RÉSOLUTION DES TRIANGLES PAR DES SÉRIES

67. Les solutions que fournit la trigonométrie pour les différents cas de la résolution des triangles ont un inconvénient, c'est qu'au lieu de conduire aux valeurs mêmes des angles inconnus, elles ne donnent que certaines fonctions trigonométriques de ces angles, en sorte que, après avoir tiré de la trigonométrie tout ce que celle-ci peut donner, il reste encore à passer des fonctions trigonométriques aux angles correspondants ; ce complément indispensable de la solution s'effectue comme on sait au moyen de tables construites d'avance et une fois pour toutes. Or, ces tables, qui sont bien connues et dans le détail desquelles il n'est pas nécessaire d'entrer, sont calculées de manière à ne faire connaître les résultats exigés qu'avec une certaine approximation jugée suffisante pour la plupart des cas, mais qui peut ne plus l'être dans certains cas spéciaux. Il devient alors nécessaire d'abandonner complètement la marche indiquée en trigonométrie et de prendre comme point de départ des formules où figurent les angles inconnus eux-mêmes au lieu de certaines de leurs fonctions trigonométriques. Nous allons faire connaître celles de ces formules qui se rapportent aux cas de résolution particulièrement importants où les éléments connus sont trois éléments consécutifs.

68. Considérons d'abord un triangle rectiligne, dans lequel nous supposerons connus, un angle et les deux côtés qui le comprennent. Prenons (*fig.* 8) pour unité de longueur le plus grand AB des côtés connus et appelons m la mesure de la longueur du second côté connu AC, en sorte que l'on ait $m < 1$ ou plutôt $m < 1 - \varepsilon$, ε étant un nombre déterminé qui pourra être aussi petit que l'on voudra, mais non pas nul, parce que nous nous interdirons la possibilité de faire tendre m vers 1. Désignons encore par α l'angle dont A est le sommet et soient enfin x l'angle opposé au plus petit côté connu et y le côté BC; il s'agira de déterminer en fonction de m et de α, l'angle x et le côté y. Or, la trigonométrie nous donne sur le champ les deux relations

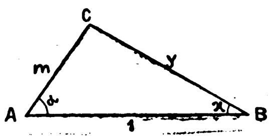

Fig. 8

$$y \sin x = m \sin \alpha, \qquad y \cos x = 1 - m \cos \alpha,$$

d'où l'on tire

$$y^2 = 1 - 2m \cos \alpha + m^2,$$

$$\sin x = \frac{m \sin \alpha}{y}, \qquad \cos x = \frac{1 - m \cos \alpha}{y},$$

Ce résultat est trop général, il faut évidemment le restreindre en ajoutant les conditions

$$y > 0, \qquad 0 < x < 180^0.$$

La définition exacte et complète de x peut encore s'exprimer par

$$\cos x = \frac{1 - m \cos \alpha}{\sqrt{1 - 2m \cos \alpha + m^2}}, \text{ avec } 0 < x < 90^0$$

ou par

$$\operatorname{tang} x = \frac{m \sin \alpha}{1 - m \cos \alpha}, \text{ avec } 0 < x < 90^0.$$

Ceci posé, différentions par rapport à m les relations qui donnent y^2 et tang x; après y avoir remplacé y par le logarithme népérien de son inverse et x par sa mesure trigonométrique $\overline{x}$, nous aurons

$$\frac{d.\mathrm{L}\frac{1}{y}}{dm} = \frac{\cos\alpha - m}{1 - 2m\cos\alpha + m^2}, \quad \frac{d\overline{x}}{dm} = \frac{\sin\alpha}{1 - 2m\cos\alpha + m^2}.$$

Ces deux relations peuvent se grouper en une seule par l'emploi des imaginaires; il suffit, en effet, de multiplier la première par 1, la seconde par i et d'ajouter membre à membre, ce qui donne

$$\frac{d.}{dm}\left(\mathrm{L}\frac{1}{y} + i\overline{x}\right) = \frac{e^{i\alpha} - m}{1 - 2m\cos\alpha + m^2} = \frac{e^{i\alpha} - m}{(e^{i\alpha} - m)(e^{-i\alpha} - m)}$$
$$= \frac{1}{e^{-i\alpha} - m} = \frac{e^{i\alpha}}{1 - me^{i\alpha}};$$

mais on a identiquement

$$\frac{1}{1 - me^{i\alpha}} = 1 + me^{i\alpha} + m^2e^{2i\alpha} + \ldots$$
$$+ m^{p-1}e^{(p-1)i\alpha} + \frac{m^pe^{pi\alpha}}{1 - me^{i\alpha}},$$

comme on le voit en chassant les dénominateurs; donc

$$\frac{d.}{dm}\left(\mathrm{L}\frac{1}{y} + i\overline{x}\right) = e^{i\alpha} + me^{2i\alpha} + m^2e^{3i\alpha} + \ldots -$$
$$+ m^{p-1}e^{pi\alpha} + \frac{m^pe^{(p+1)i\alpha}}{1 - me^{i\alpha}}.$$

Multipliant par dm et intégrant de $m = 0$ à $m = m < 1 - \varepsilon$, puis remarquant que $\mathrm{L}\frac{1}{y}$ et $\overline{x}$ par suite $\mathrm{L}\frac{1}{y} + i\overline{x}$

sont des fonctions continues pour toutes les valeurs de m de o à m, puisque leurs dérivées sont finies et déterminées entre ces limites, il viendra pour le premier membre

$$\left(\mathrm{L}\frac{1}{y}+i\bar{x}\right)_{m=m}-\left(\mathrm{L}\frac{1}{y}+i\bar{x}\right)_{m=0}=\mathrm{L}\frac{1}{y}+i\bar{x}$$

et on aura

$$(1)\qquad \mathrm{L}\frac{1}{y}+i\bar{x}=me^{i\alpha}+\frac{m^2}{2}e^{2i\alpha}+\dots$$
$$+\frac{m^p}{p}e^{pi\alpha}+\int_0^m\frac{m^pe^{(p+1)i\alpha}}{1-me^{i\alpha}}dm$$

Cherchons maintenant, non pas la valeur exacte de l'intégrale du deuxième membre dont on peut se passer, mais une limite supérieure du module de cette intégrale, ce qui nous donnera en même temps une limite supérieure des valeurs absolues de la partie réelle et du coefficient de i dans la même intégrale. Or le module d'une intégrale est plus petit que l'intégrale du module de l'élément sous le signe $\int$, d'ailleurs le module de l'élément sous le signe $\int$ est ici le module de son numérateur, c'est-à-dire m^p divisé par le module de son dénominateur, lequel étant le module d'une somme algébrique, est plus grand que la différence des modules des termes, c'est-à-dire que $1 - m$, et par suite *à fortiori* plus grand que $1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$; donc finalement, l'expression

$$\int_0^m\frac{m^pdm}{\varepsilon}=\frac{m^{p+1}}{(p+1)\varepsilon}$$

est une limite supérieure des valeurs absolues de la partie réelle et du coefficient de i, dans l'intégrale qui entre dans le second membre de la relation (1). Cela posé, on peut écrire

$$(2) \qquad L\frac{1}{y} + i\bar{x} = me^{i\alpha} + \frac{m^2}{2}e^{2i\alpha} + \frac{m^3}{3}e^{3i\alpha} + \dots$$
$$+ \frac{m^p}{p}e^{pi\alpha} + \frac{m^{p+1}}{(p+1)\varepsilon}(\theta' + i\theta'') ;$$

θ' et θ'' étant l'un et l'autre compris entre -1 et $+1$.

Faisant croître p indéfiniment et observant que ε est déterminé quoique pouvant être aussi petit que l'on veut, on conclut que $L\frac{1}{y} + i\bar{x}$ est ce qu'on appelle la somme de la série ordonnée suivant les puissances entières et positives de m, dont $\frac{m^p}{p}e^{pi\alpha}$ est le terme général, c'est-à-dire de la série

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} e^{ip\alpha};$$

et par conséquent que l'on a

$$L\frac{1}{y} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p\alpha, \qquad x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p\alpha.$$

69. Ces résultats constituent deux théorèmes importants dus à Lagrange et que l'on peut résumer ainsi : m étant un nombre positif égal ou inférieur à $1-\varepsilon$, et α un angle positif moindre que 180^0, si l'on pose

$$y^2 = 1 - 2m\cos\alpha + m^2, \qquad \text{avec} \qquad y > 0;$$

$$\tang x = \frac{m\sin\alpha}{1 - m\cos\alpha}, \qquad \text{avec} \qquad 0 < \bar{x} < \frac{\pi}{2}$$

on aura : 1°

$$\mathrm{L}\frac{1}{y} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \cos p\alpha ,$$

2°

$$\bar{x} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \sin p\alpha ;$$

70. On peut généraliser ces deux théorèmes et leur donner l'extension suivante : m étant un nombre positif ou négatif égal ou inférieur à $1 - \varepsilon$ en valeur absolue et α un angle positif ou négatif tout à fait quelconque, si l'on pose

$$y^2 = 1 - 2m \cos\alpha + m^2, \text{ avec } y > 0,$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{m \sin\alpha}{1 - m\cos\alpha}, \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \bar{x} < \frac{\pi}{2} ;$$

on aura : 1°

$$\mathrm{L}.\frac{1}{y} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \cos p\alpha,$$

2°

$$\bar{x} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \sin p\alpha$$

71. En effet, admettons en premier lieu que m soit positif et que α soit compris entre 180° et 360°. Posons $\alpha = 360° - \beta$, en sorte que β soit compris entre o et 180^0 et que l'on ait

$$\sin\beta = -\sin\alpha, \qquad \cos\beta = \cos\alpha,$$

$$1 - 2m\cos\beta + m^2 = 1 - 2m\cos\alpha + m^2,$$

$$\frac{m\sin\beta}{1 - m\cos\beta} = -\frac{m\sin\alpha}{1 - m\cos\alpha};$$

Si nous faisons

$$\eta^2 = 1 - 2m\cos\beta + m^2 \qquad \text{avec} \qquad \eta > o$$

et

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{m\sin\beta}{1 - m\cos\beta} \qquad \text{avec} \qquad -\frac{\pi}{2} < \bar{\xi} < \frac{\pi}{2}$$

on verra d'abord que $\eta = y$, $\bar{\xi} = -\bar{x}$; mais β étant compris entre o et 180^0, et m compris entre o et $1 - \varepsilon$, on sait que

$$L\frac{1}{\eta} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p\beta \qquad \text{et} \qquad \bar{\xi} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p\beta$$

donc, en substituant à, η, $\bar{\xi}$, β, leurs valeurs en y, $\bar{x}$, α, il viendra

$$L\frac{1}{y} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p(360^0 - \alpha) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p\alpha$$

$$\bar{x} = -\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p(360^0 - \alpha) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p\alpha.$$

72. Supposons en second lieu m positif et α tout à fait quelconque; posons $\alpha = K.\,360^0 + \beta$, $K.360^0$ étant le plus grand multiple de 360^0 contenu dans α, et par suite β étant compris entre o et 360^0, nous aurons d'abord

$$\sin\beta = \sin\alpha, \qquad \cos\beta = \cos\alpha,$$

$$1 - 2m\cos\beta + m^2 = 1 - 2m\cos\alpha + m^2,$$

$$\frac{m\sin\beta}{1 - m\cos\beta} = \frac{m\sin\alpha}{1 - m\cos\alpha},$$

et si nous posons

$$\eta^2 = 1 - 2m\cos\beta + m^2 \qquad \text{avec} \qquad \eta > 0,$$

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{m\sin\beta}{1 - m\cos\beta} \qquad \text{avec} \qquad -\frac{\pi}{2} < \bar{\xi} < \frac{\pi}{2},$$

on verra aisément que $\eta = y$, $\bar{\xi} = \bar{x}$; mais β étant compris entre o et 360^0 et m compris entre o et $1 - \varepsilon$, on a

$$L\frac{1}{\eta} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p\beta \qquad \bar{\xi} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p\beta$$

donc en exprimant η, $\bar{\xi}$, β en fonction de y, $\bar{x}$, α, il viendra

$$L.\frac{1}{y} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p\,(\alpha - K\,360^0) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\cos p\alpha$$

$$\bar{x} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p\,(\alpha - K\,360^0) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p}\sin p\alpha$$

73. Supposons enfin m négatif mais toujours plus petit que $1 - \varepsilon$ en valeur absolue et α tout à fait quelconque; posons

$m = -n$, $\alpha = 180^0 + \beta$ en sorte que n soit positif et β quelconque comme α, nous aurons d'abord

$$n \sin\beta = m \sin\alpha, \qquad n \cos\beta = m \cos\alpha,$$

$$1 - 2n \cos\beta + n^2 = 1 - 2m \cos\alpha + m^2,$$

$$\frac{n \sin\beta}{1 - n\cos\beta} = \frac{m \sin\alpha}{1 - m\cos\alpha},$$

et si on pose

$$\eta^2 = 1 - 2n\cos\beta + n^2 \qquad \text{avec} \qquad \eta > 0$$

$$\operatorname{tang}\xi = \frac{n\sin\beta}{1 - n\cos\beta} \qquad \text{avec} \qquad -\frac{\pi}{2} < \bar{\xi} < \frac{\pi}{2}$$

on verra de plus que $\eta = y$, $\bar{\xi} = \bar{x}$; mais n étant positif et $< 1 - \varepsilon$, on sait que quel que soit β

$$\mathrm{L}\frac{1}{\eta} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{n^p}{p} \cos p\beta, \qquad \bar{\xi} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{n^p}{p} \sin p\beta$$

donc en exprimant η, $\bar{\xi}$, β, n en fonction de y, $\bar{x}$, α, m, on a finalement

$$\mathrm{L}\frac{1}{y} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} (-1)^p \cos(p\alpha - p \,.\, 180^0)$$

$$= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \cos p\alpha \, (-1)^p \cos p \,.\, 180^0 = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \cos p\alpha,$$

$$\bar{\xi} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} (-1)^p \sin(p\alpha - p.180^\circ)$$

$$= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} (-1)^p \sin p\alpha \cos p.180^\circ = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{m^p}{p} \sin p\alpha.$$

C. Q. F. D.

74. Les deux théorèmes de Lagrange que nous venons de démontrer reçoivent diverses applications en astronomie ; non seulement ils donnent, comme nous l'avons déjà vu, des développements en série faisant connaître avec une approximation aussi grande que l'on veut les éléments inconnus d'un triangle rectiligne dans un des cas les plus importants, mais ils conduisent à des résultats analogues et offrent les mêmes avantages pour ce qui concerne la résolution des triangles sphériques. C'est ce que nous allons indiquer avec quelques détails, après avoir rappelé les résultats fournis par la trigonométrie.

75. Si dans un triangle sphérique on se donne deux côtés a et b et l'angle compris C et que l'on se propose de trouver les deux angles A et B et le troisième côté c, le moyen le plus simple consiste à déterminer d'abord les deux angles A et B par les deux premières analogies de Neper

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \cot\frac{1}{2}C . \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$(2) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \cot\frac{1}{2}C . \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)};$$

puis, ces deux angles étant connus, on a le troisième côté c par la troisième analogie ou mieux par la quatrième

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$$

qui résolue par rapport à $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c$, donne

$$(4\,bis)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}.$$

76. Si en second lieu, on se donne dans un triangle sphérique deux angles A et B et le côté adjacent c et que l'on se propose de trouver les deux côtés a et b et le troisième angle C, on déterminera d'abord les deux côtés a et b par la troisième et la quatrième analogies de Neper

$$(3)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})},$$

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})};$$

puis, ces deux côtés étant connus, on a C par la deuxième analogie

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\cot\frac{1}{2}\mathrm{C}\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

qui résolue par rapport à $\operatorname{tang} \frac{1}{2} C$, donne

$$(2\,bis)\quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \cot \frac{1}{2} (A - B) \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)}.$$

77. Il est aisé de voir en observant que $\cot \frac{1}{2} C = \operatorname{tang}\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$ et $\cot \frac{1}{2}(A - B) = \operatorname{tang}\left(90^0 - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B\right)$ que toutes les équations auxquelles on est conduit rentrent dans le même type :

$$\operatorname{tang} x_1 = m_1 \operatorname{tang} \alpha_1,$$

où x_1 est l'inconnue et m_1 et α_1 sont des données. Or, cette dernière équation se ramène à celle

$$\operatorname{tang} x = \frac{1 - m \cos \alpha}{m \sin \alpha}$$

que nous avons étudiée précédemment et dont le deuxième théorème de Lagrange fournit, sous certaines conditions, la solution en série. En effet, en posant $x_1 - \alpha = x'$, il vient

$$\operatorname{tang} x' = \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \alpha} = \frac{(m - 1) \operatorname{tang} \alpha}{1 + m \operatorname{tang}^2 \alpha} = \frac{(m - 1) \sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha + 2 m \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{(m - 1) \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + m - m \cos 2\alpha} = \frac{\frac{m - 1}{m + 1} \sin 2\alpha}{1 - \frac{m - 1}{m + 1} \cos 2\alpha}$$

et l'on voit que pourvu que $1 - \left(\frac{m - 1}{m + 1}\right)^2$ soit positif ou, ce qui revient au même, pourvu que m soit positif, et que de plus on ait $-\frac{\pi}{2} < \overline{x'} < \frac{\pi}{2}$, l'équation aura complètement la forme annoncée.

78. Appliquons ces considérations aux analogies de Neper (1), (2), (4 *bis*), (3), (4), (2 *bis*), en commençant par la première, c'est-à-dire en supposant que l'on ait :

$$x = \frac{1}{2}(A + B), \qquad \alpha = 90^0 - \frac{1}{2}C,$$

$$m = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$x' = \frac{1}{2}(A + B + C - 180^0), \quad \frac{m-1}{m+1} = \tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}b$$

ce qui donne

$$\tang\frac{1}{2}(A+B+C-180^0) = \frac{\tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b\sin(180^0 - C)}{1 - \tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b\cos(180^0 - C)}$$

pour l'équation en x', qui doit servir à la détermination, sous forme de série, de l'inconnue $\frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B})$.

Nous avons déjà vu que cette équation ne pouvait être utilisée que si m était positif, nous exigerons donc que $\frac{1}{2}(a+b)$ et par suite $\frac{1}{2}(A+B)$, d'après l'analogie (1), soient plus petits que 90^0. Or, il est évident que sous cette condition, on a de plus les deux inégalités

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} - \pi) < \frac{\pi}{2}.$$

En effet la première devient une identité après la suppression de $-\frac{\pi}{2}$ dans les deux membres et la deuxième est une conséquence immédiate de $\frac{\bar{A}+\bar{B}}{2}<\frac{\pi}{2}$, $\bar{C}-\pi<0$. Cela posé, le deuxième théorème de Lagrange donne

$$\frac{1}{2}(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}-\pi)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\right)^p(-1)^{p+1}\frac{\sin pC}{p}$$

avec

$$\frac{a+b}{2}<90^\circ$$

et le problème est résolu, du moins dans le cas où $\frac{a+b}{2}$ est $<90^0$.

79. Si l'on a $\frac{a+b}{2}>90^0$, on prolongera au delà du côté c, les deux côtés a et b du triangle donné, de manière à former le triangle dont les éléments ont pour valeurs

$$a'=180^0-a,\qquad b'=180^0-b,\qquad c'=c$$

$$A'=180^0-A,\qquad B'=180^0-B,\qquad C'=C,$$

et comme $\frac{a'+b'}{2}$ et $\frac{A'+B'}{2}$ seront alors moindres que 90°, on aura

$$\frac{1}{2}(\bar{A}'+\bar{B}'+\bar{C}-\pi)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}a'\operatorname{tang}\frac{1}{2}b'\right)^p(-1)^{p+1}\frac{\sin pC}{p}$$

et par suite en rétablissant a, b, c, A, B, C

$$\frac{1}{2}(\pi+\bar{C}-\bar{A}-\bar{B})=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\right)^p(-1)^{p+1}\frac{\sin pC}{p}$$

résultat qui maintenant se rapporte au cas de $a + b > 90°$.

80. Passons à la seconde analogie de Neper (2), c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$x = \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B}), \quad \alpha = 90^0 - \frac{1}{2}\mathrm{C}, \quad m = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$x' = \frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{C} - 180^0), \quad \frac{m-1}{m+1} = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}a,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}-180^0) = -\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}a\sin(180-\mathrm{C})}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}a\cos(180-\mathrm{C})}$$

pour l'équation en x' qui doit servir à la détermination sous forme de série de l'inconnue $\frac{1}{2}(\bar{\mathrm{A}} - \bar{\mathrm{B}})$.

Nous avons déjà vu que cette équation ne pouvait être employée que si m était positif, nous exigerons donc que a soit $> b$ ou $\mathrm{A} > \mathrm{B}$, mais il est aisé de voir que sous cette condition, on a de plus

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\bar{\mathrm{A}} - \bar{\mathrm{B}} + \bar{\mathrm{C}} - \pi) < \frac{\pi}{2}$$

En effet, la première inégalité est évidente à cause de $\bar{\mathrm{A}} > \bar{\mathrm{B}}$ et la seconde résulte de ce que l'aire ou l'excès sphérique $\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{B}} + \bar{\mathrm{C}} - \pi$ du triangle est plus petit que l'aire $2\mathrm{B}$ du fuseau B; cela posé, on a d'après le second théorème de

Lagrange

$$\frac{1}{2}(\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} - \pi) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} a\right)^p \frac{\sin p\bar{C}}{p}$$

et le problème est résolu du moins lorsque a est $> b$.

81. Si a est $< b$ et par suite $A < B$, on n'a qu'à échanger a en b, A et B, et l'on trouve

$$\frac{1}{2}(\bar{B} - \bar{A} + \bar{C} - \pi) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b\right)^p \frac{\sin p\bar{C}}{p}.$$

où d'ailleurs il faut supposer $a < b$.

82. Passons à la quatrième des analogies (4 *bis*), c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$x = \frac{1}{2} c, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(a - b), \qquad m = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)}$$

$$x' = \frac{1}{2}(c - a + b), \qquad \frac{m - 1}{m + 1} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} A$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(c - a + b) = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} A \sin(a - b)}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} A \cos(a - b)}$$

pour l'équation en x' qui doit servir à la détermination sous forme de série de l'inconnue $\bar{c}$.

Nous avons déjà vu que cette équation ne pouvait être utilisée que si m était plus grand que zéro. Nous exigerons donc que A soit $>$ B et par conséquent $a > b$; mais il est aisé de voir que sous cette condition, on a de plus

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{a} + \bar{b}) < \frac{\pi}{2}.$$

Cela est évident pour la première inégalité, car son second membre est toujours positif et cela est vrai aussi pour la seconde inégalité, car de $a > b$ résulte

$$\frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{a} + \bar{b}) < \frac{1}{2}\bar{c} < \frac{\pi}{2};$$

donc d'après le théorème de Lagrange, on a

$$\frac{1}{2}\overline{(c - a + b)} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\cot\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\right)^p \frac{\sin p\,(a-b)}{p}$$

et le problème se trouve résolu du moins pour $a > b$.

83. Si a était $< b$, il suffirait d'échanger a en b, A en B et nous aurions

$$\frac{1}{2}\overline{(c - b + a)} = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\,\mathrm{A}\cot\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\right)^p \frac{\sin p\,(b-a)}{p}$$

qui d'ailleurs ne serait vraie que pour $b > a$.

84. Il est inutile de rechercher directement les résultats auxquels conduisent les trois dernières analogies de Neper (3), (4), (2 *bis*). Ces résultats doivent, en effet, être ceux que fournissent les trois analogies (1), (2), (4 *bis*), lorsqu'on applique celles-ci au triangle polaire du triangle donné. Appelant donc a', b', c', $A' B'$, C', les côtés et les angles de ce triangle polaire, nous aurons

1° :

$$\frac{1}{2}(\bar{A}'+\bar{B}'+\bar{C}'-\pi)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}a'\operatorname{tang}\frac{1}{2}b'\right)^p(-1)^{p+1}\frac{\sin p C'}{p},$$

lorsque $\bar{a}' + \bar{b}'$, ou $\bar{A}'+\bar{B}'$ est $< \frac{\pi}{2}$

et

$$\frac{1}{2}(\pi+\bar{C}'-\bar{A}'-\bar{B}')=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\cot\frac{1}{2}a'\cot\frac{1}{2}b'\right)^p(-1)^{p+1}\frac{\sin p C'}{p},$$

lorsque $a' + b'$, ou $\bar{A}'+\bar{B}'$ est $> \frac{\pi}{2}$;

2° $$\frac{1}{2}(\bar{A}'-\bar{B}'+\bar{C}'-\pi)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}b'\cot\frac{1}{2}a'\right)^p\frac{\sin p C'}{p},$$

lorsque a' est $> b'$ ou $A' > B'$

et

$$\frac{1}{2}(\bar{B}'-\bar{A}'+\bar{C}'-\pi)=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}a'\cot\frac{1}{2}b'\right)^p\frac{\sin p C'}{p},$$

lorsque a' est $< b'$ ou $A' < B'$;

3° :

$$\frac{1}{2}(\bar{c}'-\bar{a}'+\bar{b}')=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}B'\cot\frac{1}{2}A'\right)^p\frac{\sin p\,(a'-b')}{p},$$

lorsque a' est $> b'$ ou $A' > B'$

et

$$\frac{1}{2}(\bar{c}' - \bar{b}' + \bar{a}') = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}A' \cot\frac{1}{2}B'\right)^p \frac{\sin p\,(b' - a')}{p},$$

lorsque b' est $> a'$ ou $B' > A'$.

Exprimant enfin les éléments du triangle polaire en fonction de ceux du triangle donné, il vient :

$$\textbf{85.}\ \frac{1}{2}(2\pi - \bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\cot\frac{1}{2}A \cot\frac{1}{2}B\right)^p \frac{\sin pc}{p},$$

lorsque $\frac{A+B}{2}$ par suite $\frac{a+b}{2}$ est $> 90^0$

et

$$\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}A \operatorname{tang}\frac{1}{2}B\right)^p \frac{\sin pc}{p},$$

lorsque $\frac{A+B}{2}$ par suite $\frac{a+b}{2}$ est $< 90^0$;

$$\textbf{86.}\ \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{c} - \bar{b}) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\cot\frac{1}{2}B \operatorname{tang}\frac{1}{2}A\right)^p (-1)^p \frac{\sin pC}{p},$$

lorsque A est $<$ B, par suite $a < b$

et

$$\frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c} - \bar{a}) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\cot\frac{1}{2} \cot\frac{1}{2}B\right)^p (-1)^p \frac{\sin pc}{p},$$

lorsque A est $>$ B, par suite $a > b$

$$\textbf{87.}\ \frac{1}{2}(\pi+\bar{A}-\bar{B}-\bar{C})=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\cot\frac{1}{2}b\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}a\right)^p\frac{\sin p\,(B-A)}{p},$$

lorsque A est $<$ B ou $a < b$

et

$$\frac{1}{2}(\pi+\bar{B}-\bar{A}-\bar{C})=\sum_{p=1}^{p=\infty}\left(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,b\cot\frac{1}{2}\,a\right)^p\frac{\sin p\,(A-B)}{p},$$

lorsque A est $>$ B ou $a > b$.