

Rationalité du quotient d'une variété de Severi-Brauer par un automorphisme de Kummer

Philippe Gille

Résumé

Soit S/k une variété de Severi-Brauer définie sur un corps k . Soit f un automorphisme de Kummer de S , c'est-à-dire un automorphisme d'ordre $n = \dim_k(S) + 1$ à points fixes isolés. Si k contient une racine primitive n -ième de l'unité, alors le corps $k(S)^f$ des fonctions rationnelles de S invariantes par f est transcendant pur sur k .

Abstract

Let S/k be a Severi-Brauer variety defined over a field k . Let f be a Kummer automorphism of S , i.e. an automorphism of order $n = \dim_k(S) + 1$ with finitely many fixed points. If k contains a primitive n -th root of unity, then the field $k(S)^f$ of f -invariant rational functions is purely transcendental over k .

1 Introduction

Soient k un corps, A/k une algèbre simple centrale de degré n . Suivant Rost [1], on dit qu'un élément X de A est un élément de Kummer si son polynôme caractéristique P_X est de la forme $P_X(t) = t^n - a$. On note $S = SB(A)/k$ la variété

Received by the editors May 2004.

Communicated by M. Van den Berghe.

1991 *Mathematics Subject Classification* : 12E15, 16K20.

Key words and phrases : Severi-Brauer varieties, Galois cohomology, central simple algebras.

de Severi-Brauer associée; c'est la variété des idéaux à droite de rang n de A . On note $\mathrm{GL}(A)/k$ le groupe algébrique des éléments inversibles de A et $\mathrm{PGL}(A) = \mathrm{GL}(A)/\mathbf{G}_m$ son groupe adjoint. La variété S/k est un espace homogène sous $\mathrm{PGL}(A)$ et par descente galoisienne, on sait que $\mathrm{Aut}_k(S) = \mathrm{PGL}(A)$. Un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}_k(S)(k) = A^\times/k^\times$ représenté par $X \in A^\times$ est dit de Kummer si l'élément X est de Kummer. De façon intrinsèque, un automorphisme f de S est de Kummer si et seulement s'il est d'ordre n et si sa sous-variété des points fixes est de dimension zéro. Cette article a pour but d'établir la

Proposition 1.1. *On suppose que k contient une racine primitive n -ième de l'unité ζ . Soit f un automorphisme de Kummer de $S = SB(A)$. Alors le corps $k(S)^f$ des fonctions rationnelles de S invariantes par f est transcendant pur sur k .*

Notons que l'existence d'un automorphisme de Kummer sur S implique que A/k est une algèbre cyclique ([1], §1). Si $n = 2$, la proposition est évidente. En effet, dans ce cas, un couple (S, f) est une conique projective d'équation $x^2 - ay^2 = bz^2$ où $f(x : y : z) = (x : -y : z)$. Alors le corps $k(S)^f = k(x/z)$ est transcendant pur sur k .

La démonstration procède par réduction au cas d'une algèbre déployée.

Remerciements : Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Christophe Soulé pour leurs commentaires bienvenus sur une version préliminaire de cet article.

Notations. Pour tout k -espace vectoriel V , on note $\mathbf{P}(V)/k$ l'espace projectif associé; en particulier, on note $\mathbf{P}_k^{n-1} = \mathbf{P}(k^n) = (\mathbf{A}_k^n \setminus \{0\})/\mathbf{G}_m$ l'espace projectif standard. Pour toute algèbre étale K/k , on note $R_{K/k}(\mathbf{G}_m)$ la restriction des scalaires à la Weil de K/k du tore standard \mathbf{G}_m , $N_{K/k} : R_{K/k}(\mathbf{G}_m) \rightarrow \mathbf{G}_m$ le morphisme de norme et $R_{K/k}^1(\mathbf{G}_m)$ son noyau. De plus, tout k -automorphisme σ de K définit un automorphisme $\sigma^* : R_{K/k}(\mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} R_{K/k}(\mathbf{G}_m)$ commutant à la norme.

2 Descente

Pour $a \in k^\times$, on note f_a l'automorphisme d'ordre n de k^n défini par

$$f_a(e_i) = e_{i+1} \quad (i = 0, \dots, n-2), \quad f_a(e_{n-1}) = a e_1,$$

et $f_a : \mathbf{P}_k^{n-1} \rightarrow \mathbf{P}_k^{n-1}$ l'automorphisme induit.

Lemme 2.1. *Soit $f = (Y)$ un élément de Kummer de A avec $Y^n = a \in k^\times$. Alors le corps $k(S)^f$ est k -isomorphe à $k(\mathbf{P}^{n-1})^{f_a}$.*

Démonstration. Suivant la section 1 de [1], il existe un élément de Kummer X de A tel que (X, Y) est une ζ -paire, i.e $XY = \zeta YX$. On pose $b = X^n \in k^\times$ et alors la k -algèbre A a la présentation

$$X^n = b, \quad Y^n = a, \quad XY = \zeta YX.$$

On pose $k_b = k(\sqrt[n]{b})/k$, c'est une extension galoisienne cyclique d'ordre m divisant n . On note τ le générateur de $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(k_b/k)$ satisfaisant $\tau.\sqrt[n]{b} = (\zeta)^{n/m}\sqrt[n]{b}$. L'extension

k_b/k déploie l'algèbre A et de façon plus précise, on considère l'isomorphisme de k_b -algèbres

$$\begin{array}{ccc} M_n \otimes_k k_b & \xrightarrow{\sim \phi} & A \otimes_k k_b, \\ X_0 \otimes \sqrt[n]{b} & \mapsto & X \\ \tilde{f}_a & \mapsto & Y \end{array}$$

où X_0 désigne l'endomorphisme de k^n défini par $X_0.e_i = \zeta^i e_i$ ($i = 0, \dots, n-1$). On calcule alors le 1-cocycle associé $z : \mathcal{G}\text{-}\downarrow(k_b/k) \rightarrow \text{PGL}_n(k_b)$ suivant la technique des k_b/k -formes ([2], §III.1). Il est défini par $z_\tau = \phi^{-1} \tau \phi$ où $\tau \phi = (id \otimes \tau) \circ \phi \circ (id \otimes \tau)^{-1}$. On effectue le calcul

$$\begin{aligned} \tau \phi \left(X_0 \otimes \sqrt[n]{b} \right) &= \zeta^{-n/m} \left((id \otimes \tau) \circ \phi \right) \cdot \left(X_0 \otimes \sqrt[n]{b} \right) \\ &= \zeta^{-n/m} (id \otimes \tau) \cdot X \\ &= \zeta^{-n/m} X \\ &= \zeta^{-n/m} \phi \left(X_0 \otimes \sqrt[n]{b} \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$(\phi^{-1} \tau \phi) \cdot \left(X_0 \otimes \sqrt[n]{b} \right) = \zeta^{-n/m} \left(X_0 \otimes \sqrt[n]{b} \right) = f_a^{n/m} \cdot \left(X_0 \otimes \sqrt[n]{b} \right).$$

On remarque que $\tau \phi(\tilde{f}_a) = Y = \phi(\tilde{f}_a)$ donc $(\phi^{-1} \tau \phi)(\tilde{f}_a) = \tilde{f}_a = f_a^{n/m} \cdot \tilde{f}_a$; on conclut que $z_\tau = \phi^{-1} \tau \phi = f_a^{n/m}$. Par descente galoisienne, on a $A = {}_z(M_n)$, $S = {}_z(\mathbf{P}^{n-1})$ et le corps $k(S)$ est le corps des points fixes de $k_b(\mathbf{P})$ suivant l'action tordue de $\mathcal{G}\text{-}\downarrow(k_b/k)$ par le cocycle z , c'est-à-dire

$$k(S) = \{ g \in k_b(\mathbf{P}^{n-1}) \mid (f_a^{n/m})^* \cdot \tau g = g \}.$$

De plus, l'automorphisme f de $k(S)$ est le "descendu" de l'automorphisme f_a de \mathbf{P}^{n-1} , i.e $f = \phi f_a \phi^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} k(S)^f &= \{ g \in k_b(\mathbf{P}^{n-1}) \mid (f_a^{n/m})^* \cdot \tau g = g \}^{f_a} \\ &= \{ g \in k_b(\mathbf{P}^{n-1})^{f_a} \mid \tau g = g \} = k(\mathbf{P}^{n-1})^{f_a}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 Le cas déployé.

Lemme 3.1. *Le corps $k(\mathbf{P}^{n-1})^{f_a}$ est transcendant pur sur k .*

Notons tout d'abord que ce lemme joint au lemme précédent 2.1 entraîne immédiatement la proposition 1.1.

Démonstration. On note $L = k[x]/(x^n - a)$ et $\sqrt[n]{a}$ l'image de x dans L . La k -base $1, \sqrt[n]{a}, \dots, (\sqrt[n]{a})^{n-1}$ de L définit un isomorphisme de k -espace vectoriel

$$(k)^n \xrightarrow{\sim} L,$$

de sorte que $f_a = \times \sqrt[n]{a}$. On note σ le k -automorphisme de L défini par $\sigma.\sqrt[n]{a} = \zeta \sqrt[n]{a}$. On dispose alors d'un ouvert f_a -stable de \mathbf{P}^{n-1}

$$T = R_{L/k}(\mathbf{G}_m)/\mathbf{G}_m \subset \mathbf{P}(L) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{n-1}$$

qui est un k -tore algébrique. L'isomorphisme $(1 - \sigma) : T \xrightarrow{\sim} R_{L/k}^1(\mathbf{G}_m)$ transforme l'action de $f_a = \times \sqrt[n]{a}$ sur T en la multiplication par $(1 - \sigma)\sqrt[n]{a} = \zeta^{-1} \in R_{L/k}^1(\mathbf{G}_m)(k)$. Ainsi le sous-groupe $\langle f_a \rangle$ de T engendré par f_a s'identifie au sous-groupe diagonal $\mu_n \hookrightarrow R_{L/k}^1(\mathbf{G}_m)$. On forme alors le diagramme commutatif exact de k -tores algébriques

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & \mu_n & \xrightarrow{i} & R_{L/k}^1(\mathbf{G}_m) & \rightarrow & T/\langle f_a \rangle \rightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ 1 & \rightarrow & \mathbf{G}_m & \rightarrow & R_{L/k}(\mathbf{G}_m) & \rightarrow & R_{L/k}(\mathbf{G}_m)/\mathbf{G}_m \rightarrow 1. \\ & & \times n \downarrow & & N_{L/k} \downarrow & & \\ & & \mathbf{G}_m & = & \mathbf{G}_m & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Il résulte que le k -tore $T/\langle f_a \rangle$ est un ouvert de l'espace projectif $\mathbf{P}(L)$. On conclut que $T/\langle f_a \rangle$ est une variété k -rationnelle et le corps $k(T)^{f_a} = k(\mathbf{P}^{n-1})^{f_a}$ est transcendant pur sur k . ■

Références

- [1] M. Rost, *The chain lemma for Kummer elements of degree 3*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 185–190.
- [2] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5**, 5-ième édition (1994), Springer-Verlag.

UMR 8628 du C.N.R.S., Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay, France.
Courriel : gille@math.u-psud.fr.