local près.

Par conséquent, en vertu de 5.1,

(a) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ d'où $\mathfrak{A} = \{0\}$, et $\mathfrak{G}$ est semi-simple, ou bien
(b) $\mathfrak{A} + \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, d'où $A.H = G$.

Dans ce dernier cas A est transitif sur E, donc aussi simplement transitif (puisque commutatif), et on peut identifier E à A de façon que p corresponde à l'élément neutre de A. H devient alors un groupe d'automorphismes de A, et il résulte de la condition d'isotropie que si $n > 1$, A est un espace vectoriel et H est un groupe irréductible de transformations linéaires de cet espace. G est le groupe engendré par ce groupe H et par le groupe des translations.

Les espaces correspondant au cas (a) sont déterminés à l'aide de la classification des algèbres semi-simples, due à E. Cartan [2], et des résultats de Malcev [8], Dynkin [5] et Karpelevitch [6] relatifs aux sous-algèbres maximales des algèbres simples. Il faut noter toutefois que ces résultats, qui concernent seulement les algèbres complexes, ne sont pas ici d'application immédiate, mais que des raisonnements auxiliaires, de nature géométrique, permettent de s'y ramener.

Les espaces correspondant au cas (b) se déduisent de la connaissance des groupes linéaires réels irréductibles (E. Cartan [3]).

Dans l'un et l'autre cas, la détermination effective des espaces en question comporte la considération de cas particulier dont le nombre, à priori très élevé, doit être réduit par des lemmes appropriés. Une remarque banale s'avère très efficace à ce point de vue :

5.3. *Si g et $h = g - n$ sont les dimensions respectives de G et de H, on a $h \geqslant n - 1$, d'où $g \leqslant 2h + 1$.*

Cela résulte immédiatement du fait que H est transitif sur l'espace projectif à $n-1$ dimensions P_p.

B. Les espaces non isotropes. Degre d'anisotropie

Cette seconde partie de l'exposé ([14]) est consacré à des

([14]) Dont nous ne reprenons pas ici le détail, parce qu'elle représente un stade actuellement très dépassé de nos recherches; celles-ci feront l'objet d'une publication ultérieure. (Le 27-5-59).

esquisses de généralisations des résultats du § 3, basées sur la définition, pour tout espace de Klein, de certains invariants numériques mesurant le « degré d'anisotropie » de cet espace. On retrouve notamment, comme cas très particuliers, les résultats de [13] concernant les espaces de la relativité générale qui sont homogènes et « isotropes » (dans un sens différent de celui défini plus haut).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Birkhoff G. — Metric foundations of geometry, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *55* (1944), 465-492.

[2] Cartan, E. — Sur le structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse, Paris, 1894. (Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, Paris, 1952, Part. I, vol. 1, 137-286).

[3] — Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. *J. Math. P. Appl.*, *10* (1914), 149-186. (Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, Paris, 1952, Part. I, vol. 1, 493-530).

[4] Dieudonne, J. — Les déterminants sur un corps non commutatif. *Bull. Soc. Math.*, *71* (1943), 27-45.

[5] Dynkin, E.B. — Sous-algèbres semi-simples des algèbres de Lie semi-simples. *Mat. Sbornik*, *30* (72) (1952), 349-462.

[6] Karpelevitch, F. — Sur les sous-algèbres maximales non semi-simples des algèbres de Lie semi-simples. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, *76* (1951), 775-778.

[7] Liebermann, P. — Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. Thèse, C. Zuffi, Bologne, 1953.

[8] Malcev, A.I. — Sur les sous-groupes semi-simples des groupes de Lie. *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, Sér. Math., *8* 1944), 143-174.

[9] Montgomery D. et Zippin L. — Topological transformation groups. — Interscience Tracts in Pure and Appl. Mathematics, nº 1, Interscience, New York, 1955.

[10] Samelson, H. — Topology of Lie groups. *Bull. Amer. Math. Soc. 58* (1952), 2-37.

[11] Tits, J. — Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. *Acad. Roy. Belg.*, *Bull. Cl. Sci. 39* (1953), 309-329.

[12] — Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. *Acad. Roy. Belg.*, *Mém. Cl. Sci.*, tome *29*, fasc. 3, Bruxelles, 1955.

[13] — Espaces homogènes et isotropes de la Relativité. *Helv. Phys. Acta*, Supplementum IV, 1956.

[14] Wang, H.C. — Two-point homogeneous spaces. *Ann. of Math.*, *55* (1952), 177-191.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

mathematical sciences publishers

nonprofit scientific publishing

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.