Hokkaido Mathematical Journal Vol. 17 (1988), p. 101～116

Über die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln

Helmut ZÖSCHINGER
(Received May 6, 1987)

Einleitung.

Kettenbedingungen für teilbare Untermoduln wurden zum ersten Mal von Matlis in ([3] Chap. V) untersucht, und zwar in teilbaren Torsionsmoduln über 1-dimensionalen lokalen Cohen-Macaulay-Ringen. Einen Teil seiner Ergebnisse konnten wir in [5] auf beliebige kommutative noethersche Ringe verallgemeinern. Dabei muß man für einen Modul M die Begriffe teilbar bzw. torsionsvoll durch radikalvoll (M besitzt keinen maximalen Untermodul) bzw. halbartinsch (M ist Summe seiner artinschen Untermoduln) ersetzen. Die Struktur der radikalvollen Moduln, in denen jede absteigende Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ von radikalvollen Untermoduln stationär ist, wurde in ([5] Satz 2.3) angegeben. Insbesondere war, in Verallgemeinerung eines Teils von ([3] Theorem 5.5), ein halbartinscher Modul mit dieser Minimalbedingung bereits artinsch. Unter Verwendung der Ergebnisse in [6] über die Menge Koass(M) aller koassoziierten Primideale können wir jetzt entsprechend zeigen:

SATZ A. *Sei M ein radikalvoller, halbartinscher Modul, in dem jede aufsteigende Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$ von radikalvollen Untermoduln stationär ist. Dann ist M bereits artinsch.*

In beliebigen Moduln haben wir keine Charakterisierung dieser Maximalbedingung durch "innere" Eigenschaften, aber diejenigen Ergebnisse unserer Arbeit, die sich auf beide Kettenbedingungen beziehen (siehe (1.2), (3.5), (3.8)), lassen sich so zusammenfassen:

SATZ B. *Für einen radikalvollen Modul M sind äquivalent:*

(a) *M erfüllt die Maximal- und Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(b) *M erfüllt die entsprechende Maximalbedingung und für jeden radikalvollen Untermodul $U \neq M$ besitzt M/U einen minimalen radikalvollen Untermodul.*

(c) *M erfüllt die entsprechende Minimalbedingung und für jeden radikalvollen Untermodul $U \neq M$ besitzt M/U einen maximalen radikalvollen Untermodul.*

(d) *M ist wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln und fast alle Primärkomponenten $L_{\mathfrak{m}}(M)$ sind Null.*

Stets ist in dieser Arbeit R ein kommutativer, noetherscher Ring. Die Bezeichnungen sind wie in [5]. Insbesondere ist $\mathfrak{F}$ (bzw. $\mathfrak{F}'$) die Klasse aller R-Moduln, die Erweiterung eines endlich erzeugten durch einen artinschen (bzw. halbartinschen) Modul sind.

1. Halbartinsche Moduln mit der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.

Über einem 1-dimensionalen lokalen Cohen-Macaulay-Ring ist nach Matlis ([3] Theorem 5.5) jeder teilbare Torsionsmodul mit der Maximalbedingung für teilbare Untermoduln bereits artinsch. Das Hauptergebnis (1.5) unseres ersten Abschnittes ist eine Verallgemeinerung dieser Aussage auf beliebige kommutative noethersche Ringe.

LEMMA 1.1. *Sei M ein radikalvoller Modul mit der Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln. Falls $L(M)$ klein in M ist, hat M auch die entsprechende Maximalbedingung.*

BEWEIS. Über einem 1-dimensionalen Ring ist nach ([5] Folgerung 4.7) die Minimalbedingung sogar äquivalent mit der Maximalbedingung, so daß es bei $M\neq o$ genügt, $\dim(R/\mathrm{Ann}_R(M))=1$ zu zeigen: Mit $\bar{M}=M/L(M)$ gilt für jedes $x\in\sqrt{\mathrm{Ann}_R(\bar{M})}$, daß $x^eM\subset L(M)$ ist für ein $e\geqq 1$, und x^eM klein in M bedeutet $x^e\in\bigcap\mathrm{Koass}(M)=\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, also schon $x\in\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$. Damit ist $\dim(R/\mathrm{Ann}_R(M))=\dim(R/\mathrm{Ann}_R(\bar{M}))$, und für jeden minimalen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathrm{Ann}_R(\bar{M})$ gilt, weil $\bar{M}\in\mathfrak{F}'$ radikalvoll und sockelfrei ist, $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ wie behauptet.

Die geeignete Zusatzbedingung, um von der Minimal- auf die entsprechende Maximalbedingung zu kommen, ist, wie der nächste Satz zeigt, folgende für radikalvolle Moduln M definierte Eigenschaft:

(*) Zu jedem radikalvollen Untermodul $U\neq M$ gibt es einen radikalvollen Untermodul $A\neq M$, so daß $U\subset A$ ist und zwischen A und M keine weiteren radikalvollen Untermoduln liegen.

Wir sagen dann kurz, A sei ein maximaler radikalvoller Untermodul von M, und (*) bedeutet dann, daß M "genügend viele" maximale radikalvolle Untermoduln besitzt.

SATZ 1.2. *Sei M ein radikalvoller Modul mit der Minimalbedingung* *für radikalvolle Untermoduln und der Eigenschaft* $(*)$. *Dann hat M auch die entsprechende Maximalbedingung.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* M zusätzlich artinsch. Weil in $M=\bigoplus L_{\mathfrak{m}}(M)$ dann fast alle Summanden Null sind und jeder von ihnen wieder $(*)$ erfüllt, können wir gleich R als lokal und vollständig annehmen und müssen dann nach ([5] Satz 4.4) für jedes $\mathfrak{q}\in\text{Koass}(M)$ zeigen, daß $\dim(R/\mathfrak{q})=1$ ist: Wählt man einen unzerlegbaren Faktormodul M/B mit $\text{Koass}(M/B)=\{\mathfrak{q}\}$, so gibt es nach Voraussetzung einen maximalen radikalvollen Untermodul A von M mit $P(B)\subset A$, und der wesentliche Epim. $M/P(B)\longrightarrow M/B$ zeigt, daß $\text{Koass}(M/A)=\{\mathfrak{q}\}$ ist, also nach ([5] Lemma 4.1) $\dim(R/\mathfrak{q})=1$.

Ist im *2. Schritt* M wie angegeben, zeigen wir zuerst, daß der artinsche radikalvolle Untermodul $L=L(M)$ die Bedingung $(*)$ erfüllt: Ist $U\subsetneqq L$ radikalvoll, folgt mit einem Komplement V von L in M entweder $V+U=M$, und dann ist L/U klein in M/U, so daß L/U nach (1.1) sogar die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln besitzt; oder es ist $V+U\neq M$, und dann hat nach Voraussetzung $M/V+U\cong L/L\cap(V+U)$ einen maximalen radikalvollen Untermodul, also auch L/U. Nach dem ersten Schritt hat jetzt L die gewünschte Maximalbedingung, so daß es zu jeder aufsteigenden Folge $U_1\subset U_2\subset U_3\subset\dots$ von radikalvollen Untermoduln von M ein $m\geqq 1$ gibt mit $U_m\cap L=U_{m+1}\cap L=\dots$, wieder wegen (1.1) aber auch ein $n\geqq m$ mit $U_n+L=U_{n+1}+L=\dots$, und es folgt $U_n=U_{n+1}=\dots$ wie verlangt.

Lemma 1.3. *Ist R lokal und vollständig, so erfüllt ein radikalvoller Modul M genau dann die Bedingung* $(*)$, *wenn* $\dim(R/\mathfrak{q})=1$ *ist für alle* $\mathfrak{q}\in\text{Koass}(M)$.

Beweis. Gilt $(*)$ und ist $\mathfrak{q}\in\text{Koass}(M)$, gehen wir ähnlich dem ersten Beweisschritt in (1.2) vor: Es ist $\text{Koass}(M/B)=\{\mathfrak{q}\}$ für einen artinschen, unzerlegbaren Faktormodul M/B, und aus der exakten Folge $\text{Tor}_1^R(M/B, R/\mathfrak{m})\longrightarrow B\otimes_R R/\mathfrak{m}\longrightarrow 0$ folgt, daß $B/\mathfrak{m}B$ endlich erzeugt ist. Wegen der Vollständigkeit von R ist dann sogar $B/P(B)$ endlich erzeugt, mit einem maximalen radikalvollen Untermodul A von M, der über $P(B)$ liegt, also $\text{Koass}(M/A)=\{\mathfrak{q}\}$ und nach ([5] Lemma 4.1) $\dim(R/\mathfrak{q})=1$.

Für die Umkehrung braucht R weder lokal noch vollständig zu sein, d. h. aus $\dim(R/\mathfrak{q})=1$ für alle $\mathfrak{q}\in\text{Koass}(M)$ folgt $(*)$: Ist $U\subsetneqq M$ radikalvoll, folgt für irgendein $\mathfrak{q}\in\text{Koass}(M/U)$, daß auch $U_1=U+\mathfrak{q}M$ radikalvoll $\neq M$ ist, und es bleibt zu zeigen, daß $M_1=M/U_1$ über dem 1-dimensionalen Integritätsring $\bar{R}=R/\mathfrak{q}$ einen maximalen radikalvollen Untermodul besitzt. Falls $L(M_1)\neq M_1$, gibt es einen Untermodul A von M_1, so daß M_1/A isomorph zum Quotientenkörper von $\bar{R}$ ist, und dann ist A der gewünschte maximale radikalvolle Untermodul von M_1. Falls $L(M_1)=M_1$, hat M_1 nach ([5] Lemma 2.1) einen radikalvollen Untermodul B, so daß M_1/B artinsch $\neq 0$ ist, und weil M_1/B (wegen $\dim(\bar{R})=1$) die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln besitzt, erhält man auch jetzt ein $B\subset A\subset M_1$, so daß A maximaler radikalvoller Untermodul von M_1 ist.

FOLGERUNG 1.4. *Sei R lokal und vollständig und M ein radikalvoller Modul mit der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln. Falls Koass(M) eine endliche finale Teilmenge besitzt, hat M auch die entsprechende Minimalbedingung.*

BEWEIS. Es genügt bei $M\neq 0$ wieder $\dim(R/\mathrm{Ann}_R(M))=1$ zu zeigen. Nach ([6] Folgerung 1.3) gilt $\bigcap \mathrm{Koass}(M)=\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, und ist jetzt $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ die verlangte endliche finale Teilmenge, folgt aus $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i=\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ für jeden minimalen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathrm{Ann}_R(M)$, daß $\mathfrak{p}\in \mathrm{Koass}(M)$, also $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ ist.

SATZ 1.5. *Ist M ein halbartinscher, radikalvoller Modul mit der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so ist M bereits artinsch.*

BEWEIS. Wie im ersten Beweisschritt von (1.2) kann man R als lokal und vollständig annehmen, und weil dann nach ([6] Satz 2.9) $\mathrm{Koass}(M)=\mathrm{Att}(M)$ eine endliche finale Teilmenge besitzt, hat M nach (1.4) die entsprechende Minimalbedingung, ist also insbesondere endlich-dimensional, d.h. artinsch.

FOLGERUNG 1.6. *Für einen radikalvollen Modul M sind äquivalent :*

(i) *Jeder Faktormodul von M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(ii) *In jeder aufsteigenden Folge $U_1\subset U_2\subset U_3\subset \ldots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i von endlicher Länge.*

(iii) *M ist ein Minimax-Modul und erfüllt* (*).

BEWEIS. (iii → ii) M erfüllt die Minimal-, also nach (1.2) auch die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln. Die Menge $\{X\subset M | X$ ist radikalvoll und M/X erfüllt (ii)$\}$ hat also ein minimales Element X_0, und wäre $X_0\neq 0$, gäbe es einen maximalen radikalvollen Untermodul X_1 von X_0. Der einfach-radikalvolle Faktor X_0/X_1 erfüllt dann nach ([5] Lemma 4.1 und Folgerung 4.7) ebenfalls (ii), also auch M/X_1, im Widerspruch zur Minimalität von X_0. Weil (ii → i) klar ist, bleibt (i → iii) zu zeigen. Natürlich gilt (*), und statt $M\in\mathfrak{F}$ genügt es nach dem Anhang zu beweisen, daß jeder Faktormodul von M endlich-dimensional ist, d. h. So(M/U) endlich erzeugt ist für alle $U \subset M$: Wählt man einen Untermodul V von M so, daß So$(M/U) \longrightarrow M/V$ ein wesentlicher Monom. wird, ist der halbartinsche Modul M/V nach (1. 5) bereits artinsch, also auch So(M/U).

Bemerkung zu (i): Auch die entsprechende Minimalbedingung vererbt sich i. allg. nicht auf alle Faktormoduln, denn es läßt sich leicht zeigen, daß für einen radikalvollen Modul M äquivalent sind: (i′) Jeder Faktormodul von M erfüllt die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln. (ii′) In jeder absteigenden Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} von endlicher Länge. (iii′) M ist ein Minimax-Modul.

Bemerkung zu (ii): Auch wenn M nicht radikalvoll ist, ist die Bedingung (ii) von Interesse. Definiert man die Klasse $\mathfrak{C}$ von R-Moduln durch

$M \in \mathfrak{C} \Longleftrightarrow$ In jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i endlich erzeugt,

so gilt nach dem Anhang $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$. Weil nun bei einem Minimax-Modul in jeder aufsteigenden Folge von Untermoduln fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i artinsch sind, gehört ein Modul M genau dann zu $\mathfrak{C}$, wenn er die Bedingung (ii) erfüllt. Ein Vergleich mit der in ([5] p. 25) eingeführten Klasse $\mathfrak{C}'$ (fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i seien koatomar) zeigt weiter, daß $\mathfrak{C} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{C}'$ ist und daß für jedes $M \in \mathfrak{C}'$ nach der eben bewiesenen Folgerung $P(M) \in \mathfrak{C}$ ist. Natürlich ist die Klasse $\mathfrak{C}$ gegenüber Untermoduln, Faktormoduln und Gruppenerweiterungen abgeschlossen, aber es gilt zusätzlich die

Folgerung 1. 7. *$\mathfrak{C}$ ist gegenüber wesentlichen Überdeckungen abgeschlossen.*

Beweis. Sei $M \in \mathfrak{C}$ und $f: N \longrightarrow M$ eine wesentliche Überdeckung, d. h. f surjektiv und $N_0 = \mathrm{Ke}\, f$ klein in N. Wegen $M \in \mathfrak{F}$ gibt es einen endlich erzeugten Untermodul N_1/N_0, so daß N/N_1 artinsch und radikalvoll ist, und schreibt man $B + N_0 = N_1$ mit B endlich erzeugt, wird die natürliche Abbildung $N/B \longrightarrow N/N_1$ ein wesentlicher Epim. und N/B radikalvoll. Mit M ist auch N/N_1 aus $\mathfrak{C}'$, nach dem ersten Beweisschritt in ([5] Folgerung 4. 5) folgt $N/B \in \mathfrak{C}'$, also schon $N/B \in \mathfrak{C}$, $N \in \mathfrak{C}$ wie behauptet.

2. Ein Beispiel.

Bekanntlich ist jeder injektive Modul M von der Form $\coprod_{\mathfrak{p}} E(R/\mathfrak{p})^{(I_\mathfrak{p})}$, wobei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ und $E(R/\mathfrak{p})$ die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ sei. Die Kardinalzahlen $I_{\mathfrak{p}}$ und die Menge $\mathrm{Ass}(M)=\{\mathfrak{p}|I_{\mathfrak{p}}\neq\phi\}$ bestimmen alle Eigenschaften von M, und wir wollen das für die im ersten Abschnitt untersuchten Begriffe ausführen. Das Endresultat (2. 6) gibt mit Hilfe dieser Invarianten an, wann ein injektiver Modul M die Maximal- bzw. Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt und wann M zur Klasse $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{C}'$ gehört.

LEMMA 2. 1. *Ist M radikalvoll und A ein maximaler radikalvoller Untermodul von M, so gilt* $\mathrm{Koass}(A)\subset\mathrm{Koass}(M)$.

BEWEIS. Weil jedes $\mathfrak{q}\in\mathrm{Koass}(A)$ zu einem unzerlegbaren Faktormodul von A koassoziiert ist, können wir gleich A als unzerlegbar annehmen mit $\mathrm{Koass}(A)=\{\mathfrak{q}\}$. Ist A nicht klein in M, d. h. $V+A=M$ mit $V\neq M$, folgt aus $\mathrm{Koass}(A/V\cap A)=\{\mathfrak{q}\}$ sofort $\mathfrak{q}\in\mathrm{Koass}(M)$. Ist aber A klein in M, folgt mit $\mathrm{Ann}_R(M/A)=\mathfrak{p}$, daß $\mathrm{Koass}(M)=\mathrm{Koass}(M/A)=\{\mathfrak{p}\}$ ist, und daß jedes koassoziierte Primideal von A ein koassoziiertes von M umfaßt, bedeutet hier $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$: Ist M/A sockelfrei, folgt aus $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ sofort $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$; ist M/A artinsch, wird für jedes $x\in R\backslash\mathfrak{p}$ auch der Faktormodul M/xA einfach-radikalvoll, insbesondere $A/xA=0$, $x\notin\mathfrak{q}$, so daß wieder $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist.

LEMMA 2. 2. *Für einen injektiven, sockelfreien Modul M sind äquivalent:*

(i) *M erfüllt* $(*)$.

(ii) *Für alle* $\mathfrak{q}\in\mathrm{Koass}(M)$ *ist* $\dim(R/\mathfrak{q})=1$.

(iii) *Für alle* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ *ist* $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ *und* $h(\mathfrak{p})=0$.

BEWEIS. Bekanntlich ist M radikalvoll; genauer gilt sogar für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R, daß $M[\mathfrak{a}]=\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a})$ radikalvoll ist, denn für jedes $\mathfrak{m}\in\Omega$ ist $M[\mathfrak{a}]\otimes_R R/\mathfrak{m}\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, R/\mathfrak{a}), M)=0$.

(i $\rightarrow$ iii) Weil sich $(*)$ auf direkte Summanden vererbt, können wir gleich M als injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$ annehmen. Für jeden maximalen radikalvollen Untermodul A von M ist dann M/A sockelfrei und $\mathrm{Ann}_R(M/A)=\mathfrak{p}$: Um $(M/A)[\mathfrak{m}]=0$ zu zeigen ($\mathfrak{m}\in\Omega$), wähle man ein $x\in\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{p}$, aus $xM=M$ folgt nach (2. 1) $xA=A$, so daß nach dem Schlangenlemma $(M/A)[x]\cong A/xA=0$ ist; mit $\mathrm{Koass}(M/A)=\{\mathfrak{q}\}$ ist also $\dim(R/\mathfrak{q})=1$, nach ([5] Folgerung 3. 3) aber auch $M[\mathfrak{q}]\neq0$, so daß in $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$ Gleichheit gilt. Um schließlich $h(\mathfrak{p})=0$ zu zeigen, wähle man ein $e\geqq1$ mit $R[\mathfrak{p}]\cap\mathfrak{p}^e=0$, daraus folgt $M[\mathfrak{p}^e]+\mathfrak{p}M=M$, und wäre $M[\mathfrak{p}^e]\neq M$, gäbe es nach Voraussetzung über $M[\mathfrak{p}^e]$ einen maximalen radikalvollen Untermodul B von M. Für den folgte wie oben $\mathrm{Ann}_R(M/B)=\mathfrak{p}$, also zusammen $M[\mathfrak{p}^e]+\mathfrak{p}M\subset B$, und das ist unmöglich. Aber $M[\mathfrak{p}^e]=M$ bedeutet, daß $M_{\mathfrak{p}}$, die injektive Hülle des Restklassenkörpers von $R_{\mathfrak{p}}$, endlich erzeugt ist, also der Ring $R_{\mathfrak{p}}$ artinsch, d. h.

$h(\mathfrak{p})=0$ ist wie behauptet.

(iii → ii) Für jedes $\mathfrak{q}\in\mathrm{Koass}(M)$ ist $M[\mathfrak{q}]\neq 0$, also $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$. Aus $h(\mathfrak{p})=0$ folgt $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$, aus $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ also die Behauptung. (ii → i) Das gilt für jeden Modul nach dem Beweis von (1. 3).

Bemerkung. Man kann zeigen, daß für einen injektiven, sockelfreien Modul M die Bedingung (∗) weiter äquivalent ist mit: (iv) Jeder radikalvolle Untermodul von M hat nur endlich viele koassoziierte Primideale. (v) Für jeden radikalvollen Untermodul U von M ist $\mathrm{So}(M/U)=0$.

Lemma 2. 3. *Ist M injektiv und sockelfrei und A ein maximaler radikalvoller Untermodul von M, so gilt:*
(a) *M/A ist sockelfrei.*
(b) *A hat ein Komplement in M.*

Beweis. Sei im *1. Schritt* M zusätzlich direkt unzerlegbar, also injektive Hülle eines $R/\mathfrak{p}$. Aus dem Beweis von (2. 2, i → iii) ist dann (a) schon klar, und mit den dortigen Bezeichnungen hat $M[\mathfrak{p}^e]$ als irreduzibler Modul über dem 1-dimensionalen Ring $R/\mathfrak{p}^e$ die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, insbesondere die Menge $\{V\subset M[\mathfrak{p}^e] \mid V$ ist radikalvoll und $V+A=M\}$ ein minimales Element V_0. Über dem 1-dimensionalen Integritätsring $R/\mathfrak{p}$ ist der radikalvolle, sockelfreie Modul $(V_0\cap A)/\mathfrak{p}V_0$ sogar injektiv, und aus $W/\mathfrak{p}V_0\oplus(V_0\cap A)/\mathfrak{p}V_0=V_0/\mathfrak{p}V_0$ folgt $W+A=M$, wegen der Minimalität von V_0 also $W=V_0$, d. h. $V_0\cap A=\mathfrak{p}V_0$. Wegen $\mathfrak{p}^e V_0=0$ ist natürlich $\mathfrak{p}V_0$ klein in V_0, also V_0 ein Komplement von A in M wie in (b) verlangt.

Seien im *2. Schritt* M und A wie angegeben und in $M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ alle X_λ direkt unzerlegbar. Dann gibt es ein $\mu\in\Lambda$ mit $X_\mu\not\subset A$, also $X_\mu+A=M$, und auf dieses $X=X_\mu$ wenden wir die Ergebnisse des ersten Schrittes an: $A/X\cap A$ ist wieder injektiv und sockelfrei, also $\mathrm{Tor}_1^R(A/X\cap A, R/\mathfrak{m})=0$, $(X\cap A)\underset{R}{\otimes}R/\mathfrak{m}=0$ für alle $\mathfrak{m}\in\Omega$, so daß $X\cap A$ ein maximaler radikalvoller Untermodul von X ist und $X/X\cap A\cong M/A$ sockelfrei. Weiter gibt es ein Komplement Y von $X\cap A$ in X, und dann ist Y auch ein Komplement von A in M.

Satz 2. 4. *Für einen injektiven, sockelfreien Modul M sind äquivalent:*
(i) *M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*
(ii) *M erfüllt die entsprechende Minimalbedingung.*
(iii) $M\in\mathfrak{F}'$.
(iv) *M hat endliche Goldie-Dimension und für alle $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ ist* $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ *und* $h(\mathfrak{p})=0$.

Beweis. (i $\rightarrow$ iv) Aus der Maximalbedingung folgt $(*)$, also mit (2.2) die Aussage über $\mathrm{Ass}(M)$, und bei einer Zerlegung $M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ in direkt unzerlegbare X_λ muß Λ endlich sein, so daß M von endlicher Goldie-Dimension ist.

Von den Implikationen (iv $\rightarrow$ iii $\rightarrow$ ii $\rightarrow$ i), die für jeden radikalvollen, sockelfreien Modul M gelten, ist nur noch (iv $\rightarrow$ iii) zu zeigen: Aus (iv) folgt bei $M\neq 0$ mit der dritten Bedingung $\bigcap \mathrm{Ass}(M)=\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, mit der zweiten $\dim(R/\mathrm{Ann}_R(M))=1$, mit der ersten endlich (iii), denn über einem 1-dimensionalen Ring gehört jeder Modul von endlicher Goldie-Dimension zu $\mathfrak{F}'$.

Folgerung 2.5. *Ein injektiver Modul M ist genau dann Minimax-Modul, wenn M endliche Goldie-Dimension hat und wenn jedes* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M/L(M))$ *ein G-Ideal der Höhe Null ist.*

Beweis. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt bekanntlich G-Ideal, wenn der Durchschnitt aller echt größeren Primideale echt größer bleibt. Der Krull'sche Hauptidealsatz zeigt, daß das genau dann der Fall ist, wenn $R/\mathfrak{p}$ semilokal und $\dim(R/\mathfrak{p})\leq 1$ ist. Sei nun M ein injektiver Minimax-Modul: Klar ist M endlich-dimensional, außerdem $\bar{M}=M/L(M)$ radikalvoll, also wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls. Wie im Beweis von ([5] Beispiel 3.9) ist deshalb $R/\mathfrak{p}$ semilokal für alle $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(\bar{M})$, aber nach (2.4) auch $\dim(R/\mathfrak{p})=1$ und $h(\mathfrak{p})=0$ wie gewünscht. Die Umkehrung gilt sogar für jeden Modul M: Man kann gleich M sockelfrei $\neq 0$ annehmen, und weil nach Voraussetzung alle $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ G-Ideale der Höhe Null sind, ist $\bigcap\mathrm{Ass}(M)=\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ und $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ ein 1-dimensionaler semilokaler Ring. Über solchen Ringen gehört aber jeder Modul von endlicher Goldie-Dimension zu $\mathfrak{F}$ (siehe [5] Beispiel 1.4), insbesondere unser M.

Satz 2.6. *Sei M ein injektiver Modul:*

(a) *Genau dann erfüllt M die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, wenn* $P(M)$ *endliche Goldie-Dimension hat und wenn* $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, $h(\mathfrak{p})=0$ *ist für alle* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M/L(M))$.

(b) *Genau dann erfüllt M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, wenn M die entsprechende Minimalbedingung hat und wenn* $h(\mathfrak{m})\leq 1$ *ist für alle* $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(L(M))$.

(c) *Genau dann ist* $M\in\mathfrak{C}'$, *wenn M die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln erfüllt und wenn* $R/\mathfrak{p}$ *semilokal ist für alle* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$.

(d) *Genau dann ist* $M\in\mathfrak{C}$, *wenn* $M\in\mathfrak{C}'$ *ist und wenn M endliche Goldie-Dimension hat.*

Beweis. (a) Die Minimalbedingung ist äquivalent damit, daß $P(M)$ endlich-dimensional und aus $\mathfrak{F}'$ ist. Mit $\bar{M}=M/L(M)$ ist aber $P(M)\cong P(L(M))\times\bar{M}$, also nach (2.4) genau dann $P(M)\in\mathfrak{F}'$, wenn $\bar{M}$ endlich-dimensional ist und $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, $h(\mathfrak{p})=0$ füralle $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(\bar{M})$. Damit folgt die Behauptung.

(b) Vorbemerkung: Ist $\mathfrak{m}\in\Omega$, so erfüllt die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$ genau dann die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, wenn $h(\mathfrak{m})\leqq 1$ ist. Zum Beweis können wir gleich R als lokal mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und der Vervollständigung $\hat{R}$ annehmen, und dann ist —via Matlis-Dualität—die gewünschte Maximalbedingung äquivalent damit, daß $\hat{R}$ die Minimalbedingung für Ideale $\mathscr{A}$ mit $\mathrm{So}(\hat{R}/\mathscr{A})=0$ erfüllt. Das ist aber nach ([5] Satz 1.6) äquivalent mit $\dim(\hat{R})\leqq 1$, d.h. mit $\dim(R)\leqq 1$.

Sei nun M injektiv und seien in $M=\oplus X_\lambda$ alle X_λ direkt unzerlegbar. Hat M die angegebene Maximalbedingung, so erfüllen die einzelnen Summanden sogar beide Kettenbedingungen (im sockelfreien Fall verwende (2.4))und zu jedem $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(L(M))$ ist mindestens ein X_λ isomorph zur injektiven Hülle von $R/\mathfrak{m}$, also nach der Vorbemerkung $h(\mathfrak{m})\leqq 1$. Weil aber in $P(M)=\oplus P(X_\lambda)$ fast alle Summanden Null sind, erfüllt auch $P(M)$ die gewünschte Minimalbedingung.

Umgekehrt folgt aus $h(\mathfrak{m})\leqq 1$ für alle $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(L(M))$ wieder mit der Vorbemerkung, daß in $M=\oplus X_\lambda$ alle artinschen Summanden die gewünschte Maximalbedingung haben. Falls M zusätzlich die Minimalbedingung hat, verschwinden in $P(M)=\oplus P(X_\lambda)$ fast alle Summanden, die restlichen erfüllen beide Kettenbedingungen, also auch $P(M)$ (siehe (3.1)).

(c) $M\in\mathfrak{C}'$ erfüllt natürlich die Maximalbedingung, und weil $\bar{M}=M/L(M)$ nach (1.6) ein Minimax-Modul ist, gilt für jedes $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(\bar{M})$ nach (2.5), daß $R/\mathfrak{p}$ semilokal ist.

Für die Umkehrung bemerken wir zuerst, daß bei jedem injektiven Modul M der reduzierte Anteil $M/P(M)$ koatomar ist. Zum Beweis kann man M sockelfrei oder $\mathfrak{m}$-primär annehmen, und im ersten Fall ist sogar $M/P(M)=0$, im zweiten Fall $M\cong E^{(I)}$ mit $E=$injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m}^k(E/P(E))=0$ für ein $k\geqq 1$, $\mathfrak{m}^k(M/P(M))=0$ wie gewünscht.

Sei nun M injektiv mit der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln und seien alle $R/\mathfrak{p}$ semilokal ($\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$): In $M=\oplus X_\lambda$ sind dann die sockelfreien Summanden nach (2.4) und (2.5) sogar Minimax-Moduln, also sogar alle $X_\lambda\in\mathfrak{F}$, und weil in $P(M)=\oplus P(X_\lambda)$ fast alle Summanden Null sind, die restlichen aber nach (1.6) aus $\mathfrak{C}$, folgt endlich $P(M)\in\mathfrak{C}$, $M\in\mathfrak{C}'$ wie verlangt.

(d) Wegen $\mathfrak{C}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{C}'$ ist nur noch $M\in\mathfrak{C}'$ zu betrachten: Im injektiven

Fall ist dann $\bar{M}=M/L(M)$ radikalvoll, also nach (1.6) aus $\mathfrak{F}$, und wenn jetzt M endlich-dimensional sein soll, ist $L(M)$ artinsch, also sogar $M\in\mathfrak{F}$, $M\in\mathfrak{C}$ wie behauptet.

3. Wesentliche Überdeckungen von endlich vielen einfach-radikalvollen Moduln.

Erfüllt ein radikalvoller Modul M sowohl die Maximal-als auch die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln (wir sagen kurz: beide Kettenbedingungen), so ist M wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln. Für letztere Eigen schaft geben wir in (3.4) eine "innere" Beschreibung, die im semilokalen Fall zu weiteren Charakterisierungen der Moduln mit beiden Kettenbedingungen führt. Wir wissen nicht, ob aus der Maximalbedingung allein schon die Minimalbedingung folgt, aber die bis jetzt bekannten Beispiele für diesen Schluß sind in den in (3.8) angegebenen Kriterien enthalten.

Lemma 3.1. *Sei M radikalvoll und sei* M′ *ein radikalvoller Untermodul von M, so daß M' und M/M' beide Kettenbedingungen erfüllen. Dann erfüllt auch M beide Kettenbedingungen.*

Beweis. Für die Minimalbedingung ist zu zeigen, daß M von endlicher Goldie-Dimension und aus $\mathfrak{F}'$ ist. Weil aber M' und M/M' diese beiden Eigenschaften besitzen, gilt das auch für M. Für die Maximalbedingung ist jetzt wie in (1.2) nur noch zu zeigen, daß sie $L(M)$ besitzt. Weil aber $L(M')$ und $L(M/M')$ als artinsche Moduln sogar zu $\mathfrak{C}$ gehören, gilt das auch für $L(M)$.

Lemma 3.2. *Sei M radikalvoll mit beiden Kettenbedingungen. Dann ist M wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln.*

Beweis. Als artinscher Untermodul hat $L(M)$ ein Komplement V in M, und mit ihm wird die kan. Abb. $M\longrightarrow(M/V)\times(M/L(M))$ ein wesentlicher Epimorphismus. Der erste Faktor M/V ist, als artinscher Modul mit der verlangten Maximalbedingung, nach ([5] Satz 4.4) bereits wesentliche Überdeckung wie gewünscht. Für den zweiten Faktor wollen wir gleich M als sockelfrei $\neq 0$ annehmen: Mit $\mathfrak{a}=\bigcap\mathrm{Koass}(M)$ ist $\mathfrak{a}M$ klein in M, und wir behaupten, daß $M/\mathfrak{a}M$ direkte Summe von endlich vielen einfach-radikalvollen Moduln ist. Nach ([5] Satz 2.3) ist nämlich $\mathrm{Koass}(M)$ endlich und $\dim(R/\mathfrak{q})=1$ für alle $\mathfrak{q}\in\mathrm{Koass}(M)$, also $\bar{R}=R/\mathfrak{a}$ ein 1-dimensionaler Ring ohne nilpotente Elemente. Über solchen Ringen ist bekanntlich jeder radikalvolle, sockelfreie Modul direkte Summe von einfachradikalvollen Moduln, also unser $\bar{M}=M/\mathfrak{a}M$ wegen der Minimalbedingung direkte Summe von endlich vielen.

LEMMA 3. 3. *Ist M wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln, so folgt $M\in\mathfrak{F}'$ und $M_{\mathfrak{m}}\in\mathfrak{C}$ für alle $\mathfrak{m}\in\Omega$.*

BEWEIS. Vorbemerkung: Für jeden einfach-radikalvollen Modul X und jedes $\mathfrak{m}\in\Omega$ gilt, daß $X_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul Null oder wieder einfach-radikalvoll ist. Zum Beweis verwenden wir die Beschreibung der einfach-radikalvollen Moduln aus ([5] Lemma 4. 1) und nehmen gleich $X_{\mathfrak{m}}\neq 0$ an. War X artinsch, hat $X_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul dieselben Untermoduln wie über R. War X sockelfrei, ist auch $X_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul sockelfrei, außerdem radikalvoll und aus $\mathfrak{F}'$, so daß für jeden radikalvollen $R_{\mathfrak{m}}$-Untermodul $A\neq 0$ von $X_{\mathfrak{m}}$ der Faktor $X_{\mathfrak{m}}/A$ sowohl sockelfrei als auch halbartinsch ist, also $A=X_{\mathfrak{m}}$.

Sei jetzt M wesentliche Überdeckung von $\prod_{i=1}^{n} X_i$, alle X_i einfach-radikalvoll. Dann ist auch $M_{\mathfrak{m}}$ wesentliche Überdeckung von $\prod_{i=1}^{n}(X_i)_{\mathfrak{m}}$, und weil über einem lokalen Ring jeder einfach-radikalvolle Modul zu $\mathfrak{C}$ gehört, folgt mit der Vorbemerkung und (1. 7) $M_{\mathfrak{m}}\in\mathfrak{C}$. Damit erhält man für jeden Untermodul U von M mit $So(M/U)=0$, daß $So(M_{\mathfrak{m}}/U_{\mathfrak{m}})=0$, also $Ra(U_{\mathfrak{m}})=U_{\mathfrak{m}}$ ist für alle $\mathfrak{m}\in\Omega$, d. h. $Ra(U)=U$. Um jetzt $M\in\mathfrak{F}'$ zu zeigen, sei $(B_\lambda|\lambda\in\Lambda)$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von M. Mit $U_\lambda/B_\lambda=L(M/B_\lambda)$ ist dann M/U_λ sockelfrei, also U_λ radikalvoll und natürlich $U_\lambda\in\mathfrak{F}'$. Ist M_0 der kleine Untermodul von M mit $M/M_0\cong\prod_{i=1}^{n} X_i$, so hat $\bar{M}=M/M_0$ nach (3. 1) die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln, aus $\bar{M}=\sum\bar{U}_\lambda$ folgt deshalb $\bar{M}=\sum_{j=1}^{k}\bar{U}_{\lambda_j}$, d. h. $M=\sum_{j=1}^{k}U_{\lambda_j}\in\mathfrak{F}'$ wie behauptet.

SATZ 3. 4. *Für einen radikalvollen Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln.*

(ii) *M ist aus $\mathfrak{F}'$, erfüllt $(*)$, und es gibt einen artinschen Untermodul B von M, so daß $L(M)/B$ klein in M/B ist.*

BEWEIS. (i → ii) Nach (3. 3) ist $M\in\mathfrak{F}'$ und $L_{\mathfrak{m}}(M)$ artinsch für alle $\mathfrak{m}\in\Omega$. Sei jetzt M_0 klein in M, so daß in $M/M_0\cong\prod_{i=1}^{n} X_i$ alle X_i einfach-radikalvoll sind. Dann ist $L(M/M_0)$ artinsch, also die Menge $\Omega'=\{\mathfrak{m}\in\Omega|L_{\mathfrak{m}}(M/M_0)\neq 0\}$ endlich und $A=\bigoplus_{\mathfrak{m}\in\Omega'} L_{\mathfrak{m}}(M)$ als Untermodul von M_0 klein in

M. Mit dem artinschen Untermodul $B = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega'} L_{\mathfrak{m}}(M)$ ist dann $(A+B)/B$ klein in M/B und natürlich $A+B=L(M)$. Für die Eigenschaft (*) sei schließlich U ein radikalvoller Untermodul $\neq M$: Falls $L(M)+U=M$, sind im halbartinschen Modul M/U alle Primärkomponenten aus $\mathfrak{C}$ (weil nach (3. 3) alle $L_{\mathfrak{m}}(M)$ aus $\mathfrak{C}$ sind), so daß es einen radikalvollen Zwischenmodul $U \subset U_1 \subsetneqq M$ gibt mit $M/U_1 \in \mathfrak{C}$; falls $L(M)+U \neq M$, ist $U_2 = L(M)+U$ ein radikalvoller Untermodul von M, so daß M/U_2 sockelfrei ist, also auch die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln besitzt. In beiden Fällen erhält man so einen maximalen radikalvollen Untermodul über U wie gewünscht.

(ii → i) Sei V ein Komplement von B in M. Dann ist $M \longrightarrow (M/V) \times (M/L(M))$ ein wesentlicher Epimorphismus, und es genügt nach (3. 2) zu zeigen, daß sein Ziel beide Kettenbedingungen erfüllt: Für den sockelfreien Anteil $M/L(M)$ folgt das sofort wegen $M \in \mathfrak{F}'$, für den artinschen Anteil M/V wegen (*) und (1. 2).

FOLGERUNG 3. 5. *Ein radikalvoller Modul M erfüllt genau dann beide Kettenbedingungen, wenn er wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln ist und wenn fast alle $L_{\mathfrak{m}}(M)$ Null sind.*

BEWEIS. Ist M wesentliche Überdeckung wie angegeben und sind fast alle $L_{\mathfrak{m}}(M)$ Null, folgt mit (3. 3) sofort, daß $M \in \mathfrak{F}'$ und $L(M)$ artinsch ist, d. h. M die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln besitzt. Aber nach (3. 4) gilt auch (*), d. h. mit (1. 2) auch die entsprechende Maximalbedingung. Die Umkehrung ist mit (3. 2) klar.

War R semilokal, ist die Zusatzbedingung an die $L_{\mathfrak{m}}(M)$ trivialerweise erfüllt. Es genügt sogar, wie die nächste Folgerung zeigt, daß alle $R/\mathfrak{p}$ semilokal sind ($\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$), und wir erhalten so eine Fortsetzung der Äquivalenzen in (1. 6):

FOLGERUNG 3. 6. *Für einen radikalvollen Modul M sind äquivalent:*

(i) *Jeder Faktormodul von M erfüllt die Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln.*

(ii) *M ist wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln und $R/\mathfrak{p}$ ist semilokal für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.*

(iii) *M erfüllt beide Kettenbedingungen und $R/\mathfrak{p}$ ist semilokal für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.*

BEWEIS. (i → iii) Weil M nach (1. 6) aus $\mathfrak{F}$ ist, besitzt M auch die

Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, ist außerdem wesentliche Überdeckung eines artinschen Moduls, so daß wie im Beweis von ([5] Beispiel 3.9) alle $R/\mathfrak{p}$ semilokal sind ($\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$). Weil (iii → ii) mit (3.2) klar ist, bleibt (ii → i) zu zeigen, und dazu sei M wesentliche Überdeckung von $\prod_{i=1}^{n} X_i$, alle X_i einfach-radikalvoll. Mit $\mathrm{Ass}(X_i)=\{\mathfrak{p}_i\}$ ist nach Voraussetzung $R/\mathfrak{p}_i$ semilokal, also $X_i \in \mathfrak{F}$, ja sogar $X_i \in \mathfrak{C}$ für alle i, so daß mit (1.7) folgt $M \in \mathfrak{C}$.

Bemerkung zu (i): Die entsprechende Minimalbedingung für alle Faktormoduln von M wurde bereits in der ersten Bemerkung zu (1.6) betrachtet und die dort angegebenen Äquivalenzen lassen sich fortsetzen zu: (iv′) M erfüllt die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln und $R/\mathfrak{p}$ ist semilokal für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$.

Im letzten Satz geben wir eine Reihe von Kriterien dafür, daß aus der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln die entsprechende Minimalbedingung folgt. Eines von ihnen lautet, daß jeder maximale radikalvolle Untermodul von M ein Komplement in M hat, und wir wollen zuerst zeigen, daß diese Bedingung sogar notwendig ist:

Lemma 3.7. *Ist M radikalvoll mit der Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln, so hat jeder radikalvolle Untermodul von M ein Komplement in M.*

Beweis. Sei U ein radikalvoller Untermodul von M. Dann ist auch $U_1=L(M)+U$ radikalvoll, und hätten wir ein Komplement $V/L(M)$ von $U_1/L(M)$ in $M/L(M)$, folgte mit einem Komplement V_1 von $L(M)$ in V, daß V_1 auch ein Komplement von U_1 in M wäre, mit einem Komplement V_2 von $L(V_1+U)$ in $L(M)$ schließlich V_1+V_2 ein Komplement von U in M wie gewünscht. Wir können also ab jetzt zusätzlich $L(M)=0$ annehmen.

1. Schritt Ist A ein maximaler radikalvoller Untermodul von M und V_0 ein minimales Element in der Menge $\{V \subset M \mid V$ ist radikalvoll und $V+A=M\}$, so ist V_0 bereits ein Komplement von A in M. Mit $\mathrm{Ann}_R(M/A)=\mathfrak{p}$ ist nämlich, weil M/A einfach-radikalvoll und sockelfrei ist, $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, so daß wie im ersten Beweisschritt von (2.3) folgt $V_0 \cap A=\mathfrak{p} V_0$. Außerdem ist $\mathfrak{p} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}_R(V_0)}$, denn für jedes $x \in \mathfrak{p}$ gilt wegen der Minimalbedingung $x^m V_0= x^{m+1} V_0$ für ein $m \geqq 1$, so daß aus $V_0[x^m]+x V_0=V_0$ folgt $V_0[x^m]+A=M$, $V_0[x^m]=V_0$, $x \in \sqrt{\mathrm{Ann}_R(V_0)}$. Aus $\mathfrak{p}^e V_0=0$ folgt aber, daß $\mathfrak{p} V_0$ klein in V_0 ist, d.h. V_0 ein Komplement von A in M wie behauptet.

2. Schritt Angenommen, die Menge $\{U \subset M \mid U$ ist radikalvoll und hat kein Komplement in $M\}$ ist nicht leer, so hat sie ein maximales Element U_0, und weil $U_0 \neq M$ ist, gibt es einen Zwischenmodul $U_0 \subset U_1 \subset M$, so daß U_1/U_0 einfach-radikalvoll ist. Die Maximalität von U_0 bedeutet, daß U_1 ein Komplement in M hat, sagen wir V, daß damit aber $V+U_0 \neq M$, also $(V+U_0)/U_0 \oplus U_1/U_0 = M/U_0$ ist und $V+U_0$ ein maximaler radikalvoller Untermodul von M wird. Nach dem ersten Schritt gibt es ein Komplement V_1 von $V+U_0$ in M mit der Zusatzbedingung $V_1 \subset U_1$, und dann ist V_1+V ein Komplement von U_0 in M entgegen der Wahl von U_0.

SATZ 3.8. *Für einen radikalvollen Modul M mit der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln sind äquivalent :*

(i) *M hat auch die entsprechende Minimalbedingung.*

(ii) *Jeder Untermodul U von M mit $So(M/U)=0$ ist radikalvoll.*

(iii) *Für jeden radikalvollen Untermodul $U \neq M$ besitzt M/U einen einfach-radikalvollen Untermodul.*

(iv) *Jeder maximale radikalvolle Untermodul von M hat ein Komplement in M.*

BEWEIS. (i → iv) ist nach (3.7) klar, und bei (iv → iii) zeigen wir im *1. Schritt* für jeden Modul $N \neq 0$: Ist N wesentliche Überdeckung einer endlichen direkten Summe von einfach-radikalvollen Moduln, so besitzt N einen einfach-radikalvollen Untermodul. Falls $So(N)=0$, hat N nach (3.3) sogar die Minimalbedingung für radikalvolle Untermoduln; andernfalls ist mindestens ein $L_m(N) \neq 0$, und das ist wieder nach (3.3) artinsch und radikalvoll, hat also dieselbe Minimalbedingung. Seien im *2. Schritt* M und U wie angegeben. Wählt man über U einen maximalen radikalvollen Untermodul A von M, dazu nach Voraussetzung ein Komplement V, so ist $\bar{V}$ auch ein Komplement von $\bar{A}$ in $\bar{M}=M/U$, und als wesentliche Überdeckung des einfach-radikalvollen Moduls M/A hat $\bar{V}$ nach dem ersten Schritt den gewünschten einfach-radikalvollen Untermodul. (iii → ii) Es genügt $M \in \mathfrak{F}'$ zu zeigen: Die Menge $\{X \subset M \mid X$ ist radikalvoll und aus $\mathfrak{F}'\}$ hat ein maximales Element X_0, und wäre $X_0 \neq M$, hätte M/X_0 nach Voraussetzung einen einfach-radikalvollen Untermodul X_1/X_0, so daß auch X_1 radikalvoll und aus $\mathfrak{F}'$ wäre, entgegen der Maximalität von X_0. (ii → i) Es ist $M \in \mathfrak{F}'$, denn sind in einer aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$ von Untermoduln alle M/U_i sockelfrei, sind nach Voraussetzung alle U_i radikalvoll, also $U_n = U_{n+1} = \dots$ für ein $n \geq 1$. Bleibt zu zeigen, daß M endliche Goldie-Dimension hat: Das ist klar für $M/L(M) \in \mathfrak{F}'$, und als radikalvoller Modul ist $L(M)$ nach (1.5) artinsch.

BEMERKUNG. Auch wenn der injektive Modul M nicht sockelfrei ist, kann man in Verallgemeinerung von (2.3) für jeden maximalen radikalvollen Untermodul A von $P(M)$ zeigen, daß A ein Komplement in $P(M)$ hat. (3.8) liefert so einen neuen Beweis für die in (2.6) bewiesene Tatsache, daß bei einem injektiven Modul aus der Maximalbedingung für radikalvolle Untermoduln die entsprechende Minimalbedingung folgt.

Anhang

Die folgende Charakterisierung von Minimax-Moduln wurde in den vorhergehenden Beweisen mehrfach benutzt und bringt auch eine erhebliche Vereinfachung von früheren Resultaten des Autors. Der im folgenden wesentliche Beweisschritt (ii → i) findet sich in dem Spezialfall, daß R lokal und vollständig ist, bei Enochs [1], der dort zeigt, daß ein Modul M über solchen Ringen genau dann E-reflexiv ist (E die injektive Hülle des Restklassenkörpers), wenn M ein Minimax-Modul ist (siehe [4] p. 122).

SATZ. *Für einen Modul M sind äquivalent :*

(i) *M ist ein Minimax-Modul.*

(ii) *Jeder Faktormodul von M hat endliche Goldie-Dimension.*

(iii) *In jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i von endlicher Goldie-Dimension.*

(iv) *In jeder absteigenden Folge $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \dots$ von Untermoduln von M sind fast alle Faktoren U_i/U_{i+1} von endlicher Goldie-Dimension.*

BEWEIS. (i → iii) Sei B ein endlich erzeugter Untermodul von M, so daß M/B artinsch ist. Dann gibt es ein $n \geqq 1$ mit $U_n \cap B = U_{n+1} \cap B = \dots$, und für alle $i \geqq n$ ist dann U_{i+1}/U_i als Faktormodul von $(U_{i+1}+B)/B$ artinsch. (iii → ii) Wie im Beweis von ([5] Folgerung 1.3) zeigt man, daß M nicht unendliche direkte Summe von Moduln $\neq 0$ sein kann. Weil sich die Voraussetzung sowohl auf Unter- als auch auf Faktormoduln vererbt, folgt die Behauptung.

(ii → i) (Siehe [1] p. 181) Vorbemerkung: Jeder nicht-halbartinsche Modul N besitzt einen endlich erzeugten Untermodul N_1, so daß die induzierte Abbildung $\mathrm{So}(N) \longrightarrow \mathrm{So}(N/N_1)$ injektiv, aber nicht surjektiv ist. Zum Beweis wähle man einen endlich erzeugten Untermodul $N_0 \neq 0$ mit $\mathrm{So}(N_0)=0$, und dann leistet jeder maximale Untermodul N_1 von N_0 das Gewünschte, denn wäre $\mathrm{So}(N/N_1)=(\mathrm{So}(N)+N_1)/N_1$, folgte aus $N_0/N_1 \subset (\mathrm{So}(N)+N_1)/N_1$ der Widerspruch $N_0=(\mathrm{So}(N)+N_1) \cap N_0 = N_1$.

Erfülle jetzt M die Bedingung (ii). Angenommen $M \notin \mathfrak{F}$, so ist der endlich-dim. Modul M auch nicht halbartinsch, hat also einen endlich erzeugten Untermodul S_1, so daß $\mathrm{So}(M) \longrightarrow \mathrm{So}(M/S_1)$ injektiv, aber nicht sur-

jektiv ist. Auch der endlich-dim. Modul M/S_1 ist dann nicht halbartinsch, hat also einen endlich erzeugten Untermodul S_2/S_1, so daß $\mathrm{So}(M/S_1) \longrightarrow \mathrm{So}(M/S_2)$ injektiv, aber nicht surjektiv ist, u. s. w. Für die so konstruierten Untermoduln $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$ von M behaupten wir, daß $M/\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ nicht endlich-dim. ist (und das ist der gewünschte Widerspruch). Mit $S'_n/S_n = \mathrm{So}(M/S_n)$ gilt offenbar $S'_n \subset S'_{n+1}$, und die beiden Eigenschaften der Abbildung $\mathrm{So}(M/S_n) \longrightarrow \mathrm{So}(M/S_{n+1})$ lesen sich als $S'_n \cap S_{n+1} = S_n$, $S'_n + S_{n+1} \subsetneqq S'_{n+1}$. Mit $T = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ folgt aus dem ersten $S'_n \cap T = S_n$, aus dem zweiten $S'_n + T \subsetneqq S'_{n+1} + T$, so daß in der aufsteigenden Folge $(S'_1 + T)/T \subset (S'_2 + T)/T \subset \ldots \subset \mathrm{So}(M/T)$ keine zwei Glieder übereinstimmen: Der halbeinfache Modul $\mathrm{So}(M/T)$ ist nicht endlich-dimensional.
Entsprechend zeigt man (i $\rightarrow$ iv $\rightarrow$ ii), und damit ist der Satz bewiesen.

Es folgen sofort die Charakterisierungen der Minimax-Moduln in (1. 3) und (2. 7) von [5], aber auch das Hauptergebnis von [4], daß jeder linear-kompakte Modul M ein Minimax-Modul ist: Bekanntlich ist M von endlicher Goldie-Dimension, und weil jeder Faktormodul M/U wieder linear-kompakt ist, gilt Punkt (ii). Schließlich besitzt jeder Modul mit Krull-Dimension die Eigenschaft (ii) (siehe [2] Proposition 1. 4), und weil umgekehrt jeder artinsche Modul Krull-Dimension hat (nach Definition), ebenso jeder noethersche Modul (siehe [2] Proposition 1. 3), erhält man die

FOLGERUNG. *Ein Modul M hat genau dann Krull-Dimension, wenn M ein Minimax-Modul ist.*

Literatur

[1] E. ENOCHS: Flat covers and flat cotorsion modules: Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984) 179-184.
[2] R. GORDON—J. C. ROBSON: Krull Dimension: Mem. Amer. Math. Soc., no. 133 (1973).
[3] E. MATLIS: 1-dimensional Cohen-Macaulay rings: Springer LNM 327 (1973).
[4] H. ZÖSCHINGER: Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen: Arch. Math. 41 (1983) 121-130.
[5] ———: Minimax-Moduln: J. Algebra 102 (1986) 1-32.
[6] ———: Über koassoziierte Primideale.

Mathematisches Institut
der Universität München