## III. Kapitel.

## Einteilung der Flächen zweiter Klasse.

### § 101. Einteilung der Flächen zweiter Klasse nach dem Rang und dem Mittelpunkt.

**1. Einteilung der Flächen zweiter Klasse nach dem Rang.** Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogen, sei die Gleichung der *Fläche zweiter Klasse* (§ 75, (1)):

$$(1)\qquad \begin{aligned} F(u,v,w,s) = {} & b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu \\ & + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante der Fläche ist (§ 75, **3**):

$$(2)\qquad B = |b_{kl}|,$$

und es werde zur Abkürzung gesetzt (§ 79, (5)):

$$(3)\qquad \begin{cases} B' = B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44}, \\ B'' = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} + \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66}, \\ B''' = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}. \end{cases}$$

*In Rücksicht auf die Anzahl ihrer Doppelebenen, bezüglich ihres Ranges, zerfallen die Flächen* (1) *nach* § 81, **8** *in folgende Gruppen:*

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{I. } B \neq 0\text{: Eigentliche Flächen zweiter Klasse;} \\ \text{II. } B = 0,\ B' \neq 0\ (B = 0\text{, nicht alle } B_{kl} = 0)\text{: Eigentliche Kurven zweiter Klasse;} \\ \text{III. } B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0\ (\text{alle } B_{kl} = 0\text{, nicht alle } \beta_{kl} = 0)\text{: Getrennte Punktepaare;} \\ \text{IV. } B = 0,\ B' = 0,\ B'' = 0\ (\text{alle } \beta_{kl} = 0)\text{: Doppelpunkte.} \end{cases}$$

**2. Einteilung in bezug auf die unendlich ferne Ebene.** Die unendlich ferne Ebene $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $s = 1$ genügt der Gleichung (1) immer dann und nur dann, wenn $b_{44} = 0$. Sie genügt ferner den vier Bedingungen der Doppelebene § 76, (16) immer dann und nur dann, wenn $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$, $b_{44} = 0$.

*In bezug auf die unendlich ferne Ebene* $\mathsf{E}_\infty$ *zerfallen daher die Flächen* (1) *in die drei Gruppen:*

(5) $\begin{cases} 1.\ b_{44} \neq 0\text{: } E_\infty \text{ gehört der Fläche (1) nicht an (ist keine Tangentialebene, § 75, 1);} \\ 2.\ b_{44} = 0;\ b_{14}, b_{24}, b_{34} \text{ nicht alle 0: } E_\infty \text{ gehört der Fläche als einfache Ebene an;} \\ 3.\ b_{44} = 0;\ b_{14} = 0,\ b_{24} = 0,\ b_{34} = 0\text{: } E_\infty \text{ ist Doppelebene der Fläche.} \end{cases}$

**3. Andere Form der Bedingungen** (5). Setzt man zur Abkürzung:

$$\mathsf{B}_0 = \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66}, \tag{6}$$

so ist *für* $b_{44} = 0$ (I Anm. 1, III, (4)):

$$\mathsf{B}_0 = -(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2). \tag{7}$$

Daher sind die Bedingungen (5) auch ersetzbar durch die folgenden:

(8) 1. $b_{44} \neq 0$; 2. $b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 \neq 0$; 3. $b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0$.

**4. Der Mittelpunkt der Flächen zweiter Klasse.** Transformiert man die Gleichung (1) auf ein neues *rechtwinkliges* Koordinatensystem $O'x'y'z'$, so werden nach § 75, (15); (11) die in $u'$, $v'$, $w'$ linearen Glieder der transformierten Gleichung immer dann und nur dann fehlen, wenn:

$$\begin{cases} b'_{14} = F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{14}\alpha_1 + b_{24}\beta_1 + b_{34}\gamma_1 + b_{44}x_0' = 0, \\ b'_{24} = F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2 + b_{44}y_0' = 0, \\ b'_{34} = F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3 + b_{44}z_0' = 0, \end{cases} \tag{9}$$

oder mit Benutzung von § 75, (8); (11):

$$\begin{cases} b_{44}(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0) = b_{14}\alpha_1 + b_{24}\beta_1 + b_{34}\gamma_1, \\ b_{44}(\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 z_0) = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2, \\ b_{44}(\alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0) = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3. \end{cases} \tag{10}$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ oder $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ oder $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ und Addition (§ 88, (7); (8)):

$$b_{44}x_0 = b_{14}, \quad b_{44}y_0 = b_{24}, \quad b_{44}z_0 = b_{34}, \tag{11}$$

woraus auch umgekehrt wieder die Gleichungen (10) oder (9) hervorgehen.

*Die auf das neue Koordinatensystem $O'x'y'z'$ transformierte Gleichung* (1) *erhält, unabhängig von der Richtung der Achsen $x'$, $y'$, $z'$, immer dann und nur dann die Form:*

$$\begin{aligned} F(u, v, w, s) = {} & b'_{11}u'^2 + b'_{22}v'^2 + b'_{33}w'^2 \\ & + 2b'_{23}v'w' + 2b'_{31}w'u' + 2b'_{12}u'v' + b'_{44}s'^2 = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

*wenn der Anfangspunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ den Bedingungen* (11) *genügt.*

Er ist dann nach § 77, (7) *der Pol der unendlich fernen Ebene $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $s = 1$, der Mittelpunkt der Fläche zweiter Klasse*

**5. Einteilung der Flächen nach dem Mittelpunkt.** Ist nun $b_{44} \neq 0$, so gibt es nach (11) *einen bestimmten endlichen Mittelpunkt:*

$$x_0 = \frac{b_{14}}{b_{44}}, \quad y_0 = \frac{b_{24}}{b_{44}}, \quad z_0 = \frac{b_{34}}{b_{44}}. \tag{13}$$

Die Fläche (1) ist eine *Mittelpunktsfläche* und die Gleichung (12) ihre *Mittelpunktsgleichung.* Die Ebene $\mathsf{E}_\infty$ ist, da sie nicht mit ihrem Pol vereinigt liegt, wie in (5), keine Tangentialebene (§ 77, **4**, I).

Ist $b_{44} = 0$, aber $b_{14}, b_{24}, b_{34}$ nicht alle Null, so gibt es nach (11) *einen unendlich fernen Mittelpunkt.* Die Ebene $\mathsf{E}_\infty$ liegt mit ihrem Pol vereinigt und ist, wie in (5), einfache Tangentialebene.

Ist endlich $b_{44} = 0$, $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$, so ist nach (11) *der Mittelpunkt unbestimmt* und nach (9) $b'_{14} = 0$, $b'_{24} = 0$, $b'_{34} = 0$, sowie nach § 75, (16) $b'_{44} = 0$. Die Fläche (1) hat dann in jedem Koordinatensystem eine Gleichung von der Form:

$$F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0. \tag{14}$$

Sie ist *eine in der unendlich fernen Ebene liegende Kurve zweiter Klasse* (§ 80, (19′)).

In den Fällen (5) 1., 2. und 3. hat daher die Fläche einen bestimmten endlichen, einen bestimmten unendlich fernen oder einen unbestimmten Mittelpunkt.

**6. Vorläufige Einteilung der Flächen zweiter Klasse.** Hiernach zerfallen die Flächen zweiter Klasse nach ihrem Range einerseits und nach ihrem Mittelpunkt, bezüglich ihrem Verhalten gegen die Ebene $\mathsf{E}_\infty$ andererseits in folgende Gruppen[96]):

(16)

| | $B \neq 0$: Eigentl. Fl. 2. Klasse | $B = 0, B' \neq 0$: Eigentl. Kurv. 2. Klasse | $B = 0, B' = 0$ $B'' \neq 0$: Punktepaare | $B = 0, B' = 0$ $B'' = 0$: Doppelpunkt. |
|---|---|---|---|---|
| $b_{44} \neq 0$ { best. endl. Mittelpunkt; $\mathsf{E}_\infty$ keine Tang.-Ebene | I, 1 | II, 1 | III, 1 | IV, 1 |
| $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 \neq 0$ { best. $\infty$ f. Mittelpunkt; $\mathsf{E}_\infty$ einf. Tang.-E. | I, 2 | II, 2 | III, 2 | 0 |
| $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 = 0$ { unbest. Mittelp.; $\mathsf{E}_\infty$ Doppeltang.-Ebene | 0 | II, 3 | III, 3 | IV, 3 |

Der Fall I, 3 ist unmöglich, da mit $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 = 0$ oder $b_{44} = 0$, $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$ stets $B = 0$; der Fall IV, 2 ist unmöglich, da mit allen $\beta_{kl}$ nach (6) auch $\mathsf{B}_0 = 0$ (§ 27, 5).

## § 102. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten der Mittelpunktsflächen.

**1. Hauptachsen der Mittelpunktsflächen.** Hat die Fläche zweiter Klasse § 101, (1) einen bestimmten Mittelpunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ in § 101, (13), so hat ihre Gleichung in jedem von diesem ausgehenden rechtwinkligen System $O'x'y'z'$ die Form § 101, (12). Die neuen Koeffizienten sind dann nach § 75, (13); (14); (11) infolge der Bedingungen § 101, (9):

$$(1)\quad \begin{cases} b'_{11} = F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_1 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_1, \\ b'_{22} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_2 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_2, \\ b'_{33} = F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\beta_3 + F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\gamma_3; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} b'_{23} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_3 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_3, \\ b'_{31} = F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\beta_1 + F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\gamma_1, \\ b'_{12} = F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_2 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_2. \end{cases}$$

Wir nennen nun die vom Mittelpunkt $O'$ ausgehenden Achsen $x', y', z'$ die *Hauptachsen der Fläche,* wenn die Bedingungen:

$$(3)\qquad b'_{23} = 0, \qquad b'_{31} = 0, \qquad b'_{12} = 0$$

erfüllt sind. Die Koeffizienten $b'_{11}$, $b'_{22}$, $b'_{33}$ heißen alsdann *Hauptachsenkoeffizienten.*

Wie in § 88, **3** handelt es sich nunmehr um die Bestimmung der zwölf Unbekannten $b'_{11}$, $b'_{22}$, $b'_{33}$; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$; $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ aus den sechs Gleichungen (1) und (3) und den sechs Gleichungen § 88, (3); (4), aus denen außerdem die sechs Gleichungen § 88, (7), (8) folgen. Wir fügen dazu noch drei weitere Unbekannte $x_0', y_0', z_0'$ mit drei weiteren Gleichungen § 101, (9), so daß wir *fünfzehn Unbekannte* und *fünfzehn Gleichungen* haben.

**2. Notwendige Bedingungen.** Die erste Gleichung (1) und die beiden letzten (3):

$$(4)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_1 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_1 = b'_{11}, \\ F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_2 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_2 = 0, \\ F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\beta_3 + F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0')\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

geben, mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ oder $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ oder $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ multipliziert und

addiert mit Hinblick auf § 88, (7); (8) und mit Hinzufügung je einer Gleichung von § 101, (9) und § 88, (3):

$$(5)\qquad \begin{cases} F_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{11}'\alpha_1, \\ F_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{11}'\beta_1, \\ F_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{11}'\gamma_1, \\ F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = 0, \\ \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1. \end{cases}$$

*Man hat daher für die fünf Unbekannten* $b_{11}'$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $x_0'$ *die Gleichungen* (5) *und ebenso für die beiden anderen Gruppen von je fünf Unbekannten die Gleichungen:*

$$(6)\qquad \begin{cases} F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{22}'\alpha_2, \\ F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{22}'\beta_2, \\ F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{22}'\gamma_2, \\ F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = 0, \\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1; \end{cases} \qquad (7)\qquad \begin{cases} F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{33}'\alpha_3, \\ F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{33}'\beta_3, \\ F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{33}'\gamma_3, \\ F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = 0, \\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 = 1. \end{cases}$$

**3. Hinreichende Bedingungen.** Umgekehrt folgt aus den drei ersten Gleichungen (5) durch Multiplikation mit $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ und Addition mit Rücksicht auf die fünfte Gleichung (5) wieder die erste Gleichung (1) und ebenso aus (6) und (7) die anderen Gleichungen (1).

Multipliziert man ferner die drei ersten Gleichungen (6) mit $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ und (7) mit $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ und addiert, so ergibt sich mit Rücksicht auf (2):

$$(8)\qquad \begin{cases} b_{23}' = b_{22}'(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3), \\ b_{23}' = b_{33}'(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3). \end{cases}$$

Hieraus folgt aber unter der Voraussetzung $b_{22}' \neq b_{33}'$, daß:

$$(9)\qquad b_{23}' = 0 \qquad \text{und} \qquad (10)\quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 = 0.$$

Ist dagegen $b_{22}' = b_{33}'$, so muß zu (8) noch die Gleichung (10) hinzugefügt werden, um die Gleichung (9) zu folgern. Somit ergibt sich wie in § 88, **6**:

*Die fünfzehn Gleichungen* (5), (6), (7) *sind hinreichende Bedingungen für die drei Gruppen der Unbekannten* $b_{11}'$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $x_0'$; $b_{22}'$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, $y_0'$; $b_{33}'$, $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$, $z_0'$, *falls die drei Hauptachsenkoeffizienten* $b_{11}'$, $b_{22}'$, $b_{33}'$ *alle verschieden sind. Ist dagegen* $b_{22}' = b_{33}'$, *so muß noch die Gleichung* (10), *und sind* $b_{11}' = b_{22}' = b_{33}'$, *so müssen noch die drei Gleichungen* § 88, (4) *hinzugefügt werden.*

**4. Die kubische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten.** Ausführlich geschrieben, lauten die Gleichungen (5):

$$(11)\quad \begin{cases} (b_{11}-b'_{11})\alpha_1 + b_{12}\beta_1 + b_{13}\gamma_1 + b_{14}x_0' = 0, \\ b_{21}\alpha_1 + (b_{22}-b'_{11})\beta_1 + b_{23}\gamma_1 + b_{24}x_0' = 0, \\ b_{31}\alpha_1 + b_{32}\beta_1 + (b_{33}-b'_{11})\gamma_1 + b_{34}x_0' = 0, \\ b_{41}\alpha_1 + b_{42}\beta_1 + b_{43}\gamma_1 + b_{44}x_0' = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \end{cases}$$

und entsprechend die Gleichungen (6) und (7). Damit folgt, wie in § 88, **7**:

*Jeder der drei Hauptachsenkoeffizienten $b'_{11}$, $b'_{22}$, $b'_{33}$ muß der in $\mu$ kubischen Gleichung genügen:*

$$(12)\quad \mathsf{E}(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sie heißt *die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems* der Fläche zweiter Klasse § 101, (1).[89])

**5. Andere Form der kubischen Gleichung.** Die Elimination von $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $x_0'$, die von (11) zu (12) führt, kann auch auf andere Weise ausgeführt werden. Eliminiert man nämlich mit Rücksicht auf die Voraussetzung:

$$(13)\quad b_{44} \neq 0$$

$x_0'$ aus der ersten und vierten Gleichung (11), so ergibt sich:

$$(14)\quad \{(b_{11}-b'_{11})b_{44} - b_{14}^2\}\alpha_1 + (b_{12}b_{44} - b_{14}b_{42})\beta_1 + (b_{13}b_{44} - b_{14}b_{43})\gamma_1 = 0,$$

oder mit Hinzufügung der entsprechenden Gleichungen (§ 75, **3**):

$$(15)\quad \begin{cases} (\beta_{44} - b_{44}b'_{11})\alpha_1 + \beta_{45}\beta_1 + \beta_{46}\gamma_1 = 0, \\ \beta_{54}\alpha_1 + (\beta_{55} - b_{44}b'_{11})\beta_1 + \beta_{56}\gamma_1 = 0, \\ \beta_{64}\alpha_1 + \beta_{65}\beta_1 + (\beta_{66} - b_{44}b'_{11})\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \end{cases}$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichung (14) und der vierten Gleichung (11) unter der Voraussetzung (13) auch wieder die erste Gleichung (11). Die Gleichungen (11) sind daher ersetzbar durch die Gleichungen (15), wenn man zu diesen noch die vierte Gleichung (11) hinzubehält.

*Die Bestimmung der zwölf Unbekannten:* $b'_{11}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $b'_{22}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $b'_{33}, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *kann daher auch mittels der Gleichungen* (15) *und der acht entsprechenden geschehen.*

Die kubische Gleichung für $b'_{11}$, $b'_{22}$, $b'_{33}$ ergibt sich aber dann in der Form:

$$(16) \qquad b_{44}^2 \mathsf{E}(\mu) = \begin{vmatrix} \beta_{44} - b_{44}\mu & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{54} & \beta_{55} - b_{44}\mu & \beta_{56} \\ \beta_{64} & \beta_{65} & \beta_{66} - b_{44}\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Sie unterscheidet sich (vgl. nachher unter **6**) nur um den Faktor $b_{44}^2$ von der Gleichung (12).

Damit ist aber das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Klasse $b_{44} \neq 0$ auf die Form § 88, (15); (17) zurückgeführt. Es ergibt sich also wie dort in § 89, **3**:

*Die kubische Gleichung* $\mathsf{E}(\mu) = 0$ *in* (12) *oder* (16) *hat stets drei reelle Wurzeln* $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$; und weiter wie in § 90, **7**:

*Die Fläche zweiter Klasse* $b_{44} \neq 0$ *hat stets drei vom Mittelpunkt ausgehende Hauptachsen, in bezug auf welche die Gleichung der Fläche die Form erhält:*

$$(17) \qquad F(u, v, w, s) = \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2.$$

*Die Hauptachsen sind eindeutig bestimmt, wenn die Wurzeln* $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ *alle drei verschieden sind, dagegen einfach unbestimmt für zwei gleiche und dreifach unbestimmt für drei gleiche Wurzeln.*

**6. Entwicklung der kubischen Gleichung.** Die Differentialquotienten der Determinante (12) sind:

$$\mathsf{E}'(\mu) = -\begin{vmatrix} b_{22} - \mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} - \mu & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \cdots - \cdots;$$

$$\tfrac{1}{2}\mathsf{E}''(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu & b_{14} \\ b_{41} & b_{44} \end{vmatrix} + \cdots + \cdots; \quad \tfrac{1}{6}\mathsf{E}'''(\mu) = -b_{44}.$$

Es folgt daher:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\mu) &= \mathsf{E}(0) + \mathsf{E}'(0)\cdot\mu + \tfrac{1}{2}\mathsf{E}''(0)\cdot\mu^2 + \tfrac{1}{6}\mathsf{E}'''(0)\cdot\mu^3 \\ &= B - (B_{11} + B_{22} + B_{33})\mu + (\beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66})\mu^2 - b_{44}\mu^3 \end{aligned}$$

oder:

$$(18) \qquad \mathsf{E}(\mu) = -b_{44}\mu^3 + \mathsf{B}_0\mu^2 - \mathsf{B}_0'\mu + B,$$

wo zur Abkürzung neben § 101, (6) gesetzt ist:

$$(19) \qquad \mathsf{B}_0' = B_{11} + B_{22} + B_{33}.$$

Aus (16) folgt dieselbe Entwicklung, da (§ 89, (7)):

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \beta_{44} & \beta_{45} & \beta_{46} \\ \beta_{54} & \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{64} & \beta_{65} & \beta_{66} \end{vmatrix} = B b_{44}^2;$$

$$\begin{vmatrix} \beta_{55} & \beta_{56} \\ \beta_{65} & \beta_{66} \end{vmatrix} = B_{11} b_{44}; \quad \begin{vmatrix} \beta_{66} & \beta_{64} \\ \beta_{46} & \beta_{44} \end{vmatrix} = B_{22} b_{44}; \quad \begin{vmatrix} \beta_{44} & \beta_{45} \\ \beta_{54} & \beta_{55} \end{vmatrix} = B_{33} b_{44}.$$

Es ist nämlich (I Anm. 1, III, (8)):

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} = B^2 b_{44}$$

und, wenn die Unterdeterminanten zweiten Grades der $B_{kl}$ mit $\mathsf{B}_{kl}$ bezeichnet werden (§ 66, **6**), wiederum (I Anm. 1, II, (4)):

$$\begin{vmatrix} \mathsf{B}_{11} & \mathsf{B}_{12} & \mathsf{B}_{13} \\ \mathsf{B}_{21} & \mathsf{B}_{22} & \mathsf{B}_{23} \\ \mathsf{B}_{31} & \mathsf{B}_{32} & \mathsf{B}_{33} \end{vmatrix} = (B^2 b_{44})^2,$$

woraus alsdann (I Anm. 1, III, (11)) die erste Formel (20) folgt (die andern nach I Anm. 1, II, (5), auf $B_{11}$, $B_{22}$, $B_{33}$ angewendet).

**7. Hauptachsengleichungen der Mittelpunktsflächen.** Da nun für die drei Wurzeln der Gleichung $\mathsf{E}(\mu) = 0$ nach (18):

$$(21)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{\mathsf{B}_0}{b_{44}}, \quad \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_2 = \frac{\mathsf{B}_0'}{b_{44}}, \quad \mu_1\mu_2\mu_3 = \frac{B}{b_{44}},$$

so ergibt sich:

*Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse mit einem Mittelpunkt* ($b_{44} \neq 0$) *kann stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

$$(22)\qquad \begin{cases} B \neq 0 : \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' \neq 0 : \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0,\ \mathsf{B}_0 \neq 0 : \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0,\ b_{44} \neq 0 : b_{44} s'^2 = 0. \end{cases}$$

Sie ist daher entsprechend ein *Ellipsoid* oder *Hyperboloid* (§ 70, (10)); eine *Ellipse* oder *Hyperbel* (§ 53, (35)); ein *endliches Punktepaar* (I § 72, (20′)); ein *endlicher Doppelpunkt* (I § 47, (10)).

**8. Andere Form der Bedingungen (22).** Wenn $B = 0$ und $B' = 0$, so verschwinden (§ 79, (11)) alle Unterdeterminanten $B_{kl}$ und damit auch $\mathsf{B}_0'$ in (19).

Ist umgekehrt: $B = 0$, $\mathsf{B}_0' = 0$, so ist zunächst nach § 101, (3) und nach (19):

$$B' = B_{44}.$$

Nach § 79, (8) ist nun für $B = 0$:

$$\mathsf{B}_0' B_{44} = B_{14}^2 + B_{24}^2 + B_{34}^2$$

und daher für $\mathsf{B}_0' = 0$ auch $B_{14} = 0$, $B_{24} = 0$, $B_{34} = 0$ und damit infolge der für $B = 0$ gültigen Gleichungen ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$b_{1k} B_{14} + b_{2k} B_{24} + b_{3k} B_{34} + b_{4k} B_{44} = 0$$

auch $b_{4k} B_{44} = 0$, also wenn nicht alle $b_{4k}$ verschwinden, $B_{44} = 0$ oder $B' = 0$.

*Falls $b_{14}$, $b_{24}$, $b_{34}$, $b_{44}$ nicht alle verschwinden, sind die Bedingungen:*

(23) $$B = 0, \quad \mathsf{B}_0' = 0$$

*in* (22) *ersetzbar durch:*

(24) $$B = 0, \quad B' = 0.$$

Überdies haben für $B = 0$ nach § 79, (9) $B'$ und $\mathsf{B}_0'$, wenn sie nicht Null sind, dasselbe Vorzeichen.

Wenn $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, so verschwinden (§ 81, (18)) alle Unterdeterminanten $\beta_{kl}$ und damit auch $\mathsf{B}_0$ in § 101, (6).

Sei dagegen vorausgesetzt:

$$b_{44} \neq 0, \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad \mathsf{B}_0 = 0,$$

so wird zuerst nach § 101, (3) und (6):

$$B'' = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}.$$

Da nun mit $B = 0$, $B' = 0$ alle $B_{kl}$ und damit alle Unterdeterminanten zweiten Grades der $\beta_{kl}$ verschwinden (I Anm. 1, III, (22)), so ist:

(25) $$(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33})(\beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66}) = \beta_{14}^2 + \beta_{15}^2 + \beta_{16}^2 + \beta_{24}^2 + \beta_{25}^2 + \beta_{26}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{35}^2 + \beta_{36}^2,$$

also mit $\mathsf{B}_0 = 0$:

$$\beta_{14} = 0, \ \beta_{15} = 0, \ \beta_{16} = 0, \ \beta_{24} = 0, \ \beta_{25} = 0, \ \beta_{26} = 0, \ \beta_{34} = 0, \ \beta_{35} = 0, \ \beta_{36} = 0.$$

Damit folgt aber aus den unbedingt gültigen Gleichungen:

$$B_{11} = b_{42}\beta_{16} - b_{43}\beta_{15} + b_{44}\beta_{11}, \quad B_{22} = b_{43}\beta_{24} - b_{41}\beta_{26} + b_{44}\beta_{22}, \quad B_{33} = b_{41}\beta_{35} - b_{42}\beta_{34} + b_{44}\beta_{33}$$

zunächst:

$$b_{44}\beta_{11} = 0, \quad b_{44}\beta_{22} = 0, \quad b_{44}\beta_{33} = 0,$$

und da $b_{44} \neq 0$ ist:

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{22} = 0, \quad \beta_{33} = 0; \text{ also: } B'' = 0.$$

*Die Bedingungen:*

(26) $$b_{44} \neq 0, \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad \mathsf{B}_0 = 0$$

*sind ersetzbar durch:*

$$b_{44} \neq 0,\ B = 0,\ B' = 0,\ B'' = 0. \tag{27}$$

Da überdies für $B = 0$, $B' = 0$ nach (25):

$$B''\mathsf{B}_0 = \beta_{14}^2 + \beta_{24}^2 + \beta_{34}^2 + \beta_{15}^2 + \beta_{25}^2 + \beta_{35}^2 + \beta_{16}^2 + \beta_{26}^2 + \beta_{36}^2 + \mathsf{B}_0^2, \tag{28}$$

so haben alsdann $B''$ und $\mathsf{B}_0$, wenn sie nicht Null sind, dasselbe Vorzeichen.

*Die Tabelle* (22) *kann nach* (23), (24); (26), (27) *auch durch die folgende ersetzt werden* ($b_{44} \neq 0$):

$$\begin{cases} B \neq 0 : \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' \neq 0 : \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0 : \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' = 0,\ B'' = 0 : b_{44} s'^2 = 0. \end{cases} \tag{29}$$

**9. Die zu einer verschwindenden Wurzel gehörige Hauptachse.** Im zweiten Fall (29) gibt die Auflösung der Gleichungen (11) mit $b'_{11} = \mu_1 = 0$:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : x_0' = B_{k1} : B_{k2} : B_{k3} : B_{k4}, \tag{29'}$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4 (I Anm. 2, III, (12)).

Die Ebene $x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + x_0' = 0$ des neuen Koordinatensystems (I § 37, (19)) ist daher die Doppelebene der Fläche, deren Koordinaten $u_0, v_0, w_0, s_0$ nach § 79, (4′) sich ebenfalls wie die Größen der rechten Seite (29′) verhalten.

**10. Die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems der Fläche zweiter Ordnung und zweiter Klasse.** Die Gleichungen (11) können für $B \neq 0$ in der Form geschrieben werden (I Anm. 2, III, (1); (2)):

$$\begin{cases} B\alpha_1 = (B_{11}\alpha_1 + B_{21}\beta_1 + B_{31}\gamma_1) b'_{11}, \\ B\beta_1 = (B_{12}\alpha_1 + B_{22}\beta_1 + B_{32}\gamma_1) b'_{11}, \\ B\gamma_1 = (B_{13}\alpha_1 + B_{23}\beta_1 + B_{33}\gamma_1) b'_{11}, \\ Bx_0' = (B_{14}\alpha_1 + B_{24}\beta_1 + B_{34}\gamma_1) b'_{11}, \end{cases} \tag{30}$$

oder mit Weglassung der letzten Gleichung:

$$\begin{cases} \left(B_{11} - \frac{B}{b'_{11}}\right)\alpha_1 + B_{12}\beta_1 + B_{13}\gamma_1 = 0, \\ B_{21}\alpha_1 + \left(B_{22} - \frac{B}{b'_{11}}\right)\beta_1 + B_{23}\gamma_1 = 0, \\ B_{31}\alpha_1 + B_{32}\beta_1 + \left(B_{33} - \frac{B}{b'_{11}}\right)\gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Die Hauptachsenkoeffizienten $\mu = b'_{11}, b'_{22}, b'_{33}$ genügen daher auch der Gleichung:

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} B_{11}-\frac{B}{\mu} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22}-\frac{B}{\mu} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33}-\frac{B}{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist für $B \neq 0$ nach § 78, (7′) die Gleichung der Fläche § 101, (1) in Punktkoordinaten:

$$(33)\qquad B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^3 + 2B_{23}yz + \cdots + B_{44} = 0.$$

Die kubische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten $\lambda = a'_{11}$, $a'_{22}$, $a'_{33}$ der Fläche (33) ist aber nach § 88, (17) ebenfalls die Gleichung (32) nur mit $\lambda$ für $\frac{B}{\mu}$. In diesem Sinne sind also die kubischen Gleichungen § 88, (17) und § 102, (12) nicht wesentlich verschieden.

## § 103. Die Flächen zweiter Klasse ohne Mittelpunkt.

**1. Bestimmung der Achsenrichtung $x'$.** Die Flächen ohne endlichen Mittelpunkt § 101, (16) zweite Zeile sind durch die Voraussetzungen:

$$(1)\qquad b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = -(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2) \neq 0$$

bezeichnet. Bei der Transformation der Gleichung § 101, (1) auf ein neues System $O'x'y'z'$ werden die Koeffizienten § 101, (9) nach (1):

$$(2)\qquad \begin{cases} b'_{14} = F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = b_{14}\alpha_1 + b_{24}\beta_1 + b_{34}\gamma_1, \\ b'_{24} = F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2, \\ b'_{34} = F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3. \end{cases}$$

Sie können nach (1) *nicht alle drei* verschwinden (I Anm. 2, II, (9)). Sollen jedoch *zwei* von ihnen verschwinden, etwa:

$$(3)\qquad \begin{cases} b'_{24} = F_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = b_{14}\alpha_2 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\gamma_2 = 0, \\ b'_{34} = F_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = b_{14}\alpha_3 + b_{24}\beta_3 + b_{34}\gamma_3 = 0, \end{cases}$$

so folgt daraus unbedingt, daß:

$$b_{14} : b_{24} : b_{34} = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 : \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 : \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$$

(I § 37, (12)) oder:

$$(4)\qquad \varrho\alpha_1 = b_{14},\quad \varrho\beta_1 = b_{24},\quad \varrho\gamma_1 = b_{34},$$

wo wir willkürlich das positive Vorzeichen der Wurzel:

$$(5)\qquad \varrho = \sqrt{b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2} = \sqrt{-\mathsf{B}_0}$$

wählen. Danach wird dann:

$$(6)\qquad b'_{14} = F_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = \frac{1}{\varrho}(b_{14}^2 + b_{24}^2 + b_{34}^2) = \varrho.$$

*Den Bedingungen* (3) *wird durch die Bestimmung* (4) *der Richtung der $x'$-Achse genügt, worauf der Koeffizient $b'_{14}$ den Wert* (6) *erhält.*

**2. Die Koeffizienten der quadratischen Glieder.** Infolge von (1), (3) und (6) wird nach § 75, (13); (14); (15); (11):

$$(7)\quad \begin{cases} b'_{11} = F(\alpha_1\beta_1\gamma_1 x_0') = H(\alpha_1\beta_1\gamma_1) + 2b'_{14}x_0' = H(\alpha_1\beta_1\gamma_1) + 2\varrho x_0', \\ b'_{22} = F(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0') = H(\alpha_2\beta_2\gamma_2) + 2b'_{24}y_0' = H(\alpha_2\beta_2\gamma_2), \\ b'_{33} = F(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0') = H(\alpha_3\beta_3\gamma_3) + 2b'_{34}z_0' = H(\alpha_3\beta_3\gamma_3), \\ b'_{23} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_3 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_3 \\ \quad = H_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_3 + H_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_3 + H_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_3, \\ b'_{31} = F_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\beta_1 + F_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3 z_0')\gamma_1 \\ \quad = H_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\alpha_1 + H_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\beta_1 + H_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\gamma_1 + \varrho z_0', \\ b'_{12} = F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_1 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_1 \\ \quad = H_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_1 + H_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_1 + H_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_1 + \varrho y_0'. \end{cases}$$

**3. Der Scheitelpunkt der Fläche.** Wir bestimmen nunmehr den Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$, für den nach § 75, (9) die Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} x_0 = -\alpha_1 x_0' - \alpha_2 y_0' - \alpha_3 z_0', \\ y_0 = -\beta_1 x_0' - \beta_2 y_0' - \beta_3 z_0', \\ z_0 = -\gamma_1 x_0' - \gamma_2 y_0' - \gamma_3 z_0' \end{cases}$$

gelten, aus den drei Bedingungen:

$$(9)\qquad b'_{11} = 0, \quad b'_{12} = 0, \quad b'_{31} = 0,$$

die nach (7) geschrieben werden können (§ 66, (12)):

$$-\varrho x_0' = H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1 + H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1 + H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1 - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1),$$
$$-\varrho y_0' = H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2,$$
$$-\varrho z_0' = H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und addiert, so folgt nach (8):

$$(10)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = H_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1, \\ \varrho y_0 = H_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1, \\ \varrho z_0 = H_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1, \end{cases}$$

wo $\varrho$ den nicht verschwindenden Wert (5) und $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ die Werte (4) haben (§ 29, (11)).[94])

Der hierdurch bestimmte Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ soll der *Scheitelpunkt der Fläche* genannt werden.

**4. Bestimmung der Achsenrichtungen $y'$ und $z'$ und der Koeffizienten $b'_{22}$ und $b'_{33}$.** Wir fügen nun zu den Forderungen (3) und (9) die weitere hinzu:

$$(11)\qquad b'_{23} = 0,$$

um aus ihr die Richtung der Achsen $y'$ und $z'$ zu bestimmen, zugleich aber die davon abhängigen Koeffizienten $b'_{22}$ und $b'_{33}$ in (7).

Die Gleichungen $b'_{12} = 0$, $b'_{22} = F(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')$, $b'_{23} = 0$ können nun nach (7) und (3) in der Form geschrieben werden:

$$(12)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_1 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_1 = 0, \\ F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_2 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_2 = b'_{22}, \\ F_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\alpha_3 + F_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\beta_3 + F_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2 y_0')\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen aber mit Rücksicht auf (3) wieder die Gleichungen § 102, (6) und entsprechend die Gleichungen § 102, (7). Auch gehen umgekehrt, wie § 102, **3**, wieder die Gleichungen § 102, (9) und (10) hervor, falls $b'_{22} \neq b'_{33}$, während für $b'_{22} = b'_{33}$ die Gleichung § 102, (10) hinzuzufügen ist.

Die Gleichungen § 102, (6) lauten nun im Falle (1) ausführlich:

$$(13)\quad \begin{cases} (b_{11} - b'_{22})\alpha_2 + b_{12}\beta_2 + b_{13}\gamma_2 + b_{14}y_0' = 0, \\ b_{21}\alpha_2 + (b_{22} - b'_{22})\beta_2 + b_{23}\gamma_2 + b_{24}y_0' = 0, \\ b_{31}\alpha_2 + b_{32}\beta_2 + (b_{33} - b'_{22})\gamma_2 + b_{34}y_0' = 0, \\ b_{41}\alpha_2 + b_{42}\beta_2 + b_{43}\gamma_2 = 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \end{cases}$$

und entsprechend die Gleichungen § 102, (7).

*Die Koeffizienten $b'_{22}$, $b'_{33}$ sind daher die Wurzeln der in $\mu$ quadratischen Gleichung*[89]*:*

$$(14)\quad \mathsf{E}_0(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} - \mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \mu & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die aus § 102, (12) mit $b_{44} = 0$ hervorgeht, so daß nach § 102, (18):

$$(15)\quad \mathsf{E}_0(\mu) = \mathsf{B}_0\mu^2 - \mathsf{B}_0'\mu + B.$$

Daß diese Gleichung stets zwei *reelle* Wurzeln hat, und daß es stets zwei ihnen entsprechende Hauptachsenrichtungen $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ und $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ gibt, wird in § 109, **5**; § 110, **3**; **4** bewiesen werden (vgl. auch § 51, (18)).

**5. Kanonische Gleichungen der Flächen zweiter Klasse ohne Mittelpunkt.** Da nun für die Wurzeln $\mu_2$ und $\mu_3$ nach (15):

$$(16)\quad \mu_2 + \mu_3 = \frac{\mathsf{B}_0'}{\mathsf{B}_0}, \quad \mu_2\mu_3 = \frac{B}{\mathsf{B}_0},$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (9), (11), (6) und (3):

*Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse ohne endlichen Mittelpunkt ($b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 \neq 0$) kann stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

$$(17)\qquad \begin{cases} B \neq 0\colon\ \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' \neq 0\colon\ \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0; \\ B = 0,\ \mathsf{B}_0' = 0\colon\ 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\,u's' = 0. \end{cases}$$

Die Bedingungen der beiden letzten Fälle (17) sind nach § 102, (23); (24) auch ersetzbar durch:

$$(18)\qquad B = 0,\ B' \neq 0 \text{ und } B = 0,\ B' = 0.$$

*Dabei liegt der Anfangspunkt O' des Koordinatensystems im Scheitelpunkt* (10); *hat die x'-Achse die Richtungskosinus* (4), (5); *sind* $\mu_2 = b'_{22}$ *und* $\mu_3 = b'_{33}$ *die Wurzeln der Gleichung* (14) *und bestimmen sich alsdann die y'- und z'-Achse aus den Gleichungen* (13) *und den entsprechenden. Sie sind für* $\mu_2 \neq \mu_3$ *eindeutig bestimmt, für* $\mu_2 = \mu_3$ *in der yz-Ebene drehbar.*

**6. Die Kurven in der unendlich fernen Ebene.** Der noch übrige Fall § 101, (16) dritte Zeile ist durch die Voraussetzungen:

$$(19)\qquad b_{14} = 0,\quad b_{24} = 0,\quad b_{34} = 0,\quad b_{44} = 0\quad (b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0)$$

bezeichnet. Er ist schon in § 93, 2 erledigt. Danach ergibt sich:

*Die Fläche zweiter Klasse:*

$$(20)\qquad \begin{aligned} F(u, v, w, s) = {} & b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 \\ & + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0 \end{aligned}$$

*kann bei unverändertem Anfangspunkt O des Systems Oxyz durch Einführung neuer Achsen x', y', z' stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

$$(21)\qquad \begin{cases} B_{44} \neq 0\colon\ \nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0; \\ B_{44} = 0,\ B'_{44} \neq 0\colon\ \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0; \\ B_{44} = 0,\ B'_{44} = 0,\ B''_{44} \neq 0\colon\ \nu_3 w'^2 = 0. \end{cases}$$

Hier ist:

$$(22)\qquad B'_{44} = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33},\quad B''_{44} = b_{11} + b_{22} + b_{33},$$

und sind $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung § 93, (7'):

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \nu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \nu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \nu \end{vmatrix} = -\nu^3 + B''_{44}\nu^2 - B'_{44}\nu + B_{44} = 0,$$

also:

$$(24)\qquad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = B''_{44},\quad \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1 + \nu_1\nu_2 = B'_{44},\quad \nu_1\nu_2\nu_3 = B_{44}.$$

Mit (19) ist auch $B_{11} = 0$, $B_{22} = 0$, $B_{33} = 0$, also (§ 101, (3)):

$$(25)\qquad B' = B_{44},$$

und $\beta_{44} = 0$, $\beta_{55} = 0$, $\beta_{66} = 0$, also:

$$(26)\qquad B'' = B'_{44},$$

endlich:

$$B''' = B'_{44}. \tag{27}$$

Daher können die Bedingungen der drei Zeilen (21) auch in der Form:

$$B' \neq 0;\quad B' = 0,\ B'' \neq 0;\quad B' = 0,\ B'' = 0,\quad B''' \neq 0 \tag{28}$$

gegeben werden.

## § 104. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

**1. Kanonische Gleichungen.** Das Ergebnis der vorstehenden Entwicklung ist dies, daß die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogene Gleichung der Fläche zweiter Klasse:

$$\begin{aligned} F(u, v, w, s) = {} & b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu \\ & + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems $O'x'y'z'$ auf eine kanonische Form gebracht werden kann.

Nach ihrem *Range* einerseits und nach ihrer *Beziehung zur unendlich fernen Ebene* $\mathsf{E}_\infty$ andererseits gehört jede Fläche (1) in ein (ausgefülltes) Feld der folgenden Tabelle (§ 101, (16)) und hat dann die dort angegebene kanonische Gleichungsform (§ 102, (29); § 103, (17), (18); (21), (28)). *Die Tabelle muß also alle Flächen zweiter Klasse enthalten.*

(2)

| | I. $B \neq 0$: Eigentl. Fläch. 2. Klasse | II. $B = 0$, $B' \neq 0$: Eigentl. Kurven 2. Klasse | III. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' \neq 0$: Eigentl. Punktep. | IV. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, $B''' \neq 0$: Doppelpunkte |
|---|---|---|---|---|
| 1. $b_{44} \neq 0$: $\mathsf{E}_\infty$ nicht Tang.-Ebene | $\mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0$ | $\mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0$ | $\mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0$ | $b_{44} s'^2 = 0$ |
| 2. $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 \neq 0$: $\mathsf{E}_\infty$ einf. Tang.-Ebene | $\mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\, u' s' = 0$ | $\mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\, u' s' = 0$ | $2\sqrt{-\mathsf{B}_0}\, u' s' = 0$ | 0 |
| 3. $b_{44} = 0$, $\mathsf{B}_0 = 0$: $\mathsf{E}_\infty$ Doppeltang.-Ebene | 0 | $\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$ | $\nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$ | $\nu_3 w'^2 = 0$ |

Innerhalb eines Teils der kanonischen Gleichungen sind nun weiter noch die *Vorzeichen* der Koeffizienten zu unterscheiden.

**2. Die eigentlichen Flächen mit Mittelpunkt.** Die Gleichung I, 1 der Tabelle (2) kann mit den Abkürzungen:

$$\alpha = \frac{\mu_1}{b_{44}}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{b_{44}}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{b_{44}} \tag{3}$$

und $s' = 1$ in der Form:

$$\alpha u'^2 + \beta v'^2 + \gamma w'^2 + 1 = 0 \tag{4}$$

geschrieben werden. Da alsdann nach § 102, (21):

$$\alpha\beta\gamma = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{b_{44}^3} = \frac{B}{b_{44}^4}, \tag{5}$$

so sind die Vorzeichen der Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$:

$$\begin{cases} \text{für } B > 0: +++ \text{ oder } --+ \\ \quad B < 0: -++ \text{ oder } ---. \end{cases} \tag{6}$$

Andererseits sind wie in § 89, (41) die Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, bezüglich $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ alle von einerlei Vorzeichen, wenn gleichzeitig:

$$\mathsf{B}_0' b_{44} > 0, \quad B\mathsf{B}_0 > 0. \tag{7}$$

Die Verbindung beider Angaben (6) und (7) gibt für die Vorzeichen von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (§ 89, (42)):

(8)

| | $B > 0$ | $B < 0$ |
|---|---|---|
| $\mathsf{B}_0' b_{44} > 0, \quad B\mathsf{B}_0 > 0$ | $+++$ | $---$ |
| $\mathsf{B}_0' b_{44}, \quad B\mathsf{B}_0$ nicht beide $> 0$ | $--+$ | $-++$ |

Nun folgt aus der nach § 81, (23) unbedingt gültigen Gleichung:

$$B''' b_{44} = b_{41}^2 + b_{42}^2 + b_{43}^2 + b_{44}^2 + \mathsf{B}_0,$$

daß unter der Bedingung $B > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$ stets $B'''$ und $b_{44}$ gleiches Vorzeichen haben. Man kann daher die Tabelle (8) in folgende Form bringen, wobei wir zugleich die Größen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ je nach ihrem Vorzeichen als positive oder negative Quadrate bezeichnen:

(9)

| | | $B > 0$ | | $B < 0$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $\mathsf{B}_0' B''' > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$ | $\mathsf{B}_0' B'''$, $B\mathsf{B}_0$ nicht beide $> 0$ | |
| $b_{44} \neq 0$ | $\mathsf{B}_0' b_{44} > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$ | $\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 + 1 = 0$ Imag. Ellipsoid | 0 | $\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Reelles Ellipsoid |
| | $\mathsf{B}_0' b_{44}$, $B\mathsf{B}_0$ nicht beide $> 0$ | 0 | $\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Einschal. Hyperbol. | $\alpha^2 u'^2 - \beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Zweischal. Hyperbol. |

Die eingefügten Namen der Flächen ergeben sich aus § 70, (10).

**3. Die eigentlichen Flächen ohne Mittelpunkt.** Die Gleichung I, 2 der Tabelle (2) kann mit den Abkürzungen:

$$\beta = \frac{\mu_2}{\sqrt{-\mathsf{B}_0}}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{\sqrt{-\mathsf{B}_0}} \tag{10}$$

in der Form ($s' = 1$):

$$\beta v'^2 + \gamma w'^2 + 2u' = 0 \tag{11}$$

geschrieben werden. Da alsdann nach § 103, (16):

$$\mu_2\mu_3 = \frac{B}{\mathsf{B}_0}, \qquad \alpha\beta = -\frac{B}{\mathsf{B}_0^2}, \tag{12}$$

so sind die Vorzeichen der Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$:

$$\begin{cases} \text{für } B > 0 \quad \text{oder} \quad B\mathsf{B}_0 < 0 : \mp\,\pm \\ \quad B < 0 \quad \text{oder} \quad B\mathsf{B}_0 > 0 : \pm\,\pm . \end{cases} \tag{13}$$

Nach § 103, (1) ist nämlich hier stets $\mathsf{B}_0 < 0$. Demnach ist im Anschluß an die Tabelle (9):

(14)

| | | $B>0$ | | $B<0$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $\mathsf{B}_0' B''' > 0$, $B\mathsf{B}_0 > 0$ | $\mathsf{B}_0' B'''$, $B\mathsf{B}_0$ nicht beide $> 0$ | |
| $b_{44}=0$ | $B\mathsf{B}_0 > 0$ | 0 | 0 | $\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 + 2u' = 0$ Ellipt. Paraboloid |
| | $B\mathsf{B}_0 < 0$ | 0 | $\beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 + 2u' = 0$ Hyperb. Paraboloid | 0 |

Die eingefügten Namen gehen aus § 70, (32) hervor.

**4. Eigentliche Flächen zweiter Ordnung und Klasse.** Wenn allgemein ($A \neq 0$):

$$b_{kl} = A_{kl} \tag{15}$$

genommen wird, so wird die Fläche zweiter Klasse (1) mit der Fläche zweiter Ordnung § 99, (1) identisch. Gleichzeitig ist (§ 78, 8):

$$\begin{cases} B = A^3, \quad b_{44} = A_{44}, \quad \mathsf{B}_0' = B_{11} + B_{22} + B_{33} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = A^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = A^2 A_{44}'', \\ \mathsf{B}_0 = \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66} = A\,(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = A A_{44}', \\ B''' = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = A' \end{cases} \tag{16}$$

und damit:

$$\mathsf{B}_0' B''' = A^2 A' A_{44}'', \quad B\mathsf{B}_0 = A^4 A_{44}', \quad \mathsf{B}_0' b_{44} = A^2 A_{44} A_{44}'. \tag{17}$$

Die Bedingungen der Tabelle (9) und (14) kommen daher mit denen der Tabelle § 99, (8) und (14) überein.

**5. Eigentliche Kurven zweiter Klasse im Endlichen.** Die Gleichung II, 1 der Tabelle (2) kann mit den Abkürzungen:

$$\beta = \frac{\mu_2}{b_{44}}, \quad \gamma = \frac{\mu_3}{b_{44}} \tag{18}$$

und $s' = 1$ in der Form:

$$\beta v'^2 + \gamma w'^2 + 1 = 0 \tag{19}$$

geschrieben werden. Da hier nach § 102, (21) mit $\mu_1 = 0$:

$$\beta + \gamma = \frac{\mathsf{B}_0}{b_{44}^2} \quad \beta\gamma = \frac{\mathsf{B}_0'}{b_{44}^3}, \tag{20}$$

so ergibt sich für die Vorzeichen von $\beta$ und $\gamma$:

$$\begin{cases} b_{44}\mathsf{B}_0' > 0, & \mathsf{B}_0 > 0 : + + \\ b_{44}\mathsf{B}_0' > 0, & \mathsf{B}_0 < 0 : - - \\ b_{44}\mathsf{B}_0' < 0 & : \pm \mp . \end{cases} \tag{21}$$

In diesen drei Fällen ist die Fläche (19) nach § 53, (35) eine *imaginäre Ellipse* oder eine *reelle Ellipse* oder eine *Hyperbel.*[96])

Die Bedingungen der zweiten Zeile (21) sind aber auch gleichwertig mit:

$$b_{44}\mathsf{B}_0' > 0, \ b_{44}\mathsf{B}_0' \text{ und } \mathsf{B}_0 \text{ nicht beide } > 0. \tag{22}$$

Denn die Bedingungen (22) lassen nur die Möglichkeiten $\mathsf{B}_0 < 0$ oder $\mathsf{B}_0 = 0$ zu. Da aber nach § 81, (3) unbedingt:

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_0^2 = (\beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66})^2 = \beta_{44}^2 + \beta_{55}^2 + \beta_{66}^2 \\ + 2(\beta_{56}^2 + \beta_{64}^2 + \beta_{45}^2 + b_{44}\mathsf{B}_0'), \end{aligned} \tag{23}$$

so ist $\mathsf{B}_0 = 0$ nicht mit $b_{44}\mathsf{B}_0' > 0$ verträglich.

Wir können daher die Bedingungen (21) in folgende Tabelle bringen, der wir noch den Fall II, 2 aus (2) anfügen:

(24)

| | | $B = 0,\ B' \neq 0$ | |
|---|---|---|---|
| | | $\mathsf{B}_0 > 0,\ b_{44}\mathsf{B}_0' > 0$ | $\mathsf{B}_0,\ b_{44}\mathsf{B}_0'$ nicht beide $> 0$ |
| $b_{44} \neq 0$ | $b_{44}\mathsf{B}_0' > 0$ | $\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 + 1 = 0$ Imag. Ellipse | $\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Reelle Ellipse |
| | $b_{44}\mathsf{B}_0' < 0$ | 0 | $\beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 - 1 = 0$ Hyperbel |
| $b_{44} = 0$ | $\mathsf{B}_0 \neq 0$ | 0 | $\frac{\mathsf{B}_0'}{\sqrt{-\mathsf{B}_0^3}} w'^2 + 2u' = 0$ Parabel |

Bei der Parabel ist nach § 103, (17) $\mathsf{B}_0 < 0$, $\mathsf{B}_0' \neq 0$.

**6. Unendlich ferne eigentliche Kurven zweiter Klasse.** Für die Gleichung II, 3 der Tabelle (2) ist nur zu unterscheiden, ob $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ alle drei gleiches Vorzeichen haben oder nicht. Es folgt daher, wie in § 93, (8):

*Die eigentliche unendlich ferne Kurve:*

$$\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0 \tag{25}$$

*ist ein imaginärer oder reeller Kegelschnitt, je nachdem:*

$$B_{44}B''_{44} > 0,\ B'_{44} > 0 \quad \text{oder} \quad B_{44}B''_{44},\ B'_{44} \text{ nicht beide } > 0 \tag{26}$$

oder nach § 103, (25); (26); (27), je nachdem:

$$B'B''' > 0,\ B'' > 0 \quad \text{oder} \quad B'B''',\ B'' \text{ nicht beide } > 0. \tag{27}$$

**7. Punktepaare.** Das *Punktepaar* III, 1 ist im *Endlichen* gelegen und ist, da nach § 102, (21) $\mu_3 = \mathsf{B}_0 : b_{44}$ ist, *imaginär* oder *reell*, je nachdem:

$$\mathsf{B}_0 > 0 \quad \text{oder} \quad \mathsf{B}_0 < 0 \tag{28}$$

oder nach § 102, (28), je nachdem:

$$B'' > 0 \quad \text{oder} \quad B'' < 0. \tag{29}$$

Das Punktepaar III, 2 besteht aus einem endlichen und einem unendlich fernen Punkte. Es ist $\mathsf{B}_0 < 0$ und daher $B'' < 0$.

Das aus zwei unendlich fernen Punkten bestehende Punktepaar III, 3 ist nach § 103, (24); (26) imaginär oder reell, je nachdem:

$$\nu_2\nu_3 = B'_{44} = B'' > 0 \quad \text{oder} \quad < 0. \tag{30}$$

Man hat daher die folgende Tabelle:

(31)

| | $B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0$ | |
|---|---|---|
| | $B'' > 0$ | $B'' < 0$ |
| $b_{44} \neq 0$ | $\gamma^2 w'^2 + 1 = 0$<br>Imag. endl. Punktepaar | $\gamma^2 w'^2 - 1 = 0$<br>Reell. endl. Punktepaar |
| $b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 \neq 0$ | 0 | $u's' = 0$<br>Ein endl. u. ein $\infty$ f. Punkt |
| $b_{44} = 0,\ \mathsf{B}_0 = 0$ | $\beta^2 v'^2 + \gamma^2 w'^2 = 0$<br>Imag. $\infty$ f. Punktepaar. | $\beta^2 v'^2 - \gamma^2 w'^2 = 0$<br>Reell. $\infty$ f. Punktepaar |

## § 105. Invarianten der Fläche zweiter Klasse.

**1. Die Determinante als Invariante.** Erhält die auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ bezogene Gleichung der Fläche zweiter Klasse:

$$(1)\quad F(u,v,w,s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0$$

durch die Substitution § 75, (7) in bezug auf ein schiefwinkliges System $O'x'y'z'$ die Form:

$$(2)\quad S^2F(u,v,w,s) = b'_{11}u'^2 + b'_{22}v'^2 + b'_{33}w'^2 + 2b'_{23}v'w' + 2b'_{31}w'u' + 2b'_{12}u'v' + 2b'_{14}u's' + 2b'_{24}v's' + 2b'_{34}w's' + b'_{44}s'^2 = 0,$$

so haben die neuen Koeffizienten die Werte § 75, (13)—(16). Zugleich gelten neben § 75, (10) die Formeln § 91, (11) für die Achsenwinkel von $O'x'y'z'$, sowie neben § 91, (5) die Gleichung (I Anm. 1, III, (7)):

$$(3)\quad S^3 = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 & Sx_0' \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 & Sy_0' \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 & Sz_0' \\ 0 & 0 & 0 & S \end{vmatrix}.$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 3) wird nun mit dem Werte (3) und mit Rücksicht auf § 75, (13)—(16):

$$S^3 \cdot S^3 \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}$$

$$= S^3 \cdot \begin{vmatrix} F_1(\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma_1\,Sx_0') & F_1(\mathsf{A}_2\,\mathsf{B}_2\,\Gamma_2\,Sy_0') & F_1(\mathsf{A}_3\,\mathsf{B}_3\,\Gamma_3\,Sz_0') & b_{14}S \\ F_2(\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma_1\,Sx_0') & F_2(\mathsf{A}_2\,\mathsf{B}_2\,\Gamma_2\,Sy_0') & F_2(\mathsf{A}_3\,\mathsf{B}_3\,\Gamma_3\,Sz_0') & b_{24}S \\ F_3(\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma_1\,Sx_0') & F_3(\mathsf{A}_2\,\mathsf{B}_2\,\Gamma_2\,Sy_0') & F_3(\mathsf{A}_3\,\mathsf{B}_3\,\Gamma_3\,Sz_0') & b_{34}S \\ F_4(\mathsf{A}_1\,\mathsf{B}_1\,\Gamma_1\,Sx_0') & F_4(\mathsf{A}_2\,\mathsf{B}_2\,\Gamma_2\,Sy_0') & F_4(\mathsf{A}_3\,\mathsf{B}_3\,\Gamma_3\,Sz_0') & b_{44}S \end{vmatrix}$$

und wiederum nach dem Multiplikationstheorem:

$$(4)\quad S^6 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} & b'_{14} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} & b'_{24} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} & b'_{34} \\ b'_{41} & b'_{42} & b'_{43} & b'_{44} \end{vmatrix}.$$

*Beim Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem schiefwinkligen $O'x'y'z'$ besteht zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen* (1) *und* (2) *die Beziehung* (4).

**2. Der Kugelkreis im recht- und schiefwinkligen System.** Durch die Substitution § 75, (7) verwandelt sich die Gleichung des Kugelkreises § 84, (9′) in der Weise:

$$(5)\quad S^2(u^2+v^2+w^2) = lu'^2 + mv'^2 + nw'^2 + 2pv'w' + 2qw'u' + 2ru'v',$$

wo:

$$(6)\quad \begin{cases} l = \mathsf{A}_1^2 + \mathsf{B}_1^2 + \Gamma_1^2, \\ m = \mathsf{A}_2^2 + \mathsf{B}_2^2 + \Gamma_2^2, \\ n = \mathsf{A}_3^2 + \mathsf{B}_3^2 + \Gamma_3^2, \end{cases} \qquad (7)\quad \begin{cases} p = \mathsf{A}_2\mathsf{A}_3 + \mathsf{B}_2\mathsf{B}_3 + \Gamma_2\Gamma_3, \\ q = \mathsf{A}_3\mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_3\mathsf{B}_1 + \Gamma_3\Gamma_1, \\ r = \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2 + \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2 + \Gamma_1\Gamma_2. \end{cases}$$

Nach der Bedeutung der Größen $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \ldots, \Gamma_3$ (§ 75, zu (10)) ist neben:

$$(8)\quad S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \qquad S^2 = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

mit Rücksicht auf das Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 2):

$$(9)\quad \begin{vmatrix} l & r & q \\ r & m & p \\ q & p & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}^2 = S^4.$$

Ferner drücken sich die Größen (6) und (7) durch die *Achsenwinkelkosinus* § 91, (11) in der Weise aus (I § 35, (2)):

$$(10)\quad \begin{cases} l = 1-\alpha^2, & m = 1-\beta^2, & n = 1-\gamma^2, \\ p = \beta\gamma - \alpha, & q = \gamma\alpha - \beta, & r = \alpha\beta - \gamma. \end{cases}$$

Zugleich wird auch (I § 37, (8)):

$$(11)\quad \begin{cases} mn - p^2 = nl - q^2 = lm - r^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma = S^2; \\ qr - lp = S^2\alpha, \quad rp - mq = S^2\beta, \quad pq - nr = S^2\gamma. \end{cases}$$

Ist das neue System $O'x'y'z'$ ebenfalls rechtwinklig, so wird:

$$(12)\quad u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2.$$

*Der imaginäre Kugelkreis hat in jedem rechtwinkligen System dieselbe Gleichung* (bleibt bei jeder Euklidschen Bewegung des Raumes fest).[91])

**3. Kugelkreis und Fläche zweiter Klasse.** Da vermöge der Substitution § 75, (7) nach (2) und (5) die Gleichung:

$$(13)\quad F(u, v, w, s) - \mu(u^2+v^2+w^2) = 0$$

übergeht in:

$$(14)\quad S^2\{F - \mu(u^2+v^2+w^2)\} = b'_{11}u'^2 + \cdots + b'_{44}s'^2 - \mu(lu'^2 + \cdots + 2ru'v') = 0,$$

so gibt die Anwendung des Satzes (4) identisch in $\mu$:

$$(15)\quad S^6\begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu & b_{34}\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11}-l\mu & b'_{12}-r\mu & b'_{13}-q\mu & b'_{14}\\ b'_{21}-r\mu & b'_{22}-m\mu & b'_{23}-p\mu & b'_{24}\\ b'_{31}-q\mu & b'_{32}-p\mu & b'_{33}-n\mu & b'_{34}\\ b'_{41} & b'_{42} & b'_{43} & b'_{44}\end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung der Determinante *rechts* gibt, wenn $B'$, $B'_{kl}$, $\beta'_{kl}$ die Determinanten vierten, dritten, zweiten Grades aus den $b'_{kl}$ bedeuten (§ 66, **6**):

$$\begin{aligned} B' &- \{B'_{11}l + B'_{22}m + B'_{33}n + 2B'_{23}p + 2B'_{31}q + 2B'_{12}r\}\mu\\ &+ \{\beta'_{44}(mn-p^2) + \beta'_{55}(nl-q^2) + \beta'_{66}(lm-r^2) + 2\beta'_{56}(qr-lp)\\ &\qquad + 2\beta'_{64}(rp-mq) + 2\beta'_{45}(pq-nr)\}\mu^2\\ &- b'_{44}S^4\mu^3 \text{ (nach (9))};\end{aligned}$$

die Determinante links wurde bereits § 102, (18) entwickelt.

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der beiderseitigen Potenzen von $\mu$ ergibt sich dann unter Benutzung von (10) und (11):

$$(16)\quad \begin{cases} S^6(B_{11}+B_{22}+B_{33}) = B'_{11}(1-\alpha^2) + B'_{22}(1-\beta^2) + B'_{33}(1-\gamma^2)\\ \qquad + 2B'_{23}(\beta\gamma-\alpha) + 2B'_{31}(\gamma\alpha-\beta) + 2B'_{12}(\alpha\beta-\gamma),\\ S^4(\beta_{44}+\beta_{55}+\beta_{66}) = \beta'_{44}+\beta'_{55}+\beta'_{66}+2\beta'_{56}\alpha+2\beta'_{64}\beta+2\beta'_{45}\gamma,\\ S^2 b_{44} = b'_{44}.\end{cases}$$

Aus (15) folgt zugleich die Form der *kubischen Gleichung des Hauptachsenproblems in schiefwinkligen Koordinaten* (§ 102, (12)).

**4. Invarianten des gemeinen Koordinatensystems.** Unter Weglassung der Akzente in (2) kann man dann die Sätze (4); (16) auch so aussprechen (§ 91, **4**):

*Die Koeffizientenverbindungen*[90]*:*

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{B}{S^6},\quad \dfrac{b_{44}}{S^2},\\ \dfrac{B_{11}(1-\alpha^2)+B_{22}(1-\beta^2)+B_{33}(1-\gamma^2)+2B_{23}(\beta\gamma-\alpha)+2B_{31}(\gamma\alpha-\beta)+2B_{12}(\alpha\beta-\gamma)}{S^6},\\ \dfrac{\beta_{44}+\beta_{55}+\beta_{66}+2\beta_{56}\alpha+2\beta_{64}\beta+2\beta_{45}\gamma}{S^4}\end{array}\right.$$

*der Gleichung der Fläche zweiter Klasse:*

$$(18)\qquad F(u,v,w,s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + \cdots + b_{44}s^2 = 0$$

*haben in jedem schief- und rechtwinkligen Koordinatensystem $Oxyz$ denselben Wert, falls $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die jedesmaligen Achsenwinkelkosinus (beim rechtwinkligen $\alpha=\beta=\gamma=0$, $S=1$) bedeuten.*

Wird die Fläche zweiter *Klasse* (18) durch die Voraussetzung (§ 78, (8); (9); $A \neq 0$):

$$b_{kl} = A_{kl},\quad B_{kl} = A^2 a_{kl},\quad \beta_{kl} = A\alpha_{\overline{kl}},\quad B = A^3$$

mit der Fläche zweiter *Ordnung* § 91, (18) zusammengelegt, so ist die erste Invariante (17) hier die dritte Potenz der ersten (17) dort, die zweite hier direkt die zweite dort, die dritte und vierte hier gleich der mit dem invarianten Faktor $A^2 : S^4$, bezüglich $A : S^2$ multiplizierten dritten und vierten dort. Bei den eigentlichen Flächen sind also die Invarianten (17) von denen in § 91, (17) nicht verschieden.

**5. Invarianten der unendlich fernen Kurve.** Ist in (1) $b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{44} = 0$, so wird auch in (2) nach § 75, (15); (16) $b'_{14} = b'_{24} = b'_{34} = b'_{44} = 0$. Danach folgt aber mit den reduzierten Werten § 75, (13); (14) durch zweimalige Multiplikation mit der Determinante $S^2$ in (8), ebenso wie in § 91, (8):

$$(19) \qquad S^4 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{vmatrix}.$$

Durch Anwendung dieses Satzes auf die unendlich ferne Kurve zweiter Klasse:

$$(20)\ b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv - \mu(u^2+v^2+w^2) = 0$$

ergibt sich dann wie in (15):

$$(21) \quad S^4 \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11}-l\mu & b'_{12}-r\mu & b'_{13}-q\mu \\ b'_{21}-r\mu & b'_{22}-m\mu & b'_{23}-p\mu \\ b'_{31}-q\mu & b'_{32}-p\mu & b'_{33}-n\mu \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung der Determinante rechts gibt wie bei (15):

$$\begin{aligned} B'_{44} &- \{\beta'_{11}l + \beta'_{22}m + \beta'_{33}n + 2\beta'_{23}p + 2\beta'_{31}q + 2\beta'_{12}r\}\mu \\ &+ \{b'_{11}(mn-p^2) + b'_{22}(nl-q^2) + b'_{33}(lm-r^2) + 2b'_{23}(qr-lp) \\ &\qquad + 2b'_{31}(rp-mq) + 2b'_{12}(pq-nr)\}\mu^2 \\ &- S^4\mu^3. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten ergibt sich daher unter Benutzung von (10) und (11):

$$(22) \quad \begin{cases} S^4(\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33}) = \beta'_{11}(1-\alpha^2) + \beta'_{22}(1-\beta^2) + \beta'_{33}(1-\gamma^2) \\ \qquad\qquad + 2\beta'_{23}(\beta\gamma-\alpha) + 2\beta'_{31}(\gamma\alpha-\beta) + 2\beta'_{12}(\alpha\beta-\gamma), \\ S^2(b_{11}+b_{22}+b_{33}) = b'_{11}+b'_{22}+b'_{33} + 2b'_{23}\alpha + 2b'_{31}\beta + 2b'_{12}\gamma. \end{cases}$$

Unter Weglassung der Akzente in der mit $b'_{14} = b'_{24} = b'_{34} = b'_{44} = 0$ reduzierten Gleichung (2) folgt daher:

*Die Koeffizientenverbindungen:*

$$(23) \quad \left\{ \frac{\beta_{11}(1-\alpha^2) + \beta_{22}(1-\beta^2) + \beta_{33}(1-\gamma^2) + 2\beta_{23}(\beta\gamma-\alpha) + 2\beta_{31}(\gamma\alpha-\beta) + 2\beta_{12}(\alpha\beta-\gamma)}{S^4}, \right.$$
$$\left. \frac{b_{11}+b_{22}+b_{33}+2b_{23}\alpha+2b_{31}\beta+2b_{12}\gamma}{S^2}, \quad \frac{B_{44}}{S^4} \right.$$

*der Gleichung der unendlich fernen Kurve zweiter Klasse:*

(24) $b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0$

*haben in jedem schief- oder rechtwinkligem Koordinatensystem $Oxyz$ denselben Wert, falls $\alpha, \beta, \gamma$ die jedesmaligen Achsenwinkelkosinus (beim rechtwinkligen $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $S = 1$) bedeuten.*

**6. Gleichung einer Rotationsfläche in Ebenenkoordinaten.** Für den Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem parallelen $O'x'y'z'$ mit dem Anfangspunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ wird aus § 75, (7):

(25) $u = u', \quad v = v', \quad w = w', \quad s = -x_0u' - y_0v' - z_0w' + s'.$

Dadurch wird allgemein:

(26) $Au + Bv + Cw + Ds = (A - Dx_0)u' + (B - Dy_0)v' + (C - Dz_0)w' + Ds'.$

Sind nun:

(27) $$\begin{cases} U_1 = A_1u + B_1v + C_1w + D_1s = 0, \\ U_2 = A_2u + B_2v + C_2w + D_2s = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Punkte, von denen wenigstens der erste endlich ist ($D_1 \neq 0$), und nimmt man für $O'$ diesen ersten Punkt:

(28) $x_0 = A_1 : D_1, \quad y_0 = B_1 : D_1, \quad z_0 = C_1 : D_1,$

so wird nach (26):

(29) $U_1 = D_1s', \quad D_1U_2 = 2au' + 2bv' + 2cw' - es',$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

(30) $2a = D_1A_2 - D_2A_1, \; 2b = D_1B_2 - D_2B_1, \; 2c = D_1C_2 - D_2C_1, \; -e = D_1D_2.$

Die Fläche zweiter Klasse[97]):

(31) $F(u, v, w, s) = (u^2 + v^2 + w^2) - U_1U_2 = 0$

wird dadurch transformiert in:

(32) $F(u, v, w, s) = (u'^2 + v'^2 + w'^2) - (2au' + 2bv' + 2cw' - es')s' = 0$

oder mit:

(33) $r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - e:$

(34) $F(u, v, w, s) = (u' - as')^2 + (v' - bs')^2 + (w' - cs')^2 - r^2s'^2 = 0.$

Dies ist aber nach § 82, (45) eine Rotationsfläche mit dem Brennpunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ oder $U_1 = 0$. In der Tat zeigt schon die Form der Gleichung (31), daß jede gemeinsame Tangentialebene $u, v, w, s$ der Fläche $F = 0$ und des Kugelkreises auch durch einen der Punkte (27) geht, oder der von einem solchen Punkte an die Fläche gelegte Berührungskegel ein Kugelkegel ist (§ 70, **5**).

*Die Gleichung* (31) *stellt also eine Rotationsfläche mit den Brennpunkten* (27), *die auch konjugiert komplex sein können, dar.*