Hokkaido Mathematical Journal Vol. 16(1987), p. 257~275

Unicite de Cauchy pour des operateurs faiblement hyperboliques

H. BAHOURI & L. ROBBIANO

(Received August 4, 1986)

1. INTRODUCTION.

Nous présentons, dans ce travail, deux théorèmes d'unicité locale du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques par rapport à une surface.

L'hyperbolicité par rapport à une surface étant une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé (théorème de Lax-Mizohata), la plupart des résultats, concernant ce type d'opérateurs, traitent à la fois la question de l'existence et celle de l'unicité. (Voir Oleĭnik[13], Ivrii-Petkov [8], Hörmander [5], ...).

Dans ce travail, nous avons choisi de nous restreindre à l'étude d'opérateurs $P(y, D_y)$ ($y \in \boldsymbol{R}^{n+1}$) non effectivement hyperboliques par rapport à une surface S. (En ce qui concerne les opérateurs effectivement hyperboliques, on pourra consulter Melrose [12], Iwasaki [9], Ivrii [7]). Plus précisément, nous avons fait sur la partie principale les hypothèses d'Hörmander [5] (voir les hypothèses (H_1), (H_2)) et nous nous sommes efforcés d'améliorer les hypothèses portant sur le symbole sous-principal p_1^s pour avoir l'unicité de Cauchy. Pour cela, nous avons introduit une notion généralisée de «principale normalité» faisant intervenir le symbole total p et qui, en quelque sorte, signifie que l'Hamiltonien de Im p_1^s est orthogonal, pour la fome symplectique σ, à la partie involutive de la variété caractéristique $\sum$.

La méthode employée dans ce papier repose sur la technique classique des inégalités de Carleman.

2. GENERALITES ET NOTATIONS.

2. 1. Invariants.

Dans toute la suite, $P(y, D_y)$ désigne un opérateur différentiel d'ordre deux à cojfficients C^∞ dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^{n+1}$ et à symbole principal réel $p_2(y, \eta)$. Et, nous considérons l'unicité du problème de Cauchy pour l'opérateur P avec des données initiales sur la surface $S=\{\varphi(y)=\varphi(y_0)\}$ (où y_0 est un point de Ω et φ est une fonction réelle de $C^\infty(\Omega)$, telle que $d\varphi \neq 0$ sur Ω), non caractéristique pour P.

On écrit $p(y, \eta)$ le symbole total de $P(y, D_y)$ (on a donc $p(y, \eta)=p_2(y, \eta)+p_1(y, \eta)+p_0(y, \eta)$, où les p_j sont homogènes de degré j par rapport à η pour $j=0, 1, 2$). On note par p_1^s le symbole sousprincipal de P, défini de la manière suivante:

$$p_1^s(y, \eta)=p_1(y, \eta)+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 p_2}{\partial y_j \partial \eta_j}(y, \eta)$$

Et l'on adopte la terminologie suivante:
- Nous disons que P est un opérateur hyperbolique dans Ω par rapport aux surfaces de niveaux de φ, si, pour tout $(y, \eta)\in \boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0$, l'équation en τ:

$$p_2(y, \eta+\tau\, d\varphi(y))=0$$

n'admet que des racines réelles lorsque $d\varphi(y)$ n'est pas parallèle à η.
- Nous disons que P a l'unicité de Cauchy par rapport à la surface orientée S près de y_0, si pour tout voisinage V suffisamment petit de y_0 il existe un voisinage W de y_0 dans Ω, et pour toute solution $u\in C^\infty(V)$ du problème:

$$\begin{cases} P(y, D_y)u=0 & \text{dans } V \\ u_{|\varphi(y)<\varphi(y_0)}=0 \end{cases}$$

s'annule identiquement dans W.
- Nous disons que P a l'uncité de Cauchy compacte par rapport à la surface orentée S près de y_0 si pour tout voisinage V suffisamment petit de y_0 il existe un voisinage W de y_0 dans Ω, et pour toute solution $u\in C^\infty(V)$ du problème:

$$\begin{cases} P(y, D_y)u=0 & \text{dans } V \\ u=_{|\varphi(y)<\varphi(y_0)}=0 \\ \text{Supp } u\cap S\subset\subset V \end{cases}$$

s'annule identiquement dans W.
- Enfin, is σ est la 2-forme canonique sur $T^*(\Omega)$, nous désignons par F_p la matrice fondamentale de P qu'on définit de la manière suivante:

$$\text{pour tout } X,\ Y\in T(\Omega),\ \frac{1}{2}\,\text{Hess}\, p_2(X, Y)=\sigma(X, F_pY)$$

et qui est un invariant symplectique anx points (y, η) tels que $p_2(y, \eta)=d\ p_2(y, \eta)=0$.

2. 2. Classification des opérateurs hyperboliques.

Nous rappelons ici la classification des opérateurs hyperboliques donnée dans Hörmander [5]. Cette classification repose sur la nature des valeurs propres de F_p aux points critiques ($p_2(y, \eta)=d\ p_2(y, \eta)=0$). En fait, aux

points critiques, F_p ne peut admettre plus d'un couple $(\mu, -\mu)$ de valeurs propres réelles non nulles (cf. Hörmander [5]) ; les autres valeurs propres sont soit nulles, soit imaginaires pures. D'où la distinction de deux classes :
- Soit il existe un coupie $(\mu, -\mu)$ de valeurs propres réelles non nulles. On dit alors que P est effectivement hyperbolique.
- Soit toutes les valeurs propres réelles sont nulles. On distingue alors deux cas selon la multiplicité d de la valeur propre 0 dans le polynôme minimal de F_p (Hörmander a démontré que $d=2$ ou 4).

DÉFINITION 2.2.1. *Dans le cas non effectivement hyperbolique, en notant par $i\mu_j$ les valeurs propres de F_p, on définit la " trace plus " de P (qu'on écrit $Tr^+ P$) de la manière suivante :*

$$Tr^+ P=\sum_{\mu_j>0} \mu_j .$$

2.3. Cadre géométrique.

Soit

$$\Sigma=\{(y, \eta)\in\Omega\times \boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0,\ p_2(y, \eta)=\{p_2, \varphi\}(y, \eta)=0\}$$

l'on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) Σ est une variété, le rang du Hessien de p_2 est égal à la codimension de Σ en tout point de Σ et σ est de rang constant sur Σ.

(H_2) P est non effectivement hyperbolique et la multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme minimal de F_p est égale à 2.

Remarques concernant les hypothèses (H_1) et (H_2) :

(2.3.1) Il est clair que l'hypothèse (H_1) est symplectiquement invariante.

(2.3.2) On peut également définir Σ par :

$$\Sigma=\{(y, \eta)\in\Omega\times \boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0,\ d\ p_2(y, \eta)=0\}.$$

2.4. Sous-principale normalité.

DÉFINITION 2.4.1. *On dit que P est «sous-principalement normal» en y_0 ($y_0\in\Omega$) si*
pour tout $X\in T\Sigma\cap T\Sigma^\sigma$, il existe une constante $C>0$ telle que :

(2.4.1.) $|X \text{ Im } p^s_{1|\Sigma}|\leqq C|\text{Im } p^s_{1|\Sigma}|$

près de y_0, où $T\Sigma^\sigma$ désigne l'espace orhognal à $T\Sigma$ pour la 2-forme symplectique σ.

Remarque concernant la définition 2.4.1.

(2.4.2) Si Σ est définie par $a_j(y, \eta)=0$, $j=1, \ldots, k$ ($d\ a_j$ linéairement indépendant) alors, en notant $M=(\{a_i, a_j\})1\leqq i, j\leqq k$, (2.4.1) est

équivalente à
pour tout $\alpha=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}\in\boldsymbol{R}^k$ avec $\alpha\in\mathrm{Ker}\ M$, il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\alpha_j H_{a_j}\ \mathrm{Im}\ p^s_{1|\Sigma}\right|\leqq C|\mathrm{Im}\ p^s_{1|\Sigma}|.$$

C'est une inégalité analogue á celle d'Hörmander [5] définissant la principale normalité d'où notre terminologie.

3. RESULTATS.

Dans toute la suite, on suppose que $P(y, D_y)$ est un opérateur hyperbolique par rapport aux surfaces de niveaux de φ vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2).

3. 1. Cas involutif.

Dans le théorème qui suit, on supposera que $\sum$ est involutive (ce qui est équivalent an fait que $Tr^+ P=0$).

THÉORÈME 3.1.: *On suppose que* :

(3.1) *P est «sous-principalement normal» au voisinage de* y_0.
(3.2) $d\ \mathrm{Im}\ p^s_1$ *est non nulle et* $\{\mathrm{Im}\ p^s_1=0\}$ *est une variété transverse à* $\sum$.
(3.3) $\mathrm{Re}\ p^s_{1|\sum\cap\{\mathrm{Im}\ p^s_1=0\}}=0$
au voisinage de y_0.

Alors P a l'unicité de Cauchy par rapport à S près de y_0.

3. 2. Gas non involutif.

THÉORÈME 3.2. : *On suppose que* :

(3.1) *P est «sous-principalement normal» au voisinage de* y_0.
(3.4) $\{p_2, \{p_2, \varphi\}\}$ *s'annule à l'ordre deux sur* $\sum$.
(3.5) *Il existe une constante* $C>0$ *telle que* :
$Tr^+ P+\mathrm{Re}\ p^s_1+C|\mathrm{Im}\ p^s_1|>0$
sur $\sum$ *au voisinage de* y_0.

Alors P a l'unicité de Cauchy compacte par rapport à S près de y_0.

3. 3. Remarques.

1) **Invariance.**

Compte tenu de la remarque (2.3.2), il et clair que les hypothèses (3.1), (3.2), (3.3) et (3.5) sont invariantes par changements de fonctions φ définissant les mêmes surfaces de niveaux. De plus, pour toute fonction ψ assez proche de φ dans $C^2(\Omega)$, l'opérateur $P(y, D_y)$ reste hyperbolique par rapport aux surfaces de niveaux de ψ dans Ω. Ceci entraîne que les hypoth-

èses du théorème 3. 1 sont invariantes par convexification.

2) **Ecriture locale de la «sous-principale normalité».**

Nous rappelons qu'on peut choisir microlocalement des coordonnées symplectiques $(x_1, x_2, x_3)\in \boldsymbol{R}^{n+1}$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in \boldsymbol{R}^{n+1}$, étant les variables duales, en sorte que :

$$\Sigma=\{x_1=\xi_1=0,\ \xi_2=0\}$$

(ceci vient du fait que σ est de rang constant sur Σ, voir Grigis [4]).
Et la condition (2. 4. 1) de «sous-principale normalité» est alors équivalente à :

$$\text{Im } p_1^s=a_1x_1+b_1\xi_1+b_2\xi_2+g(x_2, x_3, \xi_3) \text{ avec } \left|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|\leqq C|g|.$$

3) En fait, nous prouverons une version plus générale des théorèmes 3. 1 et 3. 2. (Voir les théorèmes 4. 3. 1. et 4. 3. 2).

4) Il est clair que les hypothèses portant sur le symbole sous-principal dans nos résultats sont plus faibles que celles de Hörmander [5]. Par ailleurs, la version généralisée améliore (dans le cas hyperbolique) les théorèmes d'Alinhac [1], Lascar-Zuily [10], Dehman [2].

5) **Exemples.**

En prenant dans $\boldsymbol{R}^3$:

$$p_2(x, t\ ;\ \xi, \tau)=\tau^2-x_1^2\xi_2^2-\xi_1^2$$

p_2 vérifie (H_1) et (H_2) et (3. 4) $(\varphi(x, t)=t,\ y_0=(0, 0))$ et $\Sigma=\{\tau=x_1=\xi_1=0\}$.
La condition (2. 4. 1) de principale normalité se traduit, en écrivant :
Re $p_1^s(x, t\ ;\ \xi, \tau)=a(x, t)\tau+b(x, t)\xi_1+c(x, t)\xi_2$ par, il existe une constante $C>0$ telle que :

$$\left|\frac{\partial c}{\partial t}(0, x_2, t)\right|\leqq C|c(0, x_2, t)|$$

et la condition (3. 5) se traduit, en écrivant : Re $p_1^s(x, t\ ;\ \xi, \tau)=\tilde{a}(x, t)\tau+\tilde{b}(x, t)\xi_1+\tilde{C}(x, t)\xi_2$ par, il existe une constante $C>0$ telle que :

$$|\xi_2|+\tilde{C}(x, t)\xi_2+C|c(x, t)\xi_2|>0$$

près de $(0, 0)$ pour $\xi_2\neq 0$.

4. PREUVE DES RESULTATS.

Dans ce qui suit, nous supposerons choisi un système de coordonnées $y=(x, t)$ $(\eta=(\xi, \tau))$ en sorte que $y_0=(0, 0)$, $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{t})=\mathrm{t}$ et $p_2(x, t\ ;\ \xi, \tau)=\tau^2-Q_2(x, t\ ;\ \xi)$.

4. 1. Préliminaires.

Du théorème 3. 2. 1 d'Hörmander [5], on déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 4. 1. 1. : *Soit A un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 2 dans $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ de symbole classique $a_2+a_1+\ldots$ où a_j est homogène de degré j et $a_2\geqq 0$. On note :*

$$\Lambda=\{(x,\xi)\in\Omega\times\boldsymbol{R}^n\backslash 0\},\ a_2(x,\xi)=0\}.$$

On suppose que Λ est une variété C^∞, que a_2 est transversalement elliptique à Λ et que σ est de rang constant sur Λ. On peut alors construire des vecteurs v_j vérifiant les propriétés du théorème 3. 2. 1 [5] *avec $Q=Q_{x,\xi}=Hess\ a_2(x,\xi)/2$. En posant $L_j(x,\xi)=Q_{x,\xi}(v_j,v)$, il existe, près de tout point $\rho_0\in\Lambda$, des fonctions réelles homogènes de degré 1 en ξ : $q_1(x,\xi),\ldots q_{2k+l}(x,\xi)$ telles que, près de ρ_0 (i. e. dans un voisinage conigue de ρ) on ait :*

$$(4.1.1)\quad a_2(x,\beta)=\sum_{j=1}^{2k+l}q_j^2(x,\xi)$$

(4. 1. 2) *pour $j=1,\ldots,k$*
$d\ q_{2j-1}(\rho)=\mathrm{Re}\ L_j(\rho)$
$d\ q_{2j}(\rho)=\mathrm{Im}\ L_j(\rho)$
pour $j=1,\ldots,l$
$d\ q_{2k+j}(\rho)=L_{k+j}(\rho)$

pour $\rho\in\Lambda$ près de ρ_0.

COROLLAIRE 4. 1. 2. : *La décomposition précédente vérifie en plus les deux propriétés suivantes :*

(4. 1. 3) *Pour tout $j=1,\ldots,l$ et tout $i=1,\ldots,2k+l$ $\{q_{2k+j},q_i\}=0$ sur Λ*
(4. 1. 4) *La matrice $(\{q_i,q_j\})_{1\leqq i,j\leqq 2k}$ est inversible.*

Hörmander démontre dans le paragraphe 4. 3 [5] un résultat qu'on va citer sous forme de proposition.

PROPOSITION 4. 1. 3. : *Soit $p(x,t;\xi,\tau)=\tau^2-a(x,t,\xi)$ un symbole d'ordre 2 vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2).*
Alors il existe un symbole $b(x,t;\xi)$ d'ordre 1 tel que :

(4. 1. 5) *$\{a,\tau-b\}=R(x,t;\xi)$ où R s'annule l'ordre 2 sur Σ'.*
(4. 1. 6) *$b|_{\Sigma'}=0$ et $\{\tau,b\}|_{\Sigma'}=0$.*
(4. 1. 7) *$a-b^2$ est transversalement elliptique à Σ' et $Tr^+\ P=Tr^+(a-b^2)$.*

4. 2. Une propriété de la condition de sous-principale normalité.

PROPOSITION 4. 2. 1. : *Soit $L(x,\xi)\in C^\infty(T^*V\backslash 0)$ homogène de degré 1 en ρ, on suppose que L vérifie l'hypothèse* (2. 4. 1). *Alors il existe des fonc-*

tions $L_1(x, \xi)$ *et* $L_2(x, \xi) \in C^\infty(T^*V\backslash 0)$ *homogène de degré* 1 *en* ξ *telles que* :

(4.2.1) $L = L_1 + L_2$.

(4.2.2) $L_{1|\Sigma} = 0$.

(4.2.3) *Pour tout* $X \in T\Sigma^\sigma$, *il existe une constante* $C \geqq 0$ *telle que* :
$|X\ L_{2|\Sigma}| \leqq C|L_{2|\Sigma}|$.

Preuve : Si on utilise l'écriture du corollaire 4.1.3 et celle de la proposition, l'hypothèse se traduit microlocalement par,

il existe une constante $C \geqq 0$ telle que :

$$|Hq_{2k+j}\ L_{|\Sigma}| \leqq C|L_{|\Sigma}|$$

pour $j = 1, \ldots l$,

$$\text{et } |H_m\ L_{|\Sigma}| \leqq C|L_{|\Sigma}|.$$

où $m = \tau - b(x, t, \xi)$.

De même (4.2.3) devient :

Il existe une constante $C \geqq 0$ telle que :

(4.2.3)′ $|H_{q_j}\ L_{2|\Sigma}| \leqq C|L_{2|\Sigma}|$
pour $j = 1, \ldots, 2k+l$
$|H_m\ L_{2|\Sigma}| \leqq C|L_{2|\Sigma}|$.

On cherche L_1 sous la forme suivante :

$$L_1 = \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i\ q_i$$

où les α_i sont à déterminer et l'on pose $L_2 = L - L_1$ (ceci assure (4.2.1) et (4.2.2)).

On cherche α_i en sorte que pour $j = 1, \ldots, 2k$

(4.2.4) $H_{q_j}\ L_2 = 0$ sur Σ

c'set-à-dire :

(4.2.5) $H_{q_j}\ L - \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i\ H_{q_i}\ q_i = 0$ sur Σ.

Comme la matrice $(\{q_j, q_j\})_{1 \leqq i, j \leqq 2k}$ est inversible, on peut résoudre (4.2.5).

On remarque maintenant que pour : $j = 2k+1, \ldots, 2k+l$

$$H_{q_j}\ L_1 = 0$$
$$H_m\ L_1 = 0$$

sur Σ, donc :

$$|H_{q_j}\ L_{2|\Sigma}|=|H_{q_j}\ L_{|\Sigma}|\leqq C|L_{|\Sigma}|=C|L_{1|\Sigma}|$$

et

$$|H_m\ L_{1|\Sigma}|=|H_m\ L_{|\Sigma}|\leqq C|L_{|\Sigma}|=C|L_{1|\Sigma}|$$

ceci avec (4. 2. 4) nous donne (4. 2. 3)′. On a donc démontré la proposition microlocalement.

soit χ_j une partition de l'unité homogène de degré 0 telle que, sur support de χ_j, on ait L_1^j vérifiant

$$L_{1|\Sigma}^j=0$$

et, pour tout $X\in T\ \Sigma^\sigma$, il existe une constante C positive telle que,

$$|X\ L-X\ L_1^j|\leqq C|L| \text{ sur } \Sigma.$$

On pose,

$$L_1=\sum_j \chi_j\ L_1^j$$
$$L_2=L-L_1$$

(4. 2. 1) et (4. 2. 3) sont vérifiées.
Et on a,

$$X\ L_2=XL-\sum_j \chi_j\ X\ L_1^j-\sum_j (X\ \chi_j)L_1^j.$$

Sur Σ on a,

$$\begin{aligned}|X\ L_2|&\leqq\sum_j|\chi_j||X\ L-X\ L_1^j|\\&\leqq\tilde{C}|L|.\end{aligned}$$

Pour une constante $\tilde{C}$ positive.
Ce qui démontre la proposition.

4. 3. Préliminaires à la preuve.

Nous allons énoncer, dans ce paragraphe, deux théorèmes précis d'unicité de Cauchy compact. Pour simplifier les énoncés, on se place en coordonnées locales et on note :

$$\varphi(x,\ t)=t$$
$$p(x,\ t,\ \xi,\ \tau)=\tau^2-Q_2(x,\ t,\ \xi)$$
$$\text{Re } p_1^s=Q_1$$
$$\text{Im } p_1^s=L=L_1+L_2$$

où L_1 et L_2 sont donnés par la proposition 4. 2. 1.

L'énoncé de ces hypothèses sous une forme géométrique est assez délicat

et peu satisfaisant. C'est pourquoi nous avons préféré extraire de ces théorèmes, les théorèmes 3.1 et 3.2.

TRÉORÈME 4.3.1.: *Nous supposons que* $\sum$ *est une variété involutive. Nous supposons également que*:

(4.3.1) *P est sous principalement normal.*

(4.3.2) *Il existe une fonction* $\alpha(x, t, \xi)$ *homogène de degré* 0 *en* ξ *et une constante* $C>0$ *telles que,*
$|\{Q_1, L\}_{|\Sigma}+\alpha\ Q_{1|\Sigma}|\leqq C|L_{|\Sigma}|$.

(4.3.3) *Il existe une fonction* $\beta(x, t, \xi)$ *homogène de degré* 0 *en* ξ *et des constantes positives* C *et* ε *telles que,*
i) $\beta\ Q_2-Q'_{2t}\geqq\varepsilon\ Q_2$
ii) $|Q'_{1t|\Sigma}-\beta\ Q_{1|\Sigma}|\leqq C|L_{|\Sigma}|$.

Alors P possède la propriété d'unicité compacte.

REMARQUE: $\sum$ étant involutive, il existe des fonctions β vérifiant (4.3.3) i). La condition (4.3.3) peut donc se comprendre ainsi; parmi les fonctions β vérifiant (4.3.3) i), on pose la condition (4.3.3) ii).

THÉORÈME 4.3.2.: *Nous supposons que,*

(4.3.4) *P est sous principalement normal.*

(4.3.5) *Il existe une fonctions* $\alpha(x, t, \xi)$ *et* $d(x, t, \xi)$ *homogènes de degré* 0 *en* ξ *et une constante* $\delta>0$ *telles que,*
i) $e=a\ Q_2-Q'_{2t}\geqq\delta\ Q_2$.
ii) $Tr^+\ e-a\ Q_1+Q'_{1t}+d\ L>0$ *sur* $\sum$.

Alors P possède la propriété d'unicité compacte.

REMARQUE: (4.3.5) i) impose que $\partial_t\in T\sum$ c'est-à-dire que $H_{\{p,\varphi\}}\in T\sum$. Ceci est une condition instable par convexification c'est pourquoi de ce théorème on ne peut déduire qu'un théorème d'unicité compacte.

Preuve du théorème 3.1.: Des hypothèses (3.2) et (3.3), on déduit que,

$$Q_1=\beta_o\ L+\sum_{j=1}^{k}\beta_j\ q_j$$

où $\{q_j=0\}=\sum$ et β_i des fonctions homogènes de degré 0 en ξ. On a, alors sur $\sum$,

$$\{Q_1, L\}=L\{\beta_o, L\}$$

car $\{q_j, L\}_{|\Sigma}=0$ (hypothèse (3.1)).

De même sur Σ

$$Q'_{1t}=\beta_o\ L'_t+\beta'_{ot}\ L$$

car $\{\tau, q_j\}_{|\Sigma}=0$ (hypothèse (3.1)).
Or (2.4.1) implique que $|L'_t|\leqq C|L|$ pour une constante C positive. On a donc (4.3.3) et ii) en prenant β très grand et en utilisant la remarque du théorème 4.3.1.

Preuve du théorème 3.2.: . (3.4) implique que Q'_{2t} s'annule à l'ordre 2 sur Σ.
(4.3.5) i) sera donc vérifiée en prenant a très grand. Dans ces conditions,

$$Tr^+\ e=a(Tr^+\ Q_2+o(1))$$

où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$. (Tr^+ est une fonction continue voir Melin [11]).

De (3.5), on démontre qu'il existe une fonction $d(x, t, \xi)$ homogène de degré 0 en ξ telle que,

(4.3.6) $\quad Tr^+\ P+d\ L-Q_1>0.$

En effet, il existe un voisinage W de $L=0$ tel que $Tr^+\ P-Q_1>0$ sur W. Soit χ_1 (resp. χ_2) une fonction C^∞ homogène de d^o0, positive vérifiant $\chi_1=1$ sur $L<0\cap \complement W$ (resp. sur $L>0\cap \complement W$) et à support ans $L<0$ (resp. $L>0$). On définit $d=-C\chi_1+C\chi_2$.

On obtient aisément de (3.5) que d vérifie (4.3.6). On a donc:

$$Tr^+e-a\ Q_1+Q'_{1t}+a\ d\ L=a[\ Tr^+Q_2-Q_1+dL+o(1)+\frac{Q'_1}{a}].$$

Ceci sera strictement positif en prenant a suffisamment grand et en utilisant (4.3.6). On a aussi utilisé le fait que $Tr^+\ P=Tr^+\ Q_2$. En effet la proposition 4.1.4. est vérifiée en prenant $b=0$.

4.4. Inégalité de Carleman.

THÉORÈME 4.4.1.: *Sous les hypothèses du théorème* 4.3.1 *ou du théorème* 4.3.2, *il existe des constantes* $C>0$ *et* $\gamma_0>0$ *telles que, pour* $\gamma\geqq\gamma_0$

(4.4.1) $\quad \|e^{-\gamma t}\ Pu\|^2\geqq C\ \gamma\|e^{-\gamma t}\ D_tu\|^2+C\ \gamma^3\|e^{-\gamma T}\ u\|^2.$

D'une telle inégalité de Carleman, on prouve l'unicité compacte pour $P+a\ D_t+b$ où a et b sont des fonctions complexes.

Modulo des termes d'ordre 0 et des termes de la forme $a(x, t)D_t$, on peut écrire l'opérateur P de la manière suivante, $P(x, t, D_x, D_t)=D_t^2-Q_2(x, t, D_x)$

$+Q_1(x, t, D_x)+i\ L_1(x, t, D_x)+i\ L_2(x, t, D_x)$ où $Q_2(x, t, D_x)=\sum_{j,k=1}^{n} D_{x_j}\ a_{jk}(x, t)D_{x_k}$ avec (a_{jk}) une matrice symétrique positive.
Q_1 est de la forme,

$$\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}\ a_j(x,\ t)+a_j(x,\ t)D_{x_j}$$

où les fonctions $a_j(x,\ t)$ sont réelles.

Après les manipulations de la proposition les symboles L_j n'ont aucune raison d'être des formes linéaires. On utilise la quantification de Weyl, c'est-à-dire,

$$(4.4.2)\quad L_j(x,\ t,\ D_x)u=(2\pi)^{-n}\iint e^{i<x-y,\ \xi>}L_j\left(\frac{x+y}{2},\ t,\ \xi\right)u(y,\ t)dy\ d\xi.$$

Tout ceci implique que Q_2, Q_1, L_1, L_2 sont des opérateurs formellement auto-adjoints.

Nous allons calculer,

$$I=\|e^{-(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}Pu\|^2$$

où μ est un grand paramètre positif à choisir.
Posons,

$$u=e^{(t-\frac{\mu t^2}{2})\gamma}v$$

où u et v sont des fonctions C^∞ à support dans$|x|^2<r_o$ et $0\leqq t\leqq t_o$, r_o et t_o à choisir.
Notons $N_\gamma v=e^{-(t-\frac{\mu t^2}{2})\gamma}Pe^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}v$. Nous avons,

$$D_t\ e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}=e^{(t-\frac{\mu}{2})\gamma}\left[D_t+\frac{\gamma}{i}(1-\mu t)\right]$$

$$\left[D_x,\ e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}\right]=0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}N_\gamma(x,\ t,\ D_x,\ D_t)&=P(x,\ t,\ D_x,\ D_t+\frac{\gamma}{i}(1-\mu t))\\&=D_t^2+\frac{2\ \gamma}{i}(1-\mu t)D_t-\gamma^2(1-\mu t)^2+\mu\gamma-Q_2(x,\ t,\ D_x)\\&\quad+Q_1(x,\ t,\ D_x)+i\ L_1(x,\ t,\ D_x)+i\ L_2(x,\ t,\ D_x).\end{aligned}$$

On note, dans la suite des calculs ε et C des constantes positives qui ne dépendent pas de μ et γ. ε sera supposé suffisamment petit et C suffisamment

grand.

On note,

$$(u, v)=\int u\ \bar{v}\ dx\ dt$$
$$\|u\|^2=(u, u).$$

On pose,

$$\tilde{N}_\gamma=N_\gamma-\mu\gamma-i\ L_1.$$

On a,

(4.4.3) $\|\tilde{N}_\gamma v\|^2\leqq 2\|N_\gamma v\|^2+C\ \mu^2\gamma^2\|v\|^2+C\|L_1 v\|^2$.

Ecrivons $\tilde{N}_\gamma=A+B$, en développant on obtient,

$$\|\tilde{N}_\gamma v\|^2=\|Av\|^2+\|Bv\|^2+2\ \mathrm{Re}(Av, Bv)$$

avec

$$A=D_t^2-\gamma^2(1-\mu t)^2-Q_2+Q_1$$
$$B=-2\ \gamma i(1-\mu t)D_t+i\ L_2.$$

Calculons 2 Re(Av, Bv) en intégrant chaque terme par partie.

$$I_1=2\ \mathrm{Re}(D_t^2 v,\ -2\ \gamma i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_1=2\ \gamma\mu\|D_t v\|^2$$
$$I_2=2\ \mathrm{Re}(-\gamma^2(1-\mu t)^2 v,\ -2\ \gamma i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_2=6\ \gamma^3\mu\|(1-\mu t)v\|^2.$$

En prenant t_o tel que,

$6(1-\mu t_0)^2\geqq 5$ c'est-à-dire :

$$t_0\leqq\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\frac{1}{\mu}.$$

On obtient,

$$I_2\geqq 5\ \gamma^3\mu\|v\|^2$$
$$I_3=2\ \mathrm{Re}(-Q_2 v,\ -2\ \gamma\ i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_3=2\ \gamma\mu(Q_2 v, v)-2\ \gamma(i[D_t, Q_2]v,\ (1-\mu t)v)$$
$$I_4=2\ \mathrm{Re}(Q_1 v,\ -2\ \gamma\ i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_4=2\ \gamma\mu(Q_1 v, v)+2\ \gamma(i[D_t, Q_1]v,\ (1-\mu t)v)$$
$$I_5=2\ \mathrm{Re}(D_t^2 v,\ i\ L_2 v)=2\ \mathrm{Re}(D_t v,\ i[D_t, L_2]v).$$

Calcul du symbole de Weyl de $i\ [B_t, L_2]$.

(4.4.4) REMARQUE. Soient deux opérateurs Q et Q' de symbole de Weyl réel, Q d'ordre m, Q' d'ordre m', alors le symbole de Weyl de $i[Q, Q']$ est

$\{\sigma^W(Q), \sigma^W(Q')\}$ modulo des termes d'ordre $m+m'-3$.

Le symbole de $i[D_t, L_2]$ est, $\{\tau, L_2(x, t, \xi)\}=L'_{2t}(x, t, \xi)$. En appliquant (4.2.3), on déduit que

(4.4.5) $|L'_{2t}|^2 \leqq C\ L_2^2+C\ Q_2$.

On a d'autre part,

(4.4.6) $|2\ \mathrm{Re}(D_t v,\ i[D_t, L_2]v)| \leqq C\ \gamma\|D_t v\|^2+\dfrac{C}{\gamma}\|[D_t, L]v\|^2$.

En appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong [3] au symbole,

$$C\ L_2^2+C\ Q_2-L'^2_{2t}.$$

On obtient de (4.4.5) et (4.4.6)

$$|2\ \mathrm{Re}|D_t v,\ i[D_t, L]v)| \leqq C\ \gamma\|D_t v\|^2+\frac{C}{\gamma}\|L_2 v\|^2+\frac{C}{\gamma}(Q_2 v, v)+\frac{C}{\gamma}\|v\|^2.$$

En conclusion on a,

$$I_5 \geqq -C\ \gamma\|D_t v\|^2-\frac{C}{\gamma}\|L_2 v\|^2-\frac{C}{\gamma}(Q_2 v, v)-\frac{C}{\gamma}\|v\|^2.$$
$$I_6=2\ \mathrm{Re}(-\gamma^2(1-\mu t)^2 v,\ i\ L_2 v)=0$$
$$I_7=2\ \mathrm{Re}(-Q_2,\ i\ L_2)=(i[L_2, Q_2]v, v).$$

Calcul du symbole de Weyl de $i\ [L_2, Q_2]$.

Le corollaire 4.1.1 permet décrire microlocalement,

(4.4.7) $Q_2=\sum_{j=1}^{l} q_j^2$ avec $|\{q_j, L_2\}| \leqq C|L_2|$sur Σ.

Globalement on a,

$$Q_2=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{lk}(q_j^k)^2\chi_k^2,$$

où χ_k^2 est une partition de l'unicité homogène de degré 0 en ξ. Modulo des termes d'ordre 0, le symbole de Weyl de $i[L_2, Q_2]$ est,

$$\{L_2, Q_2\}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{lk}\Big[2\ q_j^k\chi_k^2\{q_j^k, L_2\}+(q_j^k)^2\{\chi_k^2, L_2\}\Big].$$

Le deuxième terme de la somme est majorée par $C\ Q_2$. On en déduit, en appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{lk}(Op^W(q_j^k\{\chi_k^2, L_2\})v, v)\right| \leqq C(Q_2 v, v)+C\|v\|^2$$

où on a noté $Op^W(a)$ l'opérateur de symbole a déduit par la formule (4.4.2).

En ce qui concerne le premier terme on a, modulo des termes d'ordre 0,

$$Op^W(2\ q_j^k\chi_k^2\{q_j^k, L_2\}) = Op^W(q_j^k\chi_k)\,Op^W(\chi_k\{q_j^k, L_2\}) + Op^W(\chi_k\{q_j^k, L_2\}\,Op^W(q_j^k\chi_k).$$

Donc

$$\begin{aligned}&|(Op^W(2\ q_j^k\chi_k^2\{q_j^k, L_2\})v, v)|\\ &=|2\ \mathrm{Re}(Op^W(\chi_k\{q_j^k, L_2\})v,\ Op^W(q_j^k\chi_k)v)|\\ &+O(\|v\|^2)\leqq\varepsilon\ \gamma\|Op^W(q_j^k\chi_k)v\|^2\\ &+\frac{C}{\gamma}\|Op^W(\chi_k\{q_j^k, L_2\}v\|^2+C\|v\|^2.\end{aligned}$$

En utilisant (4.2.3), on obtient,

$$|\{q_j^k, L_2\}|^2\leqq C\ Q_2+C\ L_2^2.$$

Ceci permet, en appliquant l'inégalité de Fefferan-Phong de conclure que,

$$\begin{aligned}&I_7\geqq-\varepsilon\gamma(Q_2v, v)-\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2-C\ \gamma\|v\|^2\\ &I_8=2\ \mathrm{Re}(Q_1v,\ i\ L_2v)\\ &I_8=(i[Q_1, L_2]v, v).\end{aligned}$$

En résumé, on a,

$$\begin{aligned}(4.4.8)\quad &2\ \mathrm{Re}(Av, Bv)\geqq2\ \gamma\mu\|D_tv\|^2+5\ \gamma^3\mu\|v\|^2\\ &+2\ \gamma\mu(Q_2v, v)-2\ \gamma(i[D_t, Q_2]v,\ (1-\mu t)v)\\ &+2\ \gamma\mu(Q_1v, v)+2\ \gamma(i[D_t, Q_1]v,\ (1-\mu t)v)\\ &+(i[Q_1, L_2]v, v)-R_1\end{aligned}$$

où $R_1=C\ \gamma\|D_tv\|^2+C\ \gamma\|v\|^2+\varepsilon\ \gamma(Q_2v, v)+\dfrac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2$.

Contrôle de $\|L_2v\|^2/\gamma$.

En utilisant l'expression B, on a

$$\frac{\mu}{\gamma}\|L_2v\|^2=\frac{\mu}{\gamma}\|[B+2\ \gamma\ i(1-\mu t)D_t]v\|^2\leqq\frac{5\mu}{\gamma}\|Bv\|^2+5\ \mu\gamma\|D_tv\|^2.$$

Donc, pour γ suffisamment grand,

$$(4.4.9)\quad \|Bv\|^2\geqq\frac{\mu}{5\gamma}\|L_2v\|^2-\mu\gamma\|D_tv\|^2.$$

Soit $k(x, t, \xi)$ un symbole en (x, ξ) à paramètre t, homogène de degré 0 en ξ. On suppose que,

$$(4.4.10)\qquad \|Op^W(k)\|_{L^2\to L^2}\leqq\frac{1}{4}$$
$$\|Op^W(k)^*\|_{L^2\to L^2}\leqq\frac{1}{4}.$$

En écrivant Q_1 en fonction de A, on a,

$$\begin{aligned}&-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]Q_1v,\ v)\\&=-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}((Id-Op^W(k))Av,\ v)+2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]D_t^2v,\ v)\\&=-2\ \gamma^3\mu\ \mathrm{Re}((Id-Op^W(k))(1-\mu t)^2v,\ v)\\&\quad-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]Q_2v,\ v)=①+②+③+④.\end{aligned}$$

On a, grâce à (4.4.10),

$$\begin{aligned}&①\leqq\varepsilon\|Av\|^2+C\ \gamma^2\mu^2\|v\|^2.\\&②=2\ \gamma\mu\|D_tv\|^2-2\ \gamma\mu(Op^W(k)D_tv,\ D_tv)\\&\quad-2\ \gamma\mu([Op^W(k),\ D_t]D_tv,\ v).\end{aligned}$$

τ étant une forme linéaire le symbole de Weyl de $[Op^W(k),\ D_t]$ est exactement (voir Hörmander [6]), $\frac{1}{i}\{k,\ \tau\}=i\ k_t'$.

On a donc en utilisant (4.4.10),

$$\begin{aligned}&②\geqq\gamma\mu\|D_tv\|^2-C\ \mu\gamma\|Op^W(k_t')v\|^2.\\&|③|\geqq\frac{5}{2}\ \gamma^3\mu\|v\|^2.\end{aligned}$$

En résumé, on a,

$$\begin{aligned}(4.4.11)\qquad&-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}(Q_1v,\ v)\geqq-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}(Op^W(k)Q_1v,\ v)\\&+\gamma\mu\|D_tv\|^2-\varepsilon\|Av\|^2-3\ \gamma^3\mu\|v\|^2\\&-C\ \mu\gamma\|Op^W(k_t')v\|^2\\&-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]Q_2v,\ v).\end{aligned}$$

Et donc, en utilisant (4.4.8), (4.4.9) et (4.4.11),

$$\begin{aligned}(4.4.12)\qquad\|\tilde{N}_\gamma v\|^2\geqq&2\ \gamma\mu\|D_tv\|^2+2\ \gamma^3\mu\|v\|^2\\&+\frac{\mu}{5\gamma}\|L_2v\|^2+2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}(O^W(k)Q_2v,\ v)\\&-2\ \gamma(i[D_t,\ Q_2]v,\ (1-\mu t)v)\\&-2\ \gamma\mu\ \mathrm{Re}(Op^W(k)Q_1v,\ v)\\&+2\ \gamma(i[D_t,\ Q_1]v,\ (1-\mu t)v)\\&+(i[Q_1,\ L_2]v,\ v)-R_2\end{aligned}$$

où $R_2=R_1+C\ \mu\gamma\|Op^W(k_t')v\|^2$.

1er cas : $Tr^+ Q_2=0$.

Contrôle de $(i[Q_1, L_2]v, v)$.

En prolongeant la fonction $\alpha(x, t, \xi)$, donnée par (4.3.2) hors de $\sum$ par une fonction homogène de degrè 0 en ξ, on prouve l'inégalité suivante,

$$|\{Q_1, L_2\}+\alpha\ Q_1|\leqq C|L_2|+C\sqrt{Q_2}.$$

Ecrivons,

$$\begin{aligned}(4.4.13)\qquad &\mathrm{Re}(i[Q_1, L_2]v, v)=\mathrm{Re}([i[Q_1, L_2]+Op^W(\alpha)Q_1]v, v)\\ &-\mathrm{Re}(Op^W(\alpha)Q_1v, v)\geqq-\frac{C}{\gamma}(Q_2v, v)-\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2-C\ \gamma\|v\|^2\\ &-\mathrm{Re}(Op^W(\alpha)Q_1v, v).\end{aligned}$$

Contrôle de $2\ \gamma(i[D_t, Q_1]v, (1-\mu t)v)$.

On prolonge $\beta(x, t, \xi)$, la fonction de l'hypothèse (4.3.3), hors de $\sum$ par une fonction homogène de degrè 0 en ξ qu'on note également $\beta(x, t, \xi)$. On obtient,

$$|\{\tau, Q_1\}-\beta\ Q_1|\leqq C|L_2|+C\sqrt{Q_2}.$$

On a, en appliquant le calcul symbolique et l'inégalité de Fefferman-Phong,

$$\begin{aligned}(4.4.14)\qquad &2\ \gamma\ \mathrm{Re}(i[D_t, Q_1]v, (1-\mu t)v)\\ &=2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)[i[D_t, Q_1]-Op^W(\beta)Q_1]v, v)\\ &+2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)Op^W(\beta)Q_1v, v)\\ &\geqq-2\ C\ \gamma^3\|v\|^2-\frac{C}{\gamma}(Q_2v, v)-\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2\\ &+2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)Op^W(\beta)Q_1v, v).\end{aligned}$$

Ecrivons les symboles de Weyl des termes du premier ordre de (4.4.12) en utilisant (4.4.13) et (4.4.14).
On a, modulo des termes d'ordre 0,

$$(4.4.15)\qquad -2\ \gamma\mu\ k\ Q_1+2\ \gamma(1-\mu t)\beta\ Q_1-\alpha\ Q_1.$$

Posons

$$(4.4.16)\qquad k=\frac{(1-\mu t)}{\mu}\beta-\frac{\alpha}{2\ \gamma\mu}.$$

De sorte que (4.4.15) est nul. De plus $\mu\ k$ est un symbole de $S^0_{1,0}$ uniformément par rapport à t et γ.
Donc en prenant μ suffisamment grand (4.4.10) sera vérifié.
On vérifie facilement que k'_t est un symbole de $S^0_{1,0}$ uniformément par rapport à t et γ. Donc

(4. 4. 17) $\quad C\ \mu\gamma\|Op^W(k_t')v\|^2 \leqq C\ \mu\gamma\|v\|^2.$

Contrôle des termes du deuxième ordre.

Modulo des termes d'ordre 0 le symbole de Weyl des termes du deuxième ordre de (4. 4. 12) est,

(4. 4. 18) $\quad 2\ \gamma\mu\ k\ Q_2 - 2\ \gamma(1-\mu t)Q_{2t}' - \varepsilon\gamma\ Q_2.$

En utilisant (4. 4. 16), (4. 4. 18) devient,

(4. 4. 19) $$2\ \gamma(1-\mu t)\beta\ Q_2 - 2\ \gamma(1-\mu t)Q_{2t}' - \varepsilon\gamma\ Q_2 - \alpha\ Q_2$$
$$= 2\ \gamma(1-\mu t)\left[\beta\ Q_2 - Q_{2t}' - \frac{\varepsilon\ Q_2}{2(1-\mu t)} - \frac{\alpha\ Q_2}{2\ \gamma(1-\mu t)}\right].$$

Il existe une constante positive δ telle que, $\beta\ Q_2 - Q_{2t}' \geqq \delta\ Q_2$. (Voir (4. 3. 3)). L'expression (4. 4. 19) est donc supérieure à,

(4. 4. 20) $\quad 2\ \gamma(1-\mu t)\left[\delta - \frac{\varepsilon}{2(1-\mu t)} - \frac{\varepsilon}{2\ \gamma(1-\mu t)}\right] Q_2.$

Pour ε suffisamment petit, γ suffisamment grand, (4. 4. 20) est supérieur à $\gamma\delta\ Q_2$.
Il suffit d'appliquer l'inégalité de Feffermn-Phong pour conclure que,

(4. 4. 21) $\quad \|\tilde{N}_\gamma v\|^2 \geqq \gamma\mu\ D_t v\|^2 + \gamma^3\mu\|v\|^2 + \gamma\delta(Q_2 v,\ v).$

En utilisant le fait que L_1 s'annule sur $\sum$, on déduit que,

$$\|N_\gamma v\|^2 \geqq \frac{\gamma\mu}{2}\|D_t v\|^2 + \frac{\gamma^3\mu}{2}\|v\|^2.$$

Ce qui donne de manière classique l'inégalité de Carleman (4. 4. 1).
2ème cas : $Tr^+\ Q_2 > 0$.

Utilisons le symbole $a(x,\ t,\ \xi)$ de l'hypothèse (4. 3. 5), et posons,

$$k(x,\ t,\ \xi) = \frac{(1-\mu t)\ a\ (x,\ t,\ \xi)}{\mu},$$

de sorte que, comme pour le ler cas, (4. 4. 10) est vérifiée et,

$$\|Op^W(k_t')v\|^2 \leqq C\|v\|^2.$$

Le symbole de Weyl des termes du deuxième ordre de l'expression (4. 4. 12) est, modulo des termes d'ordre 0,

(4. 4. 22) $\quad 2\ \gamma(1-\mu t)a\ Q_2 - 2\ \gamma(1-\mu t)Q_{2t}' - \varepsilon\gamma\ Q_2.$

En utilisant (4. 3. 5), il existe une constante positive δ telle que (4. 4. 22) est supérieure à $2\ \delta\gamma\ Q_2$.

Au terme (4.4.12) ajoutons et retranchons

$$2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)Op^{w}(d(x,\ t,\ D_x))L_2v,\ v).$$

Ce terme est majoré par $C\ \gamma^3\|v\|^2+\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2$, ce qui est contrôlé par

$$\mu\gamma^3\|v\|^2+\frac{\mu}{5\gamma}\|L_2v\|^2$$

si on prend μ assez grand.

Nous allons appliquer l'inégalité de Melin-Hörmander [5] au symbole,

$$K=(1-\mu t)a\ Q_2-(1-\mu t)Q'_{2t}-\frac{\varepsilon}{2}Q_2-\frac{\delta}{2}Q_2$$
$$-(1-\mu t)a\ Q_1+(1-\mu t)Q'_{1t}+(1-\mu t)d\ L_2+\frac{1}{2\ \gamma}\{Q_1,\ L_2\}.$$

Le terme d'ordre deux de K est transversalement elliptique à $\sum$ (voir §.2.3) et sa trace plus est,

$$(1-\mu t)Tr^{+}e+|\xi|O(\varepsilon)+|\xi|O(\delta)$$

où e est donné par (4.3.5).
(En effet la trace plus est une fonction continue, voir Melin [11]).

Donc l'opérateur de symbole K sera positif (modulo $C\|v\|^2$) si,

$$K_1=(1-\mu t)Tr^{+}e+|\xi|Q(\varepsilon)+|\xi|O(\delta)-(1-\mu t)a\ Q_1 \tag{4.4.23}$$
$$+(1-\mu t)Q'_{1t}+(1-\mu t)d\ L_2+\frac{1}{2\ \gamma}\{Q_1,\ L_2\}\geqq 0 \text{ sur } \sum.$$

Or de (4.3.5), on déduit

$$Tr^{+}e-a\ Q_1+Q'_{1t}+d\ L_2>\tilde{\delta}|\xi| \text{ sur } \sum,$$

donc

$$K_1\geqq(1-\mu t)\tilde{\delta}|\xi|+|\xi|O(\varepsilon)+|\xi|O(\delta)+\frac{1}{2\ \gamma}\{Q_1,\ L_2\}.$$

Si on prend ε, δ, et $\frac{1}{\gamma}$ suffisamment petit par rapport à $\tilde{\delta}$, on aura $K_1>0$.
On peut donc appliquer l'inégalité de Melin-Hörmander à K.
On a donc

$$\|\tilde{N}_\gamma\|^2\geqq\mu\gamma\|D_tv\|^2+\mu\gamma^3\|v\|^2+\delta\gamma(Q_2v,\ v).$$

Ce qui est l'inégalité (4.4.21). On achève alors la preuve de (4.4.1) comme pour le premier cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC: Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels, Annales de l'Institut de Fourier, 34 (2) (1984) 89-109.

[2] B. DEHMAN: Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes, Journal of Mathematics of Kyoto University 24 (1984), 453-471.

[3] C. FEFFERMAN, D. H. PHONG: On positivity of pseudo-differential operators, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 75 (10) (1978), 4673-4674.

[4] A. GRIGIS: Hypoellipticité et parametrix pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles, Astérisque 34-35 (1976), 183-205.

[5] L. HÖRMANDER: The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, Journal d'Analyse Math. 32 (1977), 110-196.

[6] L. HÖRMANDER: The Weyl calculus of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 359-443.

[7] V. Ia IVRII: Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, Trudy Moskov Mat. Obx 23 (1976), 3-65, English transl. in Frans. Moscow. Math. Isue 1 (1978), 1-65.

[8] V. Ia. IVRII, V. M. PETKOV: Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations, Uspehi Mat. Mauk 29 (5) (1974), 3-70.

[9] N. IWASAKI: Cauchy problems for effectively hyperbolic equations,
(Part 1) J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983), 503-562.
(Part 2) Publ. RIMS Kyoto Univ. 20 (1984), 543-584.

[10] L. LASCAR, C. ZUILY: Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles, Duke Math. J. 49 (1) (1982), 137-162.

[11] A. MELIN: Lower bounds for pseudo-differential operators, Arkiv Für Matematik 9 (1) (1971), 117-140.

[12] R. MELROSE: The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, Hokkaido Math. J. 12 (1983), 371-391

[13] O. A. OLEĬNIK: On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 569-586.

Université de Paris-Sud