

Ein neuer Schließungssatz für Berührstrukturen

Münevver Özcan

Armin Herzer

Abstract

We characterize those contact spaces which are isomorphic to some geometry of plane sections of a quadratic set of rank greater than 4 by a new incidence proposition combined with some richness conditions.

1 Einleitung

In der Theorie der Benz-Ebenen (oder allgemeiner Berührstrukturen) hat man gerne eine gewisse Analogie des Büschelsatzes zum Satz von Desargues sowie des Satzes von Miquel zum Satze von Pappos gesehen. Nun könnte man fragen, ob es in Berührstrukturen nicht auch ein Analogon zum Satz von Veblen-Young gibt? Die zu diesem Schließungssatz gehörige Konfiguration besteht aus vier Geraden, die sich paarweise schneiden. Dieser Schließungssatz für lineare Räume hat zur Folge, dass dort jede Ebene eine projektive Ebene ist. In Berührstrukturen gibt es eine Konfiguration aus drei Ketten, die sich paarweise in zwei Punkten schneiden. Der zugehörige Schließungssatz, den wir mit **(Z)** bezeichnen möchten, soll in dieser Arbeit untersucht werden. In der Tat gelangen wir mit einer Reichhaltigkeitsbedingung und einer einleuchtenden Zusatzvoraussetzung zu dem Ergebnis, dass jeder 4-Raum, der eine Kette enthält, bereits eine Benz-Ebene ist.

Allerdings wird auf dem Wege dorthin ein erstes Ergebnis sein, dass Berührstrukturen mit **(Z)** bereits Kettenräume sind, also eine bedeutend reichere Struktur tragen.

Received by the editors September 2008.

Communicated by J. Thas.

2000 *Mathematics Subject Classification* : 51A20, 51A45.

Key words and phrases : Chain geometries, chain spaces, contact spaces, projective embedding, quadratic set.

Wie im 6. Abschnitt näher erläutert, ergibt die “Geometrie der zulässigen ebenen Schnitte“ einer quadratischen Menge eine Kettengeometrie, deren Ketten enthaltende 4-Räume Benz-Ebenen sind, also auch den Schließungssatz (**Z**) erfüllen. Hauptergebnis dieser Arbeit wird die Umkehrung dieses Satzes sein: Aus dem Schließungssatz (**Z**) für eine Berührstruktur und daraus folgernd, dass jeder eine Kette enthaltende 4-Raum bereits eine Benz-Ebene ist, ergibt sich bereits, dass diese Berührstruktur isomorph zur Geometrie der zulässigen ebenen Schnitte einer quadratischen Menge ist. Vorläufer dieses Ergebnisses sind Arbeiten von Heise [9] bzw. Buekenhout [6] über Kreisräume, d.h. Kettengeometrien bzw. Berührstrukturen, in denen jeder 4-Raum eine Möbius-Ebene ist. Diese sind bis auf Isomorphie eine Geometrie der ebenen Schnitte eines Ovoids. Beide Arbeiten beziehen sich auf Mäurer [12], deren Vorgehensweise auch für unsere Arbeit maßgebend war. Als nächstes wird sich ergeben, dass die 4-Räume sich so verhalten, wie man das von Benz-Ebenen gewohnt ist: Zwei Ketten, die sich treffen, schneiden sich in zwei Punkten oder berühren sich.

In [4],[5] nennt Buekenhout Kreisräume miquelsch, wenn sie viele Inversionen besitzen. Sie sind bis auf Isomorphie Geometrien der ebenen Schnitte einer elliptischen Quadrik. Analog erweist Schaffrath in [14] miquelsche Kettenräume als isomorph zur Geometrie der zulässigen ebenen Schnitte einer Quadrik. Auch er benötigt ein Zusatz-Axiom, aus dem folgt, dass die Ketten enthaltenden 4-Räume Benz-Ebenen sind. An die Stelle der Existenz vieler Kettenverwandtschaften tritt in unserer Arbeit der einfache Schließungssatz (**Z**).

Wie in [14] muss auch in unserer Arbeit der Verband der Unterräume von Σ studiert werden. Er wird als geometrischer Verband erwiesen (4. Abschnitt). Im 5. Abschnitt wird der Verband durch weitere Elemente, die Tangentialräume, so erweitert, dass ein halbmodularer lokal projektiver Verband entsteht, mit dessen Hilfe sich ein einbettender projektiver Raum konstruieren lässt. Diese Einbettung wird im 6. Abschnitt betrachtet. Hilfsmittel und Grundbegriffe aus der Verbandstheorie liefern z.B. Aigner [1] und Szász [16]. Einen allgemeinen Überblick liefert Delandtsheer [8], in 4 planare Räume, 4.7 Einbettbarkeit.

Die Bezeichnungen richten sich weitgehend nach [2], werden aber in knapper Form dargestellt. Ansonsten gibt [10] einen kurz gefassten Überblick.

2 Stark zusammenhängende Berührstrukturen mit (**Z**)

Eine *Berührstruktur* $\Sigma = (P, \mathfrak{C}, \Delta, (\rho_p)_{p \in P})$ besteht aus einer Menge P , deren Elemente wir *Punkte* nennen, einer Menge \mathfrak{C} , die aus Teilmengen von P besteht, die wir *Ketten* nennen, einer Relation Δ auf P . Für Punkte p, q schreiben wir $p \Delta q$, und sagen p und q sind *distant*. Dabei gilt:

$$\forall p, q \in P : p \Delta q \Leftrightarrow p \neq q, \text{ und } \exists C \in \mathfrak{C} \text{ mit } p, q \in C. \quad (1.1)$$

Dabei gilt:

$$\text{Zu je drei paarweise distanten Punkten gibt es genau eine Kette, die diese enthält.} \quad (1.2)$$

Ist C die Kette, die die drei paarweise distanten Punkte x, y, z enthält, so schreiben wir $C = (xyz)$.

Ferner ist ρ_p eine Äquivalenzrelation auf $(p) = \{C \in \mathfrak{C} : p \in C\}$. Statt $\rho_p(A, B)$ schreiben wir ApB und sagen A berührt B in p , A und B berühren sich in p und dergleichen. Dabei gilt:

- (i) $ApB \Rightarrow A \cap B = \{p\}$ oder $A = B$
- (ii) Zu $p \in A$ und $q \in P$ mit $p\Delta q$ gibt es genau eine Kette B mit $q \in B$ und ApB .

Sei $\Delta(p) = \{x \in P : p\Delta x\}$ und $\mathfrak{C}_p = \{C \setminus \{p\} : C \in (p)\}$ sowie $\Sigma_p = (\Delta(p), \mathfrak{C}_p)$. Dann heißt Σ_p *Residuum von Σ im Punkte p* und ist ein partieller linearer Raum mit $\Delta(p)$ als Punktmenge und \mathfrak{C}_p als Geradenmenge: Durch je zwei distante Punkte $x, y \in \Delta(p)$ geht genau eine Gerade $\langle xy \rangle = (pxy) \setminus \{p\}$. Ferner besitzt Σ_p einen Parallelismus \parallel :

$$X \parallel Y \Leftrightarrow \rho_p(X \cup \{p\}, Y \cup \{p\}).$$

Zu $G \in \mathfrak{C}_p$ und $q \in \Delta(p)$ gibt es genau eine Gerade $H \in \mathfrak{C}_p$ mit $q \in H$ und $G \parallel H$. Wir schreiben dann $H = \pi(q, G)$.

Die Berührstruktur Σ heißt *Kettenraum*, falls für alle $p \in P$ das Residuum Σ_p ein partieller affiner Raum ist, d.h. \mathfrak{C}_p besteht aus lauter vollen Parallelklassen von Geraden eines affinen Raumes, diese heißen die *eigentlichen Geraden von Σ_p* . Die Geraden aus den fehlenden Parallelklassen heißen *isotrope Geraden*. Für $M \subseteq \Delta(p)$ ist $\langle M \rangle_p$ der von M im zugrunde liegenden affinen Raum Σ_p aufgespannte affine Unterraum, entsprechend für $U \subseteq \Delta(p)$ und $q \in \Delta(p)$ versteht sich die Bezeichnung $\langle U, q \rangle_p$ usw.

Eine Punktmenge $U \subseteq P$ heißt *Unterraum*, falls gilt:

- (i) Sind x, y, z paarweise distante Punkte von U , so gilt $(xyz) \subseteq U$
- (ii) Ist A eine in U enthaltene Kette, ist $q \in U$ mit $q\Delta p \in A$, ist B die Kette mit $q \in BpA$, so gilt $B \subseteq U$.

Ist $M \subseteq P$ so ist $[M]$ der kleinste Unterraum, der M enthält: $[M] = \bigcap \{X : X \text{ ist Unterraum mit } M \subseteq X\}$. Schreibe $[U, p]$ statt $[U \cup \{p\}]$ usw. Wir verwenden kursive eckige Klammern, weil wir später einen geänderten Unterraumbegriff benötigen, für den wir dann die normalen eckigen Klammern verwenden, vgl S.12.

Der *Rang von U* , geschrieben rU , ist die Minimalzahl von erzeugenden Punkten, d.h. es ist $rU = n$, falls $U = [M]$ mit $|M| = n$, und für jedes $N \subseteq P$ mit $[N] = U$ gilt $|N| \geq n$. Nenne dann U einen *n -Raum*. Unterräume (von Σ) vom Rang 1, 2, 3 heißen der Reihe nach *1-Raum: Punkt, 2-Raum: Gerade und 3-Raum: Ebene*.

Eine Menge M von Punkten heißt *stark zusammenhängend* (Abk: sz), falls $M \neq \emptyset$ ist, und zu $x, z \in M$ ein $y \in M$ existiert mit $x\Delta y\Delta z$. Dies entspricht dem Begriff **stark** in [14, 1.1.3]. Jede Kette ist sz. Wir nennen die Berührstruktur Σ *sz*, falls P sz ist.

Für $M \subseteq P$ und $p \in P$ schreibe $p\Delta M$, falls $q \in M$ existiert mit $p\Delta q$. Für Kette C besagt $p\Delta C$ zusätzlich, dass $p \in P \setminus C$ ist. Von besonderem Interesse sind die sz Unterräume.

Von jetzt an sei $\Sigma = (P, \mathfrak{C}, \Delta, (\rho_p)_{p \in P})$ eine sz Berührstruktur vom Range ≥ 5 , d.h. P ist sz und $rP \geq 5$.

In Σ soll die folgende Reichhaltigsbedingung gelten:

(R1) Ist $C \in \mathfrak{C}$, so ist $|C| \geq 5$. Ist $p \Delta C$, und ist k die Anzahl der Punkte von C , die zu p nicht distant sind, so ist $k < \frac{1}{5}(|C| - 1)$.

Einige einfache Folgerungen für sz Unterraum U sind:

Zu $p \in U$ bzw. $p, q \in U$ mit $p \Delta q$ gibt es immer eine Kette C von U mit $p \in C$ bzw. $p, q \in C$. (1.3)

Beweis. Zu $p \in U$ gibt es $q \in U$ mit $p \Delta q \Delta p$, und zu $p, q \in U$ mit $p \Delta q$ gibt es $r \in U$ mit $p \Delta r \Delta q$. Es geht um die Existenz von Ketten. Wir sagen dann auch: "Es gibt eine Kette durch p bzw. durch p und q ", wobei sich deren Lage aus dem Kontext ergibt. Dann ist $C = (pqr)$ die gesuchte Kette. ■

Ist $U \neq P$, so gibt es $p \in P \setminus U$ mit $p \Delta U$. (1.4)

Beweis. Es gibt wenigstens $q \in P \setminus U$ und $r \in U$. Sei $s \in P$ mit $q \Delta s \Delta r$. Ist $s \in U$, so ist $p = q \Delta U$, ist $s \in P \setminus U$, so $p = s \Delta U$. ■

Sei $U \neq P$. Zu $x_1, \dots, x_4 \Delta U$ gibt es $p \in P \setminus U$ mit $x_1, \dots, x_4 \Delta p$. (1.5)

Beweis. Jedenfalls gibt es $q \in P \setminus U$ mit $q \Delta U$ und dann $s \in U$ mit $q \Delta s$ und $x_1, \dots, x_4 \Delta s$. Sei C eine Kette durch q und s . Dann ist $|U \cap C| \leq 2$. Mit **(R1)** findet man $p \in C \setminus U$ mit $x_1, \dots, x_4 \Delta p$. ■

Hilfssatz 1. *Aufbau von $W=[U, p]$, aus Folge partieller Berührstrukturen.*

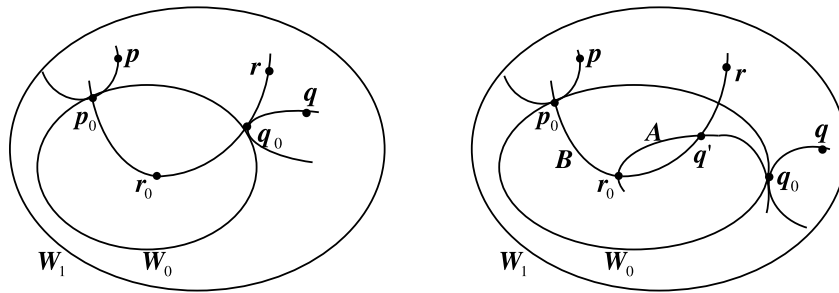
Sei $M \subseteq P$. Dann wird $U = [M]$ folgendermassen rekursiv aufgebaut. Sei $W_0 = M$. Ist schon W_i gefunden, so wird W_{i+1} aus W_i konstruiert, indem zu je drei paarweise distanten $x, y, z \in W_i$ die Kette (xyz) zu W_i hinzugefügt wird, und man ebenso zur Kette A von W_i und $q \in W_i$ mit $q \Delta p \in W_i$ die Kette B mit $q \in BpA$ zu W_i hinzufügt. Dann ist $\bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$ ein Unterraum, also gleich U .

Im Falle dass die Folge W_0, W_1, \dots , bei W_N , N eine natürliche Zahl, abbricht, erhält man $W_N = U$. ■

Ist bereits $W_1 = U$, so nenne U *eingliedrige Erweiterung von M* .

Satz 2. *Sei der Unterraum U eingliedrige Erweiterung der sz Teilmenge M von P . Dann ist auch U sz.*

Beweis. Sei $p, q \in W_1 = U$. Dann gibt es Ketten durch p bzw. q , die mit $W_0 = M$ einen Punkt p_0 bzw. q_0 gemeinsam haben. In W_0 gibt es einen Punkt r_0 mit $p_0 \Delta r_0 \Delta q_0$.



1. Fall: $p_0 \Delta q_0$. Dann gibt es mit **(R1)** einen Punkt $r \in (p_0 r_0 q_0)$, für welchen $p \Delta r \Delta q$ gilt.

2. Fall: Sonst. In W_1 gibt es eine Kette A durch q_0, r_0 . Mit **(R1)** erhalten wir einen Punkt $q' \in A$ mit $p_0 \Delta q' \Delta q$. Wegen $W_1 = [W_0]$ existiert in W_1 die Kette $B = (p_0 r_0 q')$, und mit **(R1)** erhalten wir einen Punkt $r \in B$ mit $p \Delta r \Delta q$. ■

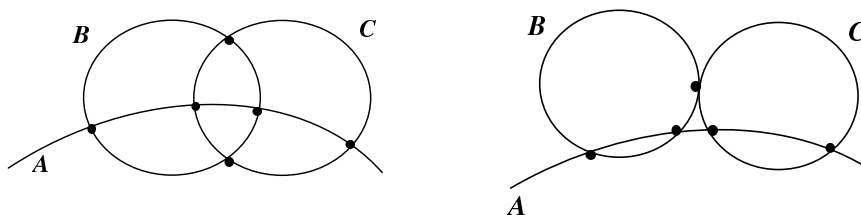
In Konfigurationen von Ketten, die sich paarweise in zwei Punkten schneiden, kommt immer wieder als Grenzfall vor, dass sich diese stattdessen berühren. In abkürzender Redeweise sagen wir von zwei Ketten C und D , dass sie sich "intensiv treffen", geschrieben $C @ D$, falls $|C \cap D| = 2$ ist, oder $C p D$ gilt für geeignetes $p \in P$.

Jetzt endlich können wir das für unsere Untersuchungen grundlegende Axiom **(Z)** einführen. In Σ soll gelten:

- (Z)** Drei Ketten mögen sich paarweise treffen. Treffen sie sich dann in zwei Fällen intensiv, so auch im dritten.

Dies entspricht dem Schließungssatz (Z_3) in [2, 7.1.9].

Beispiel 3. Seien A, B, C Ketten mit $|A \cap B| = 2$ und $|A \cap C| = 2$ und $B \cap C \neq \emptyset$. Dann ist $|B \cap C| = 2$ oder $B \cap C = \{p\}$ und $B p C$.

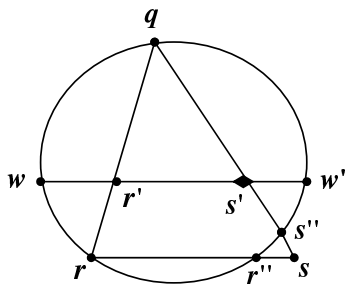


Satz 4. Sei Σ eine Berührstruktur mit **(R1)** vom Range ≥ 5 . Gilt dann **(Z)** in Σ , so ist Σ ein Kettenraum.

Beweis. Es ist Σ_p vom Range ≥ 4 . Nach einem Satz von Meuren ([13],(6.2)) ist dann mit einer Reichhaltigkeitsbedingung, die aus **(R1)** folgt, Σ_p schon dann partieller affiner Raum, wenn das Lenz-Axiom gültig ist:

- (L)** Sind $q, r, s \in \Delta(p)$ paarweise distant, ist $\langle qr \rangle \neq \langle qs \rangle$ und $r' \in \langle qr \rangle$, so trifft $\pi(r', \langle rs \rangle)$ die Gerade $\langle qs \rangle$.

Wir beweisen **(L)** unter viermaliger Anwendung von **(Z)**:



Es gibt $w \in \pi(r', \langle rs \rangle)$ mit $w \neq r'$, $q \triangle w \triangle r$.

Sei $C = (qwr)$, $C_p = C \cap \Delta(p)$.

1. $(pqr) @ C$ & $(pqr) @ (pwr') \Rightarrow C @ (pwr')$;
etwa $w \neq w' \in \langle wr' \rangle \cap C_p$.

2. $C @ (pwr')$ & $(pwr') @ (prs) \Rightarrow C @ (prs)$;
etwa $r \neq r'' \in \langle rs \rangle \cap C_p$.

3. $C @ (prs)$ & $(prs) @ (pqs) \Rightarrow C @ (pqs)$;
etwa $q \neq s'' \in \langle qs \rangle \cap C_p$,

(hier können auch s, r', r'' zusammenfallen)

4. $C @ (pwr')$ & $C @ (pqs) \Rightarrow (pwr') @ (pqs)$, also $s' \in \pi(r', \langle rs \rangle) \cap \langle qs \rangle$, da sich (pwr') und (pqs) nicht (in p) berühren. ■

Für alle $p \in P$ haben die Σ_p zugrunde liegenden affinen Räume die gleiche Ordnung m , d.h. die Geraden besitzen genau m Punkte und daher die Ketten $m + 1$ Punkte. Wir sagen auch dass Σ die Ordnung m hat. Die Reichhaltigkeitsbedingung **(R1)** die wir weiterhin voraussetzen, erhält jetzt die Form

(R) Es ist $m \geq 4$, und ist $C \in \mathcal{C}$ und $p \triangle C$, so gilt für die Anzahl k der zu p nicht distanten Punkte von C die Bedingung $k < \frac{m}{5}$.

Von jetzt an ist $\Sigma = (P, \mathcal{C}, \Delta)$ ein sz Kettenraum vom Rang ≥ 5 , der **(R)** und **(Z)** erfüllt.

Für einen Unterraum U und $x \triangle U$ setzt man $U_x = U \cap \Delta(x)$. Für eine Kette C und $x \in C$ ist dann $C_x = C \setminus \{x\}$.

Sei C eine Kette, sei $p \in P \setminus C$ und $q \in C$ mit $p \triangle q$. In Σ_q ist $E = \langle C_q, p \rangle_q$ eine Ebene und C_q darin eine Gerade.

Das Bündel der Ketten (pqx) , $x \in C$ und $p \triangle x$, gibt in E das Bündel eigentlicher Geraden durch p . Gibt es k Punkte von C , die zu p nicht distant sind, so gehen durch p in E genau k isotrope Geraden. Also besitzt E genau k Parallelklassen von isotropen Geraden. Denn in Σ_q sind die Verbindungsgeraden distanter Punkte genau die eigentlichen Geraden und die Verbindungsgeraden nichtdistanter Punkte die isotropen Geraden. Dabei entspricht $\pi(p, C_q)$ der Kette durch p , die C in q berührt.

Satz 5. Es ist U schon dann Unterraum, wenn mit je drei paarweise distanten Punkten x, y, z die ganze Kette (xyz) in U liegt.

Beweis. Wir haben zu zeigen: Ist A in U enthaltene Kette, ist $q \in U$ mit $q \triangle p \in A$ und B die Kette mit $q \in BpA$, so gilt auch $B \subseteq U$. In Σ_p sind A_p und B_p parallele (eigentliche) Geraden. Aus der Lenzfigur erhalten wir mit **(R)** zwei eigentliche Schnittgeraden von A_p und B_p , die sich außerhalb in einem Punkt z treffen, wobei eine dieser Schnittgeraden durch q geht. Die Schnittpunkte mit A_p seien x bzw y , und die Schnittpunkte mit B_p seien q bzw r . Wir erhalten der Reihe nach: $z \in (pqx) \subseteq U$, $r \in (pzy) \subseteq U$, also $B = (pqr) \subseteq U$. ■

3 Die sz 4-Räume

Wie bisher wird $\Sigma = (P, \mathfrak{C}, \Delta)$ als sz Kettenraum von Rang ≥ 5 angenommen, der **(R)** und **(Z)** erfüllt.

Für einen Unterraum U können wir ebenfalls das Residuum U_p bilden für $p \in U$. Es ist $U_p = (U \cap \Delta(p), \mathfrak{C}_p(U))$, mit $\mathfrak{C}_p(U) = \{C \setminus \{p\} : p \in C \in \mathfrak{C} \text{ und } C \subseteq U\}$. Ein Unterraum U heisst *eben*, falls je zwei Ketten C, D von U mit $C \cap D \neq \emptyset$ sich schon intensiv treffen. (Für einen ebenen Unterraum ist **(Z)** trivialerweise erfüllt.) Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, dass jeder sz 4-Raum eben ist.

Definition 6. Sei $r \Delta C, D, C @ D$, d.h. C und D treffen sich intensiv. Wir sagen C und D treffen sich intensiv in $\Delta(r)$, falls $r \Delta C \cap D$; genauer: ist $C \cap D = \{p, q\}$, so $p \Delta r \Delta q$.

Satz 7. Ein sz 4-Raum U ist genau dann eben, wenn für alle $p \in U$ das Residuum U_p eine Ebene ist.

Beweis. Seien C, D Ketten von U mit $p \in C \cap D$. Ist nun U_p eine Ebene, so schneiden sich die Geraden C_p und D_p oder sind parallel, d.h. C und D treffen sich intensiv. Treffen sich umgekehrt je zwei den Punkt p enthaltende Ketten C, D von U intensiv, so schneiden sich in U_p die Geraden C_p und D_p oder sind parallel; es gibt also verschiedene Geraden, aber keine, die zueinander windschief sind. Also ist U_p eine Ebene. ■

Satz 8. (Planarität der affinen Ketten.) Sei C eine Kette und $p \in P \setminus C$ mit $p \Delta C$. Seien x, y, z drei verschiedene Punkte von C_p . Ist E die von x, y, z in Σ_p aufgespannte Ebene, dann ist $C_p \subseteq E$.

Beweis. Die Punkte x, y, z sind nicht kollinear, sonst wäre $p \in C$. Sei $w \in C_p, w$ von x, y, z verschieden. Betrachte die eigentlichen Geraden $\langle xy \rangle$ und $\langle zw \rangle$. Die Ketten (pxy) und (pzw) treffen beide C intensiv und haben nichtleeren Durchschnitt. Nach **(Z)** treffen sich also die Geraden $\langle xy \rangle$ und $\langle zw \rangle$ oder sind parallel. Wegen $x, y, z \in E$ folgt in beiden Fällen $\langle zw \rangle \subseteq E$, also insbesondere $w \in E$. ■

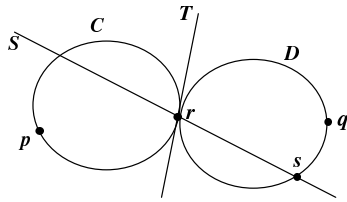
Bemerkung 9. Wir können die Lage von C_p in E noch näher beschreiben. Dazu wird definiert: **Sekante** (von C_p) heisst jede eigentliche Gerade, die C_p in zwei Punkten trifft, und **Tangente** jede eigentliche Gerade, die mit C_p genau einen Punkt gemeinsam hat. Aus den Regeln des Kettenraumes ergibt sich dann Folgendes: Für jedes $w \in C_p$ besteht das Büschel (w) aller eigentlichen Geraden durch w (in E) aus genau einer Tangente und sonst lauter Sekanten. (Die eine Tangente kommt von der Kette durch p , die C in w berührt; dass diese wirklich in E liegt, folgt jetzt mittels **(Z)**.) Insbesondere sind keine drei Punkte von C_p kollinear. C_p kann als **Pseudo-Oval** bezeichnet werden.

Hilfssatz 10. Für $q \in P \setminus C, q \Delta C$ sei $C^q = \bigcup_{x,y \in C} (qxy) \setminus \{q\}$. (Hier bedeutet (qxx) die Kette durch q , die C in x berührt. C^q ist also die um q verminderte Vereinigung aller Ketten durch q , die C intensiv treffen.) Dann ist C^q die von $C \cap \Delta(q)$ in Σ_q aufgespannte Ebene.

Beweis. Sei $C_q = C \cap \Delta(q)$ und E die von C_q in Σ_q aufgespannte Ebene. Sicher liegt C^q in E , denn C^q ist die Vereinigung aller Sekanten und Tangenten von C_q . Sei umgekehrt $x \in E \setminus C$. Dann gibt es nur k Punkte von C , die zu x nicht distant sind, also auch $y \in C_q$ mit $x \Delta y$. Die eigentliche Gerade $\langle xy \rangle$ ist Sekante oder Tangente, liegt also in C^q . ■

Satz 11. (Zusatz zu Satz 8) Sei C, C_p, p, E wie in Satz 5. Sei $r \in C_p$ und $q \in E$ mit $q \Delta r$. Sei D die Kette durch q , die C in r berührt. Dann gilt $D_p = D \cap \Delta(p) \subseteq E$.

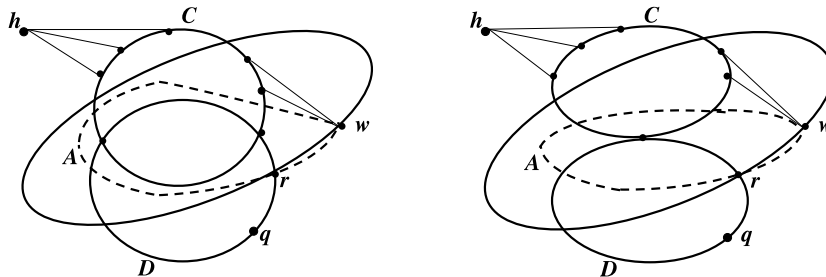
Beweis. Aus Hilfssatz 10 schliessen wir $E \subseteq \Delta(p)$; da $q \Delta p$, gibt es eine eindeutig bestimmte Kette durch p , die D in r berührt, d.h. es gibt in Σ_q genau eine eigentliche Gerade T durch r , die Tangente an D_p ist.



Mit **(R)** finden wir eine von T verschiedene Sekante S von C_p durch r . Wegen **(Z)** und $S \neq T$ hat S mit D_p noch einen weiteren Schnittpunkt s . Da D_p die drei verschiedenen Punkte $q, r, s \in E$ besitzt, folgt mit Satz 8 die Behauptung. ■

Hilfssatz 12. Seien C, D Ketten, die sich intensiv treffen, sei $q \in D \setminus C$ und $w \in C^q$, $h \Delta C$, $r \in D$, $r \Delta w$. Dann gibt es eine Kette A durch r und w , die C in $\Delta(h)$ intensiv trifft.

Beweis.



In der affinen Ebene C^q gibt es eine Gerade durch w , die C_q in Punkten aus $\Delta(r)$ schneidet bzw. berührt. Diese Gerade zusammen mit q gibt eine Kette A , so dass A_r in C^r durch q geht und C_r intensiv trifft. Wegen $q \in C^r$ ist daher $A_r \subseteq C^r$, also wegen $w \in A_r$ auch $w \in C^r$. Mittels **(R)** findet man auf C_r einen Punkt aus $\Delta(h)$, so dass die eigentliche Gerade durch w und diesen zu einer Sekante bzw. Tangente wird, und falls Sekante, C_r noch in einem weiteren Punkt aus $\Delta(h)$ trifft. Diese eigentliche Gerade ergänzt durch r ist dann die gesuchte Kette A . ■

Hilfssatz 13. Seien C, D Ketten, die sich intensiv treffen, sei $q, r \in D \setminus C$. Dann ist $C^q \cap \Delta(r) \subseteq C^r$.

Beweis. Sei $w \in C^q \cap \Delta(r)$. Dann liegt w nach Hilfssatz 12 (für $h = r$) auf einer Kette A durch r , und A trifft C in $\Delta(r)$ intensiv. Das besagt aber gerade $w \in C^r$. ■

Satz 14. Sei C eine Kette, $p \Delta C$, sei D eine Kette durch p , die C intensiv trifft. Sei $W = \bigcup_{q \in D \setminus C} C^q$. Dann ist $[C, p] = W$.

Beweis. Sicher ist $W \subseteq [C, p]$ und umgekehrt $C \subseteq W, p \in W$. Nach Satz 5 genügt es zu zeigen, dass für paarweise distante $x, y, z \in W$ auch $(xyz) \subseteq W$ gilt. Seien also solche x, y, z vorgegeben, $x \in C^u, y \in C^v, z \in C^w, u, v, w \in D \setminus C$. Es ist $C_z \subseteq D^z$; denn es gibt verschiedene Punkte $r_i, i = 1, 2, 3$ von D_z und dann mit Hilfssatz 10 Ketten A_i durch r_i die C intensiv in $\Delta(z)$ treffen. Da C^z in Σ_z affine Ebene ist, folgt mit der Planarität der affinen Ketten $D_z = (r_1, r_2, r_3) \subseteq C^z$. Nach Hilfssatz 12 gibt es Ketten A, B mit $x \in A, y \in B$ und A, B und D_z treffen C in $\Delta(z)$ intensiv, woraus $x, y \in C^z$ folgt. Sei $w \in (xyz), w$ von x, y, z verschieden. In Σ_z ist dann w ein Punkt der Geraden (xy) , liegt also in C^z . Wegen $D_z \subseteq C^z$ ergibt das $w, x, y, z \Delta D$. Es gibt $v \in D$ mit $x, y, z, w \Delta v$. Nach Hilfssatz 12 folgt $x, y, z \in C^v$, mithin gilt $w \in (xyz)_v \subseteq C^v \subseteq W$. ■

Satz 15. Sei C, p, D wie in Satz 14. Dann gilt: $W = [C, p]$ ist eben.

Beweis. Zu zeigen $W_r, r \in W$, ist (affine) Ebene. Nach Hilfssatz 13 ist,

$$W_r = W \cap \Delta(r) = \left(\bigcup_{q \in D \setminus C} C^q \right) \cap \Delta(r) = \bigcup_{q \in D \setminus C} (C^q \cap \Delta(r)) \subseteq C^r.$$

Andererseits ist sicher $C^r \subseteq [C, p]$ und $C^r \subseteq \Delta(r)$. Es folgt $W_r = C^r$. ■

Satz 16. (Austauschsatz) Für $w \in W \setminus C$ ist $[C, w] = W$.

Beweis. Sicher ist $[C, w] \subseteq [C, p]$. Nun liegt w auf einer Kette, die C und D intensiv trifft. Also ist $p \in D \subseteq [C, w]$, mithin $W = [C, p] \subseteq [C, w]$. ■

Satz 17. Für Kette C und $p \in P \setminus C$ ist $U = [C, p]$ sz.

Beweis. Es gibt Kette D durch p , die C intensiv trifft. Evident ist $C \cup D$ sz, und nach Satz 14 ist U eingliedrige Erweiterung von $C \cup D$. Nach Satz 2 ist damit U sz. ■

Zur Erleichterung der Ausdruckweise führen wir statt *nicht distant* den Ausdruck *adjazent* ein, wie er z.B. in der Theorie der Polarräume verwendet wird mit der diese Überlegungen etwas zu tun haben (vgl. [17]). Wir schreiben " \sim " ($x \sim y$) statt nicht distant". Eine Punktmenge M heisst *Clique*, falls die Punkte von M paarweise adjazent sind, d.h. $\forall x \in M, \forall y \in M : x \sim y$. Sei $A \subseteq B \subseteq P$. Nenne A *maximale Clique von B*, falls A Clique ist, aber $A \cup \{x\}$ keine Clique, für alle $x \in B \setminus A$. Für $p \in P$ und $M \subseteq P$ ist $\tilde{p}(M) = \{x \in M : p \sim x\}$. Es ist $p \sim M$ falls $p \sim x$ für alle $x \in M$, d.h. $\tilde{p}(M) = M$. Ferner sei $\tilde{p} = \{x \in P : p \sim x\}$, also $\tilde{p} = \tilde{p}(P)$. Offensichtlich sind die isotropen Geraden von Σ_p Cliques.

Zur Erinnerung: Für $M \subseteq \Delta(z)$ ist $\langle M \rangle$ (genauer $\langle M \rangle_z$) der von M in Σ_z als affinem Raum aufgespannte affine Unterraum, ebenso $\langle pq \rangle$ usw.

Sei U ein sz 4-Raum, sowie $z \in P \setminus U$, aber $z \Delta U$. Wir betrachten U_z in Σ_z . Für $p \in U$ betrachte auch U_p in Σ_p . Für ein k (im Sinne von **(R)**) gebe es in U_p k Parallelklassen von isotropen Geraden. In U_p sind die isotropen Geraden sogar maximale Cliques. Wir schliessen, dass auch U_z k Scharen von isotropen Geraden besitzt. Durch jeden seiner Punkte gehen k isotrope Geraden, von jeder Schar eine. Je zwei Geraden verschiedener Scharen schneiden sich. (Hier sind noch evtl. Punkte von $\tilde{z}(U)$ zu ergänzen.)

Wir möchten nun voraussetzen, dass für verschiedene Punkte $x, y \in U_z \cap \Delta(p)$ die Geraden $\langle px \rangle_z$ und $\langle py \rangle_z$ verschieden sind, dass also das Residuum durch

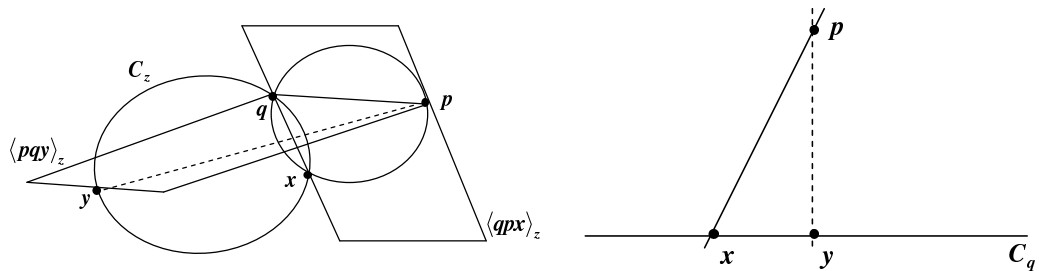
eine Art stereographischer Projektion gewonnen wird. Es folgt $\dim\langle U_z \rangle_z = 3$. Damit kommen nur die Werte $k = 0, 1, 2$ infrage: Wäre $k > 2$, so müsste U_z in einer Ebene von Σ_z liegen im Widerspruch zu $\dim\langle U_z \rangle_z = 3$. Mit anderen Worten : *Jeder sz 4-Raum von Σ ist eine Benz-Ebene.*

4 Der Verband der Unterräume von Σ

Wir setzen voraus, dass Σ ein Kettenraum vom Rang ≥ 5 ist, wobei jeder sz 4-Raum eine Benz-Ebene ist, d.h. $k = 0, 1, 2$. Wie vorher betrachten wir einen 4-Raum U und $z \in P \setminus U$ mit $z \triangle U$. Jetzt sei U aber eine Laguerre- oder Minkowski-Ebene, also hat U genau k Parallelklassen von isotropen Geraden für $k = 1$ oder $k = 2$. Ferner wird vorausgesetzt dass für $p \in U$, $x, y \in U_z \cap \Delta(p)$ die Geraden $\langle px \rangle_z$ und $\langle py \rangle_z$ verschieden sind. Daher ist $\dim\langle U_z \rangle_z = 3$.

Wir wollen nun vergleichen, wie die Schnitte von Ebenen durch p von U_z in Σ_z im Residuum U_p dargestellt werden.

Es ist $U = [C, p]$ für eine Kette C und $p \in P \setminus C$, $p \triangle C$, $p \triangle z$. Nun sei noch $q \in C_z$ mit $p \triangle q$. Wir vergleichen die Schnitte der (affinen) Ebenen durch $\langle pq \rangle_z$ mit U_z mit dem Geradenbüschel durch p von U_q in Σ_q .



Ist $x \in C_z \cap \Delta(p)$, so schneidet die Ebene $\langle qpx \rangle_z$ aus U_z die Kette (qpx) aus. (Wegen **(R)** können wir die Punkte aus $\tilde{z}(U)$ ergänzen.) Dem entspricht in Σ_q die eigentliche Gerade $\langle px \rangle_q$. Nun sei $y \in \tilde{p}(C_z)$. Dann liegt jedenfalls $\langle py \rangle_z$ in $E_z = \langle pqy \rangle_z$. In Σ_q ist das die isotrope Gerade $\langle py \rangle_q$. Wenn wir hier aber q und y ihre Rollen vertauschen lassen, erkennen wir, dass E aus U_z auch eine weitere isotrope Gerade G_z durch q aus U_z schneidet. Diese konnte wegen $G_z \subseteq \tilde{q}(U)$ in U_q nicht erscheinen. Wir zeigen dass es eine Ebene E von Σ gibt mit $E_z = \langle pqy \rangle_z$, nämlich $E = U \cap U'$. Hierzu wähle einen Punkt $r \in P \setminus U$, $r \triangle q$, y , was nach (1.5) möglich ist, setze $C' = (qry)$ und $U' = [C', p]$. Wir können also schreiben $E = (pqy)$. Damit lässt sich auch eine Gerade L als Unterraum von Σ definieren mit $L_z = \langle p, y \rangle_z$, $L = E \cap E'$ mit $E' = (p'qy)$ für geeignetes $p' \in P \setminus E$. Wir haben in Σ also, zwei Arten von Geraden:

- a) $G = \{x, y\}$, $x, y \in P$, $x \triangle y$, reelle Gerade
- b) $G = (xy)$, $x, y \in P$, $x \sim y$, virtuelle Gerade (bildet eine Clique)

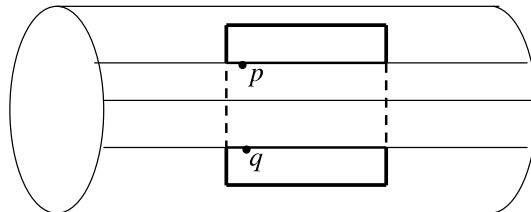
Drei Arten von Ebenen: a) Ketten

- b) Geradenpaare (verallgemeinerte Ketten)
- c) Virtuelle Ebenen $E = (xyz)$ mit $x \neq y$, $x \sim y$, $z \sim x, y$, $z \notin (xy)$.

Hier besitzt E die drei verschiedenen Geraden (xy) , (xz) , (yz) , kann also nicht von der Form a) oder b) sein, also ist E eine Clique.

Wir müssen aber zwei Arten von virtuellen Geraden unterscheiden.

In U als Laguerre-Ebene ($k = 1$) haben wir eine Schar von Geraden (maximalen Cliques), die in U_p als Parallelklasse von isotropen Geraden erscheint. Da in Σ_z eine Ebene, die durch eine Gerade von U_z geht und mit U_z einen weiteren Punkt gemeinsam hat, bereits eine weitere Gerade enthält, muss die Schar der Geraden von U_z ebenfalls aus lauter Parallelen bestehen.



Also ist hier die verallgemeinerte Kette ein Paar von Geraden, die sich nicht schneiden, aber in einer Ebene liegen. Wir nennen diese Geraden *affin*.

In U als Minkowski-Ebene ($k = 2$) haben wir zwei Scharen von Geraden (maximalen Cliques), die in U_p als zwei Parallelklassen von Geraden erscheinen. Jede Gerade der einen Schar trifft jede Gerade der anderen Schar. Die zugehörigen verallgemeinerten Ketten sind also Paare von sich schneidenden Geraden. Wir nennen diese Geraden *projektiv*.

Ist L eine projektive Gerade und $p \triangle L$, so gibt es genau ein $q \in L$ mit $p \sim q$. Denn in Σ_p erscheint L als Gerade des affinen Raumes, hat also einen Punkt q verloren. Für diesen gilt also $p \sim q$. Also ist $[L, p]$ ein Paar sich schneidender projektiver Geraden.

Sei nun A eine affine Gerade und $p \triangle A$. Angenommen, es gibt $q \in A$ mit $p \sim q$. Dann wäre $[A, p]$ ein Paar sich schneidender Geraden, ließe sich also zu einer Minkowski-Ebene erweitern, im Widerspruch dazu, dass A affin ist. Also ist $[A, p]$ ein Paar affiner Geraden, die in einer Ebene liegen.

Wir nennen die affinen Geraden A, B *parallel*, geschrieben $A \parallel B$, wenn $A = B$ gilt oder $A \cap B = \emptyset$ und $[A \cup B]$ eine Ebene ist. Diese Relation \parallel ist eine Äquivalenzrelation. Dies sieht man daran, dass für geeignetes Σ_p die Relation \parallel den natürlichen Parallelismus des affinen Raumes ergibt. Zur affiner Geraden A und Punkt p ist $B = \pi(p, A)$ die Parallele zu A durch p : Es ist $A \parallel B$ und $p \in B$.

Wir müssen nun den Unterraumbegriff neu fassen. Es gibt u.U. *Laguerre-Kegel*: Ein solcher wird durch eine Kette C und einen Punkt p mit $p \sim C$ erzeugt. Die Punktmenge ist $U = \bigcup_{x \in C} (px)$. Hier wäre $U \setminus \{p\}$ abgeschlossen bezgl. Kettenbildung, aber kein Unterraum.

Wir definieren nun Σ als *planare Geometrie*, d.h. eine Punktmenge U ist Unterraum, wenn für je drei paarweise verschiedene Punkte p, q, r auch $(pqr) \subseteq U$ gilt. (Dabei kann (pqr) Kette, verallgemeinerte Kette, virtuelle Ebene oder virtuelle Gerade sein.)

Nach den bisherigen Ergebnissen vereinfacht sich diese Definition zu folgendem *Unterraumkriterium*.

Sei $U \subseteq P$. Es ist U genau dann Unterraum, wenn U die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt:

- (1) Sind p, q, r paarweise distante Punkte von U , so gilt $(pqr) \subseteq U$.
- (2) Sind p, q verschiedene Punkte von U mit $p \sim q$, so gilt auch $(pq) \subseteq U$.
- (3) Ist A eine affine Gerade mit $A \subseteq U$, so gilt für $p \in U$ auch $\pi(p, A) \subseteq U$.

Für diesen neuen Unterraumbegriff verwenden wir jetzt die normalen eckigen Klammern $[]$. Für eine Punktmenge X ist $[X]$ der von X erzeugte Unterraum, also der Durchschnitt über alle Unterräume, die X enthalten.

Bemerkung 18. In Polarräumen hat man die Eigenschaft: Ist G eine Gerade und p ein Punkt außerhalb G , so gibt es entweder genau eine Gerade G' durch p , die G trifft, oder alle Punkte von G liegen auf Geraden durch p , vgl. [7]. Dieselbe Eigenschaft findet man in der Charakterisierung der Geometrie der ebenen Schnitte von Schultze in [15]. Dass bei beiden keine affinen Geraden vorkommen, beruht darauf, dass unter [7] nur nichtausgeartete Quadriken betrachtet werden und unter [15] die quadratischen Mengen **mit** Spitzenraum. Dagegen wird sich herausstellen, dass Σ als Geometrie der ebenen Schnitte einer quadratischen Menge **ohne** ihren Spitzenraum erscheint, daher die affinen Geraden. Bei Schaffrath [14] werden schon vor der projektiven Einbettung zusätzlich Spitzen eingeführt, um nur eine Art von Geraden zu haben, während hier dagegen die Unterscheidung von affinen und projektiven Geraden bestehen bleibt.

Wir nennen *virtuellen Unterraum* (virtuelle Ebene usw.) eine Clique U , die Unterraum ist, d.h.

- a) Für $p, q \in U$, $p \neq q$ ist $(pq) \subseteq U$,
- b) Ist A eine affine Gerade mit $A \subseteq U$, ist $p \in U$ so $\pi(p, A) \subseteq U$.

Der virtuelle Unterraum A heißt *affin*, wenn alle Geraden von A affin sind.

Satz 19. Sei U ein virtueller Unterraum und A eine affine Gerade, die U in genau einem Punkt trifft. Dann ist $W = [U \cup A]$ ein virtueller Unterraum.

Beweis. Sei $p \in U \cap A$, sei G eine (virtuelle) Gerade mit $p \in G \subseteq U$. Dann ist $[G \cup A]$ eine virtuelle Ebene, da A affin ist. Nun ist $W = \cup\{[G \cup A] : G \text{ ist Gerade mit } p \in G \subseteq U\}$. Dann ist W aber eine Clique: Seien $x, y \in W$, so dass (pxy) eine Ebene bildet. Dann gehen durch p in (pxy) lauter virtuelle Geraden, mehr als zwei, woraus folgt, dass (pxy) eine virtuelle Ebene ist. ■

Satz 20. Seien A, B affine Geraden mit $A \cap B = \{p\}$. Dann ist $[A \cup B]$ eine affine Ebene.

Beweis. Angenommen, es gibt in $U = [A \cup B]$ eine projektive Gerade G . Es gibt $q \in P \setminus U$ mit $q \Delta G$. Dann ist $E = [G, q] = G \cup G'$ ein projektives Geradenpaar. O.B.d.A. können wir $p \in G \cap G'$ annehmen.

Nun ist $W = [A \cup G']$ eine virtuelle Ebene, und $V = [W \cup B]$ ein virtueller 4-Raum. Wegen $E \subseteq V$ ist dann E virtuelle Ebene im Widerspruch zu $E = G \cup G'$. ■

In Karzel/Piper [11] werden lineare Räume, deren Geraden nur affin oder projektiv sind, regulär genannt, falls jede Ebene, die zwei sich schneidende affine Geraden enthält, schon affin ist. In diesem Sinne sind unsere virtuellen Unterräume regulär. Sie sind dann geschlitzte (projektive) Räume, entstehen aus projektiven Räumen durch Herausnehmen der Punkte eines projektiven Unterraumes.

Satz 21. Sei X eine maximale Clique des Unterraumes U . Dann ist X ein Unterraum.

Beweis. Seien $p, q \in X$, $p \neq q$. Dann ist (pq) eine in U enthaltene Clique. Da X maximal, folgt $(pq) \subseteq X$, da $x \in X$, $x \sim p$ und $x \sim q$ impliziert $x \sim (pq)$. Sei A affine Gerade mit $A \subseteq X$, sei $p \in X$. Dann ist $B = \pi(p, A) \subseteq U$, also auch $B \subseteq X$; denn für $x \in X$ impliziert $x \sim p$ bereits $x \sim B$. ■

Satz 22. Sei U ein Unterraum. $p \in U$ und $A = \cup\{L : L \text{ ist affine Gerade von } U \text{ mit } p \in L\}$. Dann ist A der maximale affine Unterraum von U , der p enthält.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 21. Für affine Geraden L, L' von U mit $L \cap L' = p$ ist ja $[L \cup L']$ affine Ebene. ■

Es folgt: Jeder Unterraum ist die disjunkte Vereinigung seiner maximalen affinen Unterräume.

Wir erweitern den Parallelismus auf affine Unterräume: Für affine Unterräume A, B ist $A \parallel B$ falls $A = B$ oder $A \cap B = \emptyset$ und es gilt: $[A \cup B]$ ist oberer Nachbar von A und oberer Nachbar von B . In jedem Residuum ist dies der gewöhnliche Parallelismus des affinen Raumes. Schreibe wieder $B = \pi(p, A)$ falls $A \parallel B$ und $p \in B$.

Satz 23. Sei A ein affiner Raum, sei $p \Delta A$. Dann ist $[A, p] = A \cup \pi(p, A)$.

Beweis. Sei $B = \pi(p, A)$, $q \in A$, $U = [A, p]$. Es ist $B = \cup\{\pi(p, L) : L \text{ ist Gerade von } A \text{ durch } q\}$, also $A \cup B \subseteq U$. Umgekehrt ist $A \cup B = [A \cup B]$, denn für $x \in A$, $y \in B$ gilt $x \Delta y$. ■

Wir nennen einen virtuellen Unterraum *projektiv*, wenn alle seine Geraden projektiv sind. Ist G eine projektive Gerade und $p \Delta G$, so soll $\pi(p, G)$ die zweite (projektive) Gerade von $U = [G, p]$ sein: $U = G \cup \pi(p, G)$.

Satz 24. Sei W ein projektiver Unterraum, sei $p \Delta W$. Dann ist $H = \tilde{p}(W)$ eine Hyperebene von W . Sei $W' = [H, p] = \cup_{x \in H} (px)$. Dann ist $U = [W, p] = W \cup W'$.

Beweis. In Σ_p erscheint W_p als affiner Unterraum. Also ist $\tilde{p}(W)$ eine Hyperebene von W . Sei $q \in W$ mit $p \Delta q$. Dann ist $W' = \cup\{\pi(p, L) : L \text{ ist Gerade von } W \text{ durch } q\} = \cup_{x \in H} (px) \subseteq U$. Andererseits ist $W \cup \{p\} \subseteq W \cup W' = [W \cup W']$, denn für $x \in W \setminus H$, $y \in W' \setminus H$ gilt $x \Delta y$. ■

Hilfssatz 25. Sei E eine virtuelle Ebene, $p \Delta E$ und $q \in E$ mit $p \Delta q$. Sei $E' = \cup\{\pi(p, L) : L \text{ ist Gerade von } E \text{ durch } q\}$. Dann ist $[E, p] = E \cup E'$.

Beweis. Ist E affin oder projektiv, so folgt die Behauptung mit Satz 23 bzw. Satz 24. Es gibt noch eine dritte Möglichkeit, nämlich dass E eine punktierte Ebene ist, d.h. E enthält genau eine Parallelklasse von affinen Geraden; alle anderen Geraden sind projektiv.

Wir betrachten diesen Fall genauer. Seien L_1 und L_2 verschiedene projektive Geraden durch q . Sei $L'_i = \pi(p, L_i)$, sei $s_i \in L_i \cap L'_i$, $A = (s_1 s_2)$. Für $x \in A$ ist dann $(px) \cup (qx)$ eine verallgemeinerte Kette von $[E, p]$. Wäre A eine projektive Gerade, so wären alle Geraden durch q projektiv. Also ist A affine Gerade, und $E' = \cup_{x \in A} (px) \cup \pi(p, A)$ ist ebenfalls punktierte Ebene. ■

Satz 26. Sei W ein virtueller Unterraum vom Rang n , sei $p \triangle W$ und $q \in W$ mit $p \triangle q$. Sei $W' = \cup\{\pi(p, L) : L \text{ ist Gerade von } W \text{ mit } q \in L\}$. Dann ist $[W, p] = W \cup W'$ ein n -Raumpaar.

Beweis. W' ist Unterraum: Seien $x, y \in W'$, $x \in \pi(p, L_1)$, $y \in \pi(p, L_2)$, o.B.d.A. $L_1 \neq L_2$. Betrachte die Ebene $E = [L_1 \cup L_2]$ und wende Hilfssatz 25 an.

Sei A' affine Gerade durch p in W' , sei $z \in W'$, $z \in \pi(p, L)$. Es folgt $A = \pi(q, A) \subseteq W$. Betrachte $E = [A, L]$ und wende Hilfssatz 25 an.

$W \cup W' = [W \cup W']$: Abgeschlossenheit für affine Geraden folgt leicht aus dem Bisherigen. Abgeschlossenheit für Bildung isotroper Geraden folgt leicht, wenn man beachtet dass $x \in W \setminus (W \cap W')$ und $y \in W' \setminus (W \cap W')$ impliziert $x \triangle y$. ■

Sei W ein virtueller n -Raum, also ein Unterraum, der eine Clique bildet. Sei $p \triangle W$ und $[W, p] = W \cup W'$ das zugehörige n -Raumpaar. Setze dann $\pi(p, W) = W'$. Für $q \in W$ mit $q \triangle W'$ ist ersichtlich $\pi(q, W') = W$.

Für einen Unterraum U wird definiert der *Spitzenraum* $S(U)$ von U als $\{x \in U : x \sim U\}$. Die Punkte von $S(U)$ heißen die *Spitzen* von U . Ersichtlich ist U ein virtueller Unterraum. Ist $S(U) \neq \emptyset$, so heißt U *Kegel* mit Spitzenraum $S(U)$. Beispiele für $S(U) = \emptyset$ sind die *sz* Unterräume und die $(n+1)$ -Räume, die aus Paaren von affinen n -Räumen bestehen. Ist $W \cup W'$ ein Raumpaar, bei dem W nicht affin ist, so ist $W \cap W'$ der Spitzenraum von $W \cup W'$. Ist $S(U) = U$, so ist U gewiss virtuell, und umgekehrt.

Hilfssatz 27. Sei U ein Unterraum und $p \in U$. Dann ist auch der Kegel $\tilde{p}(U) = \{x \in U : p \sim x\}$ ein Unterraum.

Beweis. Seien $x, y, z \in \tilde{p}(U)$ paarweise distant. Wegen $k \leq 2$ folgt dann auch $p \sim (xyz)$. Seien $x, y \in \tilde{p}(U)$, $x \neq y$ aber $x \sim y$. Dann ist auch $p \sim (xy)$. Ist A affine Gerade von U und $z \in \tilde{p}(U)$, so gilt auch $p \sim \pi(z, A)$. ■

Satz 28. Sei U ein Unterraum und $p, q \in U$ mit $p \triangle q$. Sei

$$L(p, U) = \{X : X \text{ ist virtueller Unterraum von } U \text{ mit } p \in X\},$$

entsprechend $L(q, U)$. Dann ist die Abbildung

$$[p, q] : L(p, U) \rightarrow L(q, U) : X \mapsto \pi(q, X)$$

bijektiv. Insbesondere sind $\tilde{p}(U)$ und $\tilde{q}(U)$ vom selbem Typ".

Beweis. Ersichtlich ist $[p, q][q, p] = id_{L(p, U)}$ und $[q, p][p, q] = id_{L(q, U)}$. ■

Satz 29. Sei U ein Unterraum, sei $p \in U \setminus S(U)$. Dann ist U_p ein Unterraum in Σ_p . Umgekehrt: Sei U' ein Unterraum in Σ_p , sei $q \in U'$. Dann ist $U = U' \cup (\cup \bar{L}(q, U')[q, p])$ ein Unterraum von Σ . Hierbei ist $\bar{L}(q, U')$ die Menge der virtuellen Unterräume X , so dass X_p isotroper Unterraum von U' durch q ist.

Beweis. U_p ist Unterraum von Σ_p : Seien $x, y \in U_p$ verschiedene Punkte. Ist $x \triangle y$ so ist $x \triangle p \triangle y$ und damit die Gerade $(pxy) \setminus \{p\}$ in U_p . Ist $x \sim y$, so ist gewiss die Gerade $(xy)_p$ in U_p . Da die Geraden in Σ_p mindestens 4 Punkte haben, brauchen wir uns um Parallelen nicht zu kümmern.

Nun sei U' ein Unterraum von Σ_p , sei $U = U' \cup U''$ mit $U'' = \cup \bar{L}(q, U')[q, p]$. Zu zeigen ist, dass U ein Unterraum von Σ ist. Zu bemerken ist, dass für $r \in U'$ gilt

$$L(q, U')[q, p] = L(r, U')[r, p].$$

1. Es seien x, y Punkte mit $x \neq y$, aber $x \sim y$, und $x \neq p \neq y$.

a) $x, y \in U'$. Dann $(xy)_p = \langle x, y \rangle_p \subseteq U'$. Ist (xy) projektive Gerade, so ist der fehlende Punkt der Schnittpunkt mit $\pi(p, (xy)) = \pi(p, \pi(q, (xy)))$, liegt also in U'' .

b) $x \in U', y \in U''$. Es gibt virtuelle Gerade L durch p mit $y \in L$. Dann $(xy)_p = \pi(x, L)_p \subseteq U'$.

c) $x, y \in U''$. O.B.d.A $(px) \neq (py)$. Dann ist (pxy) virtuelle Ebene in U'' . Sei $E = \pi(q, (pxy))$, dann ist $E_p \in \bar{L}(q, U')$, also $E \in \bar{L}(q, U')[q, p]$, d.h. $(xy) \subseteq (pxy) \subseteq U''$.

2. Sei nun A eine (in Σ) affine Gerade.

a) A liegt in U' . Dann geht durch jeden Punkt von U' eine parallele von A , denn U' ist affiner Unterraum. Durch p geht $\pi(p, \pi(q, A)) \subseteq U''$. Sei $p \neq x \in U''$. Dann ist (px) virtuelle Gerade, also ist $E = [p, \pi(x, A)]$ virtuelle Ebene. Für $(qy) = \pi(q, (px))$ und $E' = [q, \pi(y, A)]$ ist $E = E'[q, p]$, also $\pi(x, A) \subseteq E \subseteq U''$.

b) A liegt in U'' . Durch analoge Überlegungen findet man Parallele von A in U' und ist damit bei a).

3. Schließlich seien x, y, z paarweise distante Punkte, die jeweils verschieden von p genommen werden.

a) $x, y, z \in U'$. Dann ist $(xyz)_p \subseteq \langle x, y, z \rangle_p \subseteq U'$. Ist $p \Delta u$ für alle $u \in (xyz)$, so ist $(xyz)_p = (xyz)$, und wir sind fertig. Gibt es genau ein $u \in (xyz)$ mit $p \sim u$, so ist $\langle x, y, z \rangle_p$ Laguerre Ebene, die eine Parallelklasse von isotropen Geraden enthält. Ist L eine von diesen, so $L \subseteq U'$ und $(pu) = \pi(p, L) \subseteq U''$, d.h. $(xyz) \subseteq U' \cup U''$. Schließlich ist noch der Fall möglich, dass es genau zwei Punkte $u_1, u_2 \in (xyz)$ gibt mit $p \sim u_i, i = 1, 2$. Dann ist $\langle x, y, z \rangle_p$ eine Minkowski-Ebene, besitzt also zwei Parallelklassen von isotropen Geraden. Sind L_1, L_2 Geraden dieser beiden Parallelklassen, so ist bei geeigneter Nummerierung $(pu_i) = \pi(p, L_i) \subseteq U''$, also wiederum $(xyz) \subseteq U' \cup U''$.

b) $x, y \in U', z \in U''$. Es gibt virtuelle Gerade L durch p mit $z \in L$, o.B.d.A $z \neq p$. Dann liegt $(xyz)_p$ in der Ebene $\langle \pi(x, L)_p \cup \pi(y, L)_p \rangle_p$. Ist $(xyz)_p$ Minkowski-Ebene, wende man a) an.

c) $x \in U', y, z \in U''$. Es gibt virtuelle Geraden L_1, L_2 durch p mit $y \in L_1, z \in L_2$. Dann liegt $(xyz)_p$ in der Ebene $\langle \pi(x, L_1) \cup \pi(y, L_2) \rangle_p$.

d) $x, y, z \in U''$. Wir wollen zeigen, dass der Laguerre-Kegel $K = [p, x, y, z]$ in U'' liegt.

Nun haben zwei Laguerre-Kegel K, M mit verschiedenen Spitzenpunkten, welche drei distante Punkte u, v, w gemeinsam haben, die Kette (uvw) zu ihrem genauen Durchschnitt. Dazu betrachtet man in Σ_u die (Laguerre-)Ebenen K_u, M_u ,

und sieht, dass ihr Durchschnitt die reelle Gerade (vw) ist. Um dies anzuwenden, wird $x = x_1$, $y = x_2$ und $z = x_3$ gesetzt. Es ist (px_i) projektive Gerade, andersfalls wären die x_i nicht paarweise distant.

Es gibt eine projektive Gerade $L^{(i)}$ durch q mit $\pi(p, L^{(i)}) = (px_i)$. Sei y_i der Schnittpunkt von $L^{(i)}$ und (px_i) . Wir wählen paarweise distante Punkte $z_i \in L_p^{(i)}$. Nach 3a) ist $(z_1 z_2 z_3) \subseteq U' \cup U''$, und nach 1 ist dann auch der Laguerre-Kegel $M = [q, z_1, z_2, z_3] \subseteq U' \cup U''$.

Nach dem vorher Bemerkten ist $(y_1 y_2 y_3)$ der genaue Durchschnitt von K und M , das heisst aber $(xyz) \subseteq K \subseteq \cup \bar{L}(q, U')[q, p] = U''$. ■

Hilfssatz 30. Sei U ein virtueller Unterraum und A ein affiner Unterraum mit $A \cap U \neq \emptyset$. Dann ist $W = [A \cup U]$ ein virtueller Unterraum.

Beweis. Betrachte die Menge \mathfrak{M} aller virtuellen Unterräume X mit $U \subseteq X \subseteq W$. Jede Kette von \mathfrak{M} hat eine obere Schranke, nämlich ihre mengentheoretische Vereinigung. Nach dem Lemma von Zorn¹ besitzt \mathfrak{M} ein maximales Element B . Angenommen $B \neq W$. Dann ist $A \setminus B \neq \emptyset$. Es gibt $p \in B \cap A$ und $q \in A \setminus B$. Nach Satz 19 ist $B' = [B \cup (pq)]$ ein virtueller Unterraum. Und es ist $U \subseteq B' \subseteq W$ und $B' \supsetneq B$ im Widerspruch zur Maximalität von B . ■

Folgerung 31. Sei A affiner Unterraum und $p \in P \setminus A$.

- Ist $p \triangle A$, so $p \triangle x$ für alle $x \in A$.
- Ist $p \sim z$ für ein $z \in A$, so ist $p \sim A$.

Hilfssatz 32. Sei $U \neq \emptyset$ ein Unterraum und $p \in P \setminus U$, $p \sim U$. Ist A ein maximaler affiner Unterraum von U , ist $B = \pi(p, A)$ und $W = \bigcup_{x \in U} (px) \cup B$, so ist $W = [U, p]$.

Dabei ist $B \subseteq S(W)$.

Beweis. Dass $B \subseteq S(W)$ ist, ist trivial. Wir zeigen $W = [U, p]$.

1. Fall: U ist virtueller Unterraum. Dann folgt die Behauptung aus dem entsprechenden Satz über projektive Räume ($B = \{p\}$), da U jedenfalls geschlitzter projektiver Raum ist.

2. Fall: Sonst. Sei zuerst bemerkt, dass für $x \in U \setminus S(U)$ die Gerade (px) projektiv ist, denn für affine Gerade (px) folgt aus $p \sim U$ schon $x \sim U$, also $x \in S(U)$. Für festes $q \in U \setminus S(U)$ ist $W' = W \cap \Delta(q)$ ein affiner Unterraum in Σ_q , der aus U_q entsteht durch Hinzufügen einer Schar paralleler (isotroper) Geraden von Σ_q , durch jeden Punkt von U_q eine dieser Geraden. Für $r \in U_q$ enthält $\bar{L}(r, W')$ auch $S(W)$ und p , die zu \tilde{q} gehören.

Man überzeugt sich, dass $W' \cup (\cup \bar{L}(r, W')[r, q]) = W$ ist. Mit Satz 29 zweiter Teil schließen wir, dass W ein Unterraum ist.

Wegen $W \subseteq [U, p]$ und $U \subseteq W$, $p \in W$ ist also $[U, p] = W$. ■

Satz 33. (HAUPTSATZ) Der Verband der Unterräume von Σ erfüllt die Austauschbedingung: Ist U Unterraum, $p \in P \setminus U$ und $q \in [U, p] \setminus U$ so $p \in [U, q]$.

¹Ein Beweis ohne Lemma von Zorn ist möglich, wenn man schon vorher voraussetzt, daß ein maximaler affiner Unterraum von Σ von endlichem Rang ist.

Beweis. Sei U ein Unterraum von Σ , o.B.d.A $U \neq \emptyset$. Sei $p \in P \setminus U$.

1. Fall: $p \sim U$. Nach Hilfssatz 32 ist $[U, p] = \bigcup_{x \in U} (xp) \cup \pi(p, A)$, wo A maximaler affiner Unterraum von U . Nun sei $q \in [U, p] \setminus U$. Entweder ist dann $q \in (ap)$ für ein $a \in U$, $q \neq a$, also $p \in (qa) \subseteq [U, q]$, oder $q \in \pi(p, A)$, also $p \in \pi(q, A) \subseteq [U, q]$.

2. Fall: $p \Delta U$.

a) U ist virtueller Unterraum, also $[U, p] = U \cup \pi(p, U)$. Ist $q \in [U, p] \setminus U$, so $q \in \pi(p, U) \setminus U$, also $p \in \pi(q, U) \subseteq [U, q]$.

b) U sonst. Es gibt $a \in U \setminus S(U)$ mit $p \Delta a$: Angenommen $p \Delta b$ für $b \in S(U)$. Sei $c \in U \setminus S(U)$. Es gibt höchstens einen Punkt $d \in (bc)$ mit $p \sim d$. Also gibt es $b \neq a \in (bc)$ mit $p \Delta a$. Wir benutzen die Darstellung von U und $[U, p]$ in Σ_a . Betrachte $[U, p]_a = \langle U, p \rangle_a$. Ist $q \in \langle U, p \rangle_a \setminus U$, so nach affiner Geometrie $\langle U, q \rangle_a = \langle U, p \rangle_a$, also $p \in [U, q]$. Bleibt die Möglichkeit $q \in \tilde{a}[U, p] \setminus U$. Es ist dann $q \neq a$ und liegt auf einer virtuellen Geraden X durch a , so dass $\pi(p, X)_a$ nicht in der Parallelen von U durch p (in Σ_a) liegt; also gibt es $x \in U$, so dass $\pi(p, X)_a = (px)$. Ist $X = (aq)$ projektive Gerade, so gibt es $y \in X$ mit $(px) = (xy)$. Folglich ist $p \in (xy) \subseteq (aq) \cup U \subseteq [U, q]$. Ist $X = (aq)$ affine Gerade, so $p \in \pi(x, (aq)) \subseteq [U, q]$. ■

Insgesamt ist der Verband der Unterräume von Σ also ein geometrischer Verband, erfüllt so z.B. für Unterräume U, W : $r[U \cup W] + r[U \cap W] \leq r(U) + r(W)$, usw. vgl. Aigner [1].

5 Tangentialräume

Hilfssatz 34. Für $p, q \in P$, $p \neq q$ ist $\Delta(p) = \Delta(q)$ genau dann, wenn (pq) eine affine Gerade ist.

Beweis. (i) Ist $p \Delta q$, so ist $p \notin \Delta(p)$ und $q \notin \Delta(q)$, dagegen $p \in \Delta(q)$ und $q \in \Delta(p)$.

(ii) Ist (pq) eine projektive Gerade, so gibt es genau eine weitere projektive Gerade (pr) durch p , so dass die Ebene (pqr) das Geradenpaar $(pq) \cup (pr)$ ist. Dann ist aber $q \Delta x$ für alle $p \neq x \in (pr)$. Es folgt $\tilde{p} \neq \tilde{q}$, mithin $\Delta(p) \neq \Delta(q)$.

(iii) Nun sei (pq) eine affine Gerade. Mit Folgerung 31 folgt sofort $\tilde{p} = \tilde{q}$ bzw. $\Delta(p) = \Delta(q)$. ■

Der Verband $L(\Sigma)$ der Unterräume wird durch ideale Elemente (die Tangentialräume) so ergänzt, dass ein lokal projektiver atomarer halbmodularer Verband entsteht.

Für $p \in P$ sei Σ/p die Menge aller Unterräume X mit $p \in X \setminus S(X)$. Auf Σ/p wird eine Äquivalenzrelation \parallel_p wie folgt erklärt:

$$X \parallel_p Y \Leftrightarrow \text{in } \Sigma_p \text{ ist } X_p \parallel Y_p.$$

Wir sagen dann, X und Y berühren sich in p (längs $\tilde{p}X = \tilde{p}Y$).

Für $U \in \Sigma/p$ ist $T_p(U) = \{X \in \Sigma/p : U_p \parallel X\}$. Wir nennen $T_p(U)$ *Berührbündel* und auch *Tangentialraum*. Es wird gesetzt

$$rT_p(U) = rU - 1.$$

In Σ_p wird $T_p(U)$ zu einer Parallelklasse affiner Unterräume, und alle solchen Parallelklassen werden so erhalten. Die zugehörige Ordnungsrelation \leq wird in Σ_p in bekannter Weise erklärt, so dass damit in Σ_p eine projektive Geometrie entsteht: $T_p(U)$ ist der Fernraum von U usw. Für einen Unterraum Z von Σ wird festgesetzt $Z \leq T_p(U)$ genau dann, wenn $Z \subseteq \tilde{p}(U)$ gilt. Deshalb wird $\tilde{p}(U)$ auch der *Träger* von $T_p(U)$ genannt.

Ist schon $r\tilde{p}(U) = rU - 1$, so wird $T_p(U)$ durch seinen Träger $\tilde{p}(U)$ dargestellt, denn dann ist $T_p(U) = \{[\tilde{p}(U), x] : x \in \Delta(p)\}$. Ist umgekehrt W ein Unterraum von Σ und $p \in S(W)$, $U = [W, q]$ für ein $q \Delta p$, so stellt W den Tangentialraum $T_p(U)$ dar. Im Falle $r\tilde{p}(U) = rU - 1$ ist die Ordnungsrelation von $T_p(U)$ durch die seines Trägers $\tilde{p}(U)$ bestimmt. Die Halbordnung $(\tilde{L}(\Sigma), \leq)$, deren Elemente aus den Unterräumen zusammen mit den Tangentialräumen bestehen, lässt sich zu einem vollständigen Verband machen:

Für eine Menge \mathfrak{M} von Unterräumen lässt sich die größte untere Schranke $\wedge \mathfrak{M}$ auf Durchschnitte von Mengen zurückführen, ebenso die kleinste obere Schranke $\vee \mathfrak{M}$ als größte untere Schranke der Menge der oberen Schranken von \mathfrak{M} . Für zwei Elemente X, Y von $\tilde{L}(\Sigma)$ verstehen sich die Ausdrücke $X \wedge Y$ bzw. $X \vee Y$ entsprechend.

Satz 35. Sei $U \in \Sigma/p \cap \Sigma/q$, $p \neq q$.

a) Ist $r\tilde{p}(U) = rU - 1$, so ist $T_p(U) = T_q(U)$ genau dann, wenn $\tilde{p}(U) = \tilde{q}(U)$ ist.

b) Ist $r\tilde{p}(U) < rU - 1$, so ist $T_p(U) = T_q(U)$ genau dann, wenn (pq) eine affine Gerade ist.

Beweis. a) ist trivial (aber nicht banal).

b) Jetzt impliziert $T_p(U) = T_q(U)$ bereits $\Delta(p) = \Delta(q)$ und damit nach Hilfssatz 34, dass (pq) eine affine Gerade ist. Sei also (pq) eine affine Gerade und damit $\Delta(p) = \Delta(q)$. Sei $U \in \Sigma/r$. Es ist $U \parallel X$ genau, falls $\tilde{r}(U) = \tilde{r}(X)$, und außerdem für $U \neq X$ noch $r(U \cup X) = rU + 1$ gilt. In unserem Falle ist aber $\tilde{p}(U) = \tilde{q}(U)$ und $\tilde{p}(X) = \tilde{q}(X)$, und die zweite Bedingung ist unabhängig von p bzw. q . ■

Bemerkung 36. Man kann schrittweise zu Unterräumen mit immer größerem Spitzenraum gelangen, bis man zum Schluss bei einem virtuellen Unterraum angelangt ist. (Natürlich, für $\tilde{p} = \{p\}$ ist das schon beim ersten Schritt der Fall!) Dazu sei U_0 ein sz Unterraum (z.B. $U_0 = P$). Hat man schon U_i konstruiert, und U_i ist nicht virtueller Raum, so wähle $p_i \in U_i \setminus S(U_i)$ und setze $U_{i+1} = \tilde{p}_i(U_i)$. Dann ist $S(U_i) \subseteq S(U_{i+1})$ und $p_i \in S(U_{i+1})$, also $rS(U_{i+1}) > rS(U_i)$.

Für Elemente X, Y von $\tilde{L}(\Sigma)$ bezeichne $X \triangleleft Y$ die Aussage: X ist unterer Nachbar von Y bzw. Y ist oberer Nachbar von X . Zum Beweis, dass $\tilde{L}(\Sigma)$ halbmodular ist, genügt es zu zeigen, dass für alle Elemente X, Y von $\tilde{L}(\Sigma)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & X \wedge Y \triangleleft X \text{ und } X \wedge Y \triangleleft Y & (1.6) \\
 & \text{impliziert} \\
 & X \triangleleft X \vee Y \text{ und } Y \triangleleft X \vee Y,
 \end{aligned}$$

(vgl. Szasz[16].)

Satz 37. *Der Verband $\tilde{L}(\Sigma)$ ist halbmodular.*

Beweis. Nachweis, dass (1.6) gilt.

1. X und Y sind Unterräume.

a) Auch $X \wedge Y$ ist ein Unterraum, also $X \wedge Y = X \cap Y$. Dann gilt (1.6) ohnehin, da $L(W)$ ein geometrischer Verband ist.

b) $X \wedge Y$ ist Tangentialraum. Dann gibt es $p \in P$, so dass $X, Y \in \Sigma/p$ ist und $X \parallel Y$ gilt. Dann ist aber $rX = rY$ und $r[X \cup Y] = rX + 1$, d. h. (1.6) ist erfüllt.

2. $X = T_p(U)$, $Y = T_p(W)$, o.B.d.A. $q \in U \cap W$ mit $q \triangleleft p$.

a) Ist $X \wedge Y$ ebenfalls Tangentialraum, so $X \wedge Y = T_p(U \cap W)$ und $X \vee Y = T_p([U \cup W])$. Wie unter 1a) gilt damit (1.6).

b) Ist $X \wedge Y$ Unterraum, so sind die Tangentialräume X und Y von ihren Trägern dargestellt. Siehe 3.

3. $X = T_p(U)$, $Y = T_q(W)$, $p \neq q$, (pq) keine affine Gerade.

Die Bedingung $X \wedge Y \triangleleft X, Y$ erzwingt, dass diese Tangentialräume von ihren Trägern dargestellt sind: $X = \tilde{p}(U)$, $Y = \tilde{q}(W)$, $X \wedge Y = X \cap Y$ und $Z = X \vee Y = [X \cup Y]$, also nach 1) $X, Y \triangleleft Z$.

a) Es gibt $r \in Z$ mit $p \triangleleft r \triangleleft q$, also $T_p(U) = T_p(Z)$ und $T_q(W) = T_q(Z)$. Es gilt aber $T_p(Z) \triangleleft Z$ und $T_q(Z) \triangleleft Z$, also ist (1) erfüllt.

b) $p \in S(Z)$, aber $r \in Z$ mit $r \triangleleft q$. Wie oben schließt man $T_q(W) = T_q(Z) \triangleleft Z$. Sei $s \triangleleft p$ und $V = [Z, s]$, d.h. Z ist Träger von $T_p(V)$. Dann wird $X \triangleleft Z$ gedeutet als $T_p(U) \triangleleft T_p(V)$.

c) $(pq) \in S(Z)$. Sei s gegeben mit $p \triangleleft s \triangleleft q$, $V = [Z, s]$. Dann wird $X, Y \triangleleft Z$ gedeutet als $T_p(U) \triangleleft T_p(V)$ und $T_q(W) \triangleleft T_q(V)$, denn nach Satz 35 ist $T_p(V) = \tilde{p}(V) = Z = \tilde{q}(V) = T_q(V)$.

4. $X = T_p(U)$ und Y ist Unterraum. $X \wedge Y \triangleleft X, Y$ erzwingt wieder, dass $T_p(U)$ durch seinen Träger dargestellt wird: $X = \tilde{p}(U)$. Dann ist wieder $X \wedge Y = \tilde{p}(U) \cap Y$ und $Z = X \vee Y = [\tilde{p}(U) \cup Y]$ und $X, Y \triangleleft Z$ ist erfüllt.

a) Es gibt $r \in Z$ mit $r \triangleleft p$. Dann ist wieder $T_p(U) = T_p(Z)$ und wir haben $T_p(Z) \triangleleft Z$.

b) $p \in S(Z)$. Wähle s mit $s \triangleleft p$ und setze $V = [Z, s]$. Dann ist Z Träger von $T_p(V)$ und wir haben $T_p(U) \triangleleft T_p(V)$. ■

Damit kann $\tilde{L}(\Sigma)$ dazu dienen, den projektiven Raum zu konstruieren, in den sich Σ einbetten lässt.

6 Die Einbettung

Mittels $\tilde{L}(\Sigma)$ wird nun der einbettende projektive Raum \mathcal{P} konstruiert. Und zwar sind die n -Räume von \mathcal{P} gegeben durch Bündel von $(n+1)$ -Räumen. Das sind maximale Mengen von $(n+1)$ -Räumen mit der Eigenschaft, dass für je zwei verschiedene X und Y von ihnen gilt $rX \vee Y = n+2$, vgl. Mäurer [12]. Durch jeden Punkt von Σ geht ein $(n+1)$ -Raum des Bündels. Sind X und Y wieder verschiedene $(n+1)$ -Räume des Bündels und ist z ein Punkt, der nicht in $X \vee Y$ liegt, so ist $Z = (X \vee z) \wedge (Y \vee z)$ der $(n+1)$ -Raum des Bündels durch z . Man sieht daraus: Das Bündel ist durch je zwei zugehörige $(n+1)$ -Räume X und Y bestimmt, und ist p ein Punkt von $X \wedge Y$, so ist p ein Punkt jedes $(n+1)$ -Raumes des Bündels. Dass überhaupt Bündel existieren, beruht auf dem Büschelsatz für Geraden, der sich beweisen läßt, da Σ einen Rang ≥ 5 hat.

Die Punkte werden durch Geradenbündel dargestellt. Ist \mathfrak{p} ein solches Geradenbündel und ist für verschiedene Geraden X und Y der Punkt p in beiden enthalten, also in jeder Geraden des Bündels, so schreiben wir $\mathfrak{p} = (p)$, denn es handelt sich um das Bündel aller Geraden durch p . Durch die Abbildung $p \rightarrow (p)$ wird Σ in \mathcal{P} eingebettet. Es sei \mathfrak{P} das Bild von \mathcal{P} , also $\mathfrak{P} = \{(p) : p \in \mathcal{P}\}$.

Von besonderem Interesse sind die *Spitzen*, gegeben durch die Parallelklassen affiner Geraden; alle affinen Geraden einer Parallelklasse bekommen so einen gemeinsamen Punkt, genannt *Spitze* oder *Spitzenpunkt* und sind damit zu projektiven Geraden geworden. Sei \mathfrak{A} das Bündel der maximalen affinen Unterräume von Σ . Der Unterraum \mathfrak{A} heißt *Spitzenraum*; seine Punkte sind die sämtlichen *Spitzen*.

Wir betrachten die Punktmenge $\Omega = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{P}$ und wollen zeigen, dass Ω eine quadratische Menge ist. Zur Definition vergleiche Buekenhout [3]: Eine Punktmenge $\tilde{\Omega}$ eines projektiven Raumes heißt quadratische Menge, wenn folgendes gilt: Jede Gerade, die $\tilde{\Omega}$ in genau zwei Punkten trifft, heißt Sekante. Jede Gerade, die $\tilde{\Omega}$ trifft, aber keine Sekante ist, trifft $\tilde{\Omega}$ in genau einem Punkt oder ist in $\tilde{\Omega}$ enthalten. Solche Geraden heißen *Tangenten*. Für jeden Punkt p von $\tilde{\Omega}$ füllen die Tangenten genau eine Hyperebene aus (dann heißt p *einfacher Punkt*), oder alle Geraden durch p sind Tangenten (dann heißt p *Doppelpunkt*).

Wir zeigen nun:

- a) Jede Gerade durch einen Spitzenpunkt ist eine Tangente,
- b) Zu jedem Punkt (p) von \mathfrak{P} gibt es eine Hyperebene, so dass alle Geraden durch (p) , die in dieser Hyperebene liegen, Tangenten sind, und alle anderen Geraden durch (p) sind Sekanten.

Dann ist damit Ω als quadratische Menge nachgewiesen, wobei \mathfrak{A} die Menge seiner Doppelpunkte und \mathfrak{P} die Menge seiner einfachen Punkte ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise identifizieren wir (p) mit p und betrachten die n -Räume von \mathcal{P} als Punktmenge.

- a) Sei A eine affine Gerade von Σ und $[A]$ die Parallelklasse von A , die wir als Spitzenpunkt in \mathfrak{A} untersuchen wollen. Eine Gerade durch $[A]$ ist ein Bündel von Ebenen, die sämtlich Parallele von A enthalten.

1. Fall. Je zwei dieser Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.

α) Alle Ebenen sind affine Ebenen. Dann handelt es sich um eine Gerade, die ganz in \mathfrak{A} liegt, also eine Tangente.

β) Das ist nicht der Fall. Dann sind alle Ebenen Paare von zu A parallelen affinen Geraden oder Tangentialebenen, die eine zu A parallele Gerade enthalten. Dann handelt es sich um eine Gerade, die mit Ω nur den Punkt $[A]$ gemeinsam hat, also eine Tangente.

2. Fall. Zwei verschiedene Ebenen haben einen Punkt gemeinsam. Dann haben sie bereits eine zu A parallele Gerade gemeinsam, o.B.d.A. sei dies A . Bei der Geraden handelt es sich dann um A , ergänzt um den Punkt $[A]$; also liegt diese Gerade ganz in Ω , ist also eine Tangente.

b) Sei $p \in \mathfrak{P}$. Es ist $T_p(P)$ eine Hyperebene. Die in $T_p(P)$ liegenden Geraden durch p sind Berührbündel von Ebenen durch p . Enthält ein solches Berührbündel Ketten, so hat die zugehörige Gerade mit Ω nur den Punkt p gemeinsam, ist also eine Tangente. Enthält das Berührbündel dagegen Ebenen, die eine Gerade gemeinsam haben, so ist diese die gesuchte Gerade; sie liegt ganz auf Ω (falls affine Gerade A , dann noch ergänzt um $[A]$), ist also Tangente.

Nun sei \mathfrak{B} ein Bündel von Ebenen durch p , das eine Gerade durch p darstellt, die nicht in $T_p(P)$ liegt. In Σ_p erscheinen diese Ebenen als Geraden, aus jeder Parallelklasse eine. Daher sind auch reelle Geraden dabei. Wir haben also zwei Ketten C und D , die einen 4-Raum aufspannen und sich in p treffen, d.h. C und D treffen sich intensiv. Da sie sich nicht berühren, müssen sie noch einen zweiten Schnittpunkt q besitzen. Dann besitzen alle Ebenen des Bündels die Punkte p und q gemeinsam, aber nicht mehr. Die zugehörige Gerade ist also Sekante von Ω .

Jeder Durchschnitt der quadratischen Menge $\tilde{\Omega}$ mit einem projektiven Unterraum ist wieder eine quadratische Menge. Wir betrachten nun die Geometrie der zulässigen ebenen Schnitte von $\tilde{\Omega}$. Dabei heißt eine Ebene E des zugehörigen projektiven Raumes *zulässig*, wenn E die quadratische Menge $\tilde{\Omega}$ in (wenigstens) drei Punkten aber in keiner Geraden schneidet. Hier genügt es die Menge \mathfrak{P} der einfachen Punkte von $\tilde{\Omega}$ zu betrachten, denn der Durchschnitt einer zulässigen Ebene mit $\tilde{\Omega}$ ist eine ebene quadratische Menge aus lauter einfachen Punkten, also ein Oval. Man sieht, dass \mathfrak{P} mit den sämtlichen so erhaltenen Ovalen als Ketten einen Kettenraum ergibt:

Zwei Punkte von \mathfrak{P} heißen *distant*, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen; die Ebene E durch drei paarweise distante Punkte X, Y, Z ist zulässig, denn ebene Schnitte von $\tilde{\Omega}$ die eine Gerade besitzen, sind diese Gerade oder ein Geradenpaar, haben also keine drei paarweise distante Punkte. Die durch X, Y, Z bestimmte Kette ist also der Durchschnitt von E mit $\tilde{\Omega}$, ein Oval.

Ist O ein Oval, $p \in O = \tilde{\Omega} \cap E$ und $q \in \tilde{\Omega}$, q distant zu p , so erhält man die Kette O' durch q , die O in p berührt, als Durchschnitt der Ebene E' mit $\tilde{\Omega}$. Dabei wird E' von q und der Tangenten T von O in p aufgespannt. Sicher ist E' zulässig, denn T ist auch Tangente der ebenen quadratischen Menge $\tilde{\Omega} \cap E'$ und ist nicht in $\tilde{\Omega}$ enthalten. Eine solche gäbe es nicht, wenn $\tilde{\Omega} \cap E'$ eine Gerade enthielte. Damit wird auch deutlich, dass jede Ebene durch T - außer der in der

Tangentialhyperebenen von p gelegenen - zulässig ist. Also ist das Residuum in p ein partieller affiner Raum. Schließlich sei noch bemerkt, dass die Schnitte von projektiven 4-Räumen mit $\tilde{\Omega}$, die eine Kette und einen weiteren Punkt enthalten, nur die drei Arten Ovoid, Kegel über einem Oval und hyperbolische Quadrik ergeben, deren Geometrie der zulässigen ebenen Schnitte die Möbius-, Laguerre- und Minkowski Ebene sind. Es ist \mathfrak{P} genau dann stark zusammenhängend, wenn $\tilde{\mathfrak{P}}$ nicht in der Vereinigung zweier Hyperebenen (des umgebenden projektiven Raumes) enthalten ist. Denn für $p \in \mathfrak{P}$ liegen die zu p adjazenten Punkte in der Tangentialhyperebene an p .

Wir haben nun zu zeigen, dass Σ die Geometrie der zulässigen ebenen Schnitte von \mathfrak{P} ist: Wenn wir auf \mathfrak{P} Punkte distant nennen, die nicht auf einer Geraden liegen, bekommen wir den ursprünglichen Begriff von "distant" wieder zurück. Seien nun $x, y, z \in \mathfrak{P}$, paarweise distant, sei E die von x, y, z aufgespannte Ebene in \mathcal{P} . Dann ist E gegeben durch das Bündel der 4-Räume von Σ , die x, y, z enthalten, und diesen 4-Räumen ist die Kette (xyz) gemeinsam, aber nicht mehr, d.h. (xyz) ist der genaue Durchschnitt von E mit \mathfrak{P} .

Bemerkung 38. *Allgemeiner gilt: Ist U ein n -Raum von Σ und $\langle U \rangle$ der von U in \mathcal{P} aufgespannte Unterraum, so ist $\langle U \rangle$ ein n -Raum in \mathcal{P} und $\langle U \rangle \cap \mathfrak{P} = U$. Dazu betrachtet man das Bündel der $(n + 1)$ -Räume von Σ , die U enthalten.*

Dass die Berührrelation ρ_p in der zuvor beschriebenen Weise auf dem Teil \mathfrak{P} der quadratischen Menge Ω wiedergefunden wird, sei nun dem Leser als Übung überlassen. Man kann auch die "Geometrie der ebenen Schnitte" von \mathfrak{P} betrachten (vgl. [2]) und bekommt so alle möglichen Ebenen von Σ (auch die Träger von Tangentialebenen) wieder zurück.

Zum Abschluss sei erwähnt, dass aus Buekenhout [3], Théorème 3 folgt: Enthält Σ projektive Geraden, so ist Ω eine Quadrik. Nach [2], Kapitel 5 ist dann Σ isomorph zu $\Sigma(K, R, J)$ für geeigneten (kommutativen) Körper K sowie K -Algebra R und Jordansystem J von R , also eine Kettengeometrie, in besonderen Fällen auch in der einfacheren Form $\Sigma(K, R)$ für kinematische Algebra R .

Literatur

- [1] Aigner, M.: Kombinatorik, II. Matroide und Transversaltheorie, Berlin Heidelberg New York, Springer 1976.
- [2] Blunck, A. und Herzer, A.: Kettengeometrien, Shaker Verlag, Aachen, 2005.
- [3] Buekenhout, F.: Ensembles quadratiques des espaces projectifs, Math. Z. 110, 306-318 (1969).
- [4] Buekenhout, F.: Inversions in locally affine circular spaces I, Math. Z. 119 189-202 (1971).
- [5] Buekenhout, F.: Inversions in locally affine circular spaces II, Math. Z. 120 165-177 (1971).

- [6] Buekenhout, F.: An axiomatic of inversive spaces, *J. Combin. Theory* 11 (3), 208-212 (1971)
- [7] Buekenhout, F. and Shult, E.: On the foundation of Polar Geometry, *Geom. Dedic.* 3, 155-170 (1974)
- [8] Delandtsheer, A.: Dimensional linear spaces, In: F. Buekenhout Editor, *Handbook of Incidence Geometries*, Reidel 1995.
- [9] Heise, W.: Eine Definition des Möbiusraumes, *Manuskripta Math.* 2, 39-47 (1970).
- [10] Herzer, A.: Chain Geometries, In: F. Buekenhout Editor, *Handbook of Incidence Geometries*, Reidel (1995).
- [11] Karzel, H. und Piper, I.: Bericht über geschlitzte Inzidenzgruppen, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* 72, 70-114 (1970).
- [12] Mäurer, H.: Ein axiomatischer Aufbau der mindestens 3-dimensionalen Möbius-Geometrie, *Math. Z.* 103, 282-305 (1968).
- [13] Meuren, S.: Projektive und affine Einbettung partieller linearer Räume, *Dissertation*, Gießen 1996.
- [14] Schaffrath, Th.: Eine Charakterisierung starker miquelscher Kettenräume *Dissertation*, Universität Mainz, 1997.
- [15] Schultze, K.-P.: Die Geometrie der ebenen Schnitte quadratischer Mengen, *J. Geom.* 7/1, 43-52 (1976).
- [16] Szász, G.: *Einführung in die Verbandstheorie*, Leipzig Teubner 1962.
- [17] Veldkamp, F. D.: Polar Geometry I-IV, *Indag. Math.* 21, 512-551 (1959).

Eskişehir Osmangazi University,
26480-Eskişehir, Turkey
mozcan@ogu.edu.tr

Im Gries 13, 78351 Bodman-Ludwigshafen,
Deutschland
herzer.bodman@t-online.de