

Viertes Kapitel.

Ueber die Form der durch Quadraturen darstellbaren Integrale linearer, nicht homogener Differentialgleichungen.

§ 10.

Herleitung einfacherer charakteristischer Formen aus der Existenz algebraisch-logarithmischer Integrale linearer Differentialgleichungen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich zumeist auf höhere lineare Differentialgleichungen und sollen eine Erweiterung derjenigen Untersuchungen von Abel liefern, welche sich mit den Bedingungen und der Form der Reduction Abel'scher Integrale beschäftigen.

Bekanntlich hat Abel den Satz bewiesen, dass, wenn y eine algebraische Function von x bedeutet und $\int y dx = z$ selbst algebraisch ist, dann z stets *rational* durch x und y ausdrückbar ist, oder auch anders ausgesprochen, dass nicht nur, was selbstverständlich ist, die Ableitung einer algebraischen Function rational durch diese Function, sondern auch umgekehrt, da

$$\int \frac{dz}{dx} dx = z$$

ist, jede algebraische Function rational durch ihre Ableitung ausdrückbar ist, in welche Ausdrücke die unabhängige Variable rational eintritt. Es mag dieser Satz hier erst, ein wenig verallgemeinert, in einfacher Weise bewiesen werden, bevor wir ihn auf Differentialgleichungen übertragen; bedeutet $\varphi(x, z)$ eine rationale Function von x und z , so wird sich nach bekannten Sätzen der Algebra, wenn z durch die algebraische Gleichung

$$(1) \dots z^x + \varphi_1(x) z^{x-1} + \dots + \varphi_{x-1}(x) z + \varphi_x(x) = 0$$

definiert ist, $\varphi(x, z)$ als eine ganze Function $x - 1^{\text{ten}}$ Grades in z mit in x rationalen Coefficienten in der Form

$$(2) \dots \varphi(x, z) = \chi_0(x) + \chi_1(x) z + \dots + \chi_{x-1}(x) z^{x-1}$$

Dieselbe Integrationsmethode würde offenbar stets dann anwendbar sein, wenn die beiden Differentialgleichungen von derselben Ordnung sind, indem die Einführung des allgemeinen Integrales der einen Differentialgleichung die für das allgemeine Integral der anderen hinreichende Anzahl von Constanten liefern würde, während, wenn die beiden Gleichungen verschiedene Ordnung haben, nur eine allgemeinere Klasse particulärer Integrale dadurch geliefert wird — immer vorausgesetzt, dass z_1 nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung angehört.

darstellen lassen, und fasst man die Gleichung (2) als eine Gleichung $x - 1^{\text{ten}}$ Grades in z auf, wobei in $\varphi(x, z)$ die Grösse z die bestimmte Lösung der Gleichung (1) bedeutet, so werden jedenfalls die beiden Gleichungen (1) und (2) diese *eine* Lösung z gemein haben. Haben dieselben *nur eine* Lösung gemein, so liefert z. B. die Operation der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers, der in diesem Falle ein in z linearer sein wird, z als rationale Function von x und $\varphi(x, z)$; haben die beiden Gleichungen, in denen $\varphi(x, z)$ als Parameter aufzufassen ist, jedoch mehrere gemeinsame Lösungen, so würde offenbar, wenn z_1 und z_2 zwei derselben sind,

$$(3) \dots \varphi(x, z_2) = \varphi(x, z_1)$$

sein müssen, da die Gleichung (2) für jede Lösung der Gleichung (1) gültig ist. Bildet man also z. B., indem $\varphi(x, z) = y$ und für z die Wurzeln $z_1, z_2, \dots, z_n$ der Gleichung (1) gesetzt werden, die Gleichung x^{ten} Grades in y

$$(4) \dots y^n + F_1(x) y^{n-1} + \dots + F_{n-1}(x) y + F_n(x) = 0,$$

und nimmt weiter an, dass diese Gleichung ebenfalls irreductibel ist, so wird die aus (3) folgende Beziehung $y_2 = y_1$ offenbar nicht bestehen können, und somit z_1 durch x und $\varphi(x, z_1)$ rational ausdrückbar sein; wir erhalten somit den in etwas anderer Form bekannten Satz, dass jede algebraische Function z von x sich durch x und eine solche rationale Function von x und z rational ausdrücken lässt, die nicht für zwei verschiedene Werthe der Function z gleiche Werthe annimmt.

Eine solche rationale Function von x und z ist z. B. $\frac{dz}{dx}$, wenn die algebraische Gleichung (1) als eine irreductible vorausgesetzt wird; denn wäre $\frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_2}{dx}$, also $z_2 = z_1 + c$, worin c eine Constante bedeutet, dann würde aus den beiden Gleichungen

$$z_1^n + \varphi_1(x) z_1^{n-1} + \dots + \varphi_n(x) = 0$$

$$(z_1 + c)^n + \varphi_1(x) (z_1 + c)^{n-1} + \dots + \varphi_n(x) = 0$$

sich ergeben

$$ncz_1^{n-1} + \Phi_2(x) z_1^{n-2} + \dots + \Phi_n(x) = 0,$$

was wegen der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (1) und der gleichartigen Beschaffenheit der Coefficienten der letzten Gleichung mit denen von (1) unmöglich ist, und es wird sich daher jede algebraische Function rational durch ihre Ableitung und die unabhängige

Variable ausdrücken lassen. Ebenso wird $\varphi(x, z) = \frac{d[zF(x)]}{dx}$, worin $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, der geforderten Bedingung genügen, da die Relation

$$\frac{d(z_2 F(x))}{dx} = \frac{d(z_1 F(x))}{dx} \quad \text{oder} \quad z_2 = z_1 + \frac{c}{F(x)}$$

unmöglich bestehen kann, weil, wie man genau ebenso einsieht, die Lösungen einer irreductibeln Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, sich nicht nur um rationale Functionen der Variablen unterscheiden dürfen; es wird sich somit jede algebraische Function rational durch den Differentialquotienten dieser mit einer beliebigen rationalen Function von x multiplicirten Function ausdrücken lassen. Dagegen wird sich die algebraische Function z nicht immer

rational durch x und den Ausdruck $\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$ darstellen lassen, wie man z. B. aus

$$z = x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\frac{dz}{dx}}{z} = \frac{3}{2x}$$

ersieht, oder es wird sich nicht — was dasselbe ist — z stets rational durch x und $\frac{d \log z}{dx}$ ausdrücken lassen, vielmehr sagt ein weiterer Abel'scher Satz, mit dessen Ausdehnung wir uns nachher beschäftigen werden, nur aus, dass, wenn das Integral einer algebraischen Function sich logarithmisch ausdrücken lässt, wie in

$$\int \frac{\frac{dz}{dx}}{z} dx = \log z,$$

dieser logarithmische Werth sich in die Form $\frac{1}{\delta} \log w$ setzen lassen muss, worin δ eine ganze Zahl, und w sich rational durch x und die unter dem Integral stehende algebraische Function, in unserem Falle durch x und $\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$, ausdrücken lässt.

Sei nun eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gegeben

$$(5) \dots f\left(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \dots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

in welcher $y_1, y_2, \dots y_\mu$ irreductible algebraische Functionen von x bedeuten, und nehmen wir an, dass diese Differentialgleichung ein algebraisches Integral besitze, so ist leicht einzusehen, dass ihr im Allgemeinen auch noch andere algebraische Integrale genügen werden;

denn sei jenes algebraische Integral durch die Gleichung definiert

(6) $\dots z^x + \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots y_\mu) z^{x-1} + \dots + \varphi_x(x, y_1, y_2, \dots y_\mu) = 0$,
welche mit Adjungirung der Functionen $y_1, y_2, \dots y_\mu$ als irreductibel angenommen werden soll, so werden die Ableitungen von z durch z selbst mit Hülfe eben dieser Functionen rational ausdrückbar sein, so dass durch Einsetzen dieser Werthe die linke Seite der Gleichung (5) in eine rationale Function von z übergeht, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, y_2, \dots y_\mu$ zusammengesetzt sind; da diese Gleichung nun bekanntlich mit der irreductiblen algebraischen Gleichung (6) alle Lösungen der letzteren gemein haben muss, so wird auch der Differentialgleichung (5) jede Lösung der letzteren genügen, dieselbe also im Allgemeinen x algebraische Integrale haben. Ist jene Differentialgleichung eine lineare von der Form

$$(7) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Y_2 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + Y_m z = y,$$

worin $Y_1, Y_2, \dots Y_m, y$ irreductible algebraische Functionen bedeuten, und ist jenes angenommene algebraische Integral, das durch die Gleichung definiert wird

$$(8) \dots z^x + \varphi_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y) z^{x-1} + \dots + \varphi_x(x, Y_1, Y_2, Y_m, y) = 0,$$

z. B. eine durch algebraische Irrationalitäten darstellbare Function μ^{ter} Ordnung und σ^{ten} Grades, hat also nach Abel*) in bekannten Zeichen die Form

$$(9) \dots z = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

worin $q_0, q_1, \dots q_{n-1}$ algebraische Functionen μ^{ter} Ordnung und $\sigma - 1^{\text{ten}}$ Grades, n eine Primzahl und p eine algebraische Function $\mu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung sind, so wird nach den obigen Auseinandersetzungen, wenn α eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet, auch

$$(10) \dots z_\nu = q_0 + q_1 \alpha^\nu p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^{2\nu} p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} \alpha^{(n-1)\nu} p^{\frac{n-1}{n}}$$

für jedes ganzzahlige ν ein Integral der Differentialgleichung (7) sein, und da, wenn $z_1, z_2, \dots z_\varrho$ ϱ Integrale der Gleichung (7) bedeuten, stets auch

$$\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_\varrho}{\varrho},$$

ein Integral der Differentialgleichung ist, so folgt aus der Addition der Gleichungen (9) und (10) für $\nu = 1, 2, \dots n - 1$, dass auch q_0 ein Integral jener Differentialgleichung sein wird; da ferner die Function z_ν

*) „Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, qui passent le quatrième degré“ oeuvres compl. d'Abel tome I.

der Differentialgleichung (7) Genüge leistet, also für jedes ganzzahlige r und ν , $\alpha^{-r\nu} z_\nu$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(11) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z = \alpha^{-r\nu} y$$

ist, so werden die Gleichungen bestehen

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z = y$$

$$\frac{d^m (\alpha^{-r\nu} z_\nu)}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} (\alpha^{-r\nu} z_\nu)}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m (\alpha^{-r\nu} z_\nu) = \alpha^{-r\nu} y,$$

aus denen, wenn $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ gesetzt wird, folgt, dass

$$\frac{d^m (z + \alpha^{-r} z_1 + \alpha^{-2r} z_2 + \dots + \alpha^{-(n-1)r} z_{n-1})}{dx^m} + \dots$$

$$+ Y_m (z + \alpha^{-r} z_1 + \dots + \alpha^{-(n-1)r} z_{n-1}) = 0$$

ist, oder dass der Ausdruck

$$(12) \dots Z = z + \alpha^{-r} z_1 + \alpha^{-2r} z_2 + \dots + \alpha^{-(n-1)r} z_{n-1}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^m Z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} Z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m Z = 0,$$

d. h. der reducirten Differentialgleichung von (7) sein wird. Bemerkt man aber nun, dass der Ausdruck (12) vermöge der Gleichungen (9) und (10) die Beziehung liefert

$$Z = q_r p^{\frac{r}{n}},$$

so ergibt sich der folgende Satz:

Besitzt eine lineare nicht homogene Differentialgleichung beliebiger Ordnung ein algebraisches Integral, das sich durch algebraische Irrationalitäten, also nach Abel in der Form darstellen lässt

$$q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

so ist q_0 selbst wieder ein Integral jener Differentialgleichung, während die Grössen

$$q_1 p^{\frac{1}{n}}, q_2 p^{\frac{2}{n}}, \dots, q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

Integrale der reducirten Differentialgleichung jener sind.

Untersuchen wir nun vorerst nicht die Form der algebraischen Integrale — wir kommen später auf diese Frage zurück — sondern suchen wir Folgerungen aus der Existenz eines algebraischen Integrales der Differentialgleichung (7) für die Beschaffenheit anderer algebraischer Integrale eben dieser Differentialgleichung herzuleiten,

so ist leicht einzusehen, dass, weil alle Lösungen der irreductibeln Gleichung (8), wie oben gezeigt worden, Integrale der Differentialgleichung sind, und somit auch die Summe dieser κ Lösungen durch κ dividirt der Differentialgleichung genügen muss, nothwendig auch

$$z = -\frac{1}{\kappa} \varphi_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y)$$

die Differentialgleichung (7) befriedigt, und diese somit, wenn sie überhaupt ein algebraisches Integral besitzt, auch ein in den Coefficienten der Differentialgleichung rationales Integral hat, wenn die Summe aller Lösungen der Gleichung (8) nicht eine endliche oder verschwindende Constante ist; ist nun die Gleichung (7) eine homogene, so kann dies in der That der Fall sein, und dann könnte man nicht auf die Existenz eines solchen in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Integrales schliessen — ist jedoch y von Null verschieden, so kann nur dann ein constantes Integral $z = C$ existiren, wenn $C \cdot Y = y$ ist, in welchem Falle aber die Differentialgleichung (7) durch die Substitution $z - C = \xi$ in die homogene Gleichung

$$\frac{d^m \xi}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} \xi}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{d\xi}{dx} + Y_m \xi = 0$$

übergeht, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hat die Differentialgleichung (7) überhaupt ein algebraisches Integral, so hat sie stets auch ein in den Coefficienten dieser Differentialgleichung rationales Integral, wenn sie nicht eine homogene oder durch die Substitution $z = \xi + \text{cst.}$ auf eine homogene zurückführbare ist.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = \frac{3}{2}$$

das algebraische Integral

$$z_1 = x + x^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{also auch} \quad z_2 = x - x^{-\frac{1}{2}}$$

und daher auch das rationale Integral

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = x$$

haben, während die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2x} = 0$$

die Integrale $z_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $z_2 = -x^{\frac{1}{2}}$ und für das rationale Integral $z = \frac{z_1 + z_2}{2} = 0$ liefert; die Differentialgleichung hat überhaupt kein in x rationales Integral.

Wir wollen von diesem Satze eine einfache Anwendung machen; nehmen wir an, dass man von einer linearen homogenen Differential-

gleichung m^{ter} Ordnung

$$(13) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = 0$$

weiss, dass dieselbe $m - 1$ transcendente, nicht algebraisch auf einander reducibare Fundamentalintegrale und nur *ein* algebraisches Integral besitzt, welches durch die irreductible Gleichung

$$z^\mu + F_1(x, Y_1, \dots Y_m) z^{\mu-1} + \dots + F_\mu(x, Y_1, \dots Y_m) = 0$$

definit sein mag, so wird nach dem Vorigen auch jede andere Lösung dieser Gleichung der Differentialgleichung (13) Genüge leisten; da aber, wenn wir die erste Lösung mit z_1 , eine andere mit z_2 und die $m - 1$ transcendenten Lösungen mit $Z_1, Z_2, \dots Z_{m-1}$ bezeichnen, nothwendig

$$z_2 = m_1 z_1 + \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \dots + \mu_{m-1} Z_{m-1}$$

sein wird, worin $m_1, \mu_1 \dots \mu_{m-1}$ Constanten bedeuten, so würde gegen die Annahme zwischen den transcendenten Integralen $Z_1, Z_2, \dots Z_{m-1}$ eine algebraische Beziehung bestehen, also müssen $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m-1} = 0$ sein, und somit alle μ Lösungen der obigen algebraischen Gleichung die Form haben

$$z_1, c_1 z_1, c_2 z_1, \dots c_{\mu-1} z_1$$

und daher

$$z_1 (1 + c_1 + c_2 + \dots + c_{\mu-1}) = -F_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m),$$

d. h. das algebraische Integral wird rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sein. Ist $F_1 = 0$, so folgt

$$z_1^2 \Sigma c_\alpha c_\beta = F_2(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m),$$

d. h. es ist z_1 die Quadratwurzel aus einer in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Function, allgemein kann man schliessen, dass, wenn eine homogene lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $m - 1$ von einander algebraisch unabhängige transcendente Integrale und nur ein algebraisches Integral besitzt, dieses letztere nothwendig die Lösung einer binomischen, in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Gleichung sein wird, oder im speciellen Falle, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ein transcendentes und ein algebraisches Integral besitzt, das letztere eine Wurzel aus einer in den Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbaren Function ist, und diese Untersuchung kann man verallgemeinern, indem man statt der Voraussetzung des einen algebraischen Integrales die Voraussetzung nur eines Integrales macht, welches die gegebene Differentialgleichung mit einer Differentialgleichung erster, zweiter Ordnung u. s. w. gemein hat.

Gehen wir nun wieder zu der früheren Untersuchung zurück und nehmen an, dass die Differentialgleichung (7) ein logarithmisches Integral von der Form

$$z = A \log v$$

hat, worin A eine Constante und v eine algebraische Function von x bedeutet, so ist vor allem klar, dass $Y_m = 0$ sein muss, da die Ableitungen von $\log v$ algebraische Functionen von x sind. Bezeichnen nun $v_1, v_2, \dots v_\lambda$ die λ Lösungen der die Grösse v definirenden algebraischen irreductibeln Gleichung

$$v^\lambda + \omega_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y) v^{\lambda-1} + \dots + \omega_\lambda(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y) = 0,$$

so ist wieder leicht zu sehen, dass auch

$$A \log v_1, A \log v_2, \dots A \log v_\lambda$$

Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein werden, da das Einsetzen dieser Werthe wieder eine algebraische Gleichung in v definirt, welche mit der obigen irreductibeln alle Lösungen gemein haben muss, daher wird auch die Function

$$A \frac{\log v_1 + \log v_2 + \dots + \log v_\lambda}{\lambda} = \frac{A}{\lambda} \log(v_1 v_2 \dots v_\lambda)$$

der Differentialgleichung Genüge leisten, und es kann $v_1 v_2 \dots v_\lambda$ keine Constante sein, da wegen $Y_m = 0$ im Falle eines constanten Integrales auch $y = 0$ sein müsste, d. h. die lineare Differentialgleichung eine homogene wäre; wir erhalten somit den Satz, dass, wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung ein logarithmisches Integral $A \log v$ besitzt, dessen Logarithmand v eine algebraische Function der unabhängigen Variabeln ist, derselben jedenfalls auch ein logarithmisches Integral $\frac{A}{\lambda} \log w$ angehört, dessen Logarithmand rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt ist, und worin λ eine ganze Zahl bedeutet.

Für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung werden sich die beiden eben bewiesenen Sätze noch anders und allgemeiner fassen lassen; denn sei zuerst die specielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

so beschaffen, dass sie ein algebraisches Integral hat, so wird dieses, da sie nach dem Obigen ein anderes in x und y rationales Integral besitzen muss, andererseits aber nur um eine additive Constante verschiedene Integrale besitzt, selbst in x und y rational sein — also der Abel'sche Satz; ist das Integral jedoch logarithmisch von der

Form $A \log v$, so wird, weil ein anderes $\frac{A}{\lambda} \log w$ existirt, worin w rational aus x und y zusammengesetzt ist, und alle Integrale sich nur um eine additive Constante unterscheiden,

$$A \log v = \frac{A}{\lambda} \log w + \frac{A}{\lambda} \log c = \frac{A}{\lambda} \log wc$$

sein müssen, und es wird sich somit das logarithmische Integral umgestalten lassen in ein ähnliches, in welchem der Logarithmand rational aus x und y zusammengesetzt ist, oder es muss sich v in die Form setzen lassen $\sqrt[\lambda]{wc}$, also wiederum der bekannte Abel'sche Satz. Untersuchen wir nunmehr die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + zY = y,$$

in welcher Y und y irreductible algebraische Functionen sein sollen, und nehmen von dieser an, dass sie ein algebraisches Integral besitzt; es folgt dann aus den obigen Auseinandersetzungen, dass, vorausgesetzt dass sich y von Y nicht nur um einen constanten Factor unterscheidet, jedenfalls auch ein algebraisches Integral jener Differentialgleichung existirt, welches rational in x, y, Y ausdrückbar ist. Wir wollen nun die Form eines jeden algebraischen Integrales jener Differentialgleichung in Bezug auf seine Ausdrückbarkeit in x, y, Y untersuchen; sei z_1 ein algebraisches, nicht gerade rational in jenen Grössen ausdrückbares Integral, so wird nach dem Obigen noch ein zweites algebraisches Integral z_2 existiren, für welche beide aus der Form des allgemeinen Integrales

$$z_1 = e^{-\int Y dx} \left\{ c_1 + \int e^{\int Y dx} y dx \right\}, \quad z_2 = e^{-\int Y dx} \left\{ c_2 + \int e^{\int Y dx} y dx \right\},$$

mithin

$$\frac{z_1 - z_2}{c_1 - c_2} = e^{-\int Y dx}$$

folgt, also $e^{-\int Y dx}$ sich als algebraische Function von x ergibt; daraus folgt aber, weil

$$\int Y dx = \log \left(\frac{c_1 - c_2}{z_1 - z_2} \right)$$

ist, nach dem eben bewiesenen Satze, dass jedenfalls

$$\lambda \int Y dx = \log w$$

sein wird, worin w rational aus x und Y zusammengesetzt ist, oder dass

$$e^{\frac{\lambda}{\lambda} \int Y dx} = \sqrt[\lambda]{w}$$

ist. Sei nun $z_1 = W$ das, wie oben bewiesen, jedenfalls existirende

in x, y, Y rationale Integral, so folgt, dass *jedes algebraische Integral z_2 der vorgelegten Differentialgleichung von der Form*

$$z_2 = (c_2 - c_1) \frac{1}{\sqrt[\lambda]{w}} + W$$

ist, worin w eine in x und Y , W eine in x, y, Y rationale Function ist; so hat z. B. die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{2x} = x^{\frac{1}{2}}$$

die algebraischen Integrale

$$z = c \sqrt{x} + \frac{6}{5} x \cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

§ 11.

Herleitung charakteristischer Formen aus der Existenz von Integralen linearer Differentialgleichungen, welche additiv aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt sind.

Gehen wir wiederum zu der allgemeinen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (7) zurück und nehmen an, dass derselben ein Integral von der Form genüge

$$(14) \dots z = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_x \log v_x \\ + \int_{\xi_1}^{\xi_2} y_1 ds + \int_{\xi_2}^{\xi_3} y_2 ds + \dots + \int_{\xi_{\lambda-1}}^{\xi_{\lambda}} y_{\lambda} ds,$$

in welchem $u, v_1, v_2, \dots v_x, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{\lambda}$ algebraische Functionen von $x, y_1, y_2, \dots y_{\lambda}$ ebensolche von s , und $A_1, A_2, \dots A_x$ Constanten bedeuten. Setzt man diesen Werth in die Differentialgleichung ein, so werden sich alle Differentialquotienten von z als *rationale* Functionen von $u, v_1, \dots v_x, \xi_1, \dots \xi_{\lambda}, (y_1)_{\xi_1}, \dots (y_{\lambda})_{\xi_{\lambda}}$ ausdrücken lassen, und es würde somit z selbst eine algebraische Function von x sein, wenn nicht wieder $Y_m = 0$ würde. Ist dies nun der Fall, und bildet man die Function

$$t = \alpha u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_x v_x + \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_{\lambda} \xi_{\lambda} \\ + \gamma_1 (y_1)_{\xi_1} + \dots + \gamma_{\lambda} (y_{\lambda})_{\xi_{\lambda}},$$

in welcher $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_x, \beta_1, \dots \beta_{\lambda}, \gamma_1, \dots \gamma_{\lambda}$ willkürliche Constanten bedeuten, so ist bekannt*), dass, wenn man andere lineare Functionen

*) Abel, précis d'une théorie etc.

eben dieser Grössen mit constanten Coefficienten bildet, diese als ähnliche Functionen sich rational durch t und die Coefficienten derjenigen Gleichung ausdrücken lassen, deren Lösungen all' die bezeichneten Grössen jener linearen Function sind, und die man sich herstellt, indem all' die irreductibeln Einzelgleichungen, deren Lösungen resp. $u, v_1, \dots v_x, \xi_1, \dots \xi_\lambda (y_1)_{\xi_1}, \dots (y_\lambda)_{\xi_\lambda}$ sind und deren Coefficienten als rational aus $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y$ zusammengesetzt betrachtet werden sollen, mit einander multiplicirt werden. Bildet man nun soviel lineare Functionen als Einzelgrössen in Betracht kommen, so wird eine jede derselben sich aus dem so entstehenden linearen Gleichungssysteme als rationale Function von t mit in $Y_1, \dots Y_{m-1}, y$ rationalen Coefficienten ergeben, und somit die linke Seite der Differentialgleichung eine Function derselben Art werden. Denkt man sich nun aber die algebraische Gleichung aufgestellt, von der eine Lösung die oben bezeichnete Function t , und welche mit Adjungirung der Grössen $Y_1, \dots Y_{m-1}, y$ irreductibel sein soll, so werden sämtliche Lösungen dieser Gleichung δ^{ten} Grades $t_1, t_2, \dots t_\delta$ auch der in t algebraisch rational gewordenen Differentialgleichung genügen müssen, oder anders ausgesprochen, es werden alle Werthe von z Integrale jener linearen Differentialgleichung (7) sein müssen, welche aus dem Ausdrucke (14) entstehen, wenn man für $u, v_1, \dots v_x, \xi_1, \dots \xi_\lambda, (y_1)_{\xi_1} \dots (y_\lambda)_{\xi_\lambda}$ diejenigen Werthe einsetzt, welche aus den rationalen Ausdrücken in t für eben diese Grössen hervorgehen, wenn man für t der Reihe nach $t_1, t_2, \dots t_\delta$ setzt. Addirt man alle diese z -Werthe, so ist der δ -te Theil dieser Summe wieder ein Integral jener Differentialgleichung; da aber die Summe der u und das Product der entsprechenden v -Werthe als Logarithmanden sich als rationale symmetrische Functionen der $t_1, \dots t_\delta$ rational durch die Coefficienten der t -Gleichung, d. h. durch $Y_1, \dots Y_{m-1}, y$ ausdrücken lassen, da ferner die zu je einer algebraischen Irrationalität y_α gehörigen Abel'schen Integrale sich zu je p solchen Integralen addiren lassen, worin p das der Irrationalität zugehörige Geschlecht bedeutet, und die Grenzen der p Integrale Gleichungen p^{ten} Grades genügen, deren Coefficienten wieder, wie leicht zu sehen, rational und symmetrisch aus den t -Grössen, also rational aus $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y$ zusammengesetzt sind, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rationale Functionen eben dieser Grenzen wieder mit in den Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y$ rationalen Coefficienten sind, wozu jedoch noch algebraisch-logarithmische Theile kommen, welche, wie aus dem Abel'schen Theorem unmittelbar zu ersehen, selbst oder deren Logarithmanden rational in $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y$ ausdrückbar sind, so erhalten wir den Satz, dass, wenn einer linearen Differential-

gleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

ein Integral von der Form genügt

$$z = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_x \log v_x + \int_{\xi_1}^{\xi_1} y_1 ds + \cdots + \int_{\xi_\lambda}^{\xi_\lambda} y_\lambda ds,$$

worin $u, v_1 \cdots v_x, \xi_1, \cdots \xi_\lambda$ algebraische Functionen von $x, y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ algebraische Functionen von $s, A_1, A_2, \cdots A_x$ Constanten bedeuten, dann auch stets ein Integral dieser Differentialgleichung von der Form

$$(a) \cdots z = U + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\mu \log V_\mu + \frac{1}{\delta} \sum_1^{p_1} \int_{\eta_1^{(q)}}^{\eta_1^{(q)}} y_1 ds + \cdots + \frac{1}{\delta} \sum_1^{p_\lambda} \int_{\eta_\lambda^{(q)}}^{\eta_\lambda^{(q)}} y_\lambda ds$$

sein wird, worin $U, V_1, \cdots V_\mu$ rationale Functionen von $Y_1, Y_2, \cdots Y_{m-1}, y$ sind, δ eine ganze Zahl und $\eta_\alpha^{(q)}$ die Lösungen einer Gleichung p_α^{ten} Grades bedeuten, deren Coefficienten rationale Functionen von $Y_1, \cdots Y_{m-1}, y$ sind, und für welche die diesen Grenzen zugehörigen Irrationalitäten rational durch eben diese Grenzen und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind.

Setzt man $\frac{dz}{dx} = \xi$, so folgt aus der Form des Integrales (a), da die Summen von je p Integralen differentiirt symmetrische rationale Functionen der oberen Integralgrenzen werden, dass ξ eine in den Coefficienten der Differentialgleichung (7), in welcher $Y_m = 0$ ist, rationale Function wird, und dies ist für die aus (7) hervorgehende Differentialgleichung

$$\frac{d^{m-1} \xi}{dx^{m-1}} + Y_1 \frac{d^{m-2} \xi}{dx^{m-2}} + \cdots + Y_{m-1} \xi = y$$

dasjenige Integral, welches aus der Existenz eines algebraischen Integrales dieser Differentialgleichung überhaupt — und dass diese ein solches hat, folgt aus der Annahme, dass die Differentialgleichung in z ein Integral von der Form (14) besitzt — als ein nothwendig ihr zukommendes, in den Coefficienten der Differentialgleichung rationales gefolgert wurde; wir können dies auch so ausdrücken, dass die vorgelegte Differentialgleichung (7) unter der Annahme, dass sie ein Integral von der Form (14) besitzt, reductibel ist in dem Sinne, dass

sie ein Integral mit der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\xi \frac{dz}{dx} = F(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y)$$

gemein hat, worin F eine rationale Function bedeutet.

Greifen wir aus dem Ausdrucke (a) eine der Summen der Abel'schen Integrale heraus, welche mit

$$\sum_1^p \int^{\eta^{(q)}} Y ds$$

bezeichnet werden mag, so sind also, wie oben gezeigt worden, $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(p)}$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

(b) $\dots \eta^p + \omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y)\eta^{p-1} + \dots + \omega_p(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) = 0$, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y$ sind, während die zu diesen Grenzwerten gehörigen Werthe der Irrationalität Y sich mit Hülfe der eben genannten Grössen durch die resp. Grenzen rational ausdrücken. Bilden wir nun aus (b)

$$d\eta^{(q)} = f(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y, \eta^{(q)}) dx,$$

worin f eine rationale Function sein wird, und multipliciren diese Beziehung mit irgend einer solchen rationalen Function von $\eta^{(q)}$ und $(Y)_{\eta^{(q)}}$

$$\Omega(\eta^{(q)}, (Y)_{\eta^{(q)}}),$$

dass das links stehende Differential ein solches erster Gattung wird, so folgt durch Summation nach q von 1 bis p

$$\sum_1^p \Omega(\eta^{(q)}, (Y)_{\eta^{(q)}}) d\eta^{(q)} = \sum_1^p \Omega(\eta^{(q)}, (Y)_{\eta^{(q)}}) f(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y, \eta^{(q)}) dx,$$

und da die Basis der rechts stehenden Summe eine rationale symmetrische Function von $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots \eta^{(p)}$ ist, indem $(Y)_{\eta^{(q)}}$, wie oben gezeigt, rational von $\eta^{(q)}$ abhängt, sich also der Gleichung (b) zufolge als rationale Function der Grössen $x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y$ ausdrücken lässt, und das sich rechts ergebende Differential vermöge der für das links stehende angenommenen Eigenschaft auch eines erster Gattung sein muss, so folgt durch Integration

$$(c) \dots \int_x^x F(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y) dx = \sum_1^p \int^{\eta^{(q)}} \Omega(s, Y) ds,$$

worin F eine rationale Function bedeutet, und rechts und links Integrale erster Gattung stehen; es ergibt sich somit, dass für jede Art von Abel'schen Integralen, die auf der rechten Seite von (14) in dem Ausdrucke z für das Integral der linearen Differentialgleichung vorkommen, die Summe eines jeden Systems von Integralen erster Gattung, deren Anzahl durch die den Integralen zukommende charakteristische Zahl p bestimmt wird, gleich einem Integrale erster Gattung ist*), dessen algebraische Irrationalität eine rationale Function von x und den Coefficienten der linearen Differentialgleichung ist, — deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung sind mit in den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Coefficienten, während die diesen Grenzen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten rational durch die resp. Grenzen und die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind.

Eine weitere Vereinfachung der Gleichung, welche die $\eta^{(q)}$ zu Lösungen hat, lässt sich für jetzt — wir nehmen das Problem nachher wieder auf — im Allgemeinen nur noch in einem, freilich recht ausgedehnten Falle angeben, der eine besondere Wichtigkeit für die Quadraturen, also für den einfachsten Fall einer linearen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

hat, wie denn überhaupt alle bisherigen und noch weiter für lineare Differentialgleichungen zu entwickelnden Sätze als einfachste Fälle die analogen Sätze für die Integrale algebraischer Functionen in sich schliessen.

Es soll sich also im Folgenden um eine weitere Reduction der durch die Gleichung (c) ausgesprochenen Beziehung handeln, ohne dass specielle Reductionsfragen von Integralen, wie wir sie später behandeln werden, schon hier aufgeworfen werden. Mag also in dem Integrale (a) der vorgelegten linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein zu einer binomischen Irrationalität $\sqrt[n]{R_1(s)}$ gehöriges Integral vorkommen, worin

$$R_1(s) = (s - \alpha_1)^{n_1} (s - \alpha_2)^{n_2} \cdots (s - \alpha_q)^{n_q}$$

ist, und $n_1, n_2, \dots, n_q$ ganze Zahlen bedeuten, von denen wir annehmen dürfen, dass sie nicht sämmtlich mit n einen gemeinsamen Theiler haben, so haben, wie gerade für diesen Fall der algebraischen Irrationalität von Abel selbst in seiner berühmten Arbeit über das nach ihm benannte Additionstheorem näher ausgeführt wurde, sämmt-

*) wobei bemerkt werden muss, dass dieses auch identisch Null sein kann.

liche Fundamentalintegrale erster Gattung die Form

$$\int \frac{F_\lambda(s) ds}{\sqrt[n]{R_1(s)^\lambda}},$$

wenn λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots, n-1$, $F_\lambda(s)$ eine ganze Function von s bedeutet, und die Zahl der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung

$$p = \frac{1}{2} \{ (n-1)(\varrho-1) - (\nu_0-1) - (\nu_1-1) - \dots - (\nu_\varrho-1) \}$$

ist, worin ν_0 den grössten gemeinsamen Theiler von n und $n_1 + n_2 + \dots + n_\varrho$, ν_1 den von n und n_1 , ν_2 den von n und n_2 , $\dots$ ν_ϱ den von n und n_ϱ bezeichnet. Unter dieser Annahme wird die Gleichung (c) die Form haben

$$(15) \dots \frac{F_\lambda(\eta_1) d\eta_1}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1)^\lambda}} + \frac{F_\lambda(\eta_2) d\eta_2}{\sqrt[n]{R_1(\eta_2)^\lambda}} + \dots + \frac{F_\lambda(\eta_p) d\eta_p}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p)^\lambda}} \\ = F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) dx,$$

worin die Grössen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(16) \cdot \eta^p + f_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) \eta^{p-1} + \dots + f_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) = 0$$

sind, wobei $f_1, f_2, \dots, f_p$ rationale Functionen bedeuten, und $\sqrt[n]{R_1(\eta_\varrho)}$ sich rational durch $\eta_\varrho, x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y$ ausdrücken lässt; die rechte Seite wird ebenfalls das Differential eines Abel'schen Integrales erster Gattung sein, und es soll hier, wie schon oben hervorgehoben worden, noch nicht die Frage erörtert werden, die wir später ausführlich behandeln, wann im Allgemeinen ein Integral der in der Differentialgleichung vorkommenden algebraischen Irrationalitäten auf niedrigere Integralgattungen führt, sondern wir wollen hier die durch die Gleichung (15) dargestellte Reductionsfrage zuerst nur für einen, wie nachher gezeigt werden soll, sehr wichtigen Fall behandeln, in dem die auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende algebraische Function ebenfalls zu einer binomischen Irrationalität und zwar mit demselben Exponenten n gehört, so dass, da die rechte Seite gleichfalls ein Integral erster Gattung sein musste,

$$(17) \dots F(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}, y) dx \\ = \frac{f_1(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)^2}} + \dots + \frac{f_{n-1}(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)^{n-1}}}$$

sein wird. Dies wird also z. B. der Fall sein, wenn $Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ rationale Functionen sind, während $y = \varphi(x, \sqrt{R(x)})$ ist, worin φ

eine rationale Function bedeutet, oder auch, wenn $Y_1, Y_2 \dots Y_{n-1}, y$ sämmtlich rationale Functionen von x und $\sqrt[n]{R(x)}$ sind. Da man nun in der Gleichung (15) die Grösse λ die Werthe $1, 2, \dots n-1$ annehmen lassen kann, so wird, wenn wir von vornherein $\lambda = 1$ gesetzt denken, die Beziehung bestehen

$$(18) \dots \frac{F_1(\eta_1) d\eta_1}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1)}} + \frac{F_1(\eta_2) d\eta_2}{\sqrt[n]{R_1(\eta_2)}} + \dots + \frac{F_1(\eta_p) d\eta_p}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p)}} \\ = \frac{f_1(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)^2}} + \dots + \frac{f_{n-1}(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)^{n-1}}},$$

in welcher die Grössen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_p$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(19) \dots \eta^p + \varphi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta^{p-1} + \dots + \varphi_p(x, \sqrt[n]{R(x)}) = 0$$

sind, worin $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ rationale Functionen bedeuten, und $\sqrt[n]{R_1(\eta_q)}$ sich rational durch $\eta_q, x, \sqrt[n]{R(x)}$ ausdrücken lässt. Beschreibt nun x um einen Nullpunkt von $R(x)$ einen solchen Umkreis, dass, wenn ε eine primitive n^{te} Einheitswurzel bedeutet, $\sqrt[n]{R(x)}$ in $\varepsilon \sqrt[n]{R(x)}$ übergeht, so ergibt sich aus (18) die Gleichung

$$(20) \dots \frac{F_1(\eta_1^{(1)}) d\eta_1^{(1)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(1)})}} + \frac{F_1(\eta_2^{(1)}) d\eta_2^{(1)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(1)})}} + \dots + \frac{F_1(\eta_p^{(1)}) d\eta_p^{(1)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p^{(1)})}} \\ = \frac{f_1(x) dx}{\varepsilon \sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x) dx}{\varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2}} + \dots + \frac{f_{n-1}(x) dx}{\varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}},$$

bei einer nochmaligen Umkreisung

$$(21) \dots \frac{F_1(\eta_1^{(2)}) d\eta_1^{(2)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(2)})}} + \dots + \frac{F_1(\eta_p^{(2)}) d\eta_p^{(2)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p^{(2)})}} \\ = \frac{f_1(x) dx}{\varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x) dx}{\varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2}} + \dots + \frac{f_{n-1}(x) dx}{\varepsilon^{2(n-1)} \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}}$$

u. s. w., endlich

$$(22) \dots \frac{F_1(\eta_1^{(n-1)}) d\eta_1^{(n-1)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(n-1)})}} + \dots + \frac{F_1(\eta_p^{(n-1)}) d\eta_p^{(n-1)}}{\sqrt[n]{R_1(\eta_p^{(n-1)})}} \\ = \frac{f_1(x) dx}{\varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{R(x)}} + \frac{f_2(x) dx}{\varepsilon^{2(n-1)} \sqrt[n]{R(x)^2}} + \dots + \frac{f_{n-1}(x) dx}{\varepsilon^{(n-1)(n-1)} \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}},$$

es wesentlich ist zu beachten, dass hier die Anwendung des Abel'schen Theorems nur dadurch möglich wird, dass $\varepsilon^{-\alpha} \sqrt[n]{R_1(\eta_q^{(\alpha)})}$ auch wieder ein Werth der Irrationalität $\sqrt[n]{R_1(\eta_q^{(\alpha)})}$ ist. Es ergeben sich somit die Bestimmungsgleichungen

$$(28) \dots (a_0 \eta_1^r + a_1 \eta_1^{r-1} + \dots) + (b_0 \eta_1^s + b_1 \eta_1^{s-1} + \dots) \sqrt[n]{R_1(\eta_1)} \\ + (c_0 \eta_1^t + c_1 \eta_1^{t-1} + \dots) \sqrt[n]{R_1(\eta_1)^2} + \dots = 0,$$

$$(29) \dots (a_0 \eta_2^r + a_1 \eta_2^{r-1} + \dots) + (b_0 \eta_2^s + b_1 \eta_2^{s-1} + \dots) \sqrt[n]{R_1(\eta_2)} \\ + (c_0 \eta_2^t + c_1 \eta_2^{t-1} + \dots) \sqrt[n]{R_1(\eta_2)^2} + \dots = 0,$$

$$(30) (a_0 \eta_1^{(1)r} + a_1 \eta_1^{(1)r-1} + \dots) + (b_0 \eta_1^{(1)s} + b_1 \eta_1^{(1)s-1} + \dots) \varepsilon^{-1} \sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(1)})} \\ + (c_0 \eta_1^{(1)t} + c_1 \eta_1^{(1)t-1} + \dots) \varepsilon^{-2} \sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(1)})^2} + \dots = 0,$$

$$(31) (a_0 \eta_2^{(1)r} + a_1 \eta_2^{(1)r-1} + \dots) + (b_0 \eta_2^{(1)s} + b_1 \eta_2^{(1)s-1} + \dots) \varepsilon^{-1} \sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(1)})} \\ + (c_0 \eta_2^{(1)t} + c_1 \eta_2^{(1)t-1} + \dots) \varepsilon^{-2} \sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(1)})^2} + \dots = 0,$$

$$(32) (a_0 \eta_1^{(2)r} + a_1 \eta_1^{(2)r-1} + \dots) + (b_0 \eta_1^{(2)s} + b_1 \eta_1^{(2)s-1} + \dots) \varepsilon^{-2} \sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(2)})} \\ + (c_0 \eta_1^{(2)t} + c_1 \eta_1^{(2)t-1} + \dots) \varepsilon^{-4} \sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(2)})^2} + \dots = 0,$$

$$(33) (a_0 \eta_2^{(2)r} + a_1 \eta_2^{(2)r-1} + \dots) + (b_0 \eta_2^{(2)s} + b_1 \eta_2^{(2)s-1} + \dots) \varepsilon^{-2} \sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(2)})} \\ + (c_0 \eta_2^{(2)t} + c_1 \eta_2^{(2)t-1} + \dots) \varepsilon^{-4} \sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(2)})^2} + \dots = 0,$$

$$(34) \dots (a_0 \eta_1^{(n-1)r} + a_1 \eta_1^{(n-1)r-1} + \dots) \\ + (b_0 \eta_1^{(n-1)s} + b_1 \eta_1^{(n-1)s-1} + \dots) \varepsilon^{-(n-1)} \sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(n-1)})} \\ + (c_0 \eta_1^{(n-1)t} + c_1 \eta_1^{(n-1)t-1} + \dots) \varepsilon^{-2(n-1)} \sqrt[n]{R_1(\eta_1^{(n-1)})^2} + \dots = 0,$$

$$(35) \dots (a_0 \eta_2^{(n-1)r} + a_1 \eta_2^{(n-1)r-1} + \dots) \\ + (b_0 \eta_2^{(n-1)s} + b_1 \eta_2^{(n-1)s-1} + \dots) \varepsilon^{-(n-1)} \sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(n-1)})} \\ + (c_0 \eta_2^{(n-1)t} + c_1 \eta_2^{(n-1)t-1} + \dots) \varepsilon^{-2(n-1)} \sqrt[n]{R_1(\eta_2^{(n-1)})^2} + \dots = 0$$

beachtet man nun, dass, wie oben gefunden worden, $\sqrt[n]{R_1(\eta_q^{(\alpha)})}$ eine

rationale Function von $\eta_q^{(\alpha)}$, x , $\varepsilon^{\alpha} \sqrt[n]{R(x)}$ ist, so wird durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die eben hingeschriebenen Bestimmungsgleichungen sich das folgende System ergeben

$$(36) \quad a_0 [\varphi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{k_0} + \dots] + a_1 [\varphi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{k_1} + \dots] + \dots \\ + b_0 [\psi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{l_0} + \dots] + b_1 [\psi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{l_1} + \dots] + \dots \\ + c_0 [\omega_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{m_0} + \dots] + c_1 [\omega_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{m_1} + \dots] + \dots = 0$$

$$(37) \quad a_0 [\varphi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{k_0} + \dots] + a_1 [\varphi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{k_1} + \dots] + \dots \\ + b_0 [\psi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{l_0} + \dots] + b_1 [\psi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{l_1} + \dots] + \dots \\ + c_0 [\omega_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{m_0} + \dots] + c_1 [\omega_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{m_1} + \dots] + \dots = 0$$

$$(38) \quad a_0 [\varphi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{(1)k_0} + \dots] + a_1 [\varphi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{(1)k_1} + \dots] + \dots \\ + \varepsilon^{-1} b_0 [\psi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{(1)l_0} + \dots] \\ + \varepsilon^{-1} b_1 [\psi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{(1)l_1} + \dots] \\ + \dots + \varepsilon^{-2} c_0 [\omega_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{(1)m_0} + \dots] \\ + \varepsilon^{-2} c_1 [\omega_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_1^{(1)m_1} + \dots] + \dots = 0$$

$$(39) \quad a_0 [\varphi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{(1)k_0} + \dots] + a_1 [\varphi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{(1)k_1} + \dots] + \dots \\ + \varepsilon^{-1} b_0 [\psi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{(1)l_0} + \dots] \\ + \varepsilon^{-1} b_1 [\psi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{(1)l_1} + \dots] \\ + \dots + \varepsilon^{-2} c_0 [\omega_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{(1)m_0} + \dots] \\ + \varepsilon^{-2} c_1 [\omega_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) \eta_2^{(1)m_1} + \dots] + \dots = 0$$

worin die Functionen φ , ψ , ω , ... rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind. Addirt man jetzt die ersten p Gleichungen (36), (37) und die zugehörigen, nachdem dieselben der Reihe nach mit

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & & 1 & & & \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_p & & & \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \dots & \eta_p^2 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \eta_1^{p-1} & \eta_2^{p-1} & \dots & \eta_p^{p-1} & & & \end{array}$$

multiplicirt sind, so ergibt sich, wenn man

$$\eta_1^r + \eta_2^r + \cdots + \eta_p^r = S_r$$

setzt und genau ebenso mit den anderen Gleichungssystemen (38), (39), $\cdots$ verfährt, das folgende System von Bestimmungsgleichungen für die in den Grössen q der Gleichung (26) enthaltenen Constanten

$$(40) \quad a_0 [\varphi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_0} + \cdots] + a_1 [\varphi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_1} + \cdots] + \cdots \\ + b_0 [\psi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_0} + \cdots] + b_1 [\psi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_1} + \cdots] + \cdots \\ + c_0 [\omega_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_0} + \cdots] + c_1 [\omega_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_1} + \cdots] + \cdots = 0$$

$$(41) \quad a_0 [\varphi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_0+1} + \cdots] + a_1 [\varphi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_1+1} + \cdots] + \cdots \\ + b_0 [\psi_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_0+1} + \cdots] + b_1 [\psi_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_1+1} + \cdots] \\ + \cdots + c_0 [\omega_0(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_0+1} + \cdots] \\ + c_1 [\omega_1(x, \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_1+1} + \cdots] + \cdots = 0$$

.

$$(42) \quad a_0 [\varphi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_0}^{(1)} + \cdots] + a_1 [\varphi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_1}^{(1)} + \cdots] + \cdots \\ + \varepsilon^{-1} b_0 [\psi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_0}^{(1)} + \cdots] + \varepsilon^{-1} b_1 [\psi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_1}^{(1)} + \cdots] \\ + \cdots + \varepsilon^{-2} c_0 [\omega_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_0}^{(1)} + \cdots] \\ + \varepsilon^{-2} c_1 [\omega_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_1}^{(1)} + \cdots] = 0$$

$$(43) \quad a_0 [\varphi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_0+1}^{(1)} + \cdots] + a_1 [\varphi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{k_1+1}^{(1)} + \cdots] + \cdots \\ + \varepsilon^{-1} b_0 [\psi_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_0+1}^{(1)} + \cdots] + \varepsilon^{-1} b_1 [\psi_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{l_1+1}^{(1)} + \cdots] \\ + \cdots + \varepsilon^{-2} c_0 [\omega_0(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_0+1}^{(1)} + \cdots] \\ + \varepsilon^{-2} c_1 [\omega_1(x, \varepsilon \sqrt[n]{R(x)}) S_{m_1+1}^{(1)} + \cdots] + \cdots = 0$$

.

Da aber die Potenzsummen $S^{(\alpha)}$ sich rational durch die Coefficienten der Gleichung (23), also rational durch x und $\varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}$ ausdrücken lassen, so werden die letzten Gleichungen die Form annehmen

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & \dots a_0 \left[A_{00} + B_{00} \sqrt[n]{R(x)} + C_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + a_1 \left[A_{10} + B_{10} \sqrt[n]{R(x)} + C_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + b_0 \left[D_{00} + E_{00} \sqrt[n]{R(x)} + F_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + b_1 \left[D_{10} + E_{10} \sqrt[n]{R(x)} + F_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + c_0 \left[G_{00} + H_{00} \sqrt[n]{R(x)} + I_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + c_1 \left[G_{10} + H_{10} \sqrt[n]{R(x)} + I_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \dots = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & \dots a_0 \left[A_{01} + B_{01} \sqrt[n]{R(x)} + C_{01} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + a_1 \left[A_{11} + B_{11} \sqrt[n]{R(x)} + C_{11} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + b_0 \left[D_{01} + E_{01} \sqrt[n]{R(x)} + F_{01} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + b_1 \left[D_{11} + E_{11} \sqrt[n]{R(x)} + F_{11} \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \dots = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (46) \quad & \dots a_0 \left[A_{00} + B_{00} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + C_{00} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + a_1 \left[A_{10} + B_{10} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + C_{10} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \varepsilon^{-1} b_0 \left[D_{00} + E_{00} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + F_{00} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + \varepsilon^{-1} b_1 \left[D_{10} + E_{10} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + F_{10} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \varepsilon^{-2} c_0 \left[G_{00} + H_{00} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + I_{00} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + \varepsilon^{-2} c_1 \left[G_{10} + H_{10} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + I_{10} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \dots = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (47) \quad & \dots a_0 \left[A_{01} + B_{01} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + C_{01} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + a_1 \left[A_{11} + B_{11} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + C_{11} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \varepsilon^{-1} b_0 \left[C_{01} + D_{01} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + E_{01} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + \varepsilon^{-1} b_1 \left[C_{11} + D_{11} \varepsilon \sqrt[n]{R(x)} + E_{11} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (48) \quad & \dots a_0 \left[A_{00} + B_{00} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + C_{00} \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + a_1 \left[A_{10} + B_{10} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + C_{10} \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \varepsilon^{-2} b_0 \left[D_{00} + E_{00} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + F_{00} \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + \varepsilon^{-2} b_1 \left[D_{10} + E_{10} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + F_{10} \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \varepsilon^{-4} c_0 \left[G_{00} + H_{00} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + I_{00} \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] \\
 & + \varepsilon^{-4} c_1 \left[G_{10} + H_{10} \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)} + I_{10} \varepsilon^4 \sqrt[n]{R(x)^2} + \dots \right] + \dots \\
 & + \dots \dots \dots = 0
 \end{aligned}$$

worin die Grössen $A, B, C, \dots$ sämmtlich rationale Functionen von x bedeuten.

Fasst man nunmehr die Gleichungen (44), (46), (48), $\dots$ auf und addirt dieselben, so folgt, wie unmittelbar zu sehen

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & \dots A_{00} a_0 + A_{10} a_1 + \dots + E_{00} \sqrt[n]{R(x)} b_0 + \\
 & + E_{10} \sqrt[n]{R(x)} b_1 + \dots + J_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} c_0 + J_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} c_1 + \dots = 0;
 \end{aligned}$$

multiplicirt man die Gleichungen (44), (46), (48), $\dots$ resp. mit $1, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2}, \dots \varepsilon^{-(n-1)}$ und addirt dieselben, so folgt:

$$\begin{aligned}
 (50) \quad & \dots B_{00} \sqrt[n]{R(x)} a_0 + B_{10} \sqrt[n]{R(x)} a_1 + \dots + F_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} b_0 + \\
 & + F_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} b_1 + \dots + K_{00} \sqrt[n]{R(x)^3} c_0 + K_{10} \sqrt[n]{R(x)^3} c_1 + \dots = 0;
 \end{aligned}$$

multiplicirt man jene Gleichungen mit $1, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-4}, \dots \varepsilon^{-2(n-1)}$ und addirt wiederum, so erhält man

$$(51) \quad \dots C_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} a_0 + C_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} a_1 + \dots + \dots = 0$$

u. s. w., und man sieht unmittelbar, dass die Gleichung (50) durch $\sqrt[n]{R(x)}$, die Gleichung (51) durch $\sqrt[n]{R(x)^2}$, etc. dividirbar ist, so dass sich für die Bestimmung der Coefficienten $a_0, a_1, \dots b_0, b_1, \dots c_0, c_1, \dots$ die linearen Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & \dots a_{00} a_0 + a_{10} a_1 + \dots + b_{00} \sqrt[n]{R(x)} b_0 + b_{10} \sqrt[n]{R(x)} b_1 + \dots \\
 & + c_{00} \sqrt[n]{R(x)^2} c_0 + c_{10} \sqrt[n]{R(x)^2} c_1 + \dots = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (53) \quad & \dots a_{01} a_0 + a_{11} a_1 + \dots + b_{01} \sqrt[n]{R(x)} b_0 + b_{11} \sqrt[n]{R(x)} b_1 + \dots \\
 & + c_{01} \sqrt[n]{R(x)^2} c_0 + c_{11} \sqrt[n]{R(x)^2} c_1 + \dots = 0
 \end{aligned}$$

$$(54) \dots a_{02} a_0 + a_{12} a_1 + \dots + b_{02} \sqrt[n]{R(x)} b_0 + b_{12} \sqrt[n]{R(x)} b_1 + \dots \\ + c_{02} \sqrt[n]{R(x)^2} c_0 + c_{12} \sqrt[n]{R(x)^2} c_1 + \dots = 0$$

in welchen wieder die Grössen $a, b, c, \dots$ rationale Functionen von x bedeuten; hieraus folgt aber unmittelbar

$$a_0 = P_0, \quad a_1 = P_1, \dots$$

$$b_0 = Q_0 \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}, \quad b_1 = Q_1 \sqrt[n]{R(x)^{n-1}}, \dots$$

$$c_0 = R_0 \sqrt[n]{R(x)^{n-2}}, \quad c_1 = R_1 \sqrt[n]{R(x)^{n-2}}, \dots$$

u. s. w., worin $P_0, P_1, \dots Q_0, Q_1 \dots R_0, R_1, \dots$ rationale Functionen von x sind. Gehen wir nunmehr wieder zu den Gleichungen (25) und (26) zurück, so ist bekanntlich nach Bestimmung der in den Functionen $q_0, q_1, q_2, \dots$ vorkommenden Constanten die Grösse Y zwischen diesen beiden Gleichungen zu eliminiren; das Resultat der Elimination ist offenbar

$$(55) \dots \left(q_0 + q_1 \sqrt[n]{R_1(\eta)} + q_2 \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \dots \right) \times \\ \left(q_0 + q_1 \varepsilon \sqrt[n]{R_1(\eta)} + q_2 \varepsilon^2 \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \dots \right) \dots$$

$$\left(q_0 + q_1 \varepsilon^{n-1} \sqrt[n]{R_1(\eta)} + q_2 \varepsilon^{2(n-1)} \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \dots \right) = 0,$$

oder mit Berücksichtigung der oben für $a_0, b_0, c_0, \dots a_1, b_1, c_1, \dots$ gefundenen Werthe

$$(56) \left\{ \left(P_0 \eta^r + P_1 \eta^{r-1} + \dots \right) + \right. \\ \left(Q_0 \eta^s + Q_1 \eta^{s-1} + \dots \right) \sqrt[n]{R(x)^{n-1}} \sqrt[n]{R_1(\eta)} + \\ \left(R_0 \eta^t + R_1 \eta^{t-1} + \dots \right) \sqrt[n]{R(x)^{n-2}} \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \dots \Big\} \times \\ \left\{ \left(P_0 \eta^r + P_1 \eta^{r-1} + \dots \right) + \right. \\ \left(Q_0 \eta^s + Q_1 \eta^{s-1} + \dots \right) \varepsilon \sqrt[n]{R(x)^{n-1}} \sqrt[n]{R_1(\eta)} + \\ \left. \left(R_0 \eta^t + R_1 \eta^{t-1} + \dots \right) \varepsilon^2 \sqrt[n]{R(x)^{n-2}} \sqrt[n]{R_1(\eta)^2} + \dots \right\}$$

oder endlich, wie unmittelbar zu sehen, mit Berücksichtigung des Grades der resultirenden Gleichung, wenn $(n+1)p = N$ gesetzt wird,

$$(57) \dots \eta^N + \Omega_1(x) \eta^{N-1} + \Omega_2(x) \eta^{N-2} + \dots + \Omega_{N-1}(x) \eta + \Omega_N(x) = 0,$$

worin $\Omega_1(x), \dots \Omega_N(x)$ rationale Functionen von x sind. Bildet

man ferner das Product

$$(\eta - \eta_1) (\eta - \eta_2) \cdots (\eta - \eta_p) (\eta - \eta_1^{(1)}) \cdots (\eta - \eta_p^{(1)}) \\ \cdots (\eta - \eta_1^{(n-1)}) \cdots (\eta - \eta_p^{(n-1)}),$$

so ist dieses nach der Definition der Grössen η vermöge (23) gleich

$$\prod_{\alpha=0}^{n-1} \left\{ \eta^p + \varphi_1(x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}) \eta^{p-1} + \cdots + \varphi_p(x, \varepsilon^\alpha \sqrt[n]{R(x)}) \right\},$$

also selbst wieder ein Polynom von der Form

$$(58) \quad \cdots \eta^{N-p} + \Phi_1(x) \eta^{N-p-1} + \cdots + \Phi_{N-p}(x),$$

dessen Coefficienten rationale Functionen von x sind. Die np Integrale der rechten Seite der Gleichung (24) addiren sich nun aber zu p gleichartigen Integralen, deren obere Grenzen Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Polynom durch Division der Polynome (57) und (58) erhalten wird, die also wiederum Coefficienten besitzt, welche nur von x rational abhängen; ferner kann die Gleichung (26) vermöge der oben für die Grössen $a, b, c, \dots$ gefundenen Werthe in die Form gesetzt werden

$$A + B \frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}} + C \left(\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}} \right)^2 + \cdots + M \left(\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}} \right)^{n-1} = 0,$$

in welcher $A, B, C, \dots M$ rationale Functionen von η und x bedeuten, und aus welcher in Verbindung mit der Gleichung (25) oder mit

$$\left(\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}} \right)^n = \frac{R_1(\eta)}{R(x)}$$

für die der Gleichung (58) genügenden Werthe von η die zugehörigen Irrationalitäten Y zu berechnen sind; da nun aber hieraus sogleich zu ersehen, dass sich im Allgemeinen die Eliminationsgrösse $\frac{Y}{\sqrt[n]{R(x)}}$

als rationale Function der Coefficienten der beiden eben hingeschriebenen Gleichungen d. h. als rationale Function von η und x ergeben wird, so folgt der Satz, dass, wenn in dem Ausdrücke (14) für das Integral der linearen Differentialgleichung ein zu einer binomischen algebraischen Irrationalität $\sqrt[n]{R_1(H)}$ gehöriges Abel'sches Integral vorkommt, und die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen der unabhängigen Variablen x und einer binomischen algebraischen Irrationalität $\sqrt[n]{R(x)}$ sind, deren Wurzelexponent derselbe ist, stets zwischen den zugehörigen Integralen erster Gattung die Transformationsbeziehung bestehen wird

$$(59) \dots \frac{F_1(H_1) dH_1}{\sqrt[n]{R_1(H_1)}} + \frac{F_1(H_2) dH_2}{\sqrt[n]{R_1(H_2)}} + \dots + \frac{F_1(H_p) dH_p}{\sqrt[n]{R_1(H_p)}} = \frac{nf_1(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)}},$$

in welcher $H_1, H_2, \dots H_p$ die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind

$$(60) \dots H^p + \omega_1(x) H^{p-1} + \omega_2(x) H^{p-2} + \dots + \omega_p(x) = 0,$$

deren Coefficienten rational von x abhängen, während die diesen Werthen zugehörigen algebraischen Irrationalitäten eine rationale Function dieser Lösungen und der Grösse x multiplicirt mit der Irrationalität $\sqrt[n]{R(x)}$ gleich sind.

Umgekehrt ist aber auch leicht zu sehen, dass, wenn H die Lösung einer algebraischen Gleichung (60) p^{ten} Grades mit in x rationalen Coefficienten bedeutet, und es ist

$$\frac{\sqrt[n]{R_1(H)}}{\sqrt[n]{R(x)}} = F(x, H)$$

für jede Lösung H jener Gleichung p^{ten} Grades, worin F eine rationale Function bedeutet, dann durch Differentiation der Gleichung (60)

$$dH = f(x, H) dx$$

sich ergibt, worin f ebenfalls rational ist, und daher

$$\frac{F_1(H) dH}{\sqrt[n]{R_1(H)}} = \frac{F_1(H) f(x, H) dx}{F(x, H) \sqrt[n]{R(x)}};$$

setzt man auf beiden Seiten dieser Gleichung für H die p Lösungen der Gleichung (60) ein und addirt die Resultate, so erhält man

$$\sum_1^p \frac{F_1(H_\alpha) dH_\alpha}{\sqrt[n]{R_1(H_\alpha)}} = \sum_1^p \frac{F_1(H_\alpha) f(x, H_\alpha)}{F(x, H_\alpha)} \frac{dx}{\sqrt[n]{R(x)}},$$

und da auf der rechten Seite $\frac{dx}{\sqrt[n]{R(x)}}$ vor die Summe gesetzt und die

übrig bleibende Summe, als rationale symmetrische Function der Lösungen der Gleichung (60) betrachtet, rational durch die Coefficienten derselben also durch x ausgedrückt werden kann, so folgt eine Gleichung von der Form

$$\frac{F_1(H_1) dH_1}{\sqrt[n]{R_1(H_1)}} + \frac{F_1(H_2) dH_2}{\sqrt[n]{R_1(H_2)}} + \dots + \frac{F_1(H_p) dH_p}{\sqrt[n]{R_1(H_p)}} = \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt[n]{R(x)}},$$

welche der Beziehung (59) analog ist.*)

*) Es mag bemerkt werden, dass der obige Satz einfacher hätte eingesehen werden können, wenn man unmittelbar von der Symmetrie der rechten Seite der Gleichung (24) in Bezug auf die n Werthe von $\sqrt[n]{R(x)}$ ausgegangen wäre, doch sollte an dieser Stelle des Folgenden wegen die Methode der Herstellung der Gleichung (60) angegeben werden.

Die Verallgemeinerung dieses Satzes wird, wie schon oben hervorgehoben worden, später gegeben werden, wenn erst die Natur der auf einander transformirbaren algebraischen Irrationalitäten, welche im gegebenen Integrale der Differentialgleichung sowie in den Coefficienten derselben vorkommen, näher erforscht sein wird.

§ 12.

Anwendung der Reductionsformeln auf die Behandlung der Frage von der Zurückführbarkeit hyperelliptischer Integrale auf elliptische und hyperelliptische niederer Ordnung.

Um eine Anwendung des im vorigen § bewiesenen Satzes zu geben, wollen wir denselben zuerst zur Untersuchung der Frage benutzen, wann die Differentialgleichung

$$(61) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ und y rationale Functionen von x und $\sqrt{R(x)}$ sind, und $R(x)$ ein ganzes Polynom $2p+1$ ten Grades von x bedeutet, ein Integral von der Form

$$(62) \dots z = u + A_1 \log v_1 + \dots + A_x \log v_x \\ + \int^{\xi_1} y_1 ds + \int^{\xi_2} y_2 ds + \dots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda ds$$

haben kann, in welchem auch elliptische Integrale vorkommen sollen — für den einfachen Fall der Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ die Frage von der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{(x^2 - 1)(8x^3 - 6x - 1)} \frac{dz}{dx} = \frac{-4x^4 + 9x^2 - x - 1}{[(x^2 - 1)(8x^3 - 6x - 1)]^{\frac{3}{2}}}$$

durch das elliptische Integral befriedigt

$$z = \frac{1}{3} \int^{\eta} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - 1)(2s + 1)}},$$

in welchem

$$\eta = 4x^3 - 3x$$

ist.

Es war im vorigen § gezeigt worden, dass, wenn die Gleichung (61) ein Integral von der Form (62) hat, nothwendig, wenn das in (62) der Voraussetzung nach vorkommende elliptische Integral durch

$$\int^{\xi} f(s, \sqrt{\varphi(s)}) ds$$

bezeichnet wird, worin f eine rationale Function und

$$\varphi(s) = s(1-s)(1-c^2s)$$

ist, jedenfalls, weil in Gleichung (59) $p = 1$ und $F_1(H) = 1$ zu setzen ist, auch

$$(63) \dots \frac{dH}{\sqrt{\varphi(H)}} = \frac{2f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$$

sein muss, worin H nach Gleichung (60) eine *rationale* Function von x , $\sqrt{\varphi(H)}$ sich durch eine rationale Function von x multiplicirt mit $\sqrt{R(x)}$ ausdrücken lässt, und das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende hyperelliptische Differential eines erster Gattung ist; die Frage ist somit darauf zurückgeführt, die Bedingungen für die in den Coefficienten der Differentialgleichung $Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y$ vorkommende Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ zu untersuchen, für welche ein zu ihr gehöriges Integral erster Gattung auf ein elliptisches Integral erster Gattung reducirbar ist, wobei die Transformation, wie oben gefunden, stets eine *rationale* sein wird.

Suchen wir zuerst Eigenschaften der rationalen Transformation festzustellen, welche das elliptische Integral erster Gattung

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-c^2y)}}$$

in ein hyperelliptisches verwandelt. Sei dieselbe

$$(64) \dots y = \frac{U}{V} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n},$$

so folgt

$$(65) \dots \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-c^2y)}} = \int \frac{V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}}{\sqrt{UV(V-U)(V-c^2U)}};$$

setzt man voraus, dass U und V nicht gemeinsame Factoren besitzen, so werden nicht zwei der Factoren

$$U, V, V-U, V-c^2U$$

dieselbe Lösung haben können, ausserdem ist bekanntlich jede doppelte Lösung des Polynoms unter der Quadratwurzel ein Theiler des Zählers, da

$$(V - \lambda U) \frac{dU}{dx} - U \frac{d(V - \lambda U)}{dx} = V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}$$

ist, und machen wir nun die Voraussetzung, dass $m > n$, so wird der Grad des Radicanden $3m + n$ sein, so dass, wenn das durch die Transformation zu erhaltende hyperelliptische Integral erster Gattung, welches zu einem Polynome $R(x)$ vom $2p + 1^{\text{ten}}$ Grade gehören mag, eine ganze Function κ^{ten} Grades ($\kappa < p$) im Zähler haben soll, weil $V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}$ vom $m + n - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, das Polynom unter

der Quadratwurzel $m + n - 1 - \kappa$ Doppelfactoren besitzen muss, und sich somit die Beziehung ergibt

$$2(m + n - 1 - \kappa) + 2p + 1 = 3m + n$$

oder

$$m = n + 2(p - \kappa) - 1,$$

welche zwischen dem Grade des Zählers und Nenners der Transformation besteht, wenn der Grad der ganzen Function von x , welche den Zähler der Function unter dem hyperelliptischen Integrale erster Gattung bildet, der κ^{te} sein soll.

Erwägt man nun andererseits, dass das Polynom unter der Quadratwurzel der rechten Seite der Gleichung (65) die willkürlichen Constanten

$$a_0, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_n \text{ und } c^2$$

enthält, deren Anzahl

$$m + n + 2 = 2n + 2(p - \kappa) + 1$$

ist, und dass die Festsetzung, dass dieses Polynom

$$m + n - 1 - \kappa = 2n + 2p - 3\kappa - 2$$

Doppelfactoren besitzen soll, bekanntlich die willkürlichen Constanten eben sovielen Bedingungsgleichungen unterwirft, so sieht man unmittelbar ein, dass noch $\kappa + 3$ Constanten willkürlich bleiben.

Für den Fall dass $m < n$, liefern genau dieselben Betrachtungen dasselbe Resultat, während sich $n = m + 2(p - \kappa) - 1$ ergibt. Ist endlich $m = n$, so wäre das Polynom unter der Quadratwurzel im Allgemeinen vom $4m^{\text{ten}}$ Grade, und da dasselbe durch Herausnehmen von Doppelfactoren immer nur wieder ein Polynom[•] paaren Grades werden könnte, so muss, wenn jene Transformation das oben Verlangte leisten soll, unter λ eine der Zahlen 1 oder c^2 verstanden, eine Reihe von Beziehungen der Form bestehen

$$b_m = \lambda a_m, b_{m-1} = \lambda a_{m-1}, \dots b_h = \lambda a_h,$$

so dass der Grad des Polynoms unter der Quadratwurzel der $3m + h - 1^{\text{te}}$ wird; bemerkt man ferner, dass sich der Grad von $V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}$, wie unmittelbar zu sehen, auf den $m + h - 2^{\text{ten}}$ reducirt, so folgt wiederum die Beziehung

$$2(m + h - 2 - \kappa) + 2p + 1 = 3m + h - 1,$$

oder

$$m = h + 2(p - \kappa) - 2.$$

Da nun aber in diesem Falle die Anzahl der willkürlichen Constanten $m + h + 1$ ist, und die Anzahl von $m + h - 2 - \kappa$ Doppelfactoren ebensoviel Bedingungen zwischen den Constanten nach sich zieht, so bleiben wiederum, stets abgesehen von den mehrfachen

Werthecomplexen der aus den Bedingungsgleichungen folgenden Constanten, $\kappa + 3$ willkürliche Constanten übrig, somit in allen Fällen dieselbe Anzahl.

*Es giebt somit zu jedem Geschlechte p und zu jedem Grade κ *) ein hyperelliptisches Integral erster Gattung, welches auf ein elliptisches zurückführbar ist, und zwar enthält dieses unabhängig von dem Grade der Transformation noch $\kappa + 3$ willkürliche Constanten.*

Da die Anzahl $\kappa + 3$ der willkürlich gebliebenen Constanten grösser wird mit wachsendem Grade des Zählers der Function unter dem hyperelliptischen Integrale erster Gattung, so kann schon hieraus geschlossen werden, dass, wenn ein hyperelliptisches Integral erster Gattung auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, nicht jedes zu derselben Irrationalität gehörige hyperelliptische Integral erster Gattung ebenfalls auf ein elliptisches Integral reducirt werden können.

Es ist aber nun eine weitere und wichtigere Frage zu erörtern, nämlich ob zu jedem Geschlechte p auch wirklich immer eine solche Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ gehört, dass alle zu dieser gehörigen hyperelliptischen Integrale auf elliptische reducirbar sind, und das zur Untersuchung dieser Frage angewandte Princip wird uns zugleich zur wirklichen Herstellung reducirbarer Integrale führen.

Um für die Untersuchung dieser Frage die grösste Anzahl verwendbarer Constanten zu haben, müssen wir für κ die grösstmögliche Zahl d. h. $p - 1$ wählen, in welchem Falle, da für $m > n$ $m = n + 2(p - \kappa) - 1$ war, $m = n + 1$ sein wird; nehmen wir nun die zum niedrigsten Grade gehörige Transformation, welche zugleich vermöge der oben aufgestellten Bedingungsgleichungen für den Integralmodul c^2 mehrere Werthe liefert — wir werden sehen, dass diese kleinste Transformationszahl in der That p Werthe für den Integralmodul liefert, also p selbständige elliptische Integrale — so wird, weil $3m + n > 2p + 1$ sein muss, $4n + 3 > 2p + 1$ oder $n > \frac{p-1}{2}$ folgen, und somit, da n den kleinsten Werth haben soll,

$$\begin{aligned} \text{für } p = 2\pi \quad n &= \pi \\ \text{für } p = 2\pi + 1 \quad n &= \pi + 1 \end{aligned}$$

sein. Ist I. $n = \pi$, also $m = \pi + 1$, so ist der Grad von

$$V \frac{dU}{dx} - U \frac{dV}{dx}$$

der $2\pi^{\text{te}}$, der Grad von $UV(V - U)$ der $3\pi + 2^{\text{te}}$, so dass, wenn

*) Der Grad κ eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung soll durch den Grad des Zählers der Function unter dem Integral defnirt sein.

wir c^2 der Bedingung unterwerfen, dass $V - c^2 U$ einen und nur einen Doppelfactor besitze, die gleich Null gesetzte Discriminante, welche in c^2 bekanntlich vom $2\pi = p^{\text{ten}}$ Grade sein wird, p Werthe für c^2 liefert, während der Zähler des Differentials vom $2\pi - 1 = p - 1^{\text{ten}}$ Grade, und das Polynom unter der Wurzel vom Grade $3\pi + 2 + \pi - 1 = 4\pi + 1 = 2p + 1$ ist, wie es sein soll.

Ist dagegen II. $n = \pi + 1$, also $m = \pi + 2$, so wird der Grad des Zählers des transformirten Differentials der $2\pi + 2^{\text{te}}$; werden nun die Constanten der Transformation der Bedingung unterworfen, dass einer der Factoren des Polynoms $UV(V - U)$, also z. B. $V - U$ einen Doppelfactor besitzt, wird ferner c^2 so bestimmt, dass auch $V - c^2 U$ eine doppelte Lösung zukommt, wofür sich aus der Discriminante, wenn man von dem einen bei der eben getroffenen Festsetzung bereits benutzten Werthe $c^2 = 1$ absieht, $2(\pi + 1) - 1 = p$ Werthe ergeben, so wird der Zähler wieder den Grad $2\pi = p - 1$ und das Polynom unter der Quadratwurzel den Grad $4\pi + 3 = 2p + 1$ annehmen. Bezeichnet man somit in beiden Fällen die p in Betracht kommenden Lösungen der Discriminante mit $c_1^2, c_2^2, \dots, c_p^2$, so erhält man, wenn man beachtet, dass die Verschiedenheit der Polynome unter der Wurzel nur vom Factor $V - c^2 U$ herrührt, die folgenden Beziehungsgleichungen:

I. für den Fall, dass p eine gerade Zahl ist,

$$(66) \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{d\eta}{V\eta(1-\eta)(1-c_1^2\eta^2)} = \\ &= \int \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \dots + \nu_1 x^{p-1}) dx}{V^{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_{\frac{3p}{2}+2})(x-\mu_1)\dots(x-\mu_{\frac{p}{2}-1})}} \\ & \int \frac{d\eta}{V\eta(1-\eta)(1-c_2^2\eta^2)} = \\ &= \int \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \nu_2 x^{p-1}) dx}{V^{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_{\frac{3p}{2}+2})(x-\mu_1)\dots(x-\mu_{\frac{p}{2}-1})}} \\ & \dots \dots \dots \\ & \int \frac{d\eta}{V\eta(1-\eta)(1-c_p^2\eta^2)} = \\ &= \int \frac{(\alpha_p + \beta_p x + \gamma_p x^2 + \dots + \nu_p x^{p-1}) dx}{V^{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_{\frac{3p}{2}+2})(x-\sigma_1)\dots(x-\sigma_{\frac{p}{2}-1})}} \end{aligned} \right.$$

für die Substitution

$$(67) \dots \eta = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{\frac{p}{2}+1} x^{\frac{p}{2}+1}}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}}},$$

worin sämtliche $p + 2$ Constanten $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ willkürlich geblieben,

II. wenn p eine ungerade Zahl,

$$(68) \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_1^2\eta)}} = \\ &= \int \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + \dots + \nu_1 x^{p-1}) dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \dots (x-\lambda_{\frac{p+3}{2}})(x-\mu_1) \dots (x-\mu_{\frac{p-1}{2}})}} \\ & \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_2^2\eta)}} = \\ &= \int \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \nu_2 x^{p-1}) dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \dots (x-\lambda_{\frac{p+3}{2}})(x-\mu_1) \dots (x-\mu_{\frac{p-1}{2}})}} \\ & \dots \dots \dots \\ & \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_p^2\eta)}} = \\ &= \int \frac{(\alpha_p + \beta_p x + \gamma_p x^2 + \dots + \nu_p x^{p-1}) dx}{\sqrt{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \dots (x-\lambda_{\frac{p+3}{2}})(x-\sigma_1) \dots (x-\sigma_{\frac{p-1}{2}})}} \end{aligned} \right.$$

für die Substitution

$$(69) \dots \eta = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_{\frac{p+3}{2}} x^{\frac{p+3}{2}}}{1 + b_1 x + \dots + b_{\frac{p+1}{2}} x^{\frac{p+1}{2}}},$$

in welcher zwischen den $p + 3$ Constanten $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ nur eine Bedingungsgleichung besteht, also wieder $p + 2$ derselben willkürlich bleiben.

Will man nun für den Fall, dass p eine gerade Zahl ist, in den Gleichungen (66) überall dieselbe Irrationalität des hyperelliptischen Integrales erhalten, so wird man die willkürlich gebliebenen $p + 2$ Constanten a und b so bestimmen müssen, dass $\mu_q = \varrho_q = \dots = \sigma_q$ wird für $q = 1, 2, \dots, \frac{p}{2} - 1$; da aber die Anzahl der Integrale

p ist, so wird für ein gerades p $\left(\frac{p}{2} - 1\right)(p-1) \leq p+2$ sein müssen, d. h. p nur gleich 2 oder 4 sein können, wenn Gleichheit der Polynome stattfinden soll, und es werden für $p=2$, also $2p+1=5$ noch 4 Constanten, für $p=4$, also $2p+1=9$ noch 3 Constanten willkürlich bleiben. Betrachten wir dagegen den Fall, dass p eine ungerade Zahl ist, so wird $(p-1)\frac{p-1}{2} \leq p+2$, d. h. p nur gleich 1 oder 3 sein können, und es werden für $p=1$, also $2p+1=3$ noch 3 Constanten — der Transformationstheorie der elliptischen Integrale entsprechend — für $p=3$, also $2p+1=7$ ebenfalls noch 3 Constanten willkürlich bleiben, und dieselben Resultate ergeben sich für $m < n$. Wir erhalten somit den Satz, dass im Allgemeinen nur für elliptische Integrale und hyperelliptische Integrale erster, zweiter und dritter Ordnung soviel Integrale erster Gattung, als das Geschlecht anzeigt, existiren, welche zu gleicher Zeit auf je ein elliptisches Integral reducirbar sind, oder für welche sämtliche Fundamentalintegrale erster Gattung durch eine Summe elliptischer Integrale darstellbar sind, deren Anzahl dem Geschlechte des hyperelliptischen Integrales gleich ist, indem die oben gebrauchte Transformation niedrigsten Grades offenbar die geringste Anzahl von Factoren unter der Quadratwurzel liefert, welche von den verschiedenen Werthen des Integralmoduls abhängen.

Wenden wir die eben gemachten Auseinandersetzungen auf den Fall $p=2$ an, üben also auf das Integral

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c^2\eta)}}$$

die rationale Transformation zweiten Grades*) (wir wählen hier $m < n$)

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

aus, so folgt

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c^2\eta)}} = \frac{(-a_1 b_2 x^2 - 2a_0 b_2 x + a_1 - a_0 b_1) dx}{\sqrt{(a_0 + a_1 x)(1 + b_1 x + b_2 x^2)(1 - a_0 + (b_1 - a_1)x + b_2 x^2)(1 - c^2 a_0 + (b_1 - c^2 a_0)x + b_2 x^2)}},$$

und wenn wir die Constante c^2 der Bedingung unterwerfen, dass

$$1 - c^2 a_0 + (b_1 - c^2 a_1)x + b_2 x^2$$

*) Dass eine Transformation ersten Grades nicht ein elliptisches Integral in ein hyperelliptisches überführen kann, ist unmittelbar einleuchtend.

zwei gleiche Factoren haben soll, oder dass c^2 der Gleichung genügt

$$(A) \dots (b_1 - c^2 a_1)^2 - 4b_2(1 - c^2 a_0) = 0,$$

so wird der Factor

$$\sqrt{b_2} \left(x - \frac{c^2 a_1 - b_1}{2b_2} \right)$$

vor die Quadratwurzel treten und für jeden der beiden aus (A) sich ergebenden Werthe von c^2 im Zähler enthalten sein.

Nennen wir die beiden Lösungen von (A) c_1^2 und c_2^2 , so werden sich für dieselbe Substitution die beiden Gleichungen ergeben

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_1^2\eta)}} = \frac{-a_1 \sqrt{b_2} \left(x - \frac{c_1^2 a_1 - b_1}{2b_2} \right) dx}{\sqrt{(a_0 + a_1 x)(1 + b_1 x + b_2 x^2)(1 - a_0 + (b_1 - a_1)x + b_2 x^2)}}$$

und

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)(1-c_2^2\eta)}} = \frac{-a_1 \sqrt{b_2} \left(x - \frac{c_2^2 a_1 - b_1}{2b_2} \right) dx}{\sqrt{(a_0 + a_1 x)(1 + b_1 x + b_2 x^2)(1 - a_0 + (b_1 - a_1)x + b_2 x^2)}},$$

und somit zwei verschiedene Integrale erster Gattung, welche zu derselben Irrationalität gehören, auf je *ein* elliptisches Integral zurückführbar sein und zwar durch ein und dieselbe Substitution niedrigsten, hier des zweiten Grades. Bringen wir zur Vereinfachung dieser Beziehung das hyperelliptische Integral erster Ordnung auf seine Normalform, indem wir die 4 willkürlich gebliebenen Constanten so bestimmen, dass das Polynom die Lösungen 0 und 1 annimmt, also

$$a_0 = 0, \quad 1 + b_1 - a_1 + b_2 = 0$$

ist, und führen statt der beiden noch übrig bleibenden willkürlichen Constanten die Grössen κ und λ durch die Beziehungen ein

$$1 - \frac{b_1}{\kappa} + \frac{b_2}{\kappa^2} = 0, \quad 1 - \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2}{\lambda^2} = 0,$$

so folgt leicht

$$b_1 = \kappa + \lambda, \quad b_2 = \kappa\lambda, \quad a_1 = (1 + \kappa)(1 + \lambda), \quad a_0 = 0,$$

und aus der Gleichung (A) die beiden Werthe

$$c_1^2 = \frac{(\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda})^2}{(1 + \kappa)(1 + \lambda)}, \quad c_2^2 = \frac{(\sqrt{\kappa} - \sqrt{\lambda})^2}{(1 + \kappa)(1 + \lambda)},$$

so dass die oben aufgestellten Beziehungen zwischen den beiden verschiedenen hyperelliptischen Integralen erster Ordnung und den elliptischen Integralen mit Berücksichtigung des Zeichens die Form annehmen

$$\int_0^x \frac{(x\sqrt{\kappa\lambda} + 1) dx}{\sqrt{x(1-x)(1+\kappa x)(1+\lambda x)(1-\kappa\lambda x)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\kappa)(1+\lambda)}} \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta) \left(1 - \frac{(\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda})^2}{(1+\kappa)(1+\lambda)} \eta\right)}}$$

und

$$\int_0^x \frac{(x\sqrt{\kappa\lambda} - 1) dx}{\sqrt{x(1-x)(1+\kappa x)(1+\lambda x)(1-\kappa\lambda x)}} =$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(1+\kappa)(1+\lambda)}} \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta) \left(1 - \frac{(\sqrt{\kappa} - \sqrt{\lambda})^2}{(1+\kappa)(1+\lambda)} \eta\right)}},$$

und zwar vermöge derselben Transformation

$$\eta = \frac{(1+\kappa)(1+\lambda)x}{(1+\kappa x)(1+\lambda x)};$$

würde man die Transformation zweiten Grades, für welche $m > n$ ist, anwenden, also

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{1 + b_1 x},$$

so würde man auf das hyperelliptische Integral

$$\int \frac{(a + bx) dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta) \left(x - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}\right)}}$$

geführt werden, welches ebenfalls auf elliptische Integrale reducirbar ist und sich von dem obigen nicht wesentlich unterscheidet; es sind dies die bekannten Jacobi'schen Integrale.

Wendet man auf das elliptische Integral nicht die Transformation niedrigsten, also zweiten Grades, sondern z. B. die dritten Grades an, so folgt, wenn man das elliptische Integral in der Form

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta - \alpha_1)(\eta - \alpha_2)(\eta - \alpha_3)}}$$

zu Grunde legt und darauf die Substitution

$$\eta = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

anwendet,

$$(m) \frac{d\eta}{V(\eta - \alpha_1)(\eta - \alpha_2)(\eta - \alpha_3)} = \frac{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)(\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3x^2) - (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + x^3)(b_1 + 2b_2 x)}{V \frac{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)(x^3 + (\alpha_2 - \alpha_1 b_2)x^2 + (\alpha_1 - \alpha_1 b_1)x + (\alpha_0 - \alpha_1 b_0))}{(x^3 + (\alpha_2 - \alpha_2 b_2)x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 b_1)x + (\alpha_0 - \alpha_2 b_0))} \cdot \frac{(x^3 + (\alpha_2 - \alpha_3 b_2)x^2 + (\alpha_1 - \alpha_3 b_1)x + (\alpha_0 - \alpha_3 b_0))}{(x^3 + (\alpha_2 - \alpha_3 b_2)x^2 + (\alpha_1 - \alpha_3 b_1)x + (\alpha_0 - \alpha_3 b_0))}},$$

und es sind nun die Constanten so zu bestimmen, dass unter der Quadratwurzel der rechten Seite, nach Absonderung der Doppelfactoren, nur ein Polynom 5^{ten} Grades übrig bleibt. Nehmen wir zuerst $b_2 = b_1 = 0$, $b_0 = 1$, und bestimmen die Constanten α_0 , α_1 , α_2 , α_1 , α_2 , α_3 so, dass, wenn $\alpha_0 - \alpha_1 = A$, $\alpha_0 - \alpha_2 = B$, $\alpha_0 - \alpha_3 = C$ gesetzt wird, die Factoren

$$x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + A \quad \text{und} \quad x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + B$$

je zwei gleiche Lösungen haben, so wird nach Absonderung der Doppelfactoren das Polynom unter der Quadratwurzel offenbar vom 5^{ten} Grade sein; die Forderung der gleichen Lösungen liefert aber bekanntlich, wenn

$$2(3\alpha_1 - \alpha_2^2) = P, \quad 9A - \alpha_1 \alpha_2 = Q, \quad 9B - \alpha_1 \alpha_2 = R$$

gesetzt wird, die Bedingungen

$$3Q^2 - 2\alpha_2 PQ + P^2 \alpha_1 = 0, \quad 3R^2 - 2\alpha_2 PR + P^2 \alpha_1 = 0,$$

welche wiederum die beiden Beziehungen

$$3(Q + R) = 2\alpha_2 P \quad \text{und} \quad P^2 \alpha_1 = 3QR$$

nach sich ziehen. Mit Hülfe dieser Bedingungen ergibt sich leicht das nach Abtrennung der Doppelfactoren unter der Quadratwurzel übrig bleibende Polynom in der Form

$$x^5 + \frac{5}{3} \alpha_2 x^4 + \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + 7\alpha_1) x^3 + \left(-\frac{\alpha_2^3}{3} + 2\alpha_1 \alpha_2 + C \right) x^2 + \left(-\frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{3} + \frac{4}{3} \alpha_1^2 + \frac{2}{3} \alpha_2 C \right) x + C \left(-\frac{\alpha_2^2}{3} + \frac{4}{3} \alpha_1 \right),$$

während das Product der Doppelfactoren gegen den Zähler des Differentialausdruckes fortfällt, und man erhält

$$\frac{1}{3} \int \frac{d\eta}{(\eta - \alpha_1)(\eta - \alpha_2)(\eta - \alpha_3)} = \int \frac{dx}{V \frac{x^5 + \frac{5}{3} \alpha_2 x^4 + \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + 7\alpha_1) x^3 + \left(-\frac{\alpha_2^3}{3} + 2\alpha_1 \alpha_2 + C \right) x^2 + \left(-\frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{3} + \frac{4}{3} \alpha_1^2 + \frac{2}{3} \alpha_2 C \right) x + C \left(-\frac{\alpha_2^2}{3} + \frac{4}{3} \alpha_1 \right)}{x^5 + \frac{5}{3} \alpha_2 x^4 + \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + 7\alpha_1) x^3 + \left(-\frac{\alpha_2^3}{3} + 2\alpha_1 \alpha_2 + C \right) x^2 + \left(-\frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{3} + \frac{4}{3} \alpha_1^2 + \frac{2}{3} \alpha_2 C \right) x + C \left(-\frac{\alpha_2^2}{3} + \frac{4}{3} \alpha_1 \right)},$$

worin a_1, a_2, C drei willkürliche Constanten bedeuten, während $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus den oben angegebenen Beziehungen zwischen A, B, C, P, Q, R und den beiden Bedingungsgleichungen, denen P, Q, R genügen mussten, hervorgehen. Setzt man zur Vereinfachung, um auf ein von Hermite*) gegebenes Integral zu kommen,

$$a_2 = 0, \quad a_1 = -\frac{3}{4}a, \quad C = -\frac{b}{8},$$

so folgt

$$\frac{1}{3} \int \frac{d\eta}{V(\eta - \alpha_1)(\eta - \alpha_2)(\eta - \alpha_3)} = \int \frac{dx}{V(x^2 - a)\left(x^3 - \frac{3}{4}ax - \frac{b}{8}\right)}$$

vermöge der Substitution

$$\eta = x^3 - \frac{3}{4}ax + a_0,$$

worin noch a_0 beliebig ist. Da ferner

$$a_0 - \alpha_1 = A, \quad a_0 - \alpha_2 = B, \quad a_0 - \alpha_3 = C$$

war, so folgt, wenn ausserdem noch $a_0 = 0$ gesetzt wird,

$$\alpha_3 = -C = \frac{b}{8},$$

und es ergibt sich aus den Definitionsgleichungen von P, Q, R

$$P = -\frac{9}{2}a, \quad Q = 9A, \quad R = 9B,$$

und mit Hilfe der für diese Grössen aufgestellten Bedingungsgleichungen

$$Q = \frac{9}{4}a^{\frac{3}{2}}, \quad R = -\frac{9}{4}a^{\frac{3}{2}}, \quad \text{also } A = \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}, \quad B = -\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}},$$

so dass $\alpha_1 = -\frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}, \alpha_2 = \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}$ folgt. Es nimmt somit das elliptische Integral die Form an

$$\frac{1}{3} \int \frac{d\eta}{V\left(\eta^2 - \frac{1}{16}a^3\right)\left(\eta + \frac{b}{8}\right)},$$

und man erhält, wenn $\frac{a}{4}\eta$ statt η gesetzt wird, die gesuchte Beziehung

$$\int \frac{dx}{V(x^2 - a)(8x^3 - 6ax - b)} = \frac{1}{3} \int \frac{d\eta}{V(\eta^2 - a)(2a\eta + b)}$$

vermöge der Substitution

$$\eta = \frac{4x^3 - 3ax}{a}.$$

*) Annales de la société scientifique de Bruxelles (1^{re} année 1876).

Gehen wir wieder zur Gleichung (m) zurück und machen nicht die oben für die Grössen b_0, b_1, b_2 gemachte Annahme, sondern bestimmen die Constanten so, dass die drei Polynome

$$x^3 + (a_2 - \alpha_\varrho b_2)x^2 + (a_1 - \alpha_\varrho b_1)x + (a_0 - \alpha_\varrho b_0)$$

für $\varrho = 1, 2, 3$ je einen Doppelfactor besitzen, so wird wieder nach Absonderung derselben das Polynom unter der Quadratwurzel vom 5^{ten} Grade sein und jedenfalls als quadratischen Factor den Nenner der Substitution $b_0 + b_1x + b_2x^2$ enthalten; man erhält dann, wenn man genau wie oben verfährt und die willkürlich bleibenden Constanten, wie dies eben geschehen, passend bestimmt, die Beziehung

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - a)(8x^3 - 6ax - b)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^3 - 3a\eta + b}}$$

vermöge der Substitution

$$\eta = \frac{2x^3 - b}{3(x^2 - a)}.$$

Damit ist nun die Aufgabe, hyperelliptische Integrale anzugeben, welche auf elliptische Integrale reducirbar sind, erledigt, aber eine wesentlich andere Frage ist die, bei einem speciell vorgelegten hyperelliptischen Integrale zu entscheiden, ob dasselbe auf elliptische Integrale reducirbar ist, oder, mit Bezug auf die obige das Integral linearer Differentialgleichungen betreffende Untersuchung, für die in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommenden algebraischen Irrationalitäten zu entscheiden, ob in dem Ausdrucke für das Integral der Differentialgleichung auch elliptische Integrale enthalten sein können. Die Entscheidung dieser Frage hängt mit den Eigenschaften der Perioden des hyperelliptischen Systems zusammen oder mit der Beschaffenheit der diesem Systeme angehörigen ϑ -Functionen. Ich werde im Folgenden die Grundzüge der Transformationstheorie der ϑ -Functionen, welche einem hyperelliptischen Systeme erster Ordnung angehören, als bekannt voraussetzen*) und ebenso den aus der Definition des Transformationsproblems hyperelliptischer Systeme folgenden Satz, dass, wenn die beiden hyperelliptischen Integrale des Systems auf elliptische Integrale reducirbar sind, nothwendig die zu jenem Systeme gehörigen ϑ -Functionen zweier Variablen sich algebraisch durch die zu jenen beiden elliptischen Integralen gehörigen ϑ -Functionen einer Variablen ausdrücken lassen; die Umkehrung dieses Satzes ergibt sich offenbar aus den bekannten Beziehungen zwischen den ϑ -Functionen und den Variablen

*) Vergl. die Arbeit von Hermite (Comptes rendus tome XI) „sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes“ und meine Arbeiten über die Transformation der hyperelliptischen Functionen im Journal von Crelle.

der Integrale unmittelbar. Es sind somit nur die Perioden des vorgelegten Integrales zu berechnen, aus diesen die Moduln der ϑ -Functionen zu bilden und zu sehen, ob das Fundamental- ϑ sich algebraisch auf elliptische ϑ -Functionen reduciren lasse; ist dies der Fall, so wird das hyperelliptische Integral auf elliptische Integrale reducirbar sein, und die Reductionsformel der ϑ -Function wird, in die entsprechende Beziehung zwischen den zugehörigen Integralgrenzen umgesetzt, die algebraische Transformation des hyperelliptischen Integrales in die elliptischen liefern.

Legen wir z. B. der Untersuchung das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^8-1}},$$

oder das aus diesem durch die Substitution $z^2 = y$ hervorgehende

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}}$$

zu Grunde, welchem das hyperelliptische System entspricht

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{\sqrt{y_1(y_1^4-1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{y_2(y_2^4-1)}} &= du_1 \\ \frac{y_1 dy_1}{\sqrt{y_1(y_1^4-1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{y_2(y_2^4-1)}} &= du_2, \end{aligned}$$

so ergeben sich bekanntlich die 4 gleichzeitigen Periodenpaare in der Form

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= - \int_i^0 \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} & \omega'_{11} &= -i \int_1^i \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} \\ \omega_{12} &= \int_{-i}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} & \omega'_{12} &= -i \int_1^i \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} + i \int_0^{-i} \frac{dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} \\ \omega_{21} &= - \int_i^0 \frac{y dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} & \omega'_{21} &= -i \int_1^i \frac{y dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} \\ \omega_{22} &= \int_{-i}^{-1} \frac{y dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} & \omega'_{22} &= -i \int_1^i \frac{y dy}{\sqrt{y(1-y^4)}} + i \int_0^{-i} \frac{y dy}{\sqrt{y(1-y^4)}}. \end{aligned}$$

Nun folgt aber leicht, dass

$$\begin{aligned} \int_0^i \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} &= -\sqrt{i} \int_0^{-1} \frac{dy}{\sqrt{-y(y^4-1)}} \\ &= -\sqrt{i} \int_0^{-i} \frac{dy}{\sqrt{-y(y^4-1)}} - \sqrt{i} \int_{-i}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{-y(y^4-1)}} \\ &= \sqrt{i} \int_0^i \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}} - \frac{\sqrt{i}}{i} \int_{-i}^{-1} \frac{dy}{\sqrt{y(y^4-1)}}, \end{aligned}$$

oder dass

$$\omega_{12} = (i - \sqrt{i}) \omega_{11}$$

ist; ebenso ergibt sich

$$\omega_{22} = -(i\sqrt{i} + i)\omega_{21}, \quad \omega'_{11} = (i + \sqrt{i})\omega_{11}, \quad \omega'_{12} = (1 + i\sqrt{i} - i)\omega_{11}, \\ \omega'_{21} = (1 + \sqrt{i})\omega_{21}; \quad \omega'_{22} = (1 + i\sqrt{i} + i)\omega_{21}.$$

Daraus folgt aber in bekannten Zeichen, wenn

$$\sigma = \begin{vmatrix} 2\omega_{11} & 2\omega_{12} \\ 2\omega_{21} & 2\omega_{22} \end{vmatrix} = -4\sqrt{i}(i + 2\sqrt{i} - 1)\omega_{11}\omega_{22}$$

gesetzt wird, dass die ϑ -Moduln die Werthe annehmen:

$$\tau_{11} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} 2\omega'_{11} & 2\omega_{12} \\ 2\omega'_{21} & 2\omega_{22} \end{vmatrix} = \frac{2(i-1)}{i+2\sqrt{i}-1} = \frac{2}{3}(1+i\sqrt{2})$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} 2\omega'_{12} & 2\omega_{12} \\ 2\omega'_{22} & 2\omega_{22} \end{vmatrix} = \tau_{21} = \frac{i-1}{i+2\sqrt{i}-1} = \frac{1}{3}(1+i\sqrt{2})$$

$$\tau_{22} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} 2\omega_{11} & 2\omega'_{12} \\ 2\omega_{21} & 2\omega'_{22} \end{vmatrix} = \frac{i-2\sqrt{i}-1}{i+2\sqrt{i}-1} = \frac{1}{3}(-1+2i\sqrt{2}),$$

und sich somit die Beziehung ergibt:

$$\tau_{11} = 2\tau_{12},$$

während die Argumente der ϑ -Functionen v_1 und v_2 vermöge der Gleichungen

$$u_1 = 2\omega_{11}v_1 + 2\omega_{12}v_2$$

$$u_2 = 2\omega_{21}v_1 + 2\omega_{22}v_2$$

durch die Ausdrücke bestimmt sind

$$v_1 = \frac{(i\sqrt{i} + i)\omega_{21}u_1 + (i - \sqrt{i})\omega_{11}u_2}{2(2i - \sqrt{i} + i\sqrt{i})\omega_{11}\omega_{21}}$$

$$v_2 = \frac{\omega_{21}u_1 - \omega_{11}u_2}{2(2i - \sqrt{i} + i\sqrt{i})\omega_{11}\omega_{21}}.$$

Gehen wir nun zur Untersuchung des Fundamental- ϑ über, so folgt vermöge der gefundenen Beziehung $\tau_{11} = 2\tau_{12}$, dass

$$\vartheta(v_1, v_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(\tau_{11}n_1^2 + 2\tau_{12}n_1n_2 + \tau_{22}n_2^2)} \cos(2n_1v_1 + 2n_2v_2)\pi \\ = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\left[\tau_{11}\left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2 + \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right)n_2^2\right]} \cos(2n_1v_1 + 2n_2v_2)\pi,$$

oder wenn

$$v_1 = u_1' \quad v_2 = \frac{1}{2} u_1' + u_2'$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \vartheta(v_1, v_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) n_2^2} \cos 2 \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) u_1' \pi \cos 2 n_2 u_2' \pi \\ &\quad - \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) n_2^2} \sin 2 \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) u_1' \pi \sin 2 n_2 u_2' \pi \end{aligned}$$

ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2} \cos 2 \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) u_1' \pi e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) n_2^2} \cos 2 n_2 u_2' \pi \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} (n_1 + v_2)^2} \cos 2 (n_1 + v_2) u_1' \pi e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) 4 v_2^2} \cos 4 v_2 u_2' \pi \\ &\quad + \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(n_1 + v_2 + \frac{1}{2}\right)^2} \cos 2 \left(n_1 + v_2 + \frac{1}{2}\right) u_1' \pi \times \\ &\quad \quad \quad e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) (2v_2+1)^2} \cos 2 (2v_2+1) u_2' \pi, \end{aligned}$$

oder wenn $n_1 + v_2 = m_1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} m_1^2} \cos 2 m_1 u_1' \pi e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) 4 v_2^2} \cos 4 v_2 u_2' \pi \\ &\quad + \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(m_1 + \frac{1}{2}\right)^2} \cos (2m_1 + 1) u_1' \pi e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) (2v_2+1)^2} \cos 2 (2v_2+1) u_2' \pi \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} m_1^2} \cos 2 m_1 u_1' \pi \cdot \sum_{v_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) 4 v_2^2} \cos 4 v_2 u_2' \pi \\ &\quad + \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(m_1 + \frac{1}{2}\right)^2} \cos (2m_1 + 1) u_1' \pi \cdot \sum_{v_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) (2v_2+1)^2} \cos 2 (2v_2+1) u_2' \pi, \end{aligned}$$

und daher mit Hülfe der Definitionsgleichungen der elliptischen ϑ -Functionen

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) n_2^2} \cos 2 \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) u_1' \pi \cos 2 n_2 u_2' \pi \\ &= \frac{1}{2} \vartheta(u_1', \tau_{11})_3 \left\{ \vartheta\left(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right)_3 + \vartheta\left(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right)_0 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \vartheta(u_1', \tau_{11})_2 \left\{ \vartheta\left(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right)_3 - \vartheta\left(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right)_0 \right\}. \end{aligned}$$

Machen wir in dem zweiten Theil der oben hingeschriebenen hyperelliptischen ϑ -Function dieselbe Transformation, so folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right)^2} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) n_2^2} \sin 2 \left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) u_1' \pi \sin 2 n_2 u_2' \pi \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} m_1^2} \sin 2 m_1 u_1' \pi \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) 4 v_2^2} \sin 4 v_2 u_2' \pi \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \tau_{11} \left(m_1 + \frac{1}{2}\right)^2} \sin (2 m_1 + 1) u_1' \pi \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \left(\tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4}\right) (2 v_2 + 1)^2} \sin 2 (2 v_2 + 1) u_2' \pi = 0, \end{aligned}$$

und es ergibt sich somit für $\tau_{11} = 2 \tau_{12}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) &= \frac{1}{2} \vartheta(u_1', \tau_{11})_3 \left\{ \vartheta(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4})_3 + \vartheta(u_1', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4})_0 \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \vartheta(u_1', \tau_{11})_2 \left\{ \vartheta(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4})_3 - \vartheta(u_2', \tau_{22} - \frac{\tau_{11}}{4})_0 \right\}, \end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{(i - \sqrt{i}) \omega_{11} u_2 + (i \sqrt{i} + i) \omega_{21} u_1}{2(2i - \sqrt{i} + i \sqrt{i}) \omega_{11} \omega_{21}} \\ u_2' &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2} i \sqrt{i} - \frac{1}{2} i\right) \omega_{21} u_1 - \left(1 + \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} \sqrt{i}\right) \omega_{11} u_2}{2(2i - \sqrt{i} + i \sqrt{i}) \omega_{11} \omega_{21}} \end{aligned}$$

ist, und aus welcher somit nach den obigen Auseinandersetzungen folgt, dass das vorgelegte Integral auf elliptische Integrale reducirbar ist; in der That ist das Integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y(y^4 - 1)}}$$

nichts anderes als das oben auf algebraischem Wege reducirte Jacobi'sche Integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1+\kappa y)(1+\lambda y)(1-\kappa \lambda y)}},$$

wenn in letzterem $\kappa = 1$, $\lambda = i$ gesetzt wird. Macht man in der eben gefundenen Beziehung zwischen den hyperelliptischen und elliptischen ϑ -Functionen Substitutionen von halben Perioden, so erhält man die entsprechenden Gleichungen für die anderen ϑ -Functionen; setzt man ferner die Argumente gleich Null, so ergeben sich die Beziehungen zwischen den Integralmoduln, und die nun zu bewerkstellende Zusammensetzung der reducirten ϑ -Functionen zu Quotienten liefert dann die algebraische Transformation, die wir jedoch schon oben gefunden haben und nicht noch auf diesem Wege herleiten wollen.

Aber nicht bloss die Frage der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische, sondern auch die der Reduction hyperelliptischer Integrale irgend welcher Ordnung auf solche niederer Ordnung überhaupt ist vermöge des oben ausgesprochenen allgemeinen Transformationssatzes einer Beantwortung fähig. Es war nämlich gezeigt worden, dass, wenn ein hyperelliptisches Integral $2\sigma + 1^{\text{ter}}$ Ordnung auf hyperelliptische Integrale niedrigerer, $2\tau + 1^{\text{ter}}$ Ordnung reducirbar ist, nothwendig ein hyperelliptisches Integral $2\sigma + 1^{\text{ter}}$ Ordnung und erster Gattung gleich sein muss einer Summe von τ gleichartigen hyperelliptischen Integralen $2\tau + 1^{\text{ter}}$ Ordnung, deren τ Grenzen Lösungen einer Gleichung τ^{ten} Grades sind

$$(70) \dots H^{\tau} + \omega_1(x) H^{\tau-1} + \dots \omega_{\tau}(x) = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x , und für welche die zu den Lösungen dieser Gleichung gehörigen Irrationalitäten $\sqrt{R_1(H)}$ sich durch eben diese Lösungen, durch x und die zu dem ursprünglichen hyperelliptischen Integrale $2\sigma + 1^{\text{ter}}$ Ordnung gehörige Irrationalität $\sqrt{R(x)}$ in der Form ausdrücken lassen

$$\frac{\sqrt{R_1(H)}}{\sqrt{R(x)}} = F(x, H),$$

oder

$$(71) \dots \frac{\sqrt{(H - \beta_1)(H - \beta_2) \dots (H - \beta_{2\tau+1})}}{\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{2\sigma+1})}} = F(x, H),$$

wenn $F(x, H)$ eine rationale Function von x und H bedeutet, und diese Bedingung war auch, wie oben gezeigt worden, die hinreichende. Die Frage also, wie ein hyperelliptisches Integral $2\sigma + 1^{\text{ter}}$ Ordnung beschaffen sein müsse, damit es auf hyperelliptische Integrale $2\tau + 1^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt werden könne, lässt sich somit auch folgendermassen ausdrücken:

Welche Beziehungen müssen zwischen den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2\sigma+1}$ bestehen, damit die rationalen Functionen $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_{\tau}(x)$ so bestimmt werden können, dass für die τ Lösungen der Gleichung (70) die linke Seite der Gleichung (71) sich rational durch x und durch die respective Lösung ausdrücken lässt oder — in bekannter Ausdrucksweise — dass jene linke Seite mit der Lösung der Gleichung (70) gleichvertheilt ist?

Wie nun diese Aufgabe in allen Fällen zu lösen ist, mag an der Behandlung*) der Frage gezeigt werden, welche die Reduction

*) Die nachfolgende Methode gestattet auch weit allgemeinere Transformationsfragen zu behandeln und liefert, wie ich gezeigt habe, z. B. den Satz, dass ein allgemeines Transformationsproblem für hyperelliptische Integrale von höherer Ordnung als der ersten nicht existirt; s. meine Arbeit „Ueber die Erweiterung des Jacobi'schen Transformationsprincips“. (Crelle's Journal B. 87.)

der hyperelliptischen Functionen zweiter Ordnung auf diejenigen erster Ordnung zum Gegenstande hat und somit, da $\tau = 2$ ist, von der Untersuchung der Gleichung ausgehen muss

$$(72) \dots \omega_0(x) H^2 + \omega_1(x) H + \omega_2(x) = 0,$$

in welcher die Coefficienten dieser Gleichung ganze Functionen von x bedeuten. Beschränken wir zunächst das Problem auf die Aufsuchung von Transformationen zweiten Grades, welche das noch näher zu charakterisirende hyperelliptische Integral zweiter Ordnung auf solche erster Ordnung zurückführt, so wäre die folgende Aufgabe zu lösen:

Es sollen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Wurzeln eines Polynoms 7^{ten} Grades

$$(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)$$

angegeben werden, damit für die Lösungen η_1 und η_2 der quadratischen Gleichung

$$(73) \dots (1 + a_1 x + a_2 x^2) \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \eta + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 0,$$

worin $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ noch zu bestimmende Constanten sind, der Quotient

$$(A) \dots \frac{V(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)}{V(\eta - \beta_0)(\eta - \beta_1)(\eta - \beta_2)(\eta - \beta_3)(\eta - \beta_4)},$$

in welchem die Constanten $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ noch bestimmt werden sollen, respective mit η_1 und η_2 gleichverzweigt ist — somit die Erweiterung der oben aufgeworfenen und beantworteten Frage nach den durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische Integrale reducirbaren hyperelliptischen Integralen erster Ordnung, welche auf den Jacobi'schen Fall führten.

Wir behaupten, dass, wenn die bestimmbar Grössen des Problems den Bedingungen unterworfen werden, dass in der Gleichung (73) dem

- (a) $\dots x = \alpha_0$ die Werthe $\eta = \beta_0$ und β_1
- (b) $\dots x = \alpha_1$ „ $\eta = \beta_0$ und β_1
- (c) $\dots x = \alpha_2$ „ $\eta = \beta_2$ und β_3
- (d) $\dots x = \alpha_3$ „ $\eta = \beta_2$ und β_3
- (e) $\dots x = \alpha_4$ „ $\eta = \beta_4$ und ∞
- (f) $\dots x = \infty$ „ $\eta = \beta_4$ und ∞
- (g) $\dots x = \alpha_5$ eine Verzweigung von η und
- (h) $\dots x = \alpha_6$ „ „ „

entsprechen, der Quotient (A) in der That wie η verzweigt ist, und werden später untersuchen, ob den eben angegebenen Bedingungen

sich stets durch algebraische Beziehungen zwischen den Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_6$ genügen lasse. Nehmen wir also zunächst an, man könne die eben aufgestellten Bedingungen befriedigen, so wird, weil nach (a) dem Werthe $x = \alpha_0$ die beiden verschiedenen Werthe β_0 und β_1 entsprechen sollen, nothwendig vermöge der quadratischen Gleichung (73) η um β_0 und β_1 herum eine eindeutige Function von x in der Umgebung von α_0 , und somit nach der Taylor'schen Reihe

$$(74) \dots \eta - \beta_0 = m_1(x - \alpha_0) + m_2(x - \alpha_0)^2 + \dots$$

sein; daraus folgt

$$\eta - \beta_0 = m_1(x - \alpha_0) \{1 + n_1(x - \alpha_0) + \dots\},$$

und somit

$$(\eta - \beta_0)^{\frac{1}{2}} = m_1^{\frac{1}{2}}(x - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} \{1 + l_1(x - \alpha_0) + \dots\},$$

so dass in dem Quotienten (A) in der Umgebung von α_0 für die Lösung η , welche für $x = \alpha_0$ den Werth β_0 annimmt,

$$\frac{\sqrt{\eta - \beta_0}}{\sqrt{x - \alpha_0}}$$

eine eindeutige Function von x wird, während die anderen Factoren des Zählers und Nenners von (A) an sich eindeutige Functionen sind, und daher (A) selbst in der Umgebung von $x = \alpha_0$ für $\eta = \beta_0$ eindeutig, also so verzweigt wie η vermöge der Gleichung (74) selbst, was eben nachgewiesen werden sollte. Dasselbe gilt in der Umgebung von $x = \alpha_0$ für die Lösung $\eta = \beta_1$, und analog auch für die weiteren drei Bedingungen (b), (c), (d). Für die Bedingung (e), welche wieder η als eindeutige Function um α_4 herum definirt, wird für die erste Zusammenstellung $\alpha_4 \beta_4$ der vorige Schluss gelten; soll dagegen dem Werthe $x = \alpha_4$ der Werth $\eta = \infty$ entsprechen, so muss, wenn wieder eben so wenig wie oben, weitere Bedingungen hinzutreten, im Allgemeinen

$$(75) \dots \eta = \kappa_{-1}(x - \alpha_4)^{-1} + \kappa_0 + \kappa_1(x - \alpha_4) + \dots$$

oder

$$\eta = \kappa_{-1}(x - \alpha_4)^{-1} \{1 + \rho_1(x - \alpha_4) + \dots\},$$

und daher

$$(76) \dots \eta^{\frac{5}{2}} = \kappa_{-1}^{\frac{5}{2}}(x - \alpha_4)^{-\frac{5}{2}} \{1 + \sigma_1(x - \alpha_4) + \dots\}$$

sein; beachtet man nun, dass die Entwicklung des Quotienten (A) in der Umgebung von $x = \alpha_4$, $\eta = \infty$ folgendermassen lautet

$$\frac{(x - \alpha_4)^{\frac{1}{2}} \{A_0 + A_1(x - \alpha_4) + \dots\}}{\eta^{\frac{5}{2}} \{1 + B_1\eta^{-1} + \dots\}},$$

so sieht man sofort, dass dieser Quotient vermöge der Gleichungen (75) und (76) wieder eindeutig ist, also den durch Gleichung (75) definirten Charakter der Function η besitzt. Was die Gleichung (f) betrifft, welche wiederum η als eindeutige Function von x in der Umgebung von $x = \infty$ oder, wenn $x = \xi^{-1}$ gesetzt wird, in der Umgebung von $\xi = 0$ definirt, so wird sich für die Zusammenstellung $x = \infty$, $\eta = \beta_4$

$$(77) \dots \eta - \beta_4 = m_1 x^{-1} + m_2 x^{-2} + \dots \\ = m_1 x^{-1} \{1 + n_1 x^{-1} + \dots\}$$

und daraus

$$(78) \dots (\eta - \beta_4)^{\frac{1}{2}} = m_1^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \{1 + p_1 x^{-1} + \dots\}$$

ergeben, so dass die Entwicklung von (A) in der Umgebung dieser Werthe lautet

$$\frac{x^{\frac{7}{2}} \{1 + \sigma_1 x^{-1} + \dots\}}{(\eta - \beta_4)^{\frac{1}{2}} \{1 + \tau_1 (\eta - \beta_4) + \dots\}},$$

und daher vermöge der Gleichungen (77) und (78) wiederum eindeutig ist um $x = \infty$, $\eta = \beta_4$ herum, wie nach der Gleichung (77) η selbst. Entsprechen sich jedoch $x = \infty$, $\eta = \infty$ eindeutig, so ist

$$(79) \dots \eta = \varrho_1 x + \varrho_0 + \varrho_{-1} x^{-1} + \dots = \varrho_1 x \{1 + \sigma_1 x^{-1} + \dots\}$$

also

$$(80) \dots \eta^{\frac{5}{2}} = \varrho_1^{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} \{1 + \tau_1 x^{-1} + \dots\},$$

und somit der Quotient (A) vermöge (79) und (80)

$$\frac{x^{\frac{7}{2}} \{1 + l_1 x^{-1} + \dots\}}{\eta^{\frac{5}{2}} \{1 + l_1 \eta^{-1} + \dots\}}$$

eindeutig um $x = \infty$, $\eta = \infty$, also vom Charakter der Function η selbst.

Wir haben somit bisher gefunden, dass der Quotient (A) als Function von x aufgefasst um die Punkte $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \infty$ herum mit η selbst, welches durch die Gleichung (73) definirt sein sollte, gleichverzweigt ist, vorausgesetzt, dass die Gleichung (73) den von (a) bis (f) gestellten Bedingungen wird genügen können, was später untersucht werden soll.

Gehen wir nunmehr zur Bedingung (g) über, welche verlangt, dass η im Punkte $x = \alpha_5$ verzweigt, also vermöge der Natur der Gleichung (73) zweideutig sei, so folgt

$$(81) \dots \eta - \eta_0 = \nu_1 (x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}} + \nu_2 (x - \alpha_5)^{\frac{3}{2}} + \dots \\ = \nu_1 (x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}} \{1 + \omega_1 (x - \alpha_5)^{\frac{3}{2}} + \dots\},$$

worin η_0 einen endlichen, von $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_4$ verschiedenen Werth bezeichnen soll; da nun die Entwicklung des Quotienten (A) um $x = \alpha_5$, $\eta = \eta_0$ herum lautet

$$\frac{(x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}} \{1 + r_1 (x - \alpha_5) + \dots\}}{H_0 \{1 + H_1 (\eta - \eta_0) + \dots\}},$$

oder vermöge (81)

$$\frac{1}{H_0} (x - \alpha_5)^{\frac{1}{2}} + P_1 (x - \alpha_5)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

so wird (A) in α_5 ebenso verzweigt sein, wie es η selbst nach der Gleichung (81) ist; genau dasselbe gilt offenbar für die Bedingung (h), und wir finden somit zunächst, dass der Quotient (A) in den Punkten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \infty$ so verzweigt ist wie η selbst, wenn diese Grösse als Lösung der Gleichung (73) so bestimmt werden kann, dass den Bedingungen (a) bis (h) Genüge geschieht. Zugleich erkennt man aber auch, dass für jedes andere x dieselbe Eigenschaft statt haben muss; denn einerseits kann einem $x = \xi$, welches nicht zu jenen Werthen gehört, keiner der Werthe $\eta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \infty$ entsprechen, wie vermöge der Bedingungen (a) bis (f), welche offenbar auch in die Form gesetzt werden können

$$\begin{aligned} \eta = \beta_0 & \quad x = \alpha_0 \text{ und } \alpha_1 \\ \eta = \beta_1 & \quad x = \alpha_0 \text{ und } \alpha_1 \\ \eta = \beta_2 & \quad x = \alpha_2 \text{ und } \alpha_3 \\ \eta = \beta_3 & \quad x = \alpha_2 \text{ und } \alpha_3 \\ \eta = \beta_4 & \quad x = \alpha_4 \text{ und } \infty \\ \eta = \infty & \quad x = \alpha_4 \text{ und } \infty, \end{aligned}$$

und weil nach (73) zu jedem η -Werthe nur 2 Werthe von x gehören, unmittelbar zu erkennen ist; andererseits wird, wenn η für $x = \xi$ eindeutig ist,

$$\begin{aligned} (82) \dots \eta - \eta_1 &= m_1 (x - \xi) + m_2 (x - \xi)^2 + \dots \\ &= m_1 (x - \xi) \{1 + n_1 (x - \xi) + \dots\} \end{aligned}$$

sein, und somit der Quotient (A) lauten

$$(B) \dots \frac{Q_0 + Q_1 (x - \xi) + \dots}{R_0 + R_1 (\eta - \eta_1) + \dots},$$

also vermöge (82) ebenfalls um $x = \xi$ herum eindeutig wie η selbst sein; ist dagegen η für $x = \xi$ zweideutig, also

$$\eta - \eta_1 = p_1 (x - \xi)^{\frac{1}{2}} \{1 + q_1 (x - \xi)^{\frac{1}{2}} + \dots\},$$

so wird (A) vermöge (B) eine zweideutige Function von x um $x = \xi$

herum wie η selbst; es ergibt sich somit, dass, wenn die Coefficienten der Gleichung (73) so bestimmt werden könnten, dass den Bedingungen (a) bis (h) Genüge geschieht, der Quotient (A) wie die Grösse η selbst verzweigt, also durch x und η rational ausdrückbar wäre, woraus nach dem Früheren folgen würde, dass dann ein zu dem Zähler von (A) gehöriges hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung auf zwei zu dem Nenner von (A) gehörige hyperelliptische Integrale erster Ordnung reducirt werden könne.

Fassen wir nunmehr zuerst die Bedingung (e) auf, nach welcher dem Werthe $x = \alpha_4$ $\eta = \infty$ entsprechen soll, so muss nach (73) bekanntlich

$$(83) \dots 1 + a_1 x + a_2 x^2 = a_2 (x - \alpha_4) (x - \xi_1)$$

sein, während der andere dem $x = \alpha_4$ entsprechende Werth von η nach (73) durch den Ausdruck bestimmt ist

$$(84) \dots - \frac{c_0 + c_1 \alpha_4 + c_2 \alpha_4^2}{b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2} = \beta_4.$$

Was ferner die Bedingung (f) anlangt, nach welcher dem Werthe $x = \infty$ die Werthe $\eta = \beta_4$ und $\eta = \infty$ entsprechen sollen, so werden, weil, wenn $x = \frac{1}{\xi}$, $\eta = \frac{1}{y}$ gesetzt wird, dem Werthe $\xi = 0$ vermöge (83) in der Gleichung (73) oder in

$$a_2 (1 - \alpha_4 \xi) (1 - \xi \xi_1) + (b_0 \xi^2 + b_1 \xi + b_2) y + (c_0 \xi^2 + c_1 \xi + c_2) y^2 = 0$$

die Werthe $y = 0$ und $y = \frac{1}{\beta_4}$ zugehören müssen; da aber für ein endliches ξ_1 dem $\xi = 0$ nicht $y = 0$ entsprechen kann, so muss in (83) $a_2 = 0$ genommen werden, d. h. in (73) der Coefficient von η^2 linear von der Form $1 + a_1 x$ sein, und da

$$1 + a_1 x = a_1 \left(x + \frac{1}{a_1} \right)$$

für $x = \alpha_4$ verschwinden, also $\frac{1}{a_1} = -\alpha_4$, oder $a_1 = -\frac{1}{\alpha_4}$ sein muss, so wird die Gleichung (73) in

$$(85) \dots \left(1 - \frac{x}{\alpha_4} \right) \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \eta + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = 0$$

übergehen, welche also einerseits der Bedingung (e) genügt, indem auch noch die Beziehung (84) gültig bleibt, und für welche andererseits die durch Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $\eta = \frac{1}{y}$ transformirte Gleichung lautet

$$(86) \dots \xi \left(\xi - \frac{1}{\alpha_4} \right) + (b_0 \xi^2 + b_1 \xi + b_2) y + (c_0 \xi^2 + c_1 \xi + c_2) y^2 = 0,$$

welche in der That für $\xi = 0$ den Werth $y = 0$ liefert, und aus

welcher, da nach (f) $\xi = 0$ auch $y = \frac{1}{\beta_4}$ entsprechen soll,

$$(87) \dots - \frac{c_2}{b_2} = \beta_4$$

folgt. Die Zusammenstellung von (84) und (87) liefert

$$(88) \dots c_2 b_0 - c_0 b_2 + \alpha_4 (c_2 b_1 - c_1 b_2) = 0$$

als Bedingungsgleichung zwischen den Constanten des Problems, während β_4 aus (87) selbst bestimmt wird.

Nachdem die Bedingungen (e) und (f) erfüllt sind, werden die Constanten $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ der Gleichung (85) noch so zu bestimmen sein, dass auch den übrigen Genüge geschieht; da vermöge der Bedingungen (a) und (b) die Gleichung (85) für α_0 und α_1 dieselben beiden Lösungen β_0 und β_1 besitzen soll, so müssen offenbar die Gleichungen bestehen:

$$(89) \dots \frac{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_4}}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_4}} = \frac{b_0 + b_1 \alpha_0 + b_2 \alpha_0^2}{b_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1^2} = \frac{c_0 + c_1 \alpha_0 + c_2 \alpha_0^2}{c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2},$$

und ebenso ziehen die Bedingungen (c) und (b) die Gleichungen nach sich

$$(90) \dots \frac{1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_4}}{1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4}} = \frac{b_0 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_2^2}{b_0 + b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2} = \frac{c_0 + c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_2^2}{c_0 + c_1 \alpha_3 + c_2 \alpha_3^2};$$

da endlich η in den Punkten α_5 und α_6 verzweigt sein soll, so folgt, dass die Discriminante der Gleichung (85) für α_5 und α_6 verschwinden muss, oder dass die Bedingungsgleichungen bestehen müssen

$$(91) \dots (b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \alpha_5^2)^2 - 4 \left(1 - \frac{\alpha_5}{\alpha_4}\right) (c_0 + c_1 \alpha_5 + c_2 \alpha_5^2) = 0$$

$$(92) \dots (b_0 + b_1 \alpha_6 + b_2 \alpha_6^2)^2 - 4 \left(1 - \frac{\alpha_6}{\alpha_4}\right) (c_0 + c_1 \alpha_6 + c_2 \alpha_6^2) = 0,$$

und es ergeben sich dann die Werthe von $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ unmittelbar. Untersucht man aber den ersten Theil der Bedingung (89), so lässt sich derselbe auf die Form bringen

$$(93) \dots b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2 - b_2 (\alpha_4 - \alpha_1) (\alpha_4 - \alpha_0) = 0,$$

und ebenso lautet der erste Theil der Bedingung (90)

$$(94) \dots b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2 - b_2 (\alpha_4 - \alpha_3) (\alpha_4 - \alpha_2) = 0,$$

woraus, wenn b_2 von Null verschieden ist, die Beziehung folgt

$$(95) \dots (\alpha_4 - \alpha_1) (\alpha_4 - \alpha_0) = (\alpha_4 - \alpha_3) (\alpha_4 - \alpha_2).$$

Ebenso folgt aus den zweiten Theilen der Bedingungen (89) und (90), dass

$$(96) \dots c_0 + c_1 \alpha_4 + c_2 \alpha_4^2 - c_2 (\alpha_4 - \alpha_1) (\alpha_4 - \alpha_0) = 0$$

und

$$(97) \dots c_0 + c_1 \alpha_4 + c_2 \alpha_4^2 - c_2 (\alpha_4 - \alpha_3) (\alpha_4 - \alpha_2) = 0$$

ist, woraus sich wieder (95) und durch Zusammenstellung mit (93) und (94) die Identität von (88) ergibt. Die Gleichungen (91), (92), (93), (96) liefern nun Bestimmungsgleichungen für die Constanten $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$, und wir finden somit, dass ein zu dem Polynom

$$(x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) (x - \alpha_5) (x - \alpha_6)$$

gehöriges hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung im Allgemeinen dann durch eine Transformation zweiten Grades von der Form

$$(1 + a_1 x + a_2 x^2) \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \eta + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

auf hyperelliptische Integrale erster Ordnung zurückführbar ist, wenn zwischen den Wurzeln des Polynoms die Beziehung besteht

$$(\alpha_4 - \alpha_1) (\alpha_4 - \alpha_0) = (\alpha_4 - \alpha_3) (\alpha_4 - \alpha_2).$$

Es bleibt aber immerhin möglich, dass eine Substitution, welche in η linear und in x quadratisch ist, also statt (73) die Form hat

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \eta + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0,$$

den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) (x - \alpha_5) (x - \alpha_6)}}{\sqrt{(\eta - \beta_0) (\eta - \beta_1) (\eta - \beta_2) (\eta - \beta_3) (\eta - \beta_4)}}$$

zu einer mit η gleichverzweigten, d. h. zu einer rationalen Function von η macht. Ordnet man nämlich, um bei der angegebenen Methode zu bleiben — man könnte hier unmittelbar für η die rationale Function in x substituiren — die Werthe

$$\begin{aligned} x = \alpha_0 & \quad \eta = \beta_1 \\ x = \alpha_1 & \quad \eta = \beta_1 \\ x = \alpha_2 & \quad \eta = \beta_2 \\ x = \alpha_3 & \quad \eta = \beta_2 \\ x = \alpha_4 & \quad \eta = \beta_3 \\ x = \alpha_5 & \quad \eta = \beta_3 \\ x = \alpha_6 & \quad \eta = \beta_4 \\ x = \infty & \quad \eta = \beta_4 \end{aligned}$$

einander zu und stellt weiter fest, dass $\eta = \beta_0$ und $\eta = \infty$ zwei Werthe seien, für die x als Function von η aufgefasst einen einfachen

Verzweigungspunkt hat, so wird, was die Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6, \infty$ betrifft, unmittelbar ersichtlich sein, dass der Quotient der Irrationalitäten wieder rational in x ist, und da

$$\eta - \beta_0 = \mu_2(x - \xi)^2 + \mu_3(x - \xi)^3 + \dots$$

und

$$\eta = \nu_2(x - \xi)^{-2} + \nu_3(x - \xi)^{-1} + \dots$$

sein soll, so wird $\sqrt{\eta - \beta_0}$ sowohl wie $\sqrt{\eta}$ selbst wieder eindeutig sein, und es wird sich also nur darum handeln, nachzusehen, ob die aufgestellten Bedingungen überhaupt erfüllt werden können. Die ersten acht Bedingungen geben die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{b_0 + b_1 \alpha_0 + b_2 \alpha_0^2}{a_0 + a_1 \alpha_0 + a_2 \alpha_0^2} &= \frac{b_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1^2}{a_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_1^2}, \\ \frac{b_0 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_2^2}{a_0 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2^2} &= \frac{b_0 + b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2}{a_0 + a_1 \alpha_3 + a_2 \alpha_3^2}, \\ \frac{b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2}{a_0 + a_1 \alpha_4 + a_2 \alpha_4^2} &= \frac{b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \alpha_5^2}{a_0 + a_1 \alpha_5 + a_2 \alpha_5^2}, \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) \alpha_6 + a_0 b_2 - b_0 a_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche zu gleicher Zeit die Werthe $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ liefern, und somit 4 Bestimmungsgleichungen für die Grössen $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ und die Grössen α ; um nun die beiden letzten Bedingungen zu erfüllen, muss x für $\eta = \beta_0$ und $\eta = \infty$ zwei gleiche Werthe annehmen und in diesen Punkten verzweigt sein; da aber die Substitutionsgleichung in die Form gebracht werden kann

$$x^2(a_2\eta + b_2) + x(a_1\eta + b_1) + a_0\eta + b_0 = 0,$$

so wird die Discriminante lauten

$$(a_1\eta + b_1)^2 - 4(a_2\eta + b_2)(a_0\eta + b_0) = 0$$

oder

$$\eta^2(a_1^2 - 4a_0a_2) + 2\eta(a_1b_1 - 2a_2b_0 - 2a_0b_2) + b_1^2 - 4b_0b_2 = 0,$$

und wenn diese die Lösungen $\eta = \infty$ und $\eta = \beta_0$ haben soll, so muss

$$a_1^2 - 4a_0a_2 = 0, \quad \beta_0 = \frac{4b_0b_2 - b_1^2}{2(a_1b_1 - 2a_2b_0 - 2a_0b_2)}$$

sein, wovon nur die erste Gleichung eine Bedingungsgleichung für die a liefert, während die zweite die Grösse β_0 bestimmt. Führt man nun die ersten drei der obigen Bedingungen auf eine einfachere leicht ersichtliche Form zurück, so erhält man im Ganzen die folgenden Gleichungen:

$$b_0 a_1 - b_1 a_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2) (\alpha_0 + \alpha_1) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \alpha_0 \alpha_1 = 0$$

$$b_0 a_1 - b_1 a_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2) (\alpha_2 + \alpha_3) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \alpha_2 \alpha_3 = 0$$

$$b_0 a_1 - b_1 a_0 + (b_0 a_2 - a_0 b_2) (\alpha_4 + \alpha_5) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \alpha_4 \alpha_5 = 0$$

$$(b_0 a_2 - a_0 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \alpha_6 = 0$$

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0,$$

und erkennt hieraus, dass die zwischen den Lösungen des hyperelliptischen Polynoms zweiter Ordnung bestehenden Bedingungengleichungen in der Form dargestellt werden können

$$(98) \dots (\alpha_6 - \alpha_0) (\alpha_6 - \alpha_1) = (\alpha_6 - \alpha_2) (\alpha_6 - \alpha_3)$$

$$(99) \dots (\alpha_6 - \alpha_0) (\alpha_6 - \alpha_1) = (\alpha_6 - \alpha_4) (\alpha_6 - \alpha_5),$$

während die Substitutionscoefficienten aus den obigen Gleichungen berechnet werden können. So wird z. B. das aus dem Integral

$$(a) \dots \int \frac{dX}{\sqrt{X^8 - 1}}$$

durch die Substitution

$$X - 1 = \frac{1}{x}$$

hergeleitete Integral

$$(b) - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x+1)^7 + (x+1)^6 x + (x+1)^5 x^2 + (x+1)^4 x^3 + (x+1)^3 x^4 + (x+1)^2 x^5 + (x+1) x^6 + x^7}}$$

durch die Substitution

$$x^2 \eta - (x+1)^2 = 0,$$

also eine in η lineare Gleichung, in

$$(c) \dots \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta(\eta^4 - 1)}},$$

also in ein hyperelliptisches Integral erster Ordnung übergehen, und es ist unmittelbar zu sehen, dass in diesem Beispiel die oben allgemein getroffene Zuordnung der Lösungen und die Festsetzung der Verzweigung in $\eta = \infty$ und $\eta = \beta_0 = -1$ hier für die resp. Werthe $x = 0$ und -1 in der That erfüllt ist; dass das gegebene hyperelliptische Integral zweiter Ordnung auch auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, geht aus der vorher angestellten Untersuchung hervor, nach welcher das Integral (c) nicht wesentlich von dem Jacobi'schen hyperelliptischen Integrale erster Ordnung verschieden ist.

Untersuchen wir nunmehr eine Transformation dritten Grades, welche ein hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung in solche erster Ordnung transformiren soll, so wird diese nach früheren Sätzen die Form haben müssen

$$(100) \dots (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \eta + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = 0,$$

und es wird wieder der Bedingung zu genügen sein, dass

$$\frac{\sqrt{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)(x - \alpha_6)}}{\sqrt{(\eta - \beta_0)(\eta - \beta_1)(\eta - \beta_2)(\eta - \beta_3)(\eta - \beta_4)}}$$

sich rational durch x und η ausdrücken lässt, also mit η gleichverzweigt ist; wir werden uns, nachdem wir in dem vorigen Beispiel das Princip der Methode ausführlich besprochen, im Folgenden kürzer fassen dürfen.

Stellen wir die Bedingungen auf, dass

dem Werthe $x = \alpha_0$	die Werthe $\eta = \beta_0$ und β_1
„ $x = \alpha_1$	„ $\eta = \beta_0$ und β_1
„ $x = \alpha_2$	„ $\eta = \beta_0$ und β_1
„ $x = \alpha_3$	„ $\eta = \beta_2$ und β_3
„ $x = \alpha_4$	„ $\eta = \beta_2$ und β_3
„ $x = \alpha_5$	„ $\eta = \beta_2$ und β_3
„ $x = \alpha_6$	„ $\eta = \beta_4$ und β_4 aber nicht verzweigt
„ $x = \infty$	„ $\eta = \beta_4$,

endlich dem Werthe $\eta = \infty$ dreimal der Werth $x = \infty$ entsprechen, so sieht man unmittelbar, dass, wenn diese Bedingungen erfüllt werden können, der Quotient jener Irrationalitäten wie η verzweigt sein wird; denn in Betreff aller Bedingungen mit Ausnahme der letzteren lehren dies die oben angestellten Betrachtungen, was jedoch die Festsetzung betrifft, dass dem Werthe $\eta = \infty$ dreimal der Werth $x = \infty$ entsprechen soll, so wird im Allgemeinen daraus

$$\eta = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + a_{-1} x^{-1} + \dots$$

oder

$$\eta = a_3 x^3 \{1 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \dots\}$$

folgen, und somit die Entwicklung des Quotienten der Irrationalitäten lauten

$$\frac{x^{\frac{7}{2}} \{1 + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \dots\}}{a_3^{\frac{5}{2}} x^{\frac{15}{2}} \{1 + B_1 x^{-1} + B_2 x^{-2} + \dots\}} = a_3^{-\frac{5}{2}} x^{-4} \{1 + C_1 x^{-1} + \dots\},$$

also wieder eindeutig in x sein und den Charakter von η in $x = \infty$ haben. Es kommt somit nur darauf an, die Coefficienten der Gleichung (100) den obigen Bedingungen gemäss zu bestimmen. Soll dem $\eta = \infty$ $x = \infty$ dreimal entsprechen, so muss, wenn $\eta = \frac{1}{y}$, $x = \frac{1}{\xi}$ gesetzt wird, in der Gleichung

$$(c_0 \xi^3 + c_1 \xi^2 + c_2 \xi + c_3) y^2 + (b_0 \xi^3 + b_1 \xi^2 + b_2 \xi + b_3) y + (\xi^3 + a_1 \xi^2 + a_2 \xi + a_3) = 0$$

für $y = 0$ $\xi = 0$ sein und zwar dreimal, also $a_3 = a_2 = a_1 = 0$; ausserdem soll für $x = \infty$ $\eta = \infty$ und β_4 , also für $\xi = 0$ $y = 0$ und $\frac{1}{\beta_4}$ sein, woraus unmittelbar folgt, dass

$$(101) \dots \beta_4 = -\frac{c_3}{b_3}$$

sein muss, wo c_3 von Null verschieden sein wird, es lautet somit die Gleichung (100)

$$(102) \dots \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \eta + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = 0,$$

durch welche nunmehr den anderen Bedingungen zu genügen ist.

Da dem Werthe $x = \alpha_6$ der Werth $\eta = \beta_4$ zweimal entsprechen soll, so wird, da

$$\eta = -\frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}{2}$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)^2 - 4(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3)}$$

ist,

(103) $\dots (b_0 + b_1 \alpha_6 + b_2 \alpha_6^2 + b_3 \alpha_6^3)^2 - 4(c_0 + c_1 \alpha_6 + c_2 \alpha_6^2 + c_3 \alpha_6^3) = 0$ eine Bedingungsgleichung liefern, und da $\eta = \beta_4$ durch (101) schon bestimmt war, eine zweite Bedingungsgleichung in der Form folgen

$$(104) \dots b_0 + b_1 \alpha_6 + b_2 \alpha_6^2 + b_3 \alpha_6^3 = \frac{2c_3}{b_3},$$

wodurch wiederum (103) in die einfachere übergeht

$$(105) \dots c_0 + c_1 \alpha_6 + c_2 \alpha_6^2 + c_3 \alpha_6^3 = \frac{c_3^2}{b_3^2};$$

aber damit für η , wie es gefordert war, keine Verzweigung in $x = \alpha_6$ stattfindet, muss auch die Ableitung der Function unter der Quadratwurzel für $x = \alpha_6$ verschwinden, also

$$(106) \dots \frac{c_3}{b_3} (b_1 + 2b_2 \alpha_6 + 3b_3 \alpha_6^2) - (c_1 + 2c_2 \alpha_6 + 3c_3 \alpha_6^2) = 0,$$

oder

$$(107) \dots (c_3 b_1 - b_3 c_1) + 2(c_3 b_2 - b_3 c_2) \alpha_6 = 0,$$

sein, so dass im Ganzen bis jetzt 3 Bedingungsgleichungen (104), (105), (107) zu erfüllen, und nur noch diejenigen Bedingungen zu berücksichtigen bleiben, welche den Punkten $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ entsprechen.

Soll nun die Gleichung (102) für die drei Werthe $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dieselben drei Wurzelpaare haben, so muss

$$(108) \dots b_0 + b_1 \alpha_0 + b_2 \alpha_0^2 + b_3 \alpha_0^3 = b_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1^2 + b_3 \alpha_1^3 \\ = b_0 + b_1 \alpha_2 + b_2 \alpha_2^2 + b_3 \alpha_2^3$$

$$(109) \dots c_0 + c_1 \alpha_0 + c_2 \alpha_0^2 + c_3 \alpha_0^3 = c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + c_3 \alpha_1^3 \\ = c_0 + c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_2^2 + c_3 \alpha_2^3$$

und ebenso

$$(110) \dots b_0 + b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2 + b_3 \alpha_3^3 = b_0 + b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_4^2 + b_3 \alpha_4^3 \\ = b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \alpha_5^2 + b_3 \alpha_5^3$$

$$(111) \dots c_0 + c_1 \alpha_3 + c_2 \alpha_3^2 + c_3 \alpha_3^3 = c_0 + c_1 \alpha_4 + c_2 \alpha_4^2 + c_3 \alpha_4^3 \\ = c_0 + c_1 \alpha_5 + c_2 \alpha_5^2 + c_3 \alpha_5^3$$

sein. Man sieht sofort, dass die Gleichungen (108), wenn jede ihrer Seiten durch die Constante κ bezeichnet wird, die Beziehung nach sich ziehen

$$(112) \dots b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = b_3 (x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) + \kappa$$

und ebenso nach (110)

$$(113) \dots b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = b_3 (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) (x - \alpha_5) + \kappa_1, \\ \text{woraus wiederum}$$

$$(113a) \dots (x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \\ - (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) (x - \alpha_5) = \frac{\kappa_1 - \kappa}{b_3}$$

folgt, oder

$$(114) \dots \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \\ \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5 \\ \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 + \frac{(\kappa - \kappa_1)}{b_3}; \end{cases}$$

ebenso ergibt sich aus (109) und (111)

$$(115) \dots c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = c_3 (x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) + \lambda \\ = c_3 (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) (x - \alpha_5) + \lambda_1,$$

und hieraus wiederum die Gleichungen (114), worin nach (113a)

$$\frac{\kappa_1 - \kappa}{b_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda}{c_3} = (\alpha_3 - \alpha_0) (\alpha_3 - \alpha_1) (\alpha_3 - \alpha_2)$$

sein muss; ausserdem folgen aus den Gleichungen (112), (113), (115) die Beziehungen

$$b_0 = -b_3 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + \kappa, \quad b_1 = b_3 (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2), \\ b_2 = -b_3 (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2), \\ c_0 = -c_3 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda, \quad c_1 = c_3 (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2), \\ c_2 = -c_3 (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2).$$

Die Bedingungen (104) und (105) lauten jetzt

$$(116) \dots b_3 (\alpha_6 - \alpha_0) (\alpha_6 - \alpha_1) (\alpha_6 - \alpha_2) + \kappa = \frac{2c_3}{b_3},$$

$$(117) \dots c_3 (\alpha_6 - \alpha_0) (\alpha_6 - \alpha_1) (\alpha_6 - \alpha_2) + \lambda = \frac{c_3^2}{b_3^2},$$

während (107) vermöge der eben gefundenen Werthe von b_1 , c_1 , b_2 , c_2 von selbst erfüllt wird; die Substitutionsgleichung (102) nimmt die

Form an

$$(118) \dots \eta^2 + [b_3(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + \kappa] \eta \\ + [c_3(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + \lambda] = 0,$$

während nach (113a) die hyperelliptische Irrationalität lautet:

$$(B) \sqrt{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \left[(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + \frac{\kappa - \kappa_1}{b_3} \right]} (x - \alpha_6),$$

und die Gleichungen (116) und (117) die Beziehung liefern

$$(119) \dots \kappa c_3 - \lambda b_3 = \frac{c_3^2}{b_3}.$$

Bezeichnet man aber zur Abkürzung

$$(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \text{ mit } \varphi(x),$$

so lautet die Gleichung (118)

$$\eta^2 + (b_3 \varphi(x) + \kappa) \eta + c_3 \varphi(x) + \lambda = 0,$$

und es wird daher

$$\eta = -\frac{b_3 \varphi(x) + \kappa}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b_3^2 \varphi(x)^2 + 2 \varphi(x) (b_3 \kappa - 2 c_3) + \kappa^2 - 4 \lambda};$$

da aber vermöge der Beziehung (119), wie unmittelbar folgt,

$$(b_3 \kappa - 2 c_3)^2 - b_3^2 (\kappa^2 - 4 \lambda) = 0$$

ist, so ergibt sich

$$(120) \dots \eta = -b_3 \varphi(x) - \kappa + \frac{c_3}{b_3},$$

und wir sehen daher, dass für die gefundene Transformation η nicht, wie es den Festsetzungen gemäss nach (102) sein sollte, die Lösung einer irreductibeln quadratischen Gleichung ist, sondern sich rational durch x ausdrücken lassen würde, somit nicht die gesuchte Lösung unseres Problems giebt; aber trotzdem kommen wir in (120) zu Reductionsformeln von hyperelliptischen Integralen zweiter Ordnung. Da die Grössen $b_3, c_3, \kappa, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ und α_6 völlig willkürlich bleiben, so setze man $b_3 = c_3 = 1$ und zur Vereinfachung, was keine Beschränkung involvirt, eine der Lösungen z. B. $\alpha_6 = 0$, so ergibt sich aus den Gleichungen (116) und (117)

$$\kappa = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + 2, \quad \lambda = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + 1,$$

während die Substitution übergeht in

$$\eta = -x^3 + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)x^2 - (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2)x - 1,$$

und die Werthe sich entsprechen

$$\eta = -\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 - 1, \quad x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \quad \eta = -1 \quad x = \alpha_6 = 0, \\ \eta = -\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 - 1, \quad x = \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$$

wobei die Grössen $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ durch die Gleichungen (114) mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$

verbunden sind. Man erkennt nun leicht, dass

$$\eta + \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + 1 = - (x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2)$$

$$\eta + \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 + 1 = - (x - \alpha_3) (x - \alpha_4) (x - \alpha_5)$$

$$= - (x - \alpha_0) (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) + \kappa_1 - \kappa$$

$$\eta + 1 = - x (x^2 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) x + (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2)),$$

also

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\eta + \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 + 1)(\eta + \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 + 1)(\eta + 1)} \\ &= \sqrt{-(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)(x - \alpha_5)x(x^2 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2)} \end{aligned}$$

ist, und dass somit, wenn

$$x^2 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2$$

ein vollständiges Quadrat ist, die Reduction der Quadratwurzel aus einem Polynom 7^{ten} Grades auf eine solche aus einem Polynom dritten Grades geleistet ist, was man natürlich einfacher von der rationalen Substitution ausgehend entwickelt hätte; so wird, wenn ε eine dritte Einheitswurzel bedeutet, und $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ die Lösungen von $x^3 = 1$ sind, endlich $\kappa_1 = 1$ angenommen wird, die Substitution

$$\eta = -x^3 - 1$$

die Beziehung liefern

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x(1-x^6)}} = -\frac{1}{3} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta+1)(\eta+2)}}.$$

Wählen wir endlich noch eine andere Form der Bedingungs-
gleichungen für die quadratische Transformation, indem wir mit Bei-
behaltung aller obigen Bezeichnungen

dem $x = \alpha_0$ die Werthe $\eta = \beta_0$ und β_1

„ $x = \alpha_1$ „ „ $\eta = \beta_0$ und β_2

„ $x = \alpha_2$ „ „ $\eta = \beta_1$ und β_2

„ $x = \alpha_3$ „ „ $\eta = \beta_0$ und β_3

„ $x = \alpha_4$ „ „ $\eta = \beta_1$ und β_3

„ $x = \alpha_5$ „ „ $\eta = \beta_2$ und β_3

„ $x = \alpha_6$ „ „ $\eta = \beta_4$ und β_4 aber nicht verzweigt

„ $x = \infty$ „ „ $\eta = \beta_4$,

endlich dem Werthe $\eta = \infty$ dreimal den Werth $x = \infty$ zuordnen, so sind gegen die früheren Bestimmungen nur die die Punkte $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ betreffenden geändert, und wir erhalten also zunächst wie oben die Form der Transformationsgleichung

$$(121) \quad \eta^2 + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \eta + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3) = 0$$

mit den drei Bedingungsgleichungen

$$(122) \quad b_0 + b_1 \alpha_6 + b_2 \alpha_6^2 + b_3 \alpha_6^3 = \frac{2c_3}{b_3}$$

$$(123) \quad c_0 + c_1 \alpha_6 + c_2 \alpha_6^2 + c_3 \alpha_6^3 = \frac{c_3^2}{b_3^2}$$

$$(124) \quad (c_3 b_1 - c_1 b_3) + 2(c_3 b_2 - b_3 c_2) \alpha_6 = 0.$$

Da nun den Bedingungen gemäss η denselben Werth β_0 für die drei Werthe $x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ annehmen soll, so werden die drei Gleichungen bestehen müssen

$$(A) \quad \begin{cases} \beta_0^2 + (b_0 + b_1 \alpha_0 + b_2 \alpha_0^2 + b_3 \alpha_0^3) \beta_0 + (c_0 + c_1 \alpha_0 + c_2 \alpha_0^2 + c_3 \alpha_0^3) = 0 \\ \beta_0^2 + (b_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1^2 + b_3 \alpha_1^3) \beta_0 + (c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + c_3 \alpha_1^3) = 0 \\ \beta_0^2 + (b_0 + b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2 + b_3 \alpha_3^3) \beta_0 + (c_0 + c_1 \alpha_3 + c_2 \alpha_3^2 + c_3 \alpha_3^3) = 0, \end{cases}$$

und daher

$$\begin{vmatrix} 1 & b_0 + b_1 \alpha_0 + b_2 \alpha_0^2 + b_3 \alpha_0^3 & c_0 + c_1 \alpha_0 + c_2 \alpha_0^2 + c_3 \alpha_0^3 \\ 1 & b_0 + b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_1^2 + b_3 \alpha_1^3 & c_0 + c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_1^2 + c_3 \alpha_1^3 \\ 1 & b_0 + b_1 \alpha_3 + b_2 \alpha_3^2 + b_3 \alpha_3^3 & c_0 + c_1 \alpha_3 + c_2 \alpha_3^2 + c_3 \alpha_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

somit, wie unmittelbar durch Zerlegung folgt,

$$\begin{aligned} & (b_1 c_2 - b_2 c_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \\ & + (b_2 c_3 - b_3 c_2) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} + (b_1 c_3 - b_3 c_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^3 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

oder endlich, wie leicht zu sehen, wenn durch $(\alpha_1 - \alpha_0)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_0)$ dividirt wird,

$$\begin{aligned} & (b_1 c_2 - b_2 c_1) + (b_2 c_3 - b_3 c_2) (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3) \\ & + (b_1 c_3 - b_3 c_1) (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3) = 0; \end{aligned}$$

ebenso folgt vermöge der anderen Bedingungen

$$\begin{aligned} & (b_1 c_2 - b_2 c_1) + (b_2 c_3 - b_3 c_2) (\alpha_0 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4) \\ & + (b_1 c_3 - b_3 c_1) (\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) = 0 \\ & (b_1 c_2 - b_2 c_1) + (b_2 c_3 - b_3 c_2) (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5) \\ & + (b_1 c_3 - b_3 c_1) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5) = 0 \\ & (b_1 c_2 - b_2 c_1) + (b_2 c_3 - b_3 c_2) (\alpha_3 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5) \\ & + (b_1 c_3 - b_3 c_1) (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) = 0, \end{aligned}$$

und es ergeben sich somit als Bedingungen zwischen den Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

$$(125) \dots \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3 \quad \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \\ 1 \quad \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 \quad \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 \\ 1 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_5 \end{array} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3 \quad \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 \\ 1 \quad \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 \quad \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_4 \\ 1 \quad \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \quad \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5 \end{array} \right\} = 0.$$

Genügen nun die Lösungen diesen beiden Gleichungen (125), so sind damit die Verhältnisse der drei Grössen

$$b_1 c_2 - b_2 c_1, \quad b_2 c_3 - b_3 c_2, \quad b_3 c_1 - b_1 c_3$$

gegeben, somit nach (124) auch α_6 in der Form bestimmt:

$$(126) \dots \alpha_6 = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{2(b_2 c_3 - c_2 b_3)},$$

und durch passende Wahl von b_0 und c_0 kann man endlich die beiden Gleichungen (122) und (123) befriedigen; die zu den durch die Gleichungen (125) und (126) definirten Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_6$ gehörigen Irrationalitäten definiren somit im Allgemeinen hyperelliptische Integrale zweiter Ordnung, welche auf solche erster Ordnung zurückführbar sind, falls die in den Grössen $1, \beta_0, \beta_0^2$ linearen Gleichungen (A) so wie die analogen für die zu bestimmenden Unbekannten quadratische Verhältnisse liefern.

§ 13.

Reductionsformen von Integralen linearer Differentialgleichungen, welche additiv aus Producten von algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt sind.

Nachdem im § 11 die Form solcher Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen beliebiger Ordnung untersucht worden, welche sich in *additiver Weise* aus algebraischen, logarithmischen Functionen und Integralen algebraischer Functionen zusammensetzen, wollen wir allgemeinere Zusammensetzungen solcher Functionsarten untersuchen, wie sie in der That bei linearen Differentialgleichungen vorkommen; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x$$

das Integral $z = x^2 \log x$, und die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = \frac{2}{x}$$

das Integral $z = x + x(\log x)^2$.

Habe also die nicht homogene, lineare Differentialgleichung

$$(127) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

ein algebraisch-logarithmisches Integral von der Form

$$(128) \dots z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \dots + u_\varrho \log v_\varrho \\ = u + \sum_1^\varrho u_\alpha \log v_\alpha,$$

worin $u, u_1, u_2, \dots u_\varrho, v_1, v_2, \dots v_\varrho$ algebraische Functionen von x bedeuten, dann wird, wenn dieser Werth von z in (127) eingesetzt wird, wegen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} + \sum_1^\varrho \frac{u_\alpha}{v_\alpha} \frac{dv_\alpha}{dx} + \sum_1^\varrho \frac{du_\alpha}{dx} \log v_\alpha$$

.....

die Differentialgleichung (127) in

$$(129) \quad F(x) + \sum_1^\varrho \left(\frac{d^m u_\alpha}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_\alpha}{dx^{m-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + Y_{m-1} \frac{du_\alpha}{dx} + Y_m u_\alpha \right) \log v_\alpha = y$$

übergehen, worin $F(x)$ eine algebraische Function bedeutet; nimmt man nun an, dass zwischen den in der Integralforn (128) vorkommenden Logarithmen keine lineare Relation von der Form

$$P_1 \log v_1 + P_2 \log v_2 + \dots + P_\varrho \log v_\varrho = Q$$

existirt, in welcher $P_1, P_2, \dots P_\varrho, Q$ algebraische Functionen von x bedeuten, indem wir im entgegengesetzten Falle einen der Logarithmen linear durch die anderen $\varrho - 1$ ausdrücken und in (128) einsetzen könnten, so wird, da die Gleichung (129) eine solche lineare Relation liefert, nothwendig der Coefficient eines jeden Logarithmus verschwinden, also

$$\frac{d^m u_\alpha}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} u_\alpha}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{du_\alpha}{dx} + Y_m u_\alpha = 0$$

sein müssen, und es folgt somit der Satz, dass, wenn eine Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

ein Integral von der Form

$$z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \dots + u_\varrho \log v_\varrho$$

besitzt, in welchem $u, u_1, u_2, \dots v_1, v_2, \dots$ algebraische Functionen von x bedeuten, und die Logarithmen nicht mehr in einer linearen

Beziehung mit algebraischen Coefficienten stehen, die Coefficienten der Logarithmen $u_1, u_2, \dots u_q$ algebraische Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung sein müssen.

Es mag bemerkt werden, dass, wenn $q > m$ ist, nothwendig, da $u_1, u_2, \dots u_m, u_{m+1}$ algebraische Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung sein müssen, eine homogene lineare Beziehung mit constanten Coefficienten von der Form

$$n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots + n_m u_m + n_{m+1} u_{m+1} = 0$$

bestehen wird.

Gehen wir wieder zu dem Integrale (128) zurück und lassen x einen solchen Umlauf machen, dass $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und y ihre Ausgangswerthe wieder annehmen*), während u in u' , u_α in u'_α , v_α in v'_α

*) Zur Erläuterung des Obigen und ähnlicher Schlüsse im Früheren mag hier auf rein algebraischem Wege — es geschieht ebenso leicht auf functionentheoretischem — der Satz bewiesen werden, dass man in einer mit Adjungirung der algebraisch irreductibeln Functionen $y_1, y_2, \dots y_q$ irreductibeln algebraischen Gleichung r^{ten} Grades

$$(a) \dots f(z, x, y_1, y_2, \dots y_q) = 0$$

durch geschlossene Umläufe von x , welche $y_1, y_2, \dots y_q$ unverändert lassen, zu allen Lösungen der Gleichung $z_1, z_2, \dots z_r$ gelangen kann, und es genügt offenbar nachzuweisen, dass, wenn eine Function z für alle geschlossenen Umläufe der Variablen, welche $y_1, y_2, \dots y_q$ unverändert lassen, die r verschiedenen Werthe $z_1, z_2, \dots z_r$ annimmt, diese die Lösungen einer irreductibeln algebraischen Gleichung r^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, y_2, \dots y_q$ zusammengesetzt sind, indem, wenn man in (a) durch geschlossene Umläufe nicht zu allen Werthen von z gelangen würde, ein Theil der Lösungen dieser irreductibeln Gleichung einer Gleichung niederen Grades von demselben Charakter angehören würde. Bildet man in bekannter Weise zum Zwecke jenes Nachweises eine Function t durch die in den Grössen $y_1, y_2, \dots y_q$ lineare mit constanten Coefficienten versehene Beziehung

$$t = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_q y_q,$$

so wird bekanntlich jede andere mit willkürlichen constanten Coefficienten versehene lineare Function derselben Grössen als ähnliche Function der ersteren rational durch t ausdrückbar sein mit Hülfe der Coefficienten derjenigen algebraischen Gleichung, deren Lösungen $y_1, y_2, \dots y_q$ sind, d. h. mit Hülfe rationaler Functionen von x ; stellt man nun q solcher linearer Beziehungen zusammen, so kann man mit Hülfe dieser die Grössen $y_1, y_2, \dots y_q$ rational durch t und x ausdrücken, und somit wird jeder geschlossene Umkreis von x , welcher $y_1, y_2, \dots y_q$ unverändert lässt, auch t zu seinem Werthe zurückführen und umgekehrt jeder geschlossene Weg, welcher t unverändert lässt, auch die Grössen $y_1, y_2, \dots y_q$ nicht ändern. Sei nun w eine algebraische Function von x , welche für jeden geschlossenen Umkreis von x , für den $y_1, y_2, \dots y_q$ unverändert bleiben, auch seinen Werth nicht ändert, so wird dieselbe nach dem Vorigen auch für jeden geschlossenen Umkreis, welcher t unverändert lässt, selbst unverändert bleiben, während w im Allgemeinen für alle

übergehen mögen, so wird offenbar durch den Ausdruck

$$z = u' + u_1' \log v_1' + u_2' \log v_2' + \cdots + u_q' \log v_q'$$

die Differentialgleichung (127) wiederum befriedigt werden, denn die Gleichung (129), aus welcher die Summe der Logarithmen herausfiel, enthält in der Function $F(x)$ nur rationale Verbindungen der u - und v -Grössen, da nur diese selbst oder ihre Ableitungen, die ja wieder durch diese Grössen rational ausdrückbar sind, in jener vorkommen, während $Y_1, \dots, Y_m, y$ unverändert bleiben sollten, und es werden offenbar auch $u_1', u_2', \dots, u_q'$ algebraische Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung sein; und dies wird für alle Wertheverbindungen von u und v gelten, welche denselben geschlossenen Umläufen von x entsprechen, für welche die Grössen $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, y$ ihre Ausgangswerthe wieder annehmen; sämtliche so entstehenden Werthe von z werden particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung (127) sein, und die Coefficienten der

die geschlossenen Umläufe von x , welche t die verschiedenen δ Werthe geben $t_1, t_2, \dots, t_\delta$ — worin δ der Grad der in x irreductibeln Gleichung für t bezeichnet — die δ verschiedenen Werthe $w_1, w_2, \dots, w_\delta$ annimmt. Es wird somit

$$w_1 t_1^\lambda + w_2 t_2^\lambda + \cdots + w_\delta t_\delta^\lambda$$

für jeden geschlossenen Weg von x unverändert bleiben, sich somit als rationale Function von x darstellen lassen; bekannte Schlüsse führen, wenn man $\lambda = 0, 1, 2, \dots, \delta - 1$ setzt, zu dem Resultat, dass w sich als rationale Function von x und t ausdrücken lässt. Aber der für w festgesetzten Bedingung leistet

$$w = z_1'' + z_2'' + \cdots + z_r''$$

Genüge, da sich diese Function der Voraussetzung nach für geschlossene Umläufe des x , welche $y_1, y_2, \dots, y_q$ unverändert lassen, selbst nicht ändert, und wird sich daher als rationale Function von x und t oder von $x, y_1, y_2, \dots, y_q$ ausdrücken lassen; es bilden somit $z_1, z_2, \dots, z_r$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung r^{ten} Grades, deren Coefficienten rational aus $x, y_1, y_2, \dots, y_q$ zusammengesetzt sind. Wäre nun diese Gleichung eine mit Adjungirung der Grössen $y_1, y_2, \dots, y_q$ reducible, so müsste einer ihrer rationalen Factoren

$$f_1(z, x, y_1, y_2, \dots, y_q)$$

für einige jener z -Werthe verschwinden, und lässt man nun x alle geschlossenen Umläufe machen, welche $y_1, y_2, \dots, y_q$ unverändert lassen, so wird f_1 immer identisch Null bleiben müssen, während z der Reihe nach alle r Werthe $z_1, z_2, \dots, z_r$ annimmt, d. h. die Gleichung $f_1 = 0$ wird r Lösungen haben, also nicht ein rationaler Factor jener Gleichung r^{ten} Grades sein können.

Es mag bei dieser Gelegenheit noch bemerkt werden, dass die Abel angehörige Schlussweise von der Bildung der t -Function nur der algebraische Ausdruck dafür ist, dass eine algebraische Function oder eine Riemann'sche Fläche gebildet wird, welche alle Verzweigungen der einzelnen Functionen besitzt und durch die sich somit die einzelnen Functionen nach einem bekannten Riemann'schen Satze rational ausdrücken lassen.

Logarithmen stets algebraische particuläre Integrale der reducirten linearen Differentialgleichung. Um festzustellen, welche Wertheverbindungen der u und v in die so successive entstehenden particulären Integrale eintreten werden, braucht man wieder nur eine Grösse t zu wählen, durch welche sich die Grössen $u, u_1, u_2, \dots u_\varrho, v_1, v_2, \dots v_\varrho$ mit Hilfe der Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_m, y$, wie in der Anmerkung näher ausgeführt wird, rational ausdrücken lassen, und die sämtlichen Werthe der u - und v -Grössen zu wählen, welche den Lösungen derjenigen irreductibeln algebraischen Gleichung entsprechen, deren eine Lösung t ist. Sei die irreductible Gleichung in t wieder vom δ^{ten} Grade, deren Lösungen $t, t_1, \dots t_{\delta-1}$, und die dem Werthe t_α von t entsprechenden Werthe von $u, u_1, \dots v_1, \dots$

$$u^{(\alpha)}, u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, \dots u_\varrho^{(\alpha)}, v_1^{(\alpha)}, v_2^{(\alpha)}, \dots v_\varrho^{(\alpha)},$$

endlich der entsprechende Ausdruck von z, z_α , so wird, da

$$z = u + \log v_1^{u_1} + \log v_2^{u_2} + \dots + \log v_\varrho^{u_\varrho}$$

ist, der Ausdruck

$$(130) \dots \frac{z + z_1 + z_2 + \dots + z_{\delta-1}}{\delta} = \frac{1}{\delta} \sum_{\alpha=0}^{\delta-1} u^{(\alpha)} \\ + \frac{1}{\delta} \log \left(v_1^{u_1} v_1^{(1)u_1^{(1)}} \dots v_1^{(\delta-1)u_1^{(\delta-1)}} \right) + \frac{1}{\delta} \log \left(v_2^{u_2} v_2^{(1)u_2^{(1)}} \dots v_2^{(\delta-1)u_2^{(\delta-1)}} \right) \\ + \dots + \frac{1}{\delta} \log \left(v_\varrho^{u_\varrho} v_\varrho^{(1)u_\varrho^{(1)}} \dots v_\varrho^{(\delta-1)u_\varrho^{(\delta-1)}} \right)$$

bekanntlich wieder ein Integral der Differentialgleichung (127) sein, worin die einzelnen algebraischen Functionen rationale Functionen der t sind, welche die Lösungen einer irreductibeln algebraischen Gleichung δ^{ten} Grades vorstellen, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y$ zusammengesetzt sind. Der Ausdruck $\sum u^{(\alpha)}$ ist jedenfalls eine rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_m, y$; nehmen wir nun an, dass die Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ rational aus $x, Y_1, \dots Y_m, y$ zusammengesetzte Functionen sind — was also z. B. immer eintritt, wenn die reducirte lineare Differentialgleichung nur aus jenen Grössen $x, Y_1, \dots Y_m, y$ rational zusammengesetzte algebraische Integrale besitzt — so wird

$$u_\alpha = u_\alpha^{(1)} = u_\alpha^{(2)} = \dots = u_\alpha^{(\delta-1)}$$

sein, und da $v_\alpha v_\alpha^{(1)} \dots v_\alpha^{(\delta-1)}$ als rationale symmetrische Function der Lösungen der t -Gleichung rational durch $x, Y_1, \dots Y_m, y$ ausdrückbar ist, so wird die vorgelegte nicht homogene lineare Differen-

tialgleichung nach (130) ein Integral von der Form haben

$$z = U + \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \frac{u_2}{\delta} \log V_2 + \cdots + \frac{u_q}{\delta} \log V_q,$$

worin $U, u_1, \dots, u_q, V_1, \dots, V_q$ rational aus $x, Y_1, \dots, Y_m, y$ zusammengesetzt sind.

Hat also eine lineare nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form

$$z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \cdots + u_q \log v_q,$$

worin $u, u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_q$ algebraische Functionen bedeuten, und die Functionen $u_1, u_2, \dots, u_q$ sind rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar, so besitzt die Differentialgleichung auch stets ein Integral von der Form

$$z = U + \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \frac{u_2}{\delta} \log V_2 + \cdots + \frac{u_q}{\delta} \log V_q,$$

worin δ eine positive ganze Zahl und $U, V_1, V_2, \dots, V_q$ ebenfalls rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind.

So hat die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2(1+x^{\frac{1}{2}})}$$

das allgemeine Integral

$$z = x \log(1 + x^{\frac{1}{2}}) + cx,$$

indem die reducirte Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$$

nur die rationalen algebraischen Integrale $z = cx$ besitzt, während die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = \frac{1}{2}$$

das Integral

$$z_1 = x \log \sqrt{x},$$

also auch das Integral

$$z_2 = x \log(-\sqrt{x}),$$

und somit auch das Integral

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{x}{2} \log(-x)$$

hat.

Es bedarf kaum einer näheren Auseinandersetzung, dass ähnliche Sätze gelten für Integrale linearer Differentialgleichungen, welche

die Form haben

$$(131) \dots z = u + u_1 \log v_1 + u_2 \log v_2 + \dots + u_x \log v_x \\ + w_1 \int_{\xi_1}^{\xi_1} y_1 ds + w_2 \int_{\xi_2}^{\xi_2} y_2 ds + \dots + w_\lambda \int_{\xi_\lambda}^{\xi_\lambda} y_\lambda ds,$$

worin $u, u_1, \dots, u_x, v_1, v_2, \dots, v_x, w_1, w_2, \dots, w_\lambda, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\lambda$ algebraische Functionen von x , und $y_1, y_2, \dots, y_\lambda$ ebensolche von s bedeuten, und es wird genau so geschlossen werden können, dass, wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form (131) besitzt, und die Functionen $u_1, u_2, \dots, u_x, w_1, w_2, \dots, w_\lambda$ sind rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar, die Differentialgleichung auch stets ein Integral von der Form hat

$$z = U + \frac{u_1}{\delta} \log V_1 + \dots + \frac{u_\mu}{\delta} \log V_\mu \\ + \frac{w_1}{\delta} \sum_{i=1}^{p_1} \int_{\eta_1^{(i)}}^{\eta_1^{(i)}} y_1 ds + \dots + \frac{w_\lambda}{\delta} \int_{\eta_\lambda^{(q)}}^{\eta_\lambda^{(q)}} y_\lambda ds,$$

in welchem $U, V_1, \dots, V_\mu$ rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung sind, während $\eta_\alpha^{(q)}$ die Lösungen einer Gleichung p_α ten Grades bedeuten, deren Coefficienten rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, und für welche die diesen Grenzen zugehörigen Irrationalitäten durch eben diese Grenzen und die Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbar sind; ferner ist unmittelbar zu erkennen, dass unter der Annahme, dass nicht zwischen den im Integrale (131) vorkommenden Logarithmen und Abel'schen Integralen lineare Beziehungen mit algebraischen Coefficienten stattfinden, die Grössen $u_1, u_2, \dots, u_x, w_1, w_2, \dots, w_\lambda$ algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung sein werden.

Nachdem wir oben lineare nicht homogene Differentialgleichungen kennen gelernt, für welche ein Integral aus multiplicativen Zusammensetzungen von algebraischen Functionen mit logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen besteht, wollen wir die Frage allgemein aufwerfen, welcher Natur die Zusammensetzung eines solchen Integrales aus algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen — indem wir die Logarithmen auch als Integrale algebraischer Functionen auffassen — überhaupt sein muss, wenn die Grenzen der Abel'schen Integrale algebraische Functionen der Variablen sein sollen. Sei also ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung

$$(132) \dots z_1 = f\left(x, \int_{v_1}^{v_1} y_1 ds, \int_{v_2}^{v_2} y_2 ds, \dots, \int_{v_q}^{v_q} y_q ds\right),$$

in welchem $v_1, v_2, \dots v_q$ algebraische Functionen von x , und $y_1, y_2, \dots y_q$ ebensolche von s bedeuten sollen; bildet man aus (132) die successiven Differentialquotienten $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \dots \frac{d^m z_1}{dx^m}$, in welchen die Ableitungen der Abel'schen Integrale sämmtlich algebraische Functionen von x werden, und setzt alle diese Werthe in die Differentialgleichung (127) ein, so erhält man, wenn

$$(133) \dots \xi_1 = \int_{\cdot}^{v_1} y_1 ds, \quad \xi_2 = \int_{\cdot}^{v_2} y_2 ds, \quad \dots \quad \xi_q = \int_{\cdot}^{v_q} y_q ds$$

gesetzt, $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$ also als particuläre Integrale der resp. Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(134) \dots \frac{d\xi}{dx} = (y_1)_{v_1} \frac{dv_1}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dx} = (y_2)_{v_2} \frac{dv_2}{dx}, \quad \dots \quad \frac{d\xi}{dx} = (y_q)_{v_q} \frac{dv_q}{dx}$$

betrachtet werden, eine algebraische Gleichung

$$(135) \dots F(x, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_q) = 0$$

zwischen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$. Nimmt man nun an, dass zwischen den Integralen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$ unter einander eine algebraische Beziehung nicht besteht — indem man im entgegengesetzten Falle die Anzahl der Integrale im Ausdrücke (132) von vornherein kleiner annehmen dürfte — so muss die Gleichung (135) identisch sein und also auch bestehen, wenn $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$ durch die Grössen ersetzt werden

$$\xi_1 + \mu_1, \quad \xi_2 + \mu_2, \quad \dots \quad \xi_q + \mu_q,$$

worin $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ willkürliche Constanten bedeuten, und da die Ableitungen dieser Grössen auch den Gleichungen (134) genügen, so folgt, dass der dem Ausdrücke (132)

$$(136) \dots z_1 = f(x, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_q)$$

analoge Ausdruck

$$(137) \dots z_2 = f(x, \xi_1 + \mu_1, \xi_2 + \mu_2, \dots \xi_q + \mu_q)$$

wiederum ein particuläres Integral der Differentialgleichung (127) sein wird — ein Resultat das wir auch aus den im zweiten Kapitel bewiesenen Sätzen von der Erhaltung der algebraischen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen (127) und (134) hätten entnehmen können. Seien nun

$$z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(m)}$$

m particuläre Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung

$$(138) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z = 0,$$

so ist jedes Integral der Gleichung (127) in der Form enthalten

$$z = z_1 + M_1 z^{(1)} + M_2 z^{(2)} + \dots + M_m z^{(m)},$$

worin $M_1, M_2, \dots M_m$ Constanten bedeuten, und somit auch

$$(139) \dots z_2 = z_1 + \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)}.$$

Aus (136), (137) und (139) folgt

$$(140) \dots f(x, \xi_1 + \mu_1, \xi_2 + \mu_2, \dots \xi_q + \mu_q) = f(x, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_q) \\ + \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)}$$

für jedes Werthesystem der Grössen $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ und dazugehörige $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m$; machen wir nun die Annahme, dass die Function f nicht schon eine lineare Function der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$ ist — welche Form wir auch im allgemeinen Falle unter gewissen, gleich anzugebenden Beschränkungen erhalten werden — so wird man für die willkürlichen Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ m solche Werthecomplexe wählen können, dass die durch Einsetzen dieser Werthe von μ und der entsprechenden von ν aus (140) hervorgehenden m Gleichungen die m Grössen $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(m)}$ algebraisch durch die Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$ bestimmen werden. Machen wir nun die Annahme, dass die Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung (138) nicht algebraische Functionen derjenigen Abel'schen Integrale sind, welche in dem Integrale (132) der nicht homogenen Differentialgleichung enthalten sind, so muss die Gleichung (140) eine in den Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_q$ identische sein, und setzt man daher

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_q = 0,$$

so folgt

$$(141) \dots f(x, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_q) = f(x, 0, 0, \dots 0) \\ + \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)},$$

woraus sich $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(m)}$, indem man wieder m Werthecompositionen der μ wählt, in welchen die f -Function der Annahme nach nicht linear ist, als algebraische Functionen ergeben würden. Vermöge (141) geht nun die Gleichung (140) in die Beziehung über

$$(142) \dots f(x, \xi_1 + \mu_1, \dots \xi_q + \mu_q) = f(x, \xi_1, \dots \xi_q) \\ + f(x, \mu_1, \dots \mu_q) - f(x, 0, \dots 0),$$

woraus wieder, weil dieselbe vermöge der Irreductibilität der Abel'schen Integrale in den ξ -Grössen identisch sein muss, aus bekannten Gründen folgt, dass

$$(143) \dots f(x, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_q) = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \dots + u_q \xi_q + u$$

ist, worin $u_1, u_2, \dots u_q, u$ algebraische Functionen von x bedeuten, welche nach (141) mit den Fundamentalintegralen der reducirten Differentialgleichung durch die Beziehung verbunden sind

$$(144) u_1 \mu_1 + u_2 \mu_2 + \dots + u_q \mu_q = \nu_1 z^{(1)} + \nu_2 z^{(2)} + \dots + \nu_m z^{(m)};$$

es geht daher (136) über in

$$z_1 = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \cdots + u_\rho \xi_\rho + u$$

oder

$$(145) \quad \cdots z_1 = u_1 \int_{s_1}^{v_1} y_1 ds + u_2 \int_{s_2}^{v_2} y_2 ds + \cdots + u_\rho \int_{s_\rho}^{v_\rho} y_\rho ds + u,$$

und es werden wieder, wie schon unmittelbar aus der Gleichung (144) hervorgeht, die algebraischen Functionen $u_1, u_2, \cdots u_\rho$ particuläre algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung sein.

Wir finden somit, dass, wenn eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein aus der Variablen und Abel'schen Integralen algebraisch zusammengesetztes Integral besitzt, unter der Voraussetzung, dass die Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung nicht algebraische Functionen derselben Abel'schen Integrale sind, dieses Integral eine lineare Function jener Abel'schen Integrale sein muss, deren Coefficienten algebraische Functionen der Variablen sind.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = x,$$

deren reducirte Gleichung $\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x} z = 0$ das allgemeine algebraische Integral $z = cx^2$ besitzt, das algebraisch-logarithmische Integral

$$z_1 = x^2 \log x.$$

Lassen wir jedoch die Voraussetzung fallen, dass die Fundamentalintegrale der reducirten Differentialgleichung nicht algebraische Functionen derjenigen Abel'schen Integrale sind, welche in dem Integrale der nicht homogenen Differentialgleichung enthalten sind, so wird man nicht mehr schliessen können, dass z eine lineare Function jener Abel'schen Integrale sein muss, wie dies auch in der That nicht der Fall ist; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = \frac{2}{x},$$

deren reducirte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} + \frac{z}{x^2} = 0$$

die beiden particulären Integrale

$$z^{(1)} = x \quad \text{und} \quad z^{(2)} = x \log x$$

besitzt, das particuläre Integral

$$z = x + x (\log x)^2.$$

§ 14.

Eigenschaften der algebraischen Grenzen solcher Integrale linearer Differentialgleichungen, welche aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt sind.

Wir haben bisher die Frage behandelt, was aus der Annahme eines Integrales einer linearen Differentialgleichung, das sich aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammensetzt, geschlossen werden kann für die Beschaffenheit anderer ähnlicher, nothwendig existirender Integrale eben dieser Differentialgleichung; wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, was sich unter gewissen Bedingungen von den Eigenschaften eines *jeden* Integrales einer linearen Differentialgleichung aussagen lässt, welches wieder aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt ist — zwei Fragen, welche für die einfachste Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y,$$

also für Quadraturen zusammenfallen, da die Integrale sich nur um Constanten unterscheiden.

Hat die lineare Differentialgleichung

$$(146) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} + Y_m z = y$$

ein algebraisches Integral z_1 , das als Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung dargestellt sein mag, deren Coefficienten rational aus x , Y_1 , Y_2 , $\dots$ Y_m und y zusammengesetzt sein sollen, so wird, wenn z_2 irgend eine andere Lösung dieser algebraischen Gleichung bezeichnet, aus früher entwickelten Gründen z_2 ebenfalls jener Differentialgleichung genügen, woraus die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z_1 &= y \\ \frac{d^m z_2}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z_2 &= y \end{aligned}$$

folgen, und hieraus wieder

$$(147) \dots \frac{d^m (z_1 - z_2)}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} (z_1 - z_2)}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m (z_1 - z_2) = 0,$$

d. h. es wird $z_1 - z_2$ ein algebraisches Integral der reducirten Differentialgleichung sein. Hat nun die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche algebraische Integrale,

welche rational durch die Grössen $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und y ausdrückbar sind, so muss im ersteren Falle $z_1 - z_2 = 0$ sein, was der Irreductibilität der die Grössen z_1 und z_2 definirenden algebraischen Gleichung widerspricht, und im zweiten Falle müsste

$$(148) \dots z_2 = z_1 + F(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y)$$

sein, worin F eine rationale Function bedeutet; aber dann würden, wenn jene algebraische Gleichung

$$(149) z^x + \varphi_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y) z^{x-1} + \dots + \varphi_x(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y) = 0$$

lautet, worin die φ ebenfalls rationale Zusammensetzungen ausdrücken, die beiden Gleichungen bestehen

$$z_1^x + \varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m, y) z_1^{x-1} + \dots + \varphi_x(x, Y_1, \dots Y_m, y) = 0$$

und

$$\begin{aligned} & (z_1 + F(x, Y_1, \dots Y_m, y))^x \\ & + \varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m, y) (z_1 + F(x, Y_1, \dots Y_m, y))^{x-1} + \dots \\ & \dots + \varphi_x(x, Y_1, \dots Y_m, y) = 0, \end{aligned}$$

aus denen durch Subtraction

$$x \cdot F(x, Y_1, \dots Y_m, y) z_1^{x-1} + \dots = 0$$

folgt, es würde also z_1 einer Gleichung $x - 1^{\text{ten}}$ Grades genügen mit Coefficienten, welche rational in $x, Y_1, \dots Y_m, y$ ausdrückbar sind, was wieder wegen der Irreductibilität der Gleichung (149) unmöglich ist. Besteht also die oben gemachte Annahme für die reducirte Differentialgleichung, so darf die Gleichung (149) nur *eine* Wurzel haben, muss also linear sein, und es wird somit das vorgelegte algebraische Integral z_1 rational durch $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y$ ausdrückbar sein. Wir erhalten also folgenden Satz:

Hat eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein algebraisches Integral, und die reducirte Differentialgleichung hat entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche, welche rational aus den Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung zusammengesetzt sind, so wird sich das Integral der nicht homogenen Differentialgleichung als rationale Function der Coefficienten derselben darstellen lassen.

So hat die Differentialgleichung

$$(150) \dots \frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = \sqrt{x},$$

da ihre reducirte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2x} = 0$$

das allgemeine, in den Coefficienten der Gleichung (150) rationale Integral $z = \frac{c}{\sqrt{x}}$ besitzt, das in eben diesen Coefficienten rationale Integral

$$z = \frac{1}{2} x \sqrt{x}.$$

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ ganze Functionen von x sind, die reducirte lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten überall eindeutig und in der Endlichkeit endlich sind, nach den Untersuchungen von Fuchs, bekanntlich nur solche algebraische Integrale besitzen kann, welche in der Endlichkeit überall endlich und eindeutig, also ganze Functionen sind; es ist somit der obigen Bedingung, dass die etwaigen algebraischen Integrale rationale Functionen der Coefficienten der nicht homogenen Differentialgleichung sein sollen, von selbst genügt, und wir erhalten den Satz:

Hat eine lineare nicht homogene Differentialgleichung, für welche die Coefficienten der linken Seite sämtlich ganze Functionen der Variablen sind, überhaupt ein algebraisches Integral, so ist dieses stets als rationale Function von x und der rechten Seite der Differentialgleichung y ausdrückbar,

ein Satz, der sich auch unmittelbar aus der Integrationsmethode mit Hülfe der Variation der Constanten und dem Abel'schen Satze, die algebraischen Werthe von Integralen algebraischer Functionen betreffend, herleiten lässt.

Wir können aber den oben bewiesenen Satz noch in anderer Weise begründen und aussprechen. Bildet man nämlich mit einer algebraischen Function z und beliebigen algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ den in z und den Ableitungen dieser Grösse linearen Ausdruck

$$(151) \dots Z = \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z,$$

so ist dieser bekanntlich als rationale Function von $z, x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und einer willkürlich angenommenen algebraischen Function y darstellbar, wenn wir uns z als die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung x^{ten} Grades vorstellen, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und y zusammengesetzt sind, so dass

$$(152) Z = \psi_1(x, Y_1, \dots Y_m, y) z^{x-1} + \psi_2(x, Y_1, \dots Y_m, y) z^{x-2} + \dots \\ \dots + \psi_x(x, Y_1, \dots Y_m, y)$$

wird, wenn die ψ rationale Functionen bedeuten. Stellt man nun diesen Ausdruck mit der die Grösse z definirenden Gleichung

$$(153) z^x + \varphi_1(x, Y_1, \dots Y_m, y) z^{x-1} + \dots + \varphi_x(x, Y_1, \dots Y_m, y) = 0$$

zusammen, so haben die beiden Gleichungen jedenfalls *eine* z -Grösse gemein; haben sie *nur* eine gemein, so würde die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers bereits z als rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_m, y$ und Z liefern; ist dagegen der grösste gemeinschaftliche Theiler von höherem Grade, so müssten mehrere Werthe von z z. B. z_1 und z_2 dem Ausdrücke Z denselben Werth ertheilen. Nehmen wir nun aber an, dass entweder überhaupt nicht zwei z -Werthe existiren, welche dem Ausdrücke Z denselben Werth ertheilen oder dass, wenn solche existiren, diese sich nur um eine in $x, Y_1, \dots Y_m, y$ rationale Function unterscheiden können, so würde aus der ersten Annahme unmittelbar, aus der zweiten auf Grund des oben bewiesenen Satzes, dass zwei Lösungen der irreductibeln Gleichung (153) sich nicht nur um eine Function unterscheiden können, welche rational aus $x, Y_1, \dots Y_m, y$ zusammengesetzt ist, folgen, dass jener grösste gemeinschaftliche Theiler nur vom ersten Grade sein kann, und daher z mit Hülfe von $x, Y_1, \dots Y_m, y$ rational durch Z ausdrückbar sein; es folgt also der Satz, dass, wenn z die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung ist, deren Coefficienten rational aus x und willkürlichen algebraischen Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_m, y_1, y_2, \dots y_n$ zusammengesetzt sind, und der Ausdruck

$$Z = \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z$$

nimmt überhaupt nicht für zwei Lösungen dieser Gleichung denselben Werth an oder nur für solche, deren Differenz eine rationale Function der Grössen $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y_1, y_2, \dots y_n$ ist, so muss sich z rational durch $x, Y_1, \dots Y_m, y_1, y_2, \dots y_n$ und Z ausdrücken lassen, und es ist unmittelbar zu sehen, dass dieser Satz nur eine andere Ausdrucksweise des früheren ist, weil, wenn zwei Werthe z_1 und z_2 dem Werthe Z denselben Werth ertheilen, $Z = 0$ nothwendig das Integral $z_1 - z_2$ hat, und Z das frühere y der Gleichung (146) ist.

Von diesem Gesichtspunkte aus können wir aber offenbar den Satz auch allgemeiner so aussprechen:

Ist z die Lösung einer irreductibeln algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, y_1, y_2, \dots y_n$ zusammengesetzt sind, und nimmt der Ausdruck

$$Z = F\left(x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^m z}{dx^m}\right),$$

worin F eine rationale Function bedeutet, überhaupt nicht für zwei Lösungen dieser Gleichung denselben Werth an oder nur für solche, deren Differenz eine rationale Function der Grössen $x, Y_1, \dots Y_m, y_1, \dots y_n$

ist, so muss sich z rational durch $x, Y_1, \dots, Y_m, y_1, \dots, y_n$ und Z ausdrücken lassen.

Nehmen wir nunmehr an, dass die Differentialgleichung (146) ein logarithmisches Integral von der Form

$$(154) \dots z_1 = A \log v$$

habe, worin A eine Constante und v eine algebraische Function ist, welche der irreductibeln algebraischen Gleichung genügt

$$(155) f(v) = v^2 + \varphi_1(x, Y_1, \dots, Y_m, y)v^{2-1} + \dots + \varphi_\lambda(x, Y_1, \dots, Y_m, y) = 0,$$

so wird, wie früher gezeigt worden, $Y_m = 0$ sein müssen, und wenn $v, v_1, v_2, \dots, v_{\lambda-1}$ die Lösungen der Gleichung (155) sind, so werden bekanntlich auch $A \log v_1, A \log v_2, \dots, A \log v_{\lambda-1}$ Integrale der vorgelegten Differentialgleichung sein. Ist nun die Gleichung (155) von einem höheren Grade als dem ersten, so würde, weil $A \log v$ und $A \log v_1$ Integrale der Gleichung (146) sind, der Ausdruck

$$A \log \frac{v}{v_1}$$

ein Integral der reducirten linearen Differentialgleichung sein. Hat die letztere nun, vom constanten Integrale abgesehen, gar kein logarithmisches Integral dieser Form, so muss die algebraische Gleichung (155) nothwendig vom ersten Grade gewesen sein, d. h. der Logarithmand v des angenommenen logarithmischen Integrales ist eine rationale Function von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y$. Nehmen wir zweitens an, die reducirte Differentialgleichung habe logarithmische Integrale dieser Form, aber nur solche, deren Logarithmand rational durch $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y$ ausdrückbar ist; dann würde folgen, dass $v_1 = vr$ ist, worin r den rationalen Charakter hat, und somit nach (155)

$$f(v_1) = f(vr) = 0$$

sein, woraus sich wegen der Irreductibilität der Gleichung offenbar auch

$$f(vr^2) = 0 \quad f(vr^3) = 0, \dots$$

ergiebt, so dass einmal $vr^\delta = v$, d. h. $r^\delta = 1$ sein muss, somit r eine Constante und zwar eine δ^{te} Einheitswurzel; es nimmt daher die Gleichung (155) die Form an

$$(156) \dots v^{\mu\delta} + \varphi_\delta(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y)v^{(\mu-1)\delta} + \dots \\ \dots + \varphi_{\mu\delta}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) = 0.$$

Setzt man nun

$$v^\delta = V,$$

so wird nach (154) das Integral z_1 übergehen in

$$(157) \dots z_1 = \frac{A}{\delta} \log V,$$

worin V nach (156) durch die Gleichung definiert ist

$$(158) \dots V^\mu + \varphi_\delta(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) V^{\mu-1} + \dots \\ \dots + \varphi_{\mu\delta}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) = 0,$$

deren Grad μ kleiner als der Grad m der die Function v definirenden Gleichung (155) ist. Ist nun $\mu > 1$, so kann man genau ebenso das Integral z_1 in die Form setzen

$$z_1 = \frac{A}{\delta \delta_1} \log W,$$

worin W einer Gleichung μ_1^{ten} Grades von der Form genügt

$$W^{\mu_1} + \psi_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) W^{\mu_1-1} + \dots + \psi_{\mu_1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) = 0,$$

in welcher $\mu_1 < \mu$ ist; setzen wir dieses Verfahren fort, so müssen wir zu einem logarithmischen Ausdrucke für das Integral z_1 gelangen, dessen Logarithmand durch eine lineare Gleichung definiert ist, also rational durch $x, Y_1 \dots Y_{m-1}, y$ ausdrückbar ist. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hat eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein logarithmisches Integral von der Form

$$A \log v,$$

worin A eine Constante und v eine algebraische Function von x ist, so lässt sich dieses, wenn die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein logarithmisches Integral dieser Form besitzt oder nur solche, deren Logarithmand rational aus den Coefficienten der nicht homogenen Differentialgleichung zusammengesetzt ist, in die Form

$$\frac{A}{m} \log W$$

bringen, worin m eine ganze positive Zahl und W eine in den Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbare Function bedeutet.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} = x,$$

deren reducirte Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \frac{dz}{dx} = 0$$

das allgemeine, nicht logarithmische Integral besitzt:

$$z = c \int x^{-1} e^{-\frac{x^3}{3}} dx + c_1,$$

das Integral

$$z = \log x.$$

Nach den früheren Auseinandersetzungen ist unmittelbar einleuchtend, dass der oben ausgesprochene Satz auch gültig ist, wenn das logarithmische Integral die Form hat

$$z = u \log v,$$

worin v eine algebraische, u eine in $x, Y_1, \dots, Y_m, y$ rationale Function bedeutet, es wird sich also auch dann dieses Integral stets in die Form setzen lassen

$$z = \frac{u}{m} \log w,$$

worin m eine ganze Zahl, und w eine in den Coefficienten der Differentialgleichung rationale Function bedeutet; und ein ähnlicher Satz gilt offenbar auch, wenn das Integral von der Form

$$z = U + u \log v$$

ist, worin v und U algebraische Functionen der Variabeln, und u eine rationale Function der Coefficienten der Differentialgleichung bedeuten, wie man leicht folgern kann, wenn man wieder wie oben eine Hilfsgrösse t einführt, durch welche sich v und U mit Hilfe der Grössen $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_m, y$ rational ausdrücken lassen.

Habe jetzt die lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form

$$(159) \dots z_1 = u \int^v Y ds,$$

in welchem u und v algebraische Functionen von x , und Y eine algebraische Function von s bedeutet, so möge auf die Differentialgleichung (146) die Substitution ausgeübt werden

$$(160) \dots z = u \int t dx,$$

dann geht dieselbe, da u nach früheren Auseinandersetzungen ein particuläres Integral der reducirten Differentialgleichung

$$(161) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_m z = 0$$

sein musste, bekanntlich in eine lineare nicht homogene Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung in t über von der Form

$$(162) \dots \frac{d^{m-1} t}{dx^{m-1}} + Z_1 \frac{d^{m-2} t}{dx^{m-2}} + \dots + Z_{m-1} t = y,$$

welche vermöge der aus den beiden Gleichungen (159) und (160) entspringenden Relation

$$\int^v Y ds = \int t dx,$$

oder

$$(163) \dots t = (Y)_v \frac{dv}{dx}$$

ein algebraisches particuläres Integral haben wird, und deren Coefficienten $Z_1, Z_2, \dots Z_{m-1}$ rational aus $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m$ und der algebraischen Function u zusammengesetzt sind. Bemerkt man nun aber, dass dieselbe Substitution (160) auf die reducirte Differentialgleichung (161) angewendet, die Differentialgleichung

$$(164) \dots \frac{d^{m-1}t}{dx^{m-1}} + Z_1 \frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} + \dots + Z_{m-1}t = 0,$$

d. h. die aus (162) reducirte Differentialgleichung liefert, so gilt für die Gleichungen (162) und (164) der oben bewiesene Satz, dass jenes algebraische Integral der Gleichung (162) rational durch $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, u$ und y ausdrückbar ist, falls die reducirte Gleichung (164) entweder gar kein algebraisches Integral hat oder nur solche, welche rational durch $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, u$ und y ausdrückbar sind. Hat aber die Gleichung (164) gar kein algebraisches Integral, so hat nach (160) die Gleichung (161) kein Integral, welches aus dem Producte von u in ein Abel'sches Integral besteht, und hat die Gleichung (164) nur solche algebraische Integrale, welche rational in $x, Y_1, Y_2, \dots Y_m, u$ und y ausdrückbar sind, so hat (161) zwar solche Integrale, aber von der Beschaffenheit, dass der Differentialquotient t des aus jenem Integrale und der algebraischen Function u gebildeten Quotienten rational in $x, Y_1, \dots Y_m, u$ und y ausdrückbar ist — in beiden Fällen folgt, dass

$$(165) \dots \int t dx = \int Y ds$$

ist, worin t rational durch $x, Y_1, \dots Y_m, u$ und y darstellbar ist. Findet aber eine Gleichung von der Form (165) statt, so war früher nachgewiesen worden, dass dann auch, wenn das Abel'sche Integral der rechten Seite zum Geschlechte p gehört,

$$(166) \dots \int t dx = \frac{1}{\delta} \sum_1^p \int_1^{v_\alpha} Y ds + w.$$

ist, worin δ eine ganze positive Zahl, und $v_1, v_2, \dots v_p$ Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational durch x und t , d. h. rational durch $x, Y_1, \dots Y_m, u$ und y ausdrückbar sind, während die zugehörigen Werthe von Y aus eben diesen Grössen und den respectiven Werthen v_α rational zusammengesetzt sind, endlich w eine algebraisch-logarithmische Function von demselben Charakter bedeutet. Es folgt somit der nachstehende Satz:

Hat eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung ein Integral von der Form

$$z = u \int^v Y ds$$

worin u und v algebraische Functionen der Variablen x sind, und besitzt die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein Integral, welches durch u dividirt ein Abel'sches Integral wird, oder, wenn es ein solches wird, für die algebraische Function des Abel'schen Integrales eine rationale Function von u und den Coefficienten der Differentialgleichung liefert, so lässt sich jenes Integral auch stets in die Form setzen

$$z = \frac{u}{\delta} \sum_1^p \int^{v_a} Y ds + w,$$

worin δ eine ganze positive Zahl, $v_1, v_2, \dots, v_p$, wobei p das Geschlecht von Y bezeichnet, Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich rational durch $x, Y_1, \dots, Y_m, y$ und u ausdrücken lassen, während die zugehörigen Werthe von Y aus eben diesen Grössen und den respectiven Werthen v_a rational zusammengesetzt sind, endlich w eine algebraisch-logarithmische Function von demselben Charakter bedeutet.

Ist u selbst rational aus $x, Y_1, \dots, Y_m$ und y zusammengesetzt oder eine Constante — was z. B. der Fall wäre, wenn die reducirte Differentialgleichung (161) nur solche algebraische Integrale hätte, welche rational durch eben diese Grössen ausdrückbar sind — dann werden auch die Coefficienten der die Grössen $v_1, v_2, \dots, v_p$ definirenden Gleichung rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung selbst zusammengesetzt sein.

Nehmen wir allgemeiner das Integral in der Form an

$$(167) \dots z = u_1 \int^{v_1} Y^{(1)} ds + u_2 \int^{v_2} Y^{(2)} ds + \dots + u_\varrho \int^{v_\varrho} Y^{(\varrho)} ds + u,$$

in welchem $u_1, u_2, \dots, u_\varrho, v_1, v_2, \dots, v_\varrho, u$ algebraische Functionen von x , und $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(\varrho)}$ ebensolche Functionen von s seien, so werden offenbar wieder $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$ unter der Voraussetzung der Irreducibilität der in (167) vorkommenden Abel'schen Integrale particuläre algebraische Integrale der reducirten Differentialgleichung sein müssen, und macht man somit die Substitution

$$(168) \dots z = u_1 \int t dx,$$

so wird man wie oben auf eine lineare Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung geführt, deren rechte Seite wieder y ist, und welche ver-

möge (167), wie man leicht sieht, ein particuläres Integral von der Form hat

$$(169) \dots t = U_2 \int^{x_2} Y^{(2)} ds + U_3 \int^{x_3} Y^{(3)} ds + \dots + U_q \int^{x_q} Y^{(q)} ds + U,$$

in welchem $U, U_2, \dots, U_q$ wiederum algebraische Functionen von x sind, die zugleich algebraische particuläre Integrale der reducirten t -Differentialgleichung darstellen, und welches ein Abel'sches Integral weniger hat. So kann man durch successiv angewandte Substitutionen von der Form (168) die gegebene lineare Differentialgleichung auf eine andere nicht homogene reduciren, deren rechte Seite der gegebenen Differentialgleichung gleich ist, und welche dann ein Integral von der Form

$$W_1 \int^{x_q} Y^{(q)} ds + W$$

hat, in welcher W und W_1 algebraische Functionen von x bedeuten; auf diese können dann die oben gemachten Schlüsse angewandt werden, und hiervon ausgehend kann man dann in unmittelbar ersichtlicher Weise zurückschliessen.

Die Bedingung für die rationale Ausdrückbarkeit der Coefficienten der die Grenzen der Abel'schen Integrale bestimmenden Gleichung durch die Coefficienten der Differentialgleichung lässt sich aber noch bedeutend einschränken und ganz ebenso formuliren, wie es oben für logarithmische Integrale geschehen ist, indem dort die reducirte Differentialgleichung nicht nur im Allgemeinen, wie es hier jetzt geschehen ist, der engeren Bedingung unterworfen wurde, nicht durch Abel'sche Integrale befriedigt zu werden oder nur solche mit bestimmter Eigenschaft der Grenzen zu besitzen, sondern dass sie bloss nicht logarithmische Integrale oder nur logarithmische Integrale von bestimmter Beschaffenheit des Logarithmanden besitzen sollte. Ganz ähnlich lassen sich die Sätze auch hier gestalten, und die Art des Beweises führt zu interessanten Betrachtungen, welche der Transformationstheorie der Transcendenten angehören.

Habe also eine nicht homogene lineare Differentialgleichung (146) zum Integral ein elliptisches Integral, welches mit beliebigen algebraischen und logarithmischen Functionen additiv verbunden sein mag, also in der Form dargestellt werden kann

$$(170) \dots z = \int_{\mathcal{A}(\xi)}^{u_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + U,$$

worin

$$(171) \dots \mathcal{A}(\xi) = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - x^2 \xi^2)},$$

$f(\xi)$ eine rationale Function von ξ , u_1 die Lösung einer irreductibeln

algebraischen Gleichung λ^{ten} Grades

$$(172) \dots \varphi(u) = 0$$

bedeutet, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung sind, und endlich U eine algebraisch-logarithmische Function vorstellt, so bilde man in wiederholt angegebener Weise eine Grösse t , durch welche sich mit Hülfe der Coefficienten der Differentialgleichung die Grössen u_1 , $\mathcal{A}(u_1)$, der in U enthaltene algebraische Theil w und die einzelnen Logarithmanden $w_1, w_2, \dots w_\sigma$ rational ausdrücken lassen. Sei die irreductible algebraische Gleichung, welcher die Grösse t genügt

$$(173) \dots T = 0,$$

so wird, wenn man aus (170) die Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots$ berechnet und in die Differentialgleichung einsetzt, dieselbe, wenn für die Grössen $u_1, \mathcal{A}(u_1), w, w_1, w_2, \dots w_\sigma$ ihre rationalen Ausdrücke in t gesetzt werden, in eine rationale Function von t übergehen, welche bekanntlich dann durch alle Lösungen von $T = 0$ zu Null gemacht werden muss, woraus folgt, dass die diesen t -Grössen entsprechenden Werthe von $u, \mathcal{A}(u), w, w_1, \dots w_\sigma$ in (170) eingesetzt, Integrale der gegebenen Differentialgleichung liefern. Wählen wir nun alle diejenigen t -Werthe aus, welche u_1 und $\mathcal{A}(u_1)$ unverändert lassen — denn es ist nicht etwa auch t eine rationale Function der Grössen u_1 etc. — so werden wir eine Reihe von Integralen der Differentialgleichung von der Form erhalten

$$z_1 = \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + w^{(1)} + A_1 \log w_1^{(1)} + A_2 \log w_2^{(1)} + \dots + A_\sigma \log w_\sigma^{(1)}$$

$$z_2 = \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + w^{(2)} + A_1 \log w_1^{(2)} + A_2 \log w_2^{(2)} + \dots + A_\sigma \log w_\sigma^{(2)}$$

.

und es wird somit auch der Ausdruck

$$(174) \quad Z_1 = \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + W + B_1 \log W_1 + B_2 \log W_2 + \dots + B_\sigma \log W_\sigma$$

ein Integral der Differentialgleichung sein, worin die $W, W_1, \dots W_\sigma$ als symmetrische Functionen der w -Werthe rational in den Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sind. Setzt man den Werth von Z in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich einerseits aus derselben, dass $\mathcal{A}(u_1)$ sich mit Hülfe der Coefficienten der Differentialgleichung als rationale Function von u_1 darstellen lässt, andererseits folgt aber auch aus dem Früheren, dass, wenn man statt u_1

irgend eine andere Lösung u_2 der Gleichung (172) und für $\mathcal{A}(u_2)$ dieselbe rationale Function von u_2 setzt, auch der Ausdruck

$$(175) \quad Z_2 = \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + W^{(1)} + B_1 \log W_1^{(1)} + B_2 \log W_2^{(1)} + \dots + B_\sigma \log W_\sigma^{(1)}$$

der Differentialgleichung genügt. Es wird daher

$$(176) \quad \dots z = Z_1 - Z_2 = \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + W - W^{(1)} \\ + B_1 \log \frac{W_1}{W_1^{(1)}} + \dots + B_\sigma \log \frac{W_\sigma}{W_\sigma^{(1)}}$$

der reducirten Differentialgleichung

$$(177) \quad \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

genügen, oder auch der Ausdruck

$$(178) \quad \dots z = \int \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + X + C_1 \log X_1 + C_2 \log X_2 + \dots + C_r \log X_r,$$

wenn $X, X_1, \dots, X_r$ wieder algebraische Functionen bedeuten, und

$$(179) \quad \dots \frac{du_1}{\mathcal{A}(u_1)} - \frac{du_2}{\mathcal{A}(u_2)} = \frac{dv}{\mathcal{A}(v)}$$

gesetzt ist, also die Relationen bestehen

$$(180) \quad \dots u_2 = \frac{u_1 \mathcal{A}(v) - v \mathcal{A}(u_1)}{1 - \kappa^2 u_1^2 v^2}$$

und

$$(181) \quad \dots \mathcal{A}(u_2) = \frac{\mathcal{A}(u_1) \mathcal{A}(v) (1 + \kappa^2 u_1^2 v^2) + u_1 v (\kappa^2 + 1 + 2\kappa^2 (u_1^2 + v^2) + 2\kappa^2 u_1^2 v^2)}{1 - \kappa^2 u_1^2 v^2}.$$

Nehmen wir nun an, dass die reducirte Differentialgleichung (177) gar kein Integral besitzt, welches aus algebraisch-logarithmischen Functionen und einem zur Irrationalität $\mathcal{A}(\xi)$ gehörigen elliptischen Integrale additiv zusammengesetzt ist, oder, wenn es ebensolche Integrale hat, dass die obere Grenze des resp. elliptischen Integrales und die dazugehörige Irrationalität rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ und y zusammengesetzt ist, so würde, da in der Gleichung (180) einerseits $\mathcal{A}(u_1)$ eine rationale Function von u_1 war, andererseits nach der eben gemachten Annahme v und $\mathcal{A}(v)$ rationale Functionen der Coefficienten der Differentialgleichung sein müssten,

$$u_2 = f(u_1, x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}, y)$$

sein, worin f eine rationale Function der in der Klammer enthaltenen

Größen bedeutet; da nun u_1 und u_2 Lösungen der mit Adjungirung der Größen $x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y$ irreductibeln algebraischen Gleichung (172) sind, so werden sich sämtliche Lösungen derselben bekanntlich in die folgende Gruppenform bringen lassen

$$(O) \dots \begin{cases} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_\varrho \\ u_1^{(1)} & u^{(1)} & u_3^{(1)} & \dots & u_\varrho^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(\sigma-1)} & u_2^{(\sigma-1)} & u_3^{(\sigma-1)} & \dots & u_\varrho^{(\sigma-1)} \end{cases},$$

in welcher die Lösungen je einer Horizontalreihe die iterirten rationalen Functionen f des Anfangsgliedes einer jeden derselben sind, und somit z. B. der ersten Horizontalreihe von (O) das transcendente Gleichungssystem entspricht

$$(182) \dots \begin{cases} \int \frac{u_1 d\xi}{\Delta(\xi)} - \int \frac{u_2 d\xi}{\Delta(\xi)} = \int \frac{v d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \int \frac{u_2 d\xi}{\Delta(\xi)} - \int \frac{u_3 d\xi}{\Delta(\xi)} = \int \frac{v d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int \frac{u_{\varrho-1} d\xi}{\Delta(\xi)} - \int \frac{u_\varrho d\xi}{\Delta(\xi)} = \int \frac{v d\xi}{\Delta(\xi)} \\ \int \frac{u_\varrho d\xi}{\Delta(\xi)} - \int \frac{u_1 d\xi}{\Delta(\xi)} = \int \frac{v d\xi}{\Delta(\xi)}, \end{cases}$$

in welchem sich die Integrale vermöge der verschiedenen Wege noch um Vielfache der Periodicitätsmoduln unterscheiden können, woraus durch Addition

$$(183) \dots \varrho \int \frac{v d\xi}{\Delta(\xi)} = m\omega + m'\omega'$$

folgt, wenn m und m' ganze Zahlen, ω und ω' zwei Elementarperioden des elliptischen Integrales bedeuten. Setzt man also

$$\int \frac{u_1 d\xi}{\Delta(\xi)} = w_1,$$

so folgt

$$(184) \dots u_1 = \text{sinam}(w_1, \kappa), \quad u_2 = \text{sinam}\left(w_1 + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right),$$

$$u_3 = \text{sinam}\left(w_1 + 2 \cdot \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right), \dots$$

$$u_\varrho = \text{sinam}\left(w_1 + (\varrho - 1) \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right).$$

Wegen der ähnlichen für die Glieder der Gruppe je einer Verticalreihe bestehenden Beziehung erhält man z. B. für die Glieder der ersten Verticalreihe die Ausdrücke

$$(185) \dots u_1 = \text{sinam}(w_1, \kappa), \quad u_1^{(1)} = \text{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \kappa\right),$$

$$u_1^{(2)} = \text{sinam}\left(w_1 + 2 \cdot \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \kappa\right), \dots$$

$$u_1^{(\sigma-1)} = \text{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1) \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \kappa\right),$$

und ähnlich für die anderen Horizontal- und Verticalgruppen, so dass, wenn

$$\int_0^u \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = w$$

gesetzt wird, die die Grössen u definirende Gleichung lautet:

$$(186) \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}(w_1, \kappa) \right]$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right]$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + 2 \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right] \dots$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + (\varrho-1) \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right] \times$$

$$\left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \kappa\right) \right]$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right] \dots$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + (\varrho-1) \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right]$$

$$\dots$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1) \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}, \kappa\right) \right]$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1) \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right] \dots$$

$$\cdot \left[\text{sinam}(w, \kappa) - \text{sinam}\left(w_1 + (\sigma-1) \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma} + (\varrho-1) \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho}, \kappa\right) \right].$$

Bekanntlich ist aber für eine Transformation ϱ^{ten} Grades, wenn

$$(187) \dots \frac{m\omega + m'\omega'}{\varrho} = \Omega$$

gesetzt wird, κ den ursprünglichen, λ den transformirten Integralmodul, M den Multiplicator der Transformation bedeutet,

$$(188) \dots \sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{\kappa^q}{\lambda}} \sinam(w, \kappa) \times \\ \frac{\prod_{\alpha=1}^{q-1} (\sinam(w, \kappa) - \sinam(\alpha\Omega, \kappa))}{\prod_{\alpha=1}^{\frac{q-1}{2}} (1 - \kappa^2 \sin^2 am(w, \kappa) \sin^2 am(\alpha\Omega, \kappa))}.$$

Bildet man den Ausdruck

$$(L) \dots \sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \sinam\left(\frac{w_1}{M}, \lambda\right),$$

so wird dieser Ausdruck verschwinden, wenn $w = w_1$ ist, andererseits sieht man aber aus dem bekannten Ausdrucke

$$(189) \dots \sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{\kappa^q}{\lambda}} \sinam(w, \kappa) \sinam(w + \Omega, \kappa) \\ \cdot \sinam(w + 2\Omega, \kappa) \dots \sinam(w + (q-1)\Omega, \kappa),$$

dass der Ausdruck $\sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right)$ unverändert bleibt, wenn statt w die Grösse $w + \nu\Omega$ gesetzt wird, worin ν irgend eine ganze Zahl bedeutet, so dass der Ausdruck (L) auch verschwindet, wenn $w = w_1 + \Omega, w_1 + 2\Omega, \dots w_1 + (q-1)\Omega$ gesetzt wird, und da nun aus (188) folgt, dass der Zähler des Ausdruckes (L) eine ganze Function ϱ^{ten} Grades von $\sinam(w, \kappa)$ ist, so wird sich dieser in die Form setzen lassen

$$C \left(\sinam(w, \kappa) - \sinam(w_1, \kappa) \right) \\ \cdot \left(\sinam(w, \kappa) - \sinam\left(w_1 + \frac{m\omega + m'\omega'}{q}, \kappa\right) \right) \dots \\ \cdot \left(\sinam(w, \kappa) - \sinam\left(w_1 + (q-1) \frac{m\omega + m'\omega'}{q}, \kappa\right) \right),$$

worin C eine Constante bedeutet, also in den ersten Theil der Gleichung (186) übergehen, und man sieht sofort, dass, weil die anderen Theile dieser Gleichung sich ebenfalls als die Zähler von Ausdrücken der Form

$$\sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \sinam\left(\frac{w_1 + \nu \cdot \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}}{M}, \lambda\right)$$

darstellen lassen, während die Nenner dieser Ausdrücke nur für constante, nicht von w_1 abhängige Werthe von w verschwinden können,

die Gleichung (186), welche in $\sinam(w, \kappa)$ vom $\varrho\sigma^{\text{ten}}$ Grade ist, sich ersetzen lässt durch die folgende

$$(190) \dots \left[\sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \sinam\left(\frac{w_1}{M}, \lambda\right) \right] \\ \cdot \left[\sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \sinam\left(\frac{w_1 + \frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}}{M}, \lambda\right) \right] \dots \\ \dots \left[\sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right) - \sinam\left(\frac{w_1 + (\sigma-1)\frac{\mu\omega + \mu'\omega'}{\sigma}}{M}, \lambda\right) \right] = 0,$$

welche in $\sinam\left(\frac{w}{M}, \lambda\right)$ nur vom σ^{ten} Grade ist. Nun war aber oben als Integral der nicht homogenen linearen Differentialgleichung das elliptische Integral

$$(191) \dots z_1 = \int_0^{u_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi, \kappa)} + U$$

vorausgesetzt, worin

$$\mathcal{A}(\xi, \kappa) = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \kappa^2 \xi^2)},$$

und u_1 eine Lösung jener Gleichung $\varrho\sigma^{\text{ten}}$ Grades ist, welche auch in die Form gesetzt wurde

$$(192) \dots u_1 = \sinam(w_1, \kappa);$$

setzt man nun

$$(193) \dots \int_0^{u_1} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi, \lambda)} = \frac{1}{M} \int_0^{u_1} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi, \kappa)},$$

so wird z_1 vermöge der durch diese Gleichung ausgedrückten Transformation ϱ^{ten} Grades übergehen in

$$(194) \dots z_1 = \int_0^{u_1} \frac{F(\xi) d\xi}{\mathcal{A}(\xi, \lambda)} + \mathfrak{U},$$

worin vermöge (192) und (193)

$$(195) \dots u_1 = \sinam\left(\frac{w_1}{M}, \lambda\right),$$

und somit u_1 eine Lösung der Gleichung σ^{ten} Grades (190) ist. Wir finden also, dass, wenn jener linearen Differentialgleichung ein elliptisches Integral genügt, dessen obere Grenze eine algebraische Function der Variablen ist, der Grad der diese Function definirenden Gleichung vermöge einer Zerlegung in Gruppen erniedrigt werden kann, und fährt man in dieser Schlussweise fort, bis man zu einer Gleichung ersten Grades gelangt, so erhält man den folgenden Satz:

Genügt einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung ein

elliptisches Integral, dessen obere Grenze eine algebraische Function der Variabeln ist, so lässt sich dieses, wenn die reducirte Differentialgleichung als Lösung entweder gar kein elliptisches Integral besitzt, welches zu demselben Integralmodul gehört, oder, falls derartige Integrale vorhanden sind, die obere Grenze des elliptischen Integrales, sowie die dazugehörige Irrationalität rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt ist, in ein elliptisches Integral mit anderem, durch algebraische Transformation erhaltenen Integralmodul verwandeln, dessen obere Grenze eine rationale Function der Coefficienten der Differentialgleichung ist.

Es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, wie diese Sätze auf hyperelliptische und Abel'sche Integrale auszudehnen sind, nachdem oben die Verwendung des Abel'schen Theorems für diese Fragen besprochen worden.

§ 15.

Eigenschaften der Irrationalitäten solcher Abel'scher Integrale, aus denen Integrale linearer Differentialgleichungen zusammengesetzt sind.

Nachdem wir eine Reihe von Sätzen über die rationale Ausdrückbarkeit der Grenzen von Abel'schen Integralen aufgestellt haben, welche linearen nicht homogenen Differentialgleichungen genügen, wollen wir die Beschaffenheit der algebraischen Irrationalität solcher Abel'scher Integrale näher untersuchen.

Habe also die Differentialgleichung

$$(196) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

ein Integral der Form

$$(197) \dots z_1 = \int_{\cdot}^{u_1} f(\xi, \mathcal{A}(\xi)) d\xi + U,$$

worin

$$\mathcal{A}(\xi) = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - x^2 \xi^2)},$$

u_1 eine algebraische Function von x ist, und U_1 eine algebraisch-logarithmische Function bedeutet, so war oben gezeigt worden, dass jener Differentialgleichung auch stets ein Integral von der Form

$$(198) \dots z_2 = \frac{1}{\delta} \int_{\cdot}^v f(\xi, \mathcal{A}(\xi)) d\xi + V$$

genügt, worin δ eine positive ganze Zahl, v und $\mathcal{A}(v)$ rational aus x , Y_1 , Y_2 , $\dots$ Y_{m-1} , y zusammengesetzt sind, und V eine algebraische Function desselben Charakters ist.

Bildet man den Ausdruck

$$(199) \dots z = \int^v \frac{d\xi}{\Delta(\xi)},$$

woraus

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{1}{\Delta(v)}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{1}{\Delta(v)} - \frac{\Delta'(v)}{\Delta(v)^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2, \dots$$

folgt, und setzt hieraus die Grösse

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx}$$

zusammen, so wird dieselbe eine rationale Function von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y$, welche wir durch $F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y)$ bezeichnen wollen; wir finden somit, dass, wenn der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

durch ein elliptisches Integral genügt wird, eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y)$$

existirt, worin F eine rationale Function bedeutet, und welche als Integral das zugehörige elliptisches Integral erster Gattung von der Form

$$z = \int^v \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

besitzt, für welches v und $\Delta(v)$ rational durch $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y$ ausdrückbar sind.

Wir werden somit zur Feststellung der Eigenschaft der Irrationalität $\Delta(\xi)$ nur solche lineare, nicht homogene Differentialgleichungen zu betrachten haben, welche ein elliptisches Integral erster Gattung zum Integral haben, dessen obere Grenze sammt der zu dieser Grenze gehörigen Irrationalität rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar ist.

Habe also die Differentialgleichung (196) das Integral (199), und denke man sich für die Ableitungen von z die schon oben entwickelten Werthe eingesetzt, so kann man in der für alle x nunmehr identischen Gleichung die Variable x willkürliche Wege beschreiben lassen, immer wird die Gleichung identisch befriedigt werden, und aus früher angestellten Betrachtungen ist klar, dass, wenn man y als Lösung einer mit Adjunction der Grössen $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ irreductibeln Gleichung

$$(200) \dots y^n + \varphi_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}) y^{n-1} + \dots \\ \dots + \varphi_n(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}) = 0$$

auffasst, man x solche Umläufe machen lassen kann, dass man ohne Aenderung der Werthe $Y_1, \dots Y_{m-1}$ successive zu allen n Wurzelwerthen dieser Gleichung gelangt, wie dies für irreductible Gleichungen bekanntlich allgemein möglich ist. Nehmen wir nun an, dass zwei Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung (200) in der Beziehung zu einander stehen, dass

$$(201) \dots y_2 = \varepsilon y_1$$

ist, so wissen wir aus der im vorigen § angestellten Untersuchung, dass ε eine Constante, und zwar eine μ^{te} Einheitswurzel sein muss, und die Gleichung (200) dann die Form annimmt:

$$(202) \dots y^{\mu} + \varphi_{\mu}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{(x-1)\mu} + \dots \\ \dots + \varphi_{x\mu}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0.$$

Nehme nun v_1 , während y_1 in $y_2 = \varepsilon y_1$ übergeht, worin ε die primitive μ^{te} Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ bedeutet, mit Beibehaltung der Werthe $Y_1, \dots Y_{m-1}$ den Werth v_2 an!, so wird, wenn y_1, z_1, v_1 und y_2, z_2, v_2 entsprechende Werthe bedeuten,

$$z_2 = \int_{\Delta(\xi)}^{v_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = \varepsilon y_1$$

genügen, so dass

$$(203) \dots \frac{d^m (\varepsilon z_1 - z_2)}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} (\varepsilon z_1 - z_2)}{dx^{m-1}} + \dots \\ \dots + Y_{m-1} \frac{d(\varepsilon z_1 - z_2)}{dx} = 0$$

wird, und daher die homogene lineare Differentialgleichung

$$(204) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

das Integral

$$(205) \dots z = \int_{\Delta(\xi)}^{v_2} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \varepsilon \int_{\Delta(\xi)}^{v_1} \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}$$

besitzt.

Nehmen wir nun an, dass die reducirte Differentialgleichung (204) gar kein Integral einer algebraischen Function zu ihrem Integrale hat, d. h. dass die durch Substitution von $\frac{dz}{dx} = \xi$ aus (204) hervorgehende Gleichung

$$(206) \dots \frac{d^{m-1} \xi}{dx^{m-1}} + Y_1 \frac{d^{m-2} \xi}{dx^{m-2}} + \dots + Y_{m-1} \xi = 0$$

kein algebraisches Integral besitzt, oder auch, dass, falls die Gleichung (204) Abel'sche Integrale zu Lösungen hat, diese sich stets durch ein elliptisches Integral erster Gattung mit derselben Irrationalität $\mathcal{A}(\xi)$ darstellen lassen*), so würde jedenfalls

$$(207) \dots \frac{dv_2}{\mathcal{A}(v_2)} - \varepsilon \frac{dv_1}{\mathcal{A}(v_1)} = \frac{dv_3}{\mathcal{A}(v_3)}$$

sein, worin v_3 auch eine Constante sein kann. Setzt man nun

$$\frac{dv_2}{\mathcal{A}(v_2)} - \frac{dv_3}{\mathcal{A}(v_3)} = \frac{dv'}{\mathcal{A}(v')},$$

so geht die Gleichung (207) in

$$(208) \dots \frac{dv'}{\mathcal{A}(v')} = \varepsilon \frac{dv_1}{\mathcal{A}(v_1)}$$

über, worin offenbar v' und v_1 algebraisch mit einander zusammenhängen. Da aber der Modul der beiden elliptischen Differentialien der Gleichung (208) derselbe ist, und

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{\mu} + i \sin \frac{2\pi}{\mu}$$

reell nur dann ist, wenn $\frac{2\pi}{\mu} = \kappa\pi$, worin κ eine ganze Zahl, d. h., wenn $\mu = 2$, also $\varepsilon = -1$ ist, so folgt aus der bekannten Definition der complexen Multiplication elliptischer Integrale der Satz,

dass, wenn einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung, deren rechte Seite y bei einem geschlossenen Umlaufe der Variablen, für welchen die Coefficienten der Differentialgleichung unverändert bleiben, in ein Multiplum dieses Werthes übergeht, ein elliptisches Integral genügt, unter der Voraussetzung, dass die reducirte Gleichung, wenn sie überhaupt durch ein Abel'sches Integral befriedigt wird, als solches nur ein elliptisches Integral mit demselben Modul besitzt, der Integralmodul des elliptischen Integrales ein Modul der complexen Multiplication sein muss, wenn nicht jenes Multiplum $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ reell, d. h. $\mu = 2$ ist.

Setzen wir mit der bekannten Bezeichnung gradliniger Integrale

$$\omega = 4 \int_0^1 \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}, \quad \omega' = 2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - 2 \int_0^1 \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)},$$

so gelten vermöge des algebraischen Zusammenhanges der Grössen v_1 und v' für die Gleichung (208) nach bekannten, der Transformations-

*) Für den Fall der einfachsten Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ würde das Integral der reducirten Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ eine Constante sein, die sich stets als ein solches elliptisches Integral auffassen lässt, somit der obigen Bedingung für die reducirte Gleichung stets genügt werden.

theorie der elliptischen Integrale geläufigen Schlüssen die Beziehungen

$$(209) \dots \begin{cases} \delta \omega = \varepsilon a_0 \omega + \varepsilon a_1 \omega' \\ \delta \omega' = \varepsilon b_0 \omega + \varepsilon b_1 \omega', \end{cases}$$

worin $\delta, a_0, a_1, b_0, b_1$ ganze Zahlen bedeuten, und man erhält somit zwischen diesen Zahlen und ε die nothwendig zu erfüllende Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 \varepsilon - \delta & a_1 \varepsilon \\ b_0 \varepsilon & b_1 \varepsilon - \delta \end{vmatrix} = 0;$$

daraus folgt, dass $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ die Lösung einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein muss, woraus wieder unmittelbar die einzig möglichen Werthe von μ bestimmt werden können. Denn wenn

$$\cos \frac{2\pi}{\mu} + i \sin \frac{2\pi}{\mu}$$

die Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist, so muss $\cos \frac{2\pi}{\mu}$ selbst rational sein, und aus dem Ausdrücke

$$\begin{aligned} \cos k \cdot \frac{2\pi}{\mu} &= \cos^k \frac{2\pi}{\mu} - \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cos^{k-2} \frac{2\pi}{\mu} \sin^2 \frac{2\pi}{\mu} \\ &+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{k-4} \frac{2\pi}{\mu} \sin^4 \frac{2\pi}{\mu} + \dots, \end{aligned}$$

worin k eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, folgt dann auch, dass $\cos k \cdot \frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl sein muss. Sei nun

$$\mu = 2^\alpha 3^\beta p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_\lambda^{q_\lambda},$$

worin $p_1, p_2, \dots p_\lambda$ von 2 und 3 verschiedene Primzahlen, und $q_1, q_2, \dots q_\lambda$ positive ganze Zahlen bedeuten, so würde, wenn $\cos \frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl wäre, auch

$$\cos 2^\alpha 3^\beta p_1^{q_1-1} p_2^{q_2} \dots p_\lambda^{q_\lambda} \cdot \frac{2\pi}{\mu}, \text{ d. h. } \cos \frac{2\pi}{p_1}$$

rational sein müssen; nun ist aber $\cos \frac{2\pi}{p_1} + i \sin \frac{2\pi}{p_1}$ ein Lösung der Gleichung

$$(a) \dots x^{p_1-1} + x^{p_1-2} + \dots + x + 1 = 0,$$

welche, wie wir wissen, irreductibel ist in Bezug auf die Rationalität der Coefficienten, und setzt man

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

so hat die sich ergebende Gleichung

$$(b) \dots y^{\frac{p_1-1}{2}} + y^{\frac{p_1-3}{2}} - \frac{p_1-3}{2} y^{\frac{p_1-5}{2}} + \dots = 0$$

die Lösung

$$\left(\cos \frac{2\pi}{p_1} + i \sin \frac{2\pi}{p_1} \right) + \left(\cos \frac{2\pi}{p_1} - i \sin \frac{2\pi}{p_1} \right) = 2 \cos \frac{2\pi}{p_1},$$

und auch die Gleichung (b) wird irreductibel sein, da, wenn sie es nicht wäre, die Substitution von $y = x + \frac{1}{x}$ in einen der Zerlegungsfactoren auch eine Zerlegung der Gleichung (a) liefern würde; es kann somit $\cos \frac{2\pi}{p_1}$ nur dann rational sein, wenn $\frac{p_1-1}{2} = 1$, also $p_1 = 3$ ist, dasselbe gilt für $p_2, \dots p_i$, somit sind die einzigen möglichen Fälle von μ , für welche $\cos \frac{2\pi}{\mu}$ eine rationale Zahl sein soll, in der Form enthalten

$$\mu = 2^\alpha 3^\beta;$$

ist nun $\beta = 2$ oder > 2 , so folgt ebenso, dass dann auch $\cos \frac{2\pi}{9}$ rational sein müsste, was, wie man leicht einsieht, nicht der Fall ist, ebenso würde, wenn $\alpha = 3$ oder > 3 sein würde, auch $\cos \frac{2\pi}{8}$ rational sein müssen, was wiederum nicht der Fall ist, also sind die möglichen Fälle zunächst auf die Form

$$\mu = 2^\alpha \cdot 3^\beta$$

beschränkt, worin $\alpha = 0, 1, 2$, $\beta = 0, 1$ sein kann; in der That ist für $\mu = 2, 3, 4, 6$

$$\cos \frac{2\pi}{2}, \quad \cos \frac{2\pi}{4}, \quad \cos \frac{2\pi}{3}, \quad \cos \frac{2\pi}{6}$$

eine rationale Zahl, und wir finden, dass ε nur die 4 Formen haben kann

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{4}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{6}}.$$

Andererseits ist aber leicht einzusehen*), dass nur zwei in einander transformirbare elliptische Integrale dieselben Multiplica-

*) Man kann dies leicht mit Hülfe der aus der Transformationstheorie der elliptischen Functionen bekannten Formeln beweisen; stehen nämlich zwei elliptische Differentiale in der Beziehung

$$\frac{dy}{\Delta(y)} = a \frac{d\eta}{\Delta(\eta)},$$

worin y und η algebraisch zusammenhängen, so ist

$$\delta\omega = a r \omega + a s \omega'$$

$$\delta\omega' = a r' \omega + a s' \omega',$$

toren der complexen Multiplication haben können; da nun die Multiplicatoren mit Ausnahme von $e^{\frac{2\pi i}{2}} = -1$, in welchem Falle derselbe reell wird, sich also für den Modul des Integrales gar keine Be-

woraus unmittelbar

$$(A) \dots \tau = \frac{-(r-s') + \sqrt{(r-s')^2 + 4r's}}{s}, \quad a = \frac{2\delta}{2r + s\tau}$$

folgt. Hieraus ist nun leicht einzusehen, in welcher Beziehung zu einander verschiedene complexe Multiplicationsmoduln stehen müssen, wenn der Multiplikator a für diese Moduln derselbe sein soll, oder wenn die beiden Gleichungen

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda_1^2 t^2)}} = \frac{adu}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda_1^2 u^2)}}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda_2^2 v^2)}} = \frac{adw}{\sqrt{(1-w^2)(1-\lambda_2^2 w^2)}},$$

in welchen u mit t , ebenso wie w mit v algebraisch verbunden sind, zu gleicher Zeit bestehen sollen; denn da sich dann, wenn der zum Modul λ_1 gehörige $\mathfrak{S}$ -Modul mit τ_1 , der zu λ_2 gehörige mit τ_2 bezeichnet wird, aus (A) vermöge der Gleichheit der Multiplikatoren die Beziehung ergibt

$$\frac{2\delta_1}{2r_1 + s_1\tau_1} = \frac{2\delta_2}{2r_2 + s_2\tau_2},$$

in welcher die der Transformation zugehörigen ganzen Zahlen mit entsprechenden Indices versehen sind, so folgt

$$(B) \dots \tau_2 = \frac{2(r_1\delta_2 - r_2\delta_1) + \delta_2 s_1 \tau_1}{\delta_1 s_2},$$

und somit τ_2 als lineare Function von τ_1 . Da nun, wie wir wissen, der reelle Theil von $\frac{\tau_1}{i}$ und $\frac{\tau_2}{i}$ wesentlich positiv ist, und diese beiden reellen Theile sich nach (B) um den Factor $\frac{\delta_2 s_1}{\delta_1 s_2}$ unterscheiden, so wird dieser Factor ebenfalls positiv sein, und somit, wenn in bekannter Bezeichnungsweise

$$\tau_2 = \frac{b_0 - a_0 \tau_1}{a_1 \tau_1 - b_1}$$

gesetzt wird, in unserem Falle

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = \delta_1 \delta_2 s_1 s_2 = N$$

eine positive ganze Zahl sein; nach einem bekannten Satze der Transformationstheorie ist dann aber τ_2 ein durch eine Transformation N^{ten} Grades aus τ_1 transformirter $\mathfrak{S}$ -Modul, und es folgt somit, dass die beiden Moduln λ_1 und λ_2 der complexen Multiplication aus einander transformirte Integralmoduln sein müssen, dass also gleiche Multiplikatoren nur dann zwei verschiedenen Moduln der complexen Multiplication zugehören können, wenn die Moduln in einander transformirbar sind, oder endlich, dass, wenn wir transformirte Integralmoduln als gleich betrachten, jedem Multiplikatorwerth einer complexen Multiplication nur ein Modul entsprechen wird.

dingung ergibt, sämmtlich complex sind, und die elliptischen Integrale

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}}, \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4-1}}, \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6-1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta^3-1)}} \quad (\text{für } \xi^2 = \eta)$$

eben diese Multiplicatoren besitzen, wie aus den Substitutionen

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}} \xi_1, \xi = e^{\frac{2\pi i}{4}} \xi_1, \xi = e^{\frac{2\pi i}{6}} \xi_1 \quad \text{oder} \quad \eta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \eta_1$$

hervorgeht, so werden diese drei elliptischen Integrale, wenn wir den Fall $\mu = 2$ ausschliessen, diejenigen sein, die allein Integrale jener linearen, nicht homogenen Differentialgleichung sein können.

Wir können somit das folgende Theorem aussprechen:

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

in welcher y durch die Gleichung definirt ist

$$(210) \quad y^{z\mu} + \varphi_\mu(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{(z-1)\mu} + \dots + \varphi_{z\mu}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

kann nur dann durch ein elliptisches Integral erster Gattung — und zwar unter der Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein durch ein Abel'sches Integral darstellbares Integral besitzt (von dem constanten Integrale abgesehen), oder nur elliptische Integrale mit demselben Modul — befriedigt werden, wenn $\mu = 2, 3, 4, 6$ ist, und dann sind in den drei letzten Fällen die Integrale der Differentialgleichung von einer der Formen

$$\int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}}, \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4-1}}, \int^u \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^6-1}} = \frac{1}{2} \int^v \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta^3-1)}},$$

worin u respective v , sowie die dazugehörigen Irrationalitäten rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}$ und y sind.

Fassen wir den Fall $\mu = 2$ ins Auge, für welchen y der Gleichung genügen wird

$$(211) \quad \dots y^{2z} + \varphi_2(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{2z-2} + \varphi_4(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{2z-4} + \dots + \varphi_{2z}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

so wird man, wenn der Differentialgleichung das Integral genügt

$$(212) \quad \dots z_1 = \int^u \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)},$$

worin

$$\mathcal{A}(\xi) = \sqrt{(1-\xi^2)(1-e^2\xi^2)},$$

und u_1 sowie $\mathcal{A}(u_1)$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und y bedeuten, nach der Gleichung (211) die Variable x einen solchen Umlauf machen lassen können, dass ohne Werthveränderung von

$Y_1 \cdots Y_{m-1}$ die Wurzel y in $-y$ übergeführt wird, wofür die aus diesen Grössen rational zusammengesetzten Werthe von u_1 und $\mathcal{A}(u_1)$ in u_2 und $\mathcal{A}(u_2)$ übergehen mögen, und es wird daher

$$z_2 = \int_{\mathcal{A}(\xi)}^{u_2} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = -y$$

sein, und somit, wie unmittelbar zu sehen,

$$z_3 = \frac{z_1 - z_2}{2}$$

der ursprünglichen Differentialgleichung genügen; setzt man aber

$$u_1 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y) \quad \mathcal{A}(u_1) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y)$$

$$u_2 = f(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -y) \quad \mathcal{A}(u_2) = F(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, -y),$$

so ist, wenn man

$$\int_{\mathcal{A}(\xi)}^{u_1} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - \int_{\mathcal{A}(\xi)}^{u_2} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = \int_{\mathcal{A}(\xi)}^{u_3} \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

setzt, vermöge der bekannten Ausdrücke für u_3 und $\mathcal{A}(u_3)$ sofort einzusehen, dass

$$u_3 = f_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y^2) \cdot y, \quad \mathcal{A}(u_3) = F_1(x, Y_1, \cdots Y_{m-1}, y^2)$$

ist, und, dass, wenn wir zu z_3 , was erlaubt ist, da $Y_m = 0$, noch eine Constante von der Form

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

hinzufügen, das neue Integral

$$z = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}(\xi)}^v \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

so beschaffen ist, dass v eine rationale Function von $x, Y_1, \cdots Y_{m-1}$ und y^2 wird, während $\mathcal{A}(v)$ das Product einer eben solchen Function in y selbst ist.

Nun können aber auch alle linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

bestimmt werden, in denen y die Lösung einer Gleichung von der Form (211) ist, und welchen ein elliptisches Integral

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}(\xi)}^v \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

genügt; denn setzt man $y^2 = t$, so ist t nach (211) durch die Gleichung bestimmt

$$(213) \dots t^x + \varphi_2(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-1} \\ + \varphi_4(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-2} + \dots + \varphi_{2x}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

worin die Functionen $\varphi_2, \varphi_4, \dots \varphi_{2x}$ passend zu wählen sein werden, und v wird nach dem oben bewiesenen als eine rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und t , also von der Form

$$(214) v = \frac{\omega_0(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t + \dots + \omega_{x-1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-1}}{\omega(x, Y_1, \dots Y_{m-1})}$$

worin die ω ganze Functionen der Grössen $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ sind, so zu bestimmen sein, dass $\mathcal{A}(v)$ durch $y = \sqrt{t}$ dividirt, oder dass

$$(215) \dots \frac{\mathcal{A}(v)}{y} =$$

$$\sqrt{\frac{[\omega(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) - \omega_0(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) - \omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t - \dots - \omega_{x-1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-1}] \\ [\omega(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) + \omega_0(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t + \dots + \omega_{x-1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-1}] \\ [\omega(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) - c\omega_0(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) - c\omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t - \dots - c\omega_{x-1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-1}] \\ [\omega(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) + c\omega_0(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) + c\omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t + \dots + c\omega_{x-1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) t^{x-1}]}{t}}$$

eine rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und t ist. Sind z. B. die Functionen $Y_1, \dots Y_{m-1}$ rationale Functionen von x , so würde die Forderung die sein, die ganzen Functionen von $x: \omega, \omega_0, \omega_1, \dots \omega_{x-1}$ so zu bestimmen, dass die eben angegebene Irrationalität mit t selbst gleich verzweigt ist, und wie man eine derartige Aufgabe behandelt, ist im § 12 bei der Frage der Reduction hyperelliptischer und Abel'scher Integrale auf solche niederer Gattung besprochen und an Beispielen erläutert worden. Sind nun die Coefficienten ω und der Integralmodul c diesen Bedingungen gemäss bestimmt, so setze man

$$z = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{\mathcal{A}(v)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{dv}{dx}}{\mathcal{A}(v)}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\mathcal{A}(v)} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{A}'(v)}{\mathcal{A}(v)^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2, \dots$$

und bilde den Ausdruck

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx},$$

so ist vermöge der oben für v und $\mathcal{A}(v)$ angegebenen Formen unmittelbar zu sehen, dass dieser Ausdruck die Gestalt haben wird

$$F(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y^2) \cdot y,$$

worin F eine rationale Function bedeutet, und setzt man

$$F(x, Y_1, Y_2, \dots Y_{m-1}, y^2) \cdot y = \eta,$$

so sieht man aus der für y gegebenen Gleichung (211) unmittelbar, dass η ebenfalls durch eine Gleichung der Form definit ist

$$\eta^{2z} + \psi_2(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) \eta^{2z-1} + \dots + \psi_{2z}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

und dass das elliptische Integral

$$z = \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{A(\xi)}$$

der Differentialgleichung genügt

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = \eta;$$

auf diese Weise kann man alle Differentialgleichungen dieser Form bestimmen, deren rechte Seite einer Gleichung von der Form (211) genügt, und die durch ein elliptisches Integral befriedigt werden.

Gehen wir nunmehr zu dem Falle $\mu = 3$ über, in welchem also y durch die Gleichung definit war

$$(216) \quad y^{3z} + \varphi_3(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{3z-3} + \dots + \varphi_{3z}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

so musste das der Differentialgleichung genügende elliptische Integral die Form haben

$$(217) \quad \dots z_1 = \int \frac{u_1 d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}},$$

worin u_1 und $\sqrt{u_1^3 - 1}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und y bedeuten. Lässt man nun x continuirlich geschlossene Umkreise beschreiben von der Art, dass y , während $Y_1, \dots Y_{m-1}$ ihre ursprünglichen Werthe wieder annehmen, in εy und $\varepsilon^2 y$ übergeht,

worin $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ist, so werden die Werthe der elliptischen Integrale

$$(218) \quad \dots z_2 = \int \frac{u_2 d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}, \quad z_3 = \int \frac{u_3 d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}$$

wiederum Integrale der so entstehenden Differentialgleichungen sein, und es werden die Beziehungen statthaben

$$(219) \quad \begin{cases} u_1 = f(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) & \sqrt{u_1^3 - 1} = F(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) \\ u_2 = f(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, \varepsilon y) & \sqrt{u_2^3 - 1} = F(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, \varepsilon y) \\ u_3 = f(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, \varepsilon^2 y) & \sqrt{u_3^3 - 1} = F(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, \varepsilon^2 y), \end{cases}$$

worin f und F rationale Functionen bedeuten. Nun folgt aber aus

den drei Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d^m z_1}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_1}{dx} &= y \\ \frac{d^m z_2}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_2}{dx} &= \varepsilon y \\ \frac{d^m z_3}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z_3}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz_3}{dx} &= \varepsilon^2 y,\end{aligned}$$

wie man durch Multiplication derselben mit 1, ε^2 , ε und Addition ersieht, dass

$$z = \frac{z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3}{3}$$

ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein wird, und es bleibt somit nur die Summe der elliptischen Integrale (indem wir den Factor $\frac{1}{3}$ fortlassen)

$$\int_{\sqrt{\xi^3-1}}^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}} + \varepsilon^2 \int_{\sqrt{\xi^3-1}}^{u_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}} + \varepsilon \int_{\sqrt{\xi^3-1}}^{u_3} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}}$$

zu untersuchen übrig. Setzen wir in dem Differentialausdruck

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{\sqrt{u_1^3-1}} + \frac{\varepsilon^2 du_2}{\sqrt{u_2^3-1}} + \frac{\varepsilon du_3}{\sqrt{u_3^3-1}} \\ (220) \quad \dots u_1 = U_1, \quad u_2 = \varepsilon U_2, \quad u_3 = \varepsilon^2 U_3,\end{aligned}$$

so geht derselbe über in

$$\frac{dU_1}{\sqrt{U_1^3-1}} + \frac{dU_2}{\sqrt{U_2^3-1}} + \frac{dU_3}{\sqrt{U_3^3-1}},$$

worin nach den Gleichungen (219)

$$(221) \quad \begin{cases} U_1 = f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) & \sqrt{U_1^3-1} = F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) \\ U_2 = \varepsilon^2 f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon y) & \sqrt{U_2^3-1} = F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon y) \\ U_3 = \varepsilon f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^2 y) & \sqrt{U_3^3-1} = F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^2 y) \end{cases}$$

sein wird.

Setzen wir zum Zwecke der Addition jener 3 elliptischen Differentiale nach dem Abel'schen Theorem in schon früher benutzter Form

$$(222) \quad \dots a_2 U^2 + a_1 U + a_0 - b \sqrt{U^3-1} = 0,$$

welcher Gleichung die 3 Werthe U_1 , U_2 , U_3 mit den zugehörigen Irrationalitäten genügen sollen, so folgen nach (221) für die Constanten a_2 , a_1 , a_0 , b , indem wir alle nach dem Modul 3 congruenten

Potenzen von y zusammenfassen, die drei Bestimmungsgleichungen:

$$(223) \begin{cases} a_2(P_2 + Q_2 y + R_2 y^2) + a_1(P_1 + Q_1 y + R_1 y^2) \\ \quad + a_0 - b(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} y + \mathfrak{R} y^2) = 0 \\ a_2 \varepsilon (P_2 + Q_2 \varepsilon y + R_2 \varepsilon^2 y^2) + a_1 \varepsilon^2 (P_1 + Q_1 \varepsilon y + R_1 \varepsilon^2 y^2) \\ \quad + a_0 - b(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \varepsilon y + \mathfrak{R} \varepsilon^2 y^2) = 0 \\ a_2 \varepsilon^2 (P_2 + Q_2 \varepsilon^2 y + R_2 \varepsilon y^2) + a_1 \varepsilon (P_1 + Q_1 \varepsilon^2 y + R_1 \varepsilon y^2) \\ \quad + a_0 - b(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \varepsilon^2 y + \mathfrak{R} \varepsilon y^2) = 0, \end{cases}$$

worin $P_2, Q_2, R_2, P_1, Q_1, R_1, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ und y^3 sind.

Multiplicirt man dieses Gleichungssystem der Reihe nach mit

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon, \end{array}$$

und addirt je drei Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned} a_2 \cdot R_2 y^2 + a_1 \cdot Q_1 y + a_0 \cdot 1 - b \cdot \mathfrak{P} &= 0 \\ a_2 \cdot Q_2 y + a_1 \cdot P_1 + a_0 \cdot 0 - b \cdot \mathfrak{R} y^2 &= 0 \\ a_2 \cdot P_2 + a_1 \cdot R_1 y^2 + a_0 \cdot 0 - b \cdot \mathfrak{Q} y &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus wiederum durch Multiplication der drei Gleichungen mit $1, y, y^2$, wenn ausserdem die eine Constante $= 1$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot L_1 y + a_0 \cdot 1 - b \cdot M_1 &= N_1 y^2 \\ a_1 \cdot L_2 y + a_0 \cdot 0 - b \cdot M_2 &= N_2 y^2 \\ a_1 \cdot L_3 y + a_0 \cdot 0 - b \cdot M_3 &= N_3 y^2, \end{aligned}$$

worin $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$ rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ und y^3 sind. Somit wird also, wenn $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}$, den Charakter ebensolcher Functionen haben,

$$(224) \dots a_1 = \mathfrak{U} \cdot y, \quad a_0 = \mathfrak{B} \cdot y^2, \quad b = \mathfrak{B} \cdot y^2$$

sein, und sich daher vermöge der Gleichung

$$(a_2 U^2 + a_1 U + a_0)^2 - b^2 (U^3 - 1) = (U - U_1)(U - U_2)(U - U_3)(U - V),$$

aus welcher für $U = 0$

$$a_0^2 + b^2 = U_1 U_2 U_3 V$$

hervorgeht, nach (221) und vermöge des Umstandes, dass

$$U_1 U_2 U_3 = f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon y) f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^2 y)$$

sich als rationale symmetrische Function von $y, \varepsilon y, \varepsilon^2 y$ rational durch $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y^3 ausdrücken lässt, die Bestimmungsgleichung

$$V = T \cdot y$$

ergeben, worin T eine rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y^3$ bedeutet, und V der Gleichung genügt

$$\frac{dU_1}{\sqrt{U_1^3-1}} + \frac{dU_2}{\sqrt{U_2^3-1}} + \frac{dU_3}{\sqrt{U_3^3-1}} = \frac{dV}{\sqrt{V^3-1}};$$

zugleich folgt aus der Gleichung (222) die zu V gehörige Irrationalität in der Form

$$\sqrt{V^3-1} = \frac{V^2 + a_1 V + a_0}{b},$$

oder nach (224)

$$\sqrt{V^3-1} = \frac{T^2 + Tu + \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} = T_1$$

eine rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y^3$.

Wir finden somit den folgenden Satz:

Wenn einer Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

unter den festgestellten Bedingungen für die reducirte Differentialgleichung, wobei y einer Gleichung von der Form genügen soll

$y^3 + \varphi_3(x, Y_1, \dots Y_{m-1})y^3 + \dots + \varphi_{3\kappa}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0$,
ein elliptisches Integral genügt, so gehört dieses jedenfalls zur Irrationalität $\sqrt{\xi^3-1}$, und die Differentialgleichung hat dann auch stets das Integral

$$\frac{1}{3} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3-1}},$$

worin

$$(225) \dots V = T \cdot y, \quad \sqrt{V^3-1} = T_1$$

sind, wenn T und T_1 rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und y^3 bedeuten.

Durch diesen Satz ist aber wiederum die Möglichkeit gegeben, alle jene Differentialgleichungen aufzustellen, die durch elliptische Integrale befriedigt werden, wenn y einer Gleichung der obigen Form genügt. Denn setzt man $y^3 = t$, so hat man nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dass, wenn eine Function t durch eine algebraische Gleichung

$$t^\kappa + \varphi_3(x, Y_1, \dots Y_{m-1})t^{\kappa-1} + \dots + \varphi_{3\kappa}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0$$

definiert ist, deren Coefficienten passend zu bestimmen sind, nach (225) eine Substitution

$$V = \frac{\omega_0(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1})t + \dots + \omega_{1-\kappa}(x, Y_1, \dots Y_{m-1})t^{\kappa-1}}{\omega(x, Y_1, \dots Y_{m-1})} \cdot \sqrt[3]{t},$$

in welcher $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{x-1}, \omega$ zu bestimmende ganze Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, gefunden werde von der Art, dass

$$\sqrt{\left(\frac{\omega_0(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}) + \omega_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1})t + \dots + \omega_{x-1}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1})t^{x-1}}{\omega(x, Y_1, \dots, Y_{m-1})}\right)^3 t - 1}$$

eine rationale Function von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und t ist, worin unter der Quadratwurzel — und das war der Zweck jener Transformation — nur eine rationale Function von t vorkommt. Die Methode, alle zugehörigen Differentialgleichungen aufzustellen, ist wiederum im Früherem enthalten.

Ist ferner $\mu = 4$, also y durch eine Gleichung der Form definiert $y^{4x} + \varphi_4(x, Y_1, \dots, Y_{m-1})y^{4x-4} + \dots + \varphi_{4x}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}) = 0$, so musste das der Differentialgleichung genügende elliptische Integral die Form haben

$$(226) \dots z_1 = \int_{\sqrt{\xi^4 - 1}}^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}},$$

worin u_1 und $\sqrt{u_1^4 - 1}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y sind.

Lässt man nun x solche geschlossene Umkreise beschreiben, dass y ohne Aenderung der Grössen $Y_1, \dots, Y_{m-1}$ in $-y, iy, -iy$ übergeht, so wird genau nach den für den vorigen Fall gemachten Auseinandersetzungen auch

$$(227) z = \frac{1}{4} \left\{ \int_{\sqrt{\xi^4 - 1}}^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} - i \int_{\sqrt{\xi^4 - 1}}^{u_2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} - \int_{\sqrt{\xi^4 - 1}}^{u_3} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} + i \int_{\sqrt{\xi^4 - 1}}^{u_4} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}} \right\}$$

ein Integral der Differentialgleichung sein, worin

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) & \sqrt{u_1^4 - 1} &= F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) \\ u_2 &= f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, iy) & \sqrt{u_2^4 - 1} &= F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, iy) \\ u_3 &= f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, -y) & \sqrt{u_3^4 - 1} &= F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, -y) \\ u_4 &= f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, -iy) & \sqrt{u_4^4 - 1} &= F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, -iy) \end{aligned}$$

ist, wenn f und F rationale Functionen bedeuten. Setzt man nun wieder wie früher, indem man $u_1 = U_1, u_2 = -iU_2, u_3 = -U_3, u_4 = -iU_4$ macht, die Summe der so entstehenden 4 elliptischen Integrale nach dem Abel'schen Theorem zu einem elliptischen Integrale zusammen, so ergibt sich leicht, dass das Integral der Differentialgleichung in

$$z = \frac{1}{4} \int_{\sqrt{\xi^4 - 1}}^V \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 - 1}}$$

übergeht, worin

$$V = T \cdot y, \quad \sqrt{V^4 - 1} = T_1,$$

wenn T und T_1 rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y^4 bedeuten, und auch hier ist sofort zu sehen, dass es vermöge der eben angegebenen Reduction des elliptischen Integrales auf ein solches mit der Grenze V wiederum möglich ist, die Form aller dahin gehörigen Differentialgleichungen zu bestimmen, da der Ausdruck $\sqrt{V^4 - 1}$ wieder nur von y^4 abhängig ist.

Ist endlich $\mu = 6$, also y durch die Gleichung bestimmt $y^{6x} + \varphi_6(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}) y^{6x-6} + \dots + \varphi_{6x}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}) = 0$, so musste das der Differentialgleichung genügende elliptische Integral die Form haben

$$z_1 = \int^{u_1} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi^3 - 1)}},$$

worin u_1 und $\sqrt{u_1(u_1^3 - 1)}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y sind; genau in der besprochenen Weise folgt, dass dann auch

$$z = \frac{1}{6} \int^V \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi^3 - 1)}}$$

der Differentialgleichung genügt, worin

$$V = T \cdot y^2, \quad \sqrt{V(V^3 - 1)} = T_1 \cdot y$$

und T und T_1 rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y^6 sind, und ebenso erhellt aus dieser Reduction wieder die Möglichkeit der Aufstellung aller dazugehörigen Differentialgleichungen.

Für den Fall der einfachsten Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ liefern also die gegebenen Sätze die einzigen Formen der elliptischen Integrale, auf welche Abel'sche Integrale, deren Irrationalität einer Gleichung von der Form (210) genügt, reducirbar sind, und zugleich das Mittel, die Abel'schen Integrale sämmtlich aufzustellen, welche dieser Bedingung unterliegen. Greifen wir z. B. den Fall heraus, in welchem y durch die Gleichung definirt ist

$$y^3 = \frac{\omega(x)^3}{R(x)^q},$$

worin $R(x)$ und $\omega(x)$ ganze Functionen von x , und q eine ganze Zahl bedeutet, so wissen wir nach den eben entwickelten Sätzen, dass, weil die reducirte Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ nur ein constantes Integral besitzt, wenn das Abel'sche Integral erster Gattung $\int y dx$ auf ein elliptisches Integral reducirbar sein soll, nothwendig

$$\int^x y dx = \frac{1}{3} \int^V \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 - 1}}$$

sein wird, worin

$$(228) \dots V = \frac{f(x) \omega(x)}{\sqrt[3]{R(x)^q}} \quad \text{und} \quad \sqrt{V^3 - 1} = F(x),$$

$f(x)$ und $F(x)$ rationale Functionen von x sind. Setzt man nun den Werth von V in $\sqrt{V^3 - 1}$ ein, so hat man die rationale Function $f(x)$ so zu bestimmen, dass

$$\sqrt{\frac{f(x)^3 \cdot \omega(x)^3 - R(x)^q}{R(x)^q}}$$

eine rationale Function von x ist — und diese Aufgabe lässt sich bekanntlich unmittelbar mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten lösen, indem man die in den Polynomen vorkommenden Constanten so bestimmt, dass das Polynom unter der Quadratwurzel nur doppelte Factoren hat, woraus sich für die zu bestimmenden Coefficienten gerade so viel Bedingungsgleichungen ergeben als Doppelfactoren vorkommen. Umgekehrt sieht man aber auch leicht, dass, wenn $f(x)$, $\omega(x)$ und $R(x)$ als rationale Functionen von x so bestimmt werden können, dass, wenn

$$V = \frac{f(x) \omega(x)}{\sqrt[3]{R(x)^q}}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{V^3 - 1}$$

gleich einer rationalen Function $F(x)$ ist, dann

$$dV = \left[-\frac{q}{3} f(x) \omega(x) \frac{R'(x)}{R(x)} + \frac{d}{dx} (f(x) \omega(x)) \right] \frac{1}{\sqrt[3]{R(x)^q}} dx$$

also

$$\frac{dV}{\sqrt{V^3 - 1}} = \frac{-\frac{q}{3} f(x) \omega(x) R'(x) + \frac{d}{dx} (f(x) \omega(x)) R(x)}{R(x) F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)^q}}$$

wird, d. h. ein zur Irrationalität $\sqrt[3]{R(x)}$ gehöriges Integral auf ein elliptisches Integral reducirbar ist. Um ein einfaches Beispiel hierfür durchzuführen, setze man

$$y = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \right)^2},$$

so ist nach der angegebenen Methode $f(x)$ so zu bestimmen, dass, wenn man

$$V = \frac{f(x)}{\left(\sqrt[3]{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \right)^2}$$

setzt, der Ausdruck

$$\sqrt{V^3 - 1} = \frac{\sqrt{f(x)^3 - (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2}}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

eine rationale Function von x wird. Dies ist aber für beliebige Werthe von α, β, γ möglich; denn setzt man

$$f(x) = \sqrt[3]{c} (x - \beta) (x - \gamma),$$

worin c eine noch zu bestimmende Constante bedeutet, so erhält man

$$\sqrt{V^3 - 1} = \frac{1}{x - \alpha} \sqrt{c(x - \beta)(x - \gamma) - (x - \alpha)^2},$$

und bestimmt man endlich c so, dass das Polynom unter der Wurzel eine doppelte Lösung hat, also derart, dass c der Gleichung genügt

$$c(\beta - \gamma)^2 - 4\alpha(\beta + \gamma) + 4\beta\gamma + 4\alpha^2 = 0,$$

so erhält man, wie leicht zu sehen,

$$\frac{dx}{\left(\sqrt[3]{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)}\right)^2} = m \frac{dV}{\sqrt{V^3 - 1}},$$

worin m eine Constante bedeutet, somit die bekannte Reduction von Legendre für willkürliche α, β, γ , und ähnlich andere Reductionsformeln für $y = \sqrt[m]{R(x)}$, worauf wir nicht weiter eingehen wollen.

Dehnen wir nun diese Untersuchungen auf solche Differentialgleichungen aus, für welche die rechte Seite y nicht mehr auf Gleichungen von der Form (202) beschränkt ist oder der Bedingung unterliegt, dass man x solche Umläufe machen lassen kann, dass eine Lösung y_1 ohne Veränderung der Werthe $Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ in εy_1 übergeht, woraus ε als Einheitswurzel gefolgert war. Eben diese Annahme konnte auch in der Form ausgesprochen werden, dass zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung (200) eine lineare homogene Relation

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

besteht, in welcher a_1 und a_2 rationale Functionen von $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ sind, indem früher bewiesen war, dass, wenn für eine irreductible Gleichung zwei Lösungen derselben in der Relation $y_2 = k y_1$ stehen, k nothwendig eine Constante und zwar eine Einheitswurzel sein muss*). Betrachten wir jetzt Beziehungen zwischen mehr als zwei

*) Wir wollen noch eine einfache Bemerkung hinzufügen, welche sich auf die Reduction der Integrale algebraischer Functionen bezieht. Nehmen wir an, dass y_1 die Lösung einer algebraischen irreductibeln Gleichung sei, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, und stehe eine andere Lösung y_2 derselben mit y_1 in der nicht homogenen linearen Beziehung

$$y_2 = \varepsilon y_1 + \delta,$$

worin ε und δ rationale Functionen von x sein mögen, so folgt nach bekannten Eigenschaften der irreductibeln algebraischen Gleichungen, dass die successive iterirten Functionen

$$\varepsilon^2 y_1 + \delta(\varepsilon + 1), \varepsilon^3 y_1 + \delta(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1), \dots, \varepsilon^r y_1 + \delta(\varepsilon^{r-1} + \varepsilon^{r-2} + \dots + \varepsilon + 1)$$

ist, worin ε eine primitive r^{te} Einheitswurzel und $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{r-1}(x)$ nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende Reihen bedeuten, sich unmittelbar

$$(230) \dots y_1 + y_2 + \dots + y_r = r\psi_0(x)$$

ergibt, also jedenfalls eine lineare, im Allgemeinen nicht homogene Relation zwischen den Gliedern eines Cyclus stattfindet, in welcher das von den y freie Glied eine nach ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende Reihe ist — und dies ist selbstverständlich, weil die Summe der y um α herum eindeutig sein muss.

Nehmen wir nun an, es bestehe zwischen einer Anzahl von Zweigen einer algebraischen Function eine lineare Relation

$$(231) \dots a_1 y_{q_1} + a_2 y_{q_2} + \dots + a_x y_{q_x} + b_1 y_{\sigma_1} + b_2 y_{\sigma_2} + \dots \\ \dots + b_\lambda y_{\sigma_\lambda} + \dots = A,$$

worin $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ und A rationale Functionen von x sind, und von denen für irgend einen Verzweigungspunkt der algebraischen Function $y_{q_1}, y_{q_2}, \dots, y_{q_x}$ y -Werthe aus *einem* Cyclus von P Elementen, $y_{\sigma_1}, y_{\sigma_2}, \dots, y_{\sigma_\lambda}$ y -Werthe aus einem anderen Cyclus von Σ Elementen etc. sein sollen. Mögen nun die Cyclen nicht gleichviel Elemente haben, und sei P der kleinste Cyclus, so werden, wenn man x P Umläufe beschreiben lässt, $y_{q_1}, y_{q_2}, \dots, y_{q_x}$ wieder zu ihren Werthen zurückgekommen sein, während y_{σ_1} in y'_{σ_1} , y_{σ_2} in y'_{σ_2} , $\dots, y_{\sigma_\lambda}$ in y'_{σ_λ} etc. übergegangen sein mögen — und y_{σ_r} kann nicht y'_{σ_r} gleich sein, da dies erst nach Σ Umläufen der Fall sein wird; zieht man die so erhaltene Gleichung von der ersten ab, so folgt

$$(232) \dots b_1 (y'_{\sigma_1} - y_{\sigma_1}) + b_2 (y'_{\sigma_2} - y_{\sigma_2}) + \dots \\ \dots + b_\lambda (y_{\sigma_\lambda} - y_{\sigma_\lambda}) + \dots = 0.$$

Nun könnte freilich diese Gleichung eine identische sein, indem z. B. für $b_1 = b_2$: $y'_{\sigma_1} - y_{\sigma_1} + y'_{\sigma_2} - y_{\sigma_2} = 0$ sein könnte und ähnliche Beziehungen, wie z. B. wenn y_{σ_1} in y_{σ_2} und y_{σ_2} in y_{σ_1} übergeht; in diesem Falle würde man den ersten Cyclus von P Elementen zweimal beschreiben, wodurch im Allgemeinen nicht wieder beim Abziehen sich eine identische Gleichung ergeben würde; so würde die Gleichung (232) wieder eine lineare Beziehung unter den y darstellen, aber für jenen Verzweigungspunkt aus Elementen von weniger Cyclen; gehen wir nunmehr von dieser Gleichung aus, so können wir wieder im Allgemeinen die y -Werthe eines Cyclus herausschaffen u. s. w., bis wir auf eine lineare Beziehung zwischen den Elementen *eines* Cyclus kommen werden. Nur in *einem* Falle tritt eine Schwierigkeit ein, wenn nämlich $P = \Sigma \dots$ also die Anzahl der Elemente der Cyclen gleich gross ist; dann entwickeln sich aber alle einzelnen y nach Potenzen derselben Grösse

$(x - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ und für die Entwicklung um α — und dies allein brauchen wir im Folgenden — ist es also dasselbe, als wenn nur y -Werthe *eines* Cyclus in der Relation vorkämen.

Nehmen wir nunmehr an, wir hätten eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen den y -Werthen *eines* Cyclus, und es sei die Anzahl r der y dieser Relation kleiner als die Zahl m der Elemente des Cyclus selbst, so wird, wenn, unter ε eine m^{te} primitive Einheitswurzel verstanden,

[illegible]

gesetzt wird, und jene lineare Relation

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_r y_r = 0$$

ist, offenbar, wenn nicht einzelne der ψ -Functionen verschwinden sollen,

$$\begin{array}{l} a_1 + a_2 + \dots + a_r = 0 \\ a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 a_3 + \dots + \varepsilon^{r-1} a_r = 0 \\ a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 a_3 + \dots + \varepsilon^{2(r-1)} a_r = 0 \\ \vdots \\ a_1 + \varepsilon^{m-1} a_2 + \varepsilon^{2(m-1)} a_3 + \dots + \varepsilon^{(r-1)(m-1)} a_r = 0 \end{array}$$

sein, oder es müsste die Gleichung

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_rx^{r-1} = 0$$

die Lösungen $x = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$ haben, was nur angeht, wenn $r = m + 1$ ist, d. h. alle $y_1, y_2, \dots, y_m$ in der linearen Relation vorkommen, und ausserdem noch eine der ψ -Functionen verschwindet; wenn somit in einer homogenen linearen Relation zwischen den Zweigen eines Cyclus nicht alle diese Zweige enthalten sind, so müssen mindestens zwei der Functionen $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{m-1}(x)$ verschwinden, d. h. es dürfen in der Entwicklung um den Verzweigungspunkt nicht alle positiven ganzen Potenzen von $(x - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ — wenn nach dem Modul m congruente zusammengefasst sind — vorkommen, oder es müssen in der Entwicklung mindestens für eine bestimmte, von Null verschiedene, unter m liegende Zahl μ , die Coefficienten aller Potenzen von $x - \alpha$ von der Form

$(x - \alpha)^{\frac{p}{m}}$, worin

$$p \equiv \mu \pmod{m}$$

ist, verschwinden.

Umgekehrt ist aber auch leicht zu sehen, dass, wenn die Entwicklung irgend eines Zweiges der Function um einen Verzweigungspunkt herum die angegebene unvollständige Form hat, nothwendig zwischen weniger Zweigen des Cyclus, als dieser Cyclus Elemente besitzt, eine homogene lineare Relation stattfindet, deren Coefficienten eine aus den Einheitswurzeln zusammengesetzte, leicht angebbare Form haben.

Denn sei

$$y_1 = \psi_{v_1}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_1}{m}} + \psi_{v_2}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_2}{m}} + \dots + \psi_{v_\mu}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_\mu}{m}}$$

$$y_2 = \varepsilon^{v_1} \psi_{v_1}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_1}{m}} + \varepsilon^{v_2} \psi_{v_2}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_2}{m}} + \dots + \varepsilon^{v_\mu} \psi_{v_\mu}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_\mu}{m}}$$

.

$$y_{\mu+1} = \varepsilon^{\mu v_1} \psi_{v_1}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_1}{m}} + \varepsilon^{\mu v_2} \psi_{v_2}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_2}{m}} + \dots + \varepsilon^{\mu v_\mu} \psi_{v_\mu}(x) (x - \alpha)^{\frac{v_\mu}{m}},$$

worin $\mu < m - 1$ sein soll, und multiplicirt man die letzte Gleichung mit 1, die vorletzte mit $-(\varepsilon^{v_1} + \varepsilon^{v_2} + \dots + \varepsilon^{v_\mu})$, die drittletzte mit $(\varepsilon^{v_1} \varepsilon^{v_2} + \dots + \varepsilon^{v_{\mu-1}} \varepsilon^{v_\mu})$, u. s. w., endlich die erste mit $-(1)^\mu \varepsilon^{v_1} \varepsilon^{v_2} \dots \varepsilon^{v_\mu}$, so werden, da die Gleichung

$$x^\mu - (\varepsilon^{v_1} + \varepsilon^{v_2} + \dots + \varepsilon^{v_\mu}) x^{\mu-1} + \dots + (-1)^\mu \varepsilon^{v_1} \varepsilon^{v_2} \dots \varepsilon^{v_\mu} = 0$$

die Lösungen $\varepsilon^{v_1}, \varepsilon^{v_2}, \dots, \varepsilon^{v_\mu}$ hat, die einzelnen Verticalreihen der rechten Seite den Werth Null ergeben, und somit wird aus der linken Seite die lineare Relation folgen

$$(233) \dots y_{\mu+1} - (\varepsilon^{v_1} + \varepsilon^{v_2} + \dots + \varepsilon^{v_\mu}) y_\mu + \dots \\ \dots + (-1)^\mu \varepsilon^{v_1} \varepsilon^{v_2} \dots \varepsilon^{v_\mu} y_1 = 0,$$

worin, weil $\mu < m - 1$, also $\mu + 1 < m$ ist, höchstens $m - 1$ solcher Werthe aus einem Cyclus in der linearen Relation vorkommen.

Da nun für jede homogene lineare Relation von y -Werthen eines Cyclus, welche weniger Zweige einschliesst als die Anzahl m der Elemente des Cyclus beträgt, in der Entwicklung der angegebenen

Form Potenzen von $(x - \alpha)^{\frac{1}{m}}$ fehlen müssen, und wenn diese fehlen, die lineare Relation die Gestalt (233) haben muss, so folgt, dass, wenn für die Zweige einer algebraischen Function, welche sich um einen Verzweigungspunkt zu einem Cyclus gruppiren, eine homogene lineare Relation besteht, welche weniger Zweige einschliesst, als die Anzahl m der Elemente des Cyclus beträgt, diese, wenn ε eine primitive m^{te} Einheits-

wurzel bezeichnet, die Form hat

$$y_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \dots + \varepsilon^{\nu_\mu}) y_\mu \\ + (\varepsilon^{\nu_1} \varepsilon^{\nu_2} + \varepsilon^{\nu_1} \varepsilon^{\nu_3} + \dots + \varepsilon^{\nu_{\mu-1}} \varepsilon^{\nu_\mu}) y_{\mu-1} - \dots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1} \varepsilon^{\nu_2} \dots \varepsilon^{\nu_\mu} y_1 = 0,$$

worin μ eine ganze positive Zahl $< m - 1$ und $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\mu$ positive ganze Zahlen $< m$ bedeuten, selbstverständlich, wenn nicht schon zwischen weniger als $\mu + 1$ dieser Zweige $y_1, y_2, \dots, y_{\mu+1}$ eine homogene lineare Relation besteht, indem die angegebene Beziehung nur die Elementarrelation darstellt, aus der die zusammengesetzten durch Addition sich ergeben.

Nehmen wir nun an, dass der Differentialgleichung

$$(234) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y_1$$

ein elliptisches Integral erster Gattung genüge

$$(235) \dots z_1 = \int^u \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)},$$

worin

$$\mathcal{A}(\xi) = \sqrt{(1 - \xi^2)(1 - c^2 \xi^2)},$$

und, wie oben als nothwendig erkannt worden,

$$(236) \dots u_1 = f(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y_1), \quad \mathcal{A}(u_1) = F(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y_1),$$

wenn f und F rationale Functionen bedeuten*), so werden, wenn y eine algebraische Function darstellt**), welche für ihre Entwicklung um einen ϱ -fachen Verzweigungspunkt die oben geforderte Eigenschaft besitzt, für deren $\mu + 1$ Zweige eines Cyclus also, wobei $\mu + 1 < \varrho$, eine homogene lineare Relation stattfindet von der Form

$$(237) y_{\mu+1} - (\varepsilon^{\nu_1} + \varepsilon^{\nu_2} + \dots + \varepsilon^{\nu_\mu}) y_\mu + \dots + (-1)^\mu \varepsilon^{\nu_1} \varepsilon^{\nu_2} \dots \varepsilon^{\nu_\mu} y_1 = 0,$$

aus wiederholt angegebenen Gründen, indem man x geschlossene Umläufe machen lässt, durch welche y_1 der Reihe nach in $y_2, y_3, \dots, y_{\mu+1}$ übergeht, auch

$$(238) \dots z_2 = \int^u \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}, \quad z_3 = \int^u \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}, \dots, z_{\mu+1} = \int^u \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

Integrale der entsprechenden Differentialgleichungen (234) sein, worin

*) indem anderen Falls nur ein ganzzahliger Theil jenes Integrales an die Stelle tritt.

**) und zwar y als Lösung einer algebraischen irreductibeln Gleichung gedacht, deren Coefficienten rational aus $x, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ zusammengesetzt sind und deren Lösungen daher durch Umläufe erhalten werden, welche $Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}$ unverändert lassen.

setzt, so erhält man die Beziehung zwischen elliptischen Integralen

$$(242) \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - (\varepsilon^{v_1} + \dots + \varepsilon^{v_\mu}) \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + \dots + (-1)^\mu \varepsilon^{v_1} \dots \varepsilon^{v_\mu} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = 0.$$

Nach dem bekannten Abel'schen Satze, der ein specieller Fall des oben bewiesenen allgemeinen Satzes von der Beziehung zwischen Abel'schen Integralen ist, folgt aus dieser Gleichung

$$(243) \delta \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - (\varepsilon^{v_1} + \dots + \varepsilon^{v_\mu}) \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + \dots + (-1)^\mu \varepsilon^{v_1} \dots \varepsilon^{v_\mu} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = 0,$$

worin $w_1, w_2, \dots, w_\mu, \mathcal{A}(w_1), \mathcal{A}(w_2), \dots, \mathcal{A}(w_\mu)$ rationale Functionen von $w_{\mu+1}$ und $\mathcal{A}(w_{\mu+1})$ sind; nun ist aber unmittelbar ersichtlich, dass, wenn w_x und $\mathcal{A}(w_x)$ rationale Functionen von $w_{\mu+1}$ und $\mathcal{A}(w_{\mu+1})$ sind, auch

$$\frac{dw_x}{\mathcal{A}(w_x)}$$

diesen Charakter hat, und weil dies ein Differential erster Gattung ist,

$$(244) \dots \int \frac{dw_x}{\mathcal{A}(w_x)} = M_x \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

sein muss, worin, da der Modul der beiden in Beziehung gesetzten elliptischen Integrale derselbe ist, M_x bekanntlich eine ganze Zahl oder von der Form $\frac{1}{2}(a_x + i\sqrt{b_x})$ sein muss, worin a_x und b_x ganze Zahlen bedeuten, von denen die zweite wesentlich positiv ist, in welchem letzterem Falle der Modul c^2 des elliptischen Integrales ein Modul der complexen Multiplication sein wird. Nehmen wir zuerst an, c^2 sei kein Modul complexer Multiplication, so dass $M_1, M_2, \dots, M_\mu$ ganze Zahlen bedeuten und setzen wir

$$-(\varepsilon^{v_1} + \varepsilon^{v_2} + \dots + \varepsilon^{v_\mu}) = A_1, \dots, (-1)^\mu \varepsilon^{v_1} \varepsilon^{v_2} \dots \varepsilon^{v_\mu} = A_\mu,$$

so folgt nach (243) die ganzzahlige lineare Relation zwischen den $\mathcal{A}$ -Grössen

$$(245) \dots \delta + M_\mu A_1 + M_{\mu-1} A_2 + \dots + M_1 A_\mu = 0,$$

und setzt man

$$A_\mu = - \frac{\delta + M_\mu A_1 + M_{\mu-1} A_2 + \dots + M_2 A_{\mu-1}}{M_1}$$

in die Gleichung (242) ein, so ergibt sich

$$(246) \dots \left(M_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - \delta \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} \right) + A_1 \left(M_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - M_\mu \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} \right) \\ + A_2 \left(M_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - M_{\mu-1} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} \right) + \dots + A_{\mu-1} \left(M_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - M_2 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} \right) = 0;$$

nehmen wir nun an, dass die Klammern nicht einzeln verschwinden — welcher Fall nachher untersucht werden soll — so wird, wenn wir mit Hülfe des Additionstheorems

$$(m) \dots M_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - \delta \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)},$$

$$M_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} - M_{\mu-1} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)}$$

setzen, die Gleichung (246) übergehen in

$$(247) \dots \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + A_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + A_2 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + \dots + A_{\mu-1} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = 0,$$

woraus wieder genau wie oben die ganzzahlige lineare Relation

$$\delta^{(1)} + M_{\mu}^{(1)} A_1 + M_{\mu-1}^{(1)} A_2 + \dots + M_2^{(1)} A_{\mu-1} = 0$$

folgt, worin $M_{\mu}^{(1)}, \dots, M_2^{(1)}$ ganze Zahlen sein müssen, da c^2 nicht ein Modul complexer Multiplication sein sollte; bestimmt man hieraus wieder $A_{\mu-1}$, setzt den Werth in (247) ein und zieht die elliptischen Integrale wieder zusammen, so erhält man eine Relation von der Form

$$(248) \dots \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + A_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + A_2 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + \dots + A_{\mu-2} \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = 0,$$

immer wieder vorausgesetzt, dass die bei der Herleitung dieser Gleichung sich ergebenden, den obigen analogen Einzelklammern nicht verschwinden. Durch Wiederholung derselben Schlüsse gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$(249) \dots \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} + A_1 \int \frac{d\xi}{\mathcal{A}(\xi)} = 0,$$

welche wieder unter der gemachten Voraussetzung die Beziehung nach sich zieht

$$(250) \dots \delta^{(\mu-1)} + A_1 M_{\mu}^{(\mu-1)} = 0,$$

woraus folgt, dass, wenn die im Laufe der Reduction sich ergebenden Einzelklammern nicht verschwinden, und c^2 nicht ein Modul complexer Multiplication ist,

$$A_1 = -(\varepsilon^{r_1} + \varepsilon^{r_2} + \dots + \varepsilon^{r_{\mu}})$$

eine rationale Zahl sein müsste.

Beschränken wir uns nun auf die Untersuchung des Falles, in welchem ϱ eine Primzahl ist, so wird wegen der Irreducibilität der Gleichung

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{\varrho-1} = 0$$

A_1 nur dann eine rationale Zahl sein können, wenn die Gleichung

$$x^{\nu_\mu} + x^{\nu_\mu-1} + \dots + x^{\nu_2} + x^{\nu_1} + A_1 = 0,$$

in welcher der Grad ν_μ höchstens der $\varrho - 1^{\text{te}}$ ist, die Lösung ε haben kann, d. h. wenn

$\mu = \varrho - 1$, $\nu_\mu = \varrho - 1$, $\nu_{\mu-1} = \varrho - 2$, $\dots$ $\nu_2 = 2$, $\nu_1 = 1$, $A_1 = 1$ ist, während doch $\mu < \varrho - 1$ sein sollte.

Nehmen wir daher an, dass jene Relation zwischen den Elementen eines Cyclus weniger Elemente enthält als die Ordnung des Cyclus beträgt, oder dass in der Entwicklung der algebraischen Function um einen Verzweigungspunkt herum nicht alle gebrochenen Potenzen von der Form

$$(x - \alpha)^{\frac{1}{\varrho}}, (x - \alpha)^{\frac{2}{\varrho}}, \dots (x - \alpha)^{\frac{\varrho-1}{\varrho}}$$

vorkommen, so müssen entweder die oben bei der successiven Reduction sich ergebenden Einzelklammern verschwinden, oder c^2 muss ein Modul complexer Multiplication sein. Untersuchen wir nun jene Klammern und nehmen an, dass die sämtlichen zur ersten Reductionsgleichung gehörigen Klammern verschwinden, so wird in der Gleichung (246)

$$(251) \dots \begin{cases} M_1 \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - \delta \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0 \\ M_1 \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_{\mu-\varrho} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0 \end{cases}$$

sein; verschwinden die zur zweiten Reductionsgleichung gehörigen Klammern, so erhält man offenbar

$$M_1^{(1)} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - M_{\mu-\varrho}^{(1)} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0,$$

oder vermöge der Gleichung (m)

$$(252) \dots M_1 M_1^{(1)} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} - (M_1^{(1)} M_{\mu-\varrho} - M_{\mu-\varrho}^{(1)} M_2) \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} \\ - M_{\mu-\varrho}^{(1)} M_1 \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = 0;$$

führt man so fort, so sieht man, dass das Verschwinden der Einzelklammern jedenfalls zwischen allen oder einigen der elliptischen Integrale der Gleichung (242) eine homogene lineare, nicht identisch verschwindende Relation von der Form nach sich zieht

$$(253) \quad \dots L_{\mu+1} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{w_{\mu}+1} + L_{\mu} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}} + \dots + L_1 \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_1} = 0,$$

worin $L_1, L_2, \dots L_{\mu+1}$ ganze Zahlen bedeuten, oder, da oben

$$\int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}+1} - \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^v = \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{w_{\mu}+1}$$

gesetzt war,

$$(254) \quad \dots L_{\mu+1} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}+1} + L_{\mu} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}} + \dots + L_1 \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_1} = L_{\mu+1} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^v,$$

woraus folgt, dass, weil die einzelnen Integrale

$$z_1 = \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_1}, \quad z_2 = \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_2}, \quad \dots \quad z_{\mu+1} = \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}+1}$$

Integrale der vorgelegten nicht homogenen linearen Differentialgleichung darstellten, wenn die rechten Seiten resp. $y_1, y_2, \dots y_{\mu+1}$ waren, der Ausdruck

$$L_{\mu+1} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}+1} + L_{\mu} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_{\mu}} + \dots + L_1 \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^{u_1}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(255) \quad \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} \\ = L_{\mu+1} y_{\mu+1} + L_{\mu} y_{\mu} + \dots + L_1 y_1$$

ist, und somit auch nach Gleichung (254)

$$L_{\mu+1} \int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^v$$

ein Integral von (255). Da aber nach der für die Gleichung (241) gemachten Annahme

$$\int \frac{d\xi}{\Delta(\xi)}^v$$

ein Integral der reducirten Differentialgleichung ist, somit auch dieser Werth mit der Constanten L multiplicirt die linke Seite von (255) zu Null macht, so ergibt sich

$$(256) \quad \dots L_{\mu+1} y_{\mu+1} + L_{\mu} y_{\mu} + \dots + L_1 y_1 = 0,$$

ist, worin p, r, q rationale Zahlen bedeuten, von denen die letztere positiv oder Null ist und ohne quadratische Theiler angenommen werden darf. Vorausgesetzt wurde jedoch, um zur Gleichung (250) also zu der analogen (257) zu gelangen, dass die bei der Reduction successive auftretenden Einzelklammern nicht verschwinden; ist dies aber der Fall, so ergibt sich für die der Gleichung (256) analoge Gleichung

$$(258) \dots (P_{\mu+1} + i Q_{\mu+1} \sqrt{q}) y_{\mu+1} \\ + (P_{\mu} + i Q_{\mu} \sqrt{q}) y_{\mu} + \dots + (P_1 + i Q_1 \sqrt{q}) y_1 = 0,$$

und setzt man die früher aufgestellten Entwicklungsformen der Grössen $y_1, y_2, \dots y_{\mu+1}$ ein, so folgt unmittelbar, dass die Gleichung

$$(259) \dots (P_{\mu+1} + i Q_{\mu+1} \sqrt{q}) x^{\mu} \\ + (P_{\mu} + i Q_{\mu} \sqrt{q}) x^{\mu-1} + \dots + P_1 + i Q_1 \sqrt{q} = 0$$

die Lösungen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots \varepsilon^{\mu}$ haben muss; es wird also entweder das letztere stattfinden, oder es wird die Gleichung (257) gelten, anders ausgedrückt, es wird entweder die Gleichung (259) die Lösungen $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots \varepsilon^{\mu}$ besitzen, oder es wird die Gleichung

$$(260) \dots x^{\nu_1} + x^{\nu_2} + \dots + x^{\nu_{\mu}} = p + i r \sqrt{q}$$

die Lösung ε haben. Die Vergleichung der Beziehungen (259) und (260) mit den Kreistheilungsgleichungen und deren Zerlegungsformen liefert leicht das Resultat, dass, wenn in der Entwicklung von y um einen primzahligen q -fachen Verzweigungspunkt herum nicht alle Po-

tenzen von $(x - \alpha)^{\frac{1}{q}}$ vorkommen und $q \equiv 3 \pmod{4}$ ist, einerseits der Modul des elliptischen Integrales, welches ein Integral der linearen nicht homogenen Differentialgleichung ist, unter den bekannten Beschränkungen für die reducirte Differentialgleichung ein Modul der complexen Multiplication ist, andererseits folgt, dass die Entwicklungsform von y

$$y = \psi_1(x) (x - \alpha)^{\frac{q_1}{q}} + \psi_2(x) (x - \alpha)^{\frac{q_2}{q}} + \dots + \psi_{\frac{q-1}{2}}(x) (x - \alpha)^{\frac{q-1}{2}}$$

sein muss, worin $q_1, q_2, \dots q_{\frac{q-1}{2}}$ entweder alle $\frac{q-1}{2}$ quadratischen

Reste oder alle $\frac{q-1}{2}$ quadratischen Nichtreste von q bedeuten; zugleich ergibt sich, dass $\sqrt{-q}$ der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales sein wird, und dass nach früher entwickelten Sätzen auch der complexe Integralmodul bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist.

Auf weitere Untersuchungen, welche den Fall $\varrho \equiv 1 \pmod{4}$ betreffen und auf zusammengesetzte ϱ ausgedehnt werden können, wollen wir hier nicht weiter eingehen, und nur noch auf die ähnlichen Untersuchungen hinweisen, welche die complexe Multiplication der hyperelliptischen und Abel'schen Integrale berühren.

Nehmen wir an, dass die Differentialgleichung

$$(261) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y$$

durch ein hyperelliptisches Integral erster Gattung — und auf Integrale erster Gattung konnte das Problem, wie oben gezeigt worden, stets zurückgeführt werden — befriedigt werde, so war früher nachgewiesen, dass auch stets, von einem Zahlenfactor abgesehen, ein Integral der Differentialgleichung von der Form existirt

$$(262) \dots z = \int^{u_1} \frac{f(\xi) d\xi}{V\varphi(\xi)} + \int^{u_2} \frac{f(\xi) d\xi}{V\varphi(\xi)} + \dots + \int^{u_p} \frac{f(\xi) d\xi}{V\varphi(\xi)},$$

worin $f(\xi)$ eine ganze Function höchstens vom $p-1^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, $\varphi(\xi)$ ein ganzes Polynom vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, und

$$u_1, u_2, \dots u_p$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades

$$(263) u^p + f_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) u^{p-1} + \dots + f_p(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y) = 0$$

sind, deren Coefficienten rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind

$$(264) \dots \sqrt[p]{\varphi(u_r)} = F(u_r, x, Y_1, \dots Y_{m-1}, y),$$

in der F wiederum eine rationale Function bezeichnet. Machen wir nunmehr die oben für den Fall, dass die Differentialgleichung durch ein elliptisches Integral befriedigt wird, zu Grunde gelegte Voraussetzung, dass zwischen zwei Zweigen der algebraischen Function y eine homogene lineare Relation besteht, oder dass

$$(265) \dots y_1 = \varepsilon y,$$

worin ε , wie gezeigt worden, eine μ^{te} Einheitswurzel sein musste, und die die Grösse y definirende algebraische Gleichung die Form hatte

$$(266) y^{\mu} + \varphi_{\mu}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{(\mu-1)\mu} + \dots + \varphi_{\mu\mu}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

so folgt genau wie früher, dass der Ausdruck

$$(267) \dots z_1 = \int^{v_1} \frac{f(\xi) d\xi}{V\varphi(\xi)} + \int^{v_2} \frac{f(\xi) d\xi}{V\varphi(\xi)} + \dots + \int^{v_p} \frac{f(\xi) d\xi}{V\varphi(\xi)}$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(268) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = \varepsilon y$$

ist, wenn $v_1, v_2, \dots, v_p$ Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(269) v^p + f_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon y) v^{p-1} + \dots + f_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon y) = 0$$

sind, während die zugehörigen Irrationalitäten durch die Gleichung bestimmt sind

$$(270) \dots \sqrt{\varphi(v_r)} = F(v_r, x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon y),$$

und dass somit die reducirte lineare Differentialgleichung

$$(271) \dots \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

das Integral besitzt

$$(272) \dots z = \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \varepsilon \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

Nehmen wir nunmehr wieder wie oben an, dass die reducirte Differentialgleichung entweder gar kein Integral einer algebraischen Function befriedigt wird, oder dass, wenn dies der Fall ist, sich dieses durch dieselben hyperelliptischen Integrale erster Gattung mit der Irrationalität $\sqrt{\varphi(\xi)}$ darstellen lässt, so würde jedenfalls

$$(273) \dots \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \varepsilon \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \sum_1^q \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

sein, worin $w_1, w_2, \dots, w_q$ zum Theil oder auch alle constant sein können, und man erhält somit, wenn nach dem Abel'schen Theorem

$$(274) \dots \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} - \sum_1^q \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

gesetzt wird, die nothwendige Beziehung

$$(275) \dots \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \varepsilon \sum_1^p \int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}.$$

Aus dieser Gleichung können wir aber sofort auf bestimmte Formen des Polynoms $\varphi(\xi)$ schliessen; bezeichnen wir nämlich die Periodicitätsmoduln des Integrales erster Gattung

$$\int \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}}$$

die Grösse $e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ die Lösung einer Gleichung $2p^{\text{ten}}$ Grades mit rationalen Coefficienten sein muss, woraus nach bekannten Principien die Feststellung der möglichen Werthe für die Zahl μ hervorgeht.

Untersuchen wir genauer den Fall, in welchem $\mu \geq 2p + 1$ und ausserdem der Beschränkung unterworfen ist, eine Primzahl zu sein, so kann $e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$ nur dann die Lösung einer Gleichung $2p^{\text{ten}}$ Grades mit rationalen Coefficienten sein, wenn $\mu = 2p + 1^*)$ ist, und es wird also die Gleichung (275) nur bestehen für

$$(276) \dots \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2p+1}},$$

worin $2p + 1$ eine Primzahl und das Polynom $\varphi(\xi)$ selbst vom $2p + 1^{\text{ten}}$ Grade ist. Ein solches hyperelliptisches Integral, welches eine complexe Multiplication mit dem Multiplikator (276) zulässt, ist offenbar

$$\int \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}},$$

indem die Substitution

$$\xi = \varepsilon^q \eta, \text{ worin } q(x+1) \equiv 1 \pmod{2p+1},$$

die Beziehung liefert

$$\int \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} = \varepsilon \int \frac{\eta^x d\eta}{\sqrt{\eta^{2p+1} - 1}},$$

und wir wollen uns nun mit dem Falle beschäftigen, in dem die Differentialgleichung (261) ein Integral von der Form

$$(277) \quad z = \int_{u_1}^{\cdot} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} + \int_{u_2}^{\cdot} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} + \dots + \int_{u_p}^{\cdot} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}}$$

besitzt, wenn die rechte Seite y der Differentialgleichung durch die Gleichung definirt ist

$$(278) \quad \dots y^{l(2p+1)} + \varphi_{2p+1}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) y^{(l-1)(2p+1)} + \dots \\ \dots + \varphi_{l(2p+1)}(x, Y_1, \dots Y_{m-1}) = 0,$$

während $u_1, \dots u_p$, sowie $\sqrt{\varphi(u_r)}$ Gleichungen von der Form (263) und (264) genügen. Lässt man nun die Variable x wieder geschlossene Umkreise beschreiben derart, dass $Y_1, \dots Y_{m-1}$ unver-

*) Ist $2p + 1 = 5$ und μ eine beliebige Zahl, so können dieser Forderung, wie leicht zu sehen, nur die Werthe $\mu = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ entsprechen, und ähnlich für grössere $2p + 1$.

oder endlich, wenn

$$(285) \dots u_r^{(s)} = \varepsilon^{m_s} v_r^{(s)},$$

worin

$$(285a) \dots m_s(x+1) \equiv s \pmod{2p+1}$$

gesetzt wird,

$$(286) \dots z = \sum_0^{2p} \sum_1^p \int \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}},$$

worin $v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \dots, v_p^{(s)}$ Lösungen der algebraischen Gleichung

$$(287) \dots \varepsilon^{p m_s} v^p + \varepsilon^{(p-1)m_s} f_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) v^{p-1} + \dots \\ \dots + f_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) = 0$$

sind, während die zugehörige Irrationalität der Gleichung genügt

$$(288) \dots \sqrt{v^{2p+1}-1} = F(\varepsilon^{m_s} v, x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y).$$

Setzen wir nun

$$(A) \dots \sum_0^{2p} \sum_1^p \int \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}} \\ = \int_{Z_1}^{Z_1} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}} + \int_{Z_2}^{Z_2} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}} + \dots + \int_{Z_p}^{Z_p} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1}-1}},$$

so ist nach dem Abel'schen Theorem eine Function $p(v)$ vom $p(p+1)^{\text{ten}}$ Grade

$$(289) \dots p(v) = v^{p(p+1)} + a_{p(p+1)-1} v^{p(p+1)-1} + \dots + a_1 v + a_0,$$

und eine Function $q(v)$ vom p^2-1^{ten} Grade

$$(290) \dots q(v) = b_{p^2-1} v^{p^2-1} + b_{p^2-2} v^{p^2-2} + \dots + b_1 v + b_0$$

so zu bestimmen, dass

$$(291) \dots p(v) - q(v) \sqrt{v^{2p+1}-1} = 0$$

befriedigt wird durch die $p(2p+1)$ Werthe $v_r^{(s)}$ und die dazugehörigen Irrationalitäten. Beachtet man, dass die in der Gleichung (291) vorkommende Irrationalität vermöge der Gleichung (288) mit Hülfe von (287) als ganze Function des $p-1^{\text{ten}}$ Grades des entsprechenden v dargestellt werden kann, so wird der Factor des Coefficienten b_v in der Gleichung (291) die Form haben

$$b_v : \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) v_r^{(s)p+v-1} \\ + \varepsilon^{(p-2)m_s} \varphi_2(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) v_r^{(s)p+v-2} + \dots \\ \dots + \varphi_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) v_r^{(s)v};$$

setzt man ferner die Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (287)

$$v_1^{(s)\mu} + v_2^{(s)\mu} + \dots + v_p^{(s)\mu} = S_{s\mu},$$

und addirt von den $p(2p+1)$ Gleichungen (291) je p , die zu den Lösungen derselben Gleichung (287) also zu demselben s gehören, nachdem sie der Reihe nach mit

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots 1 \\ v_1^{(s)\kappa+1} & v_2^{(s)\kappa+1} & \dots v_p^{(s)\kappa+1} \\ v_1^{(s)2(\kappa+1)} & v_2^{(s)2(\kappa+1)} & \dots v_p^{(s)2(\kappa+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{(s)(p-1)(\kappa+1)} & v_2^{(s)(p-1)(\kappa+1)} & \dots v_p^{(s)(p-1)(\kappa+1)} \end{array}$$

multiplicirt sind, so erhält man das folgende System von Gleichungen, in welchem $s = 0, 1, 2, \dots, 2p$ zu setzen ist:

$$\begin{aligned} (292) \quad & S_{sp(p+1)} + a_{p(p+1)-1} S_{sp(p+1)-1} + \dots + a_1 S_{s1} + a_0 S_{s0} \\ & + b_{p^2-1} \left\{ \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp(p+1)-2} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \varphi_{p-1}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp^2-1} \right\} \\ & + b_{p^2-2} \left\{ \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp(p+1)-3} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \varphi_{p-1}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp^2-2} \right\} \\ & + \dots \\ & + b_0 \left\{ \varepsilon^{(p-1)m_s} \varphi_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{sp-1} + \dots \right. \\ & \quad \left. \dots + \varphi_{p-1}(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) S_{s0} \right\} = 0, \end{aligned}$$

und noch $p-1$ ähnlich gestaltete, die sich von (292) nur dadurch unterscheiden, dass alle zweiten Indices der S um resp. $\kappa+1$, $2(\kappa+1)$, $3(\kappa+1)$, $\dots$, $(p-1)(\kappa+1)$ Einheiten erhöht sind. Fassen wir die gleichartigen $2p+1$ Gleichungen (292) auf, welche den Werthen $s=0, 1, 2, \dots, 2p$ entsprechen und beachten, dass, wenn für $S_{0\lambda}$ als Potenzsumme der Lösungen der Gleichung

$$v^p + f_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) v^{p-1} + \dots + f_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, y) = 0$$

vermöge der Gleichung (278) die Form

$$S_{0\lambda} = \mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{B}_\lambda y + \mathfrak{C}_\lambda y^2 + \dots + \mathfrak{Q}_\lambda y^{2p}$$

gesetzt wird, worin $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda, \dots, \mathfrak{Q}_\lambda$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind, sich

$$(293) \quad \dots S_{s\lambda} = \varepsilon^{-\lambda m_s} \{ \mathfrak{A}_\lambda + \varepsilon^s \mathfrak{B}_\lambda y + \varepsilon^{2s} \mathfrak{C}_\lambda y^2 + \dots + \varepsilon^{2ps} \mathfrak{Q}_\lambda y^{2p} \}$$

ergiebt, so wird, wenn bemerkt wird, dass aus den einzelnen

Klammern, welche die Factoren der b -Coefficienten in der Gleichung (292) bilden, die respectiven Einheitswurzeln

$$\varepsilon^{(p^2-1)m_s}, \varepsilon^{-(p^2-2)m_s}, \dots \varepsilon^{0.m_s}$$

heraustreten, während die Klammern wieder die Form annehmen

$$b_v \cdot \varepsilon^{-vm_s} \{ A_v + \varepsilon^s B_v y + \varepsilon^{2s} \Gamma_v y^2 + \dots + \varepsilon^{2ps} A_v y^{2p} \},$$

die Addition der $2p+1$ Gleichungen (292), wie leicht zu sehen, folgendermassen bewerkstelligt werden können. Bezeichnen nämlich δ und η gegebene ganze Zahlen, und bestimmt man, was, da $2p+1$ eine Primzahl, immer möglich ist, zwei ganze Zahlen σ_δ und τ_η aus den Congruenzen

$$(294) \dots \sigma_\delta (\kappa + 1) \equiv \delta, \quad \tau_\eta (\kappa + 1) \equiv \eta \pmod{2p+1},$$

so wird in der Additions Gleichung der Coefficient von a_δ lauten:

$$(295) \mathfrak{A}_\delta \sum_0^{2p} \varepsilon^{-\delta m_s} + \mathfrak{B}_\delta y \sum_0^{2p} \varepsilon^{-\delta m_s + s} + \dots + \mathfrak{L}_\delta y^{2p} \sum_0^{2p} \varepsilon^{-\delta m_s + 2ps},$$

und der von b_η :

$$(296) A_\eta \sum_0^{2p} \varepsilon^{-\delta m_s} + B_\eta y \sum_0^{2p} \varepsilon^{-\delta m_s + s} + \dots + A y^{2p} \sum_0^{2p} \varepsilon^{-\delta m_s + 2ps},$$

und, wenn man berücksichtigt, dass nach den Congruenzen (285 a) und (294)

$$(297) -\delta m_s + \sigma_\delta s \equiv 0 \quad \text{und} \quad -\eta m_s + \tau_\eta s \equiv 0 \pmod{2p+1}$$

ist, so folgt, dass der Coefficient von a_δ nur noch lautet

$$\mathfrak{L}_\delta y^{\sigma_\delta},$$

während der Coefficient von b_η

$$T_\eta y^{\tau_\eta}$$

ist, und somit das Resultat der Addition

$$(298) \mathfrak{L}_{p(p+1)} y^{\sigma_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1} \mathfrak{L}_{p(p+1)-1} y^{\sigma_{p(p+1)-1}} + \dots + a_1 \mathfrak{L}_1 y^{\sigma_1} + a_0 \mathfrak{L}_0 y^{\sigma_0} \\ + b_{p^2-1} T_{p^2-1} y^{\tau_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2} y^{\tau_{p^2-2}} + \dots + b_1 T_1 y^{\tau_1} + b_0 T_0 y^{\tau_0} = 0,$$

worin die $\mathfrak{L}$ und T rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind.

Multiplicirt man die $2p+1$ Gleichungen (292) der Reihe nach mit

$$\begin{array}{cccc} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots \varepsilon^{2p} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots \varepsilon^{4p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{2p} & \varepsilon^{4p} & \dots \varepsilon^{4p^2} \end{array}$$

so lautet das Resultat der Addition dieser Gleichungen mit Berücksichtigung der obigen Congruenzen und der Wahl ähnlicher Bezeichnungen wie oben

$$(299) \quad \mathfrak{X}_{p(p+1)}^{(\varrho)} y^{\sigma_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1} \mathfrak{X}_{p(p+1)-1}^{(\varrho)} y^{\sigma_{p(p+1)-1}} + \dots + a_0 \mathfrak{X}_0^{(\varrho)} y^{\sigma_0} \\ + b_{p^2-1} T_{p^2-1}^{(\varrho)} y^{\tau_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2}^{(\varrho)} y^{\tau_{p^2-2}} + \dots + b_0 T_0^{(\varrho)} y^{\tau_0} = 0,$$

worin $\varrho = 0, 1, 2, \dots, 2p$ zu setzen ist.

Man sieht leicht, dass in all' den Gleichungen, welche man auf dieselbe Weise aus der Gleichung (292) herleitet, nachdem in derselben die zweiten Indices der S um resp. $\kappa + 1, 2(\kappa + 1), \dots, (p-1)(\kappa + 1)$ Einheiten erhöht worden, nur statt δ und η die Grössen $\delta + (\kappa + 1)\xi$ und $\eta + (\kappa + 1)\xi$ auftreten werden, wenn der Index von S um $(\kappa + 1)\xi$ Einheiten erhöht ist, und wenn man daher wieder zwei ganze Zahlen μ_δ und ν_η aus den Congruenzen bestimmt

$$\left. \begin{aligned} \mu_\delta (\kappa + 1) &\equiv \delta + (\kappa + 1)\xi \\ \nu_\eta (\kappa + 1) &\equiv \eta + (\kappa + 1)\xi \end{aligned} \right\} \pmod{2p+1},$$

so wird die der Gleichung (298) analoge Gleichung folgendermassen lauten

$$(390) \quad \mathfrak{X}_{p(p+1)}^{0\xi} y^{\mu_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1} \mathfrak{X}_{p(p+1)-1}^{0\xi} y^{\mu_{p(p+1)-1}} + \dots + a_0 \mathfrak{X}_0^{0\xi} y^{\mu_0} \\ + b_{p^2-1} T_{p^2-1}^{0\xi} y^{\nu_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2}^{0\xi} y^{\nu_{p^2-2}} + \dots + b_0 T_0^{0\xi} y^{\nu_0} = 0;$$

wenn man aber berücksichtigt, dass wegen

$$(\kappa + 1)(\mu_\delta - \xi) \equiv \delta \quad \text{und} \quad (\kappa + 1)\sigma_\delta \equiv \delta \pmod{2p+1}$$

auch

$$\mu_\delta \equiv \sigma_\delta + \xi \quad \text{und ebenso} \quad \nu_\eta \equiv \tau_\eta + \xi \pmod{2p+1}$$

folgt, so ergeben sich, wenn die Gleichungen mit $y^{-\xi}$ multiplicirt werden, endlich die $p(2p+1)$ Bestimmungsgleichungen für die im Abel'schen Theorem vorkommenden Constanten a und b in der Form

$$(301) \quad \mathfrak{X}_{p(p+1)}^{q\xi} y^{\sigma_{p(p+1)}} + a_{p(p+1)-1} \mathfrak{X}_{p(p+1)-1}^{q\xi} y^{\sigma_{p(p+1)-1}} + \dots + a_0 \mathfrak{X}_0^{q\xi} y^{\sigma_0} \\ + b_{p^2-1} T_{p^2-1}^{q\xi} y^{\tau_{p^2-1}} + b_{p^2-2} T_{p^2-2}^{q\xi} y^{\tau_{p^2-2}} + \dots + b_0 T_0^{q\xi} y^{\tau_0} = 0,$$

worin für q alle Zahlen $0, 1, 2, \dots, 2p$, für ξ die Zahlen $0, 1, 2, \dots, p-1$ zu setzen sind.

Aus dem Gleichungssystem (301) ist nun unmittelbar zu sehen, dass, wenn

$$\sigma_{p(p+1)-\alpha} - \sigma_{p(p+1)-\alpha} = \psi_\alpha, \quad \sigma_{p(p+1)} - \tau_{p^2-\alpha} = \chi_\alpha$$

gesetzt wird,

$$a_{p(p+1)-\alpha} = U_\alpha y^{\psi_\alpha}, \quad b_{p^2-\alpha} = V_\alpha y^{\chi_\alpha}$$

folgt, worin U_α und V_α rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind, und man erhält somit

$$(302) \dots p(v)^2 - q(v)^2(v^{2p+1} - 1) \\ = [v^{p(p+1)} + U_1 y^{\psi_1} v^{p(p+1)-1} + \dots + U_{p(p+1)-1} y^{\psi_{p(p+1)-1}} v + U_{p(p+1)} y^{\psi_{p(p+1)}}] \\ - [V_1 y^{\chi_1} v^{p^2-1} + V_2 y^{\chi_2} v^{p^2-2} + \dots + V_{p^2-1} y^{\chi_{p^2-1}} v + V_{p^2} y^{\chi_{p^2}}] (v^{2p+1} - 1) = 0.$$

Berücksichtigt man nun die oben für die σ - und τ -Größen aufgestellten Congruenzen, so findet man leicht, dass, wenn

$$(303) \dots v = w y^2$$

gesetzt wird, worin λ eine Lösung der Congruenz

$$(304) \dots \lambda(x+1) \equiv 1 \pmod{2p+1}$$

bedeutet, ein Posten des ersten Quadrates der Gleichung (302) lautet:

$$U_\alpha y^{\psi_\alpha + \lambda[p(p+1) - \alpha]} w^{p(p+1) - \alpha}$$

oder auch vermöge der oben bezeichneten Congruenzen:

$$\mathfrak{U}_\alpha y^{2p(p+1)} w^{p(p+1) - \alpha},$$

und ein Posten des zweiten Quadrates von (302):

$$V_\alpha y^{\chi_\alpha + \lambda(p^2 - \alpha)} w^{p^2 - \alpha} = \mathfrak{V}_\alpha y^{2p(p+1)} w^{p^2 - \alpha},$$

und die Gleichung (302) daher die Form annimmt:

$$(305) \dots p(v)^2 - q(v)^2(v^{2p+1} - 1) \\ = y^{2\lambda p(p+1)} [w^{p(p+1)} + \mathfrak{U}_1 w^{p(p+1)-1} + \dots + \mathfrak{U}_{p(p+1)}] \\ - (\mathfrak{V}_1 w^{p^2-1} + \dots + \mathfrak{V}_{p^2})^2 (w^{2p+1} y^{2(2p+1)} - 1),$$

worin die Größen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots Y_{m-1}$ und y^{2p+1} sind.

Nun ist aber auch

$$(306) \dots p(v)^2 - q(v)^2(v^{2p+1} - 1) = \prod_{s=0}^{2p} \prod_{r=1}^p (v - v_r^{(s)}) \times \\ (v - Z_1)(v - Z_2) \dots (v - Z_p);$$

aus der Gleichung (287) folgt ferner

$$\prod_{s=0}^{2p} \prod_{r=1}^p (v - v_r^{(s)}) \\ = \prod_{s=0}^{2p} \left\{ \epsilon^{pm_s} v^p + \epsilon^{(p-1)m_s} f_1(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, \epsilon^s y) v^{p-1} + \dots + f_p(x, Y_1, \dots Y_{m-1}, \epsilon^s y) \right\},$$

und wenn auch hier die Substitution (303) eingeführt wird,

$$\begin{aligned} & \prod_{s=0}^{2p} \prod_{r=1}^p (v - v_r^{(s)}) \\ = & \prod_{s=0}^{2p} \left\{ \varepsilon^{pm_s} y^{\lambda p} w^p + \varepsilon^{(p-1)m_s} y^{\lambda(p-1)} f_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) w^{p-1} + \dots \right. \\ & \left. \dots + f_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) \right\}, \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man beachtet, dass aus den obigen Congruenzen

$$m_s \equiv s\lambda \pmod{2p+1}$$

folgt

$$\begin{aligned} (307) \quad & \dots \prod_{s=0}^{2p} \prod_{r=1}^p (v - v_r^{(s)}) \\ = & \prod_{s=0}^{2p} \left\{ (\varepsilon^s)^{p\lambda} y^{p\lambda} w^p + (\varepsilon^s)^{(p-1)\lambda} y^{(p-1)\lambda} f_1(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) w^{p-1} + \dots \right. \\ & \left. \dots + f_p(x, Y_1, \dots, Y_{m-1}, \varepsilon^s y) \right\}, \end{aligned}$$

woraus zu erkennen, dass das Product eine symmetrische Function von

$$y, \varepsilon y, \varepsilon^2 y, \dots, \varepsilon^{2p} y$$

ist, und somit eine ganze Function von w wird, deren Coefficienten rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y^{2p+1} vorstellen.

Berücksichtigt man nun, dass die aus den Gleichungen (305), (306), (307) hervorgehende Gleichung des Abel'schen Theorems als Coefficienten der höchsten w -Potenz auf der linken Seite die Grösse

$$y^{2\lambda p(p+1)}$$

hat, während (307) als Coefficienten der höchsten w -Potenz

$$y^{\lambda p(2p+1)}$$

liefert, so wird der vermöge der Substitution (303) nach Gleichung (306) übrig bleibende Theil

$$\begin{aligned} & (y^\lambda w - Z_1)(y^\lambda w - Z_2) \dots (y^\lambda w - Z_p) \\ = & y^{\lambda p} [w^p + \mathfrak{M}_1 w^{p-1} + \dots + \mathfrak{M}_{p-1} w + \mathfrak{M}_p] \end{aligned}$$

sein, worin $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_p$ rationale Functionen von $x, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ und y^{2p+1} bedeuten oder

$$\begin{aligned} (v - Z_1)(v - Z_2) \dots (v - Z_p) &= v^p + \mathfrak{M}_1 y^\lambda v^{p-1} \\ &+ \mathfrak{M}_2 y^{2\lambda} v^{p-2} + \dots + \mathfrak{M}_p y^{p\lambda}, \end{aligned}$$

d. h. die Grössen $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$, welche die Grenzen der p Additionsintegrale der Gleichung (A) sind, werden die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$(308) \dots v^p + \mathfrak{M}_1 y^2 v^{p-1} + \mathfrak{M}_2 y^{2^2} v^{p-2} + \dots + \mathfrak{M}_p y^{p^2} = 0$$

sein, worin die Grössen $\mathfrak{M}$ den oben angegebenen Charakter haben.

Endlich werden sich nach Gleichung (291) die zu den Z -Grössen gehörigen Irrationalitäten in der Form ergeben

$$(309) \dots \sqrt{Z_q^{2p+1} - 1} = \frac{p(Z_q)}{q(Z_q)}.$$

Das hierdurch erhaltene Resultat können wir auch so aussprechen:

Unter der Voraussetzung, dass die lineare nicht homogene Differentialgleichung, deren rechte Seite y einer Gleichung von der Form (278) genügt, ein zum Geschlechte p gehöriges hyperelliptisches Integral besitzt von der Form

$$z = \int_{u_1}^{u_1} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} + \int_{u_2}^{u_2} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} + \dots + \int_{u_p}^{u_p} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}}$$

(in wiefern diese Form ausschliesslich bestimmt ist, wurde früher untersucht), worin $u_1, u_2, \dots, u_p$ die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Coefficienten der reducirten Differentialgleichung und der Grösse y zusammengesetzt sind, hat dieselbe auch stets ein Integral von der Form

$$z = \int_{Z_1}^{Z_1} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} + \int_{Z_2}^{Z_2} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}} + \dots + \int_{Z_p}^{Z_p} \frac{\xi^x d\xi}{\sqrt{\xi^{2p+1} - 1}},$$

in welchem die Grenzen der Integrale so beschaffen sind, dass, wenn

$$Z_q = W_q y^\lambda$$

gesetzt wird, worin

$$\lambda(\kappa + 1) \equiv 1 \pmod{2p + 1},$$

die Grössen $W_1, W_2, \dots, W_p$ die Lösungen einer Gleichung

$$W^p + \mathfrak{M}_1 W^{p-1} + \dots + \mathfrak{M}_{p-1} W + \mathfrak{M}_p = 0$$

sind, deren Coefficienten rational aus den Coefficienten der reducirten Differentialgleichung und der Grösse

$$y^{2p+1}$$

zusammengesetzt sind, während die Irrationalitäten

$$\sqrt{W_q^{2p+1} y^{\lambda(2p+1)} - 1}$$

sich als rationale Functionen von W_0 darstellen lassen, deren Coefficienten wiederum rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung und y^{2p+1} zusammengesetzt sind.

Somit sehen wir auch in diesem Falle die Transformation der Integrale von Differentialgleichungen oder Quadraturen — und auf diese Resultate haben wir früher hingewiesen — auf algebraische Gleichungen führen, die in ihren Coefficienten nur rationale Zusammensetzungen der Variabeln und nicht die algebraische Irrationalität enthalten, wenn y selbst einer binomischen Gleichung $2p + 1^{\text{ten}}$ Grades genügt.

Die Methoden, mit Hülfe der Gleichung in W und der oben gefundenen Form der Irrationalität alle Differentialgleichungen aufzustellen, welchen durch hyperelliptische Integrale der angegebenen Beschaffenheit genügt wird, sind oben erörtert worden, und ebenso bedarf die Verallgemeinerung dieser Untersuchungen auf Abel'sche Integrale keiner weiteren Ausführung.

Zusatz.

Ich will nachträglich bemerken, dass die in den §§ 14 und 15 für die reducirte Differentialgleichung festgesetzten Bedingungen für den Fall von logarithmischen und Abel'schen Integralen nicht homogener linearer Differentialgleichungen darauf zu beschränken sind, dass dieselben überhaupt nicht derartige Integrale besitzen, während die Annahme solcher Integrale, deren Argumente rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, eine etwas modificirte Untersuchung erfordert, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde.