Vecteurs Gevrey d'opérateurs différentiels quasihomogènes

Chikh Bouzar Rachid Chaïli

Abstract

We show that every Gevrey vector of certain systems of quasihomogenous linear partial differential operators is a function of Gevrey class if and only if these systems are quasielliptic.

1 Introduction

Dans ce travail nous montrons que la quasiellipticité est une condition nécessaire et suffisante pour que la propriété des itérés ait lieu pour des systèmes d'opérateurs différentiels quasihomogènes. Les résultats obtenus sont des extensions des résultats de Nelson [5], Kotake-Narasimhan [3], Métivier [4], Bolley-Camus [1] et Zanghirati [7] et [8]. Une synthèse du problème des itérés est donnée par Bolley-Camus-Rodino dans [2].

Soit Ω un ouvert de R^n, et soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \in Z_+^n$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdot\cdot + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \circ D_2^{\alpha_2} \circ \cdot\cdot \circ D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Soit $(m_1, .., m_n) \in Z_+^n, m_j \geq 1, 1 \leq j \leq n$, on pose $m = \max\{m_j\}$, $q_j = \frac{m}{m_j}$, $q = (q_1, .., q_n)$, et on note $< \alpha, q >= \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j q_j$ et $(\alpha!)^q = (\alpha_1!)^{q_1} \cdot\cdot (\alpha_n!)^{q_n}$. Si $\alpha \in Z_+^n$ et $\beta \in Z_+^n$, on note $\binom{\alpha}{\beta} = \prod\limits_{j=1}^{n} \binom{\alpha_j}{\beta_j}$.

Soient $(P_j(x, D))_{j=1}^N$ des opérateurs différentiels $q-$quasihomogènes d'ordre m à coefficients C^∞ dans Ω , i.e.

$$P_j(x, D) = \sum_{<\alpha,q>\leq m} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$$

Received by the editors January 1999.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification* : 35A,35B,35H.
Key words and phrases : Gevrey vectors. Gevrey spaces. Quasielliptic systems.

On définit le symbole quasiprincipal de l'opérateur $P_j(x,D)$ par

$$P_{jm}(x,\xi) = \sum_{<\alpha,q>=m} a_{j\alpha}(x)\,\xi^\alpha$$

Définition 1.1. Soit s un nombre réel positif, $s \geq 1$, l'espace des vecteurs Gevrey du système $(P_j(x,D))_{j=1}^N$ dans Ω, noté $G^s\left(\Omega, (P_j)_{j=1}^N\right)$, est l'espace des fonction $u \in C^\infty(\Omega)$ telles que

$$\forall H \text{ compact de } \Omega,\ \exists C > 0,\ \forall k \in Z_+, \quad \|P_{i_0}..P_{i_l}..P_{i_k}u\|_{L^2(H)} \leq C^{k+1}(km!)^s \quad (1.1)$$

où P_{i_0} désigne l'opérateur identité, $1 \leq i_l \leq N$, $l \leq k$.

Définition 1.2. Soient $l = (l_1,..,l_n) \in R_+^n$ et $s \geq 1$, on appelle espace de Gevrey anisotrope dans Ω, qu'on note $G^{sl}(\Omega)$, l'espace des fonctions $u \in C^\infty(\Omega)$ telles que

$$\forall H \text{ compact de } \Omega,\ \exists C > 0,\ \forall \alpha \in Z_+^n, \quad \|D^\alpha u\|_{L^2(H)} \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^{sl} \quad (1.2)$$

Si $l_j = 1, j = 1,..,n$, on obtient la définition classique des espaces de Gevrey isotrope $G^s(\Omega)$. L'espace des fonctions analytiques réelles dans Ω, noté $\mathcal{A}(\Omega)$, coïncide avec $G^1(\Omega)$.

Remarques :

1. Grâce à la formule de Stirling on peut remplacer dans (1.2) le terme $(\alpha!)^l$ par $\Gamma(<\alpha, l> +1)$, où Γ est la fonction gamma d'Euler.

2. D'après le théorème d'injection de Sobolev on peut remplacer dans (1.2) la norme $\|\|_{L^2(H)}$ par la norme $\|\|_{L^\infty(H)}$.

Définition 1.3. Le système $(P_j)_{j=1}^N$ est dit $q-$quasielliptique dans Ω si pour tout $x_0 \in \Omega$ on a

$$\sum_{j=1}^N |P_{jm}(x_0,\xi)| \neq 0, \quad \forall \xi \in R^n \backslash \{0\} \quad (1.3)$$

Si $q_j = 1, j = 1,..,n$, on obtient la définition classique d'un système elliptique.

2 Lemmes préliminaires

Les définitions et résultats de ce paragraphe sont dans [7] .

On pose $\mathcal{K} = \left\{k =< \alpha, q >, \alpha \in Z_+^n\right\}$, et on définit pour tout $u \in C^\infty(\Omega)$ et $k \in \mathcal{K}$

$$|u|_{k,\Omega} = \sum_{<\alpha,q>=k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}$$

Si $\rho > 0$, on pose $B_\rho = \left\{x \in R^n,\ \left(\sum_{j=1}^n (x_j)^{2/q_j}\right)^{1/2} < \rho\right\}$.

Lemme 2.1. Si $k = pm + r < pm + jm$, avec $r \in \mathcal{K}$, $p \in Z_+$ et $j \in Z_+^*$, alors $\exists c(j) > 0$, $\forall B_\rho \subset \Omega$, $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $\forall u \in C^\infty(\Omega)$

$$|u|_{k,B_\rho} \leq \varepsilon\,|u|_{(p+j)m,B_\rho} + c(j)\varepsilon^{-\frac{r}{jm-r}}\,|u|_{pm,B_\rho} \quad (2.1)$$

Lemme 2.2. Soit $k \in \mathcal{K}$, alors il existe $h \in Z_+$ et $r \in \mathcal{K}$ tels que

$$k = hm + r, \quad \textit{avec } r \leq nm - n$$

Nous rappelons des propriétés de la fonction gamma d'Euler.
La formule de Stirling

$$\Gamma(a+1) = \sqrt{2\pi} a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a} e^{\theta/12a}, \quad a > 0,\ 0 < \theta < 1 \tag{2.2}$$

La propriété de récurrence

$$\Gamma(a+p) = \Gamma(a)\, a\,(a+1)\cdot\cdot(a+p-1), \quad a > 0,\ p \in Z_+^* \tag{2.3}$$

Les propriétés suivantes sont dans [7] et [8].
$\forall p \in Z_+$, $\forall j \in Z_+^*$, $\forall m \in Z_+^*$, $\forall r \in \mathcal{K}$, $0 \leq r \leq jm-1$, $\exists C(j,m) > 0$,

$$\left(\frac{\Gamma(pm+jm+1)}{\Gamma(pm+r+1)}\right)^{r/(jm-r)} \leq C(j,m)\left(\frac{\Gamma(pm+r+1)}{\Gamma(pm+1)}\right) \tag{2.4}$$

$\forall \lambda > 0$, $\forall \mu > 0$, $\forall a \geq 1$, $\forall b \geq 1$,$\forall c \geq 1, \forall \sigma \geq 1$,

$$\lambda^a \Gamma(b+c+1)^\sigma \mu^c \leq 2^\sigma \left[\lambda^{a+c}\Gamma(b+1)^\sigma + \Gamma(a+b+c+1)^\sigma \mu^{a+c}\right] \tag{2.5}$$

$\exists C > 0$, $\forall \gamma \in Z_+^n$, $\forall \beta \in Z_+^n$,

$$\frac{\gamma!}{\beta!(\gamma-\beta)!} \leq C^{<\gamma-\beta,q>} \frac{\Gamma(<\gamma,q>+1)}{\Gamma(<\beta,q>+1)\Gamma(<\gamma-\beta,q>+1)} \tag{2.6}$$

Le lemme suivant est une adaptation aux systèmes du lemme analogue de [7].

Lemme 2.3. Soit $(P_j(x,D))_{j=1}^N$ un système $q-$ quasielliptique d'opérateurs différentiels à coefficients dans $G^{sq}(\Omega)$, si $\omega \subset \Omega$ est un ouvert suffisamment petit contenant l'origine, alors pour un $C_1 > 0, \forall \varepsilon \in]0,1[, \exists C_2(\varepsilon) > 0$,$\forall \rho > 0, \forall \delta \in]0,1[$, vérifiant $\overline{B}_{\rho+\delta} \subset \omega$, $\forall u \in C^\infty(\omega)$, $\forall p \in Z_+^*$ on a

$$\begin{aligned} |u|_{(p+1)m,B_\rho} \leq\ & C_1 \left(\sum_{j=1}^N |P_j u|_{pm,B_{\rho+\delta}} + (\varepsilon\delta)^{-m}|u|_{pm,B_{\rho+\delta}} + \varepsilon |u|_{(p+1)m,B_{\rho+\delta}}\right. \\ & \left. + \sum_{h=0}^p \frac{[(p+1)m]!^s}{(hm)!^s} C_2(\varepsilon)^{(p+1-h)m} |u|_{hm,B_{\rho+\delta}}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Et

$$|u|_{m,B_\rho} \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^N |P_j u|_{0,B_{\rho+\delta}} + (\varepsilon\delta)^{-m}|u|_{0,B_{\rho+\delta}} + \varepsilon |u|_{m,B_{\rho+\delta}}\right) \tag{2.8}$$

3 Théorème des itérés quasielliptiques

Soient $\lambda > 0$ et $R > 0$, pour tout $p \in Z_+$, on pose

$$\sigma_p(u,\lambda,R) = (pm)!^{-s}\lambda^{-p}\sup_{R/2\leq\rho<R}(R-\rho)^{pm}|u|_{pm,B_\rho}$$

On note, pour simplifier, $\sigma_p(u,\lambda,R)$ par $\sigma_p(u,\lambda)$.

Lemme 3.1. Soit ω comme dans le lemme 2.3 et soit $0 < R < 1$ tel que $\overline{B}_R \subset \omega$, alors

$\exists\lambda_0 > 0$ (dépendant seulement de $(P_j)_{j=1}^N$ et de R), $\forall\lambda \geq \lambda_0$, $\forall p \in Z_+$, $\forall u \in C^\infty(\omega)$

$$\sigma_{p+1}(u,\lambda) \leq [(pm+1)\cdots(pm+m)]^{-s}\sum_{j=1}^N \sigma_p(P_j u,\lambda) + \sum_{h=0}^p \sigma_h(u,\lambda) \tag{3.1}$$

Démonstration. Démontrons ce lemme tout d'abord pour $p \geq 1$. Pour tout $\rho \in [R/2, R[$ on prend $\delta = \frac{R-\rho}{p+1}$, on a alors $\rho+\delta \in [R/2, R]$ et $\left(\frac{R-\rho}{R-\rho-\delta}\right)^{pm} < e^m$.

En multipliant les deux membres de (2.7) par $[(p+1)m]!^{-s}\lambda^{-p-1}(R-\rho)^{(p+1)m}$ et en passant au sup sur $\rho \in [R/2, R[$, on obtient

$$\sigma_{p+1}(u,\lambda) \leq \sup_{R/2\leq\rho<R} C_1\left(I_1 + \varepsilon^{-m}I_2 + \varepsilon I_3 + I_4\right) \quad , \tag{3.2}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(R-\rho)^{(p+1)m}}{[(p+1)m]!^s}\lambda^{-p-1}\sum_{j=1}^N |P_j u|_{pm,B_{\rho+\delta}} \\ &\leq \frac{e^m}{\lambda}\frac{(pm)!^s}{[(p+1)m]!^s}\sum_{j=1}^N \sigma_p(P_j u,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(R-\rho)^{(p+1)m}}{[(p+1)m]!^s}\lambda^{-p-1}\delta^{-m}|u|_{pm,B_{\rho+\delta}} \\ &\leq \frac{e^m}{\lambda}\sigma_p(u,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{(R-\rho)^{(p+1)m}}{[(p+1)m]!^s}\lambda^{-p-1}|u|_{(p+1)m,B_{\rho+\delta}} \\ &\leq (2e)^m\sigma_{p+1}(u,\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{(R-\rho)^{(p+1)m}}{[(p+1)m]!^s}\lambda^{-p-1}\sum_{h=0}^p \frac{[(p+1)m]!^s}{(hm)!^s}C_2(\varepsilon)^{(p+1-h)m}|u|_{hm,B_{\rho+\delta}} \\ &\leq \frac{e^m C_2(\varepsilon)^m}{\lambda}\sum_{h=0}^p\left(\frac{C_2(\varepsilon)^m}{\lambda}\right)^{p-h}\sigma_h(u,\lambda) \end{aligned}$$

Prenons $\varepsilon = \left[2C_1 (2e)^m\right]^{-1}$ dans (3.2), alors on trouve

$$\begin{aligned}\sigma_{p+1}(u,\lambda) \quad &\leq \quad \frac{C_3}{\lambda}\left((pm+1)\cdots(pm+m)\right)^{-s}\sum_{j=1}^{N}\sigma_p\left(P_j u,\lambda\right) \\ &\quad + \frac{C_4}{\lambda}\sigma_p(u,\lambda) + \frac{C_5}{\lambda}\sum_{h=0}^{p}\left(\frac{C_5}{\lambda}\right)^{p-h}\sigma_h(u,\lambda) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Si on prend $\lambda_0 = C_3 + C_4 + C_5$, alors de (3.3) on obtient (3.1) avec $p \geq 1$.
Pour $p = 0$ on multiplie les deux membres de (2.8) par $\frac{(R-\rho)^m}{m!^s\lambda}$, et on prend $\delta = (R-\rho)/2$ et puis on passe au sup sur $\rho \in [R/2, R[$, alors on obtient

$$\sigma_1(u,\lambda) \leq \sup_{R/2\leq\rho<R} C_1\left(J_1 + \varepsilon^{-m}J_2 + \varepsilon J_3\right) \quad ,$$

où

$$J_1 = \frac{(R-\rho)^m}{m!^s}\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{N}\left|P_j u\right|_{0,B_{\rho+\delta}} \quad \leq \frac{1}{\lambda}\frac{1}{m!^s}\sum_{j=1}^{N}\sigma_0\left(P_j u,\lambda\right)$$

$$J_2 = \frac{(R-\rho)^m}{m!^s}\lambda^{-1}\delta^{-m}\left|u\right|_{0,B_{\rho+\delta}} \leq \frac{2^m}{\lambda}\sigma_0(u,\lambda)$$

$$J_3 = \frac{(R-\rho)^m}{m!^s}\lambda^{-1}\left|u\right|_{m,B_{\rho+\delta}} \leq 2^m\sigma_1(u,\lambda) \quad ,$$

si on choisit $\varepsilon = \left(2C_1 2^m\right)^{-1}$, on obtient

$$\sigma_1(u,\lambda) \leq \frac{C_1'}{\lambda}m!^{-s}\sum_{j=1}^{N}\sigma_0\left(P_j u,\lambda\right) + \frac{C_1''}{\lambda}\sigma_0(u,\lambda)$$

Il suffit de prendre $\lambda_0 = C_1' + C_2''$ pour avoir (3.1) avec $p = 0$. ∎

Lemme 3.2. Soient ω, R et λ_0 comme dans le lemme 3.1. Si $u \in C^\infty(\omega)$ et $\lambda \geq \lambda_0$, alors pour tout $p \in Z_+$

$$\sigma_{p+1}(u,\lambda) \leq 2^{p+1}\sigma_0(u,\lambda) + \sum_{l=1}^{p+1}2^{p+1-l}\binom{p+1}{l}\frac{1}{(ml)!^s}\sum_{\substack{1\leq j\leq l\\1\leq i_j\leq N}}\sigma_0\left(P_{i_1}\cdot\cdot P_{i_j}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda\right) \qquad (3.4)$$

Démonstration. Pour $p = 0$, (3.4) a lieu d'après (3.1). Supposons donc que l'estimation (3.4) a lieu à l'ordre p et vérifions qu'elle reste vraie à l'ordre $p+1$. D'après

(3.1) et de l'hypothèse de récurrence on obtient

$$\sigma_{p+2}(u,\lambda) \leq \left(\frac{[(p+1)m]!}{[(p+2)m]!}\right)^s \sum_{j=1}^{N} \sigma_{p+1}(P_j u,\lambda) + \sum_{h=0}^{p+1} \sigma_h(u,\lambda)$$

$$\leq \left(\frac{[(p+1)m]!}{[(p+2)m]!}\right)^s \sum_{j=1}^{N} 2^{p+1}\sigma_0(P_j u,\lambda)$$

$$+ \left(\frac{[(p+1)m]!}{[(p+2)m]!}\right)^s \sum_{l=2}^{p+2} 2^{p+2-l}\binom{p+1}{l-1} \times \frac{1}{[(l-1)m]!^s} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ 1\leq i_k\leq N}} \sigma_0(P_{i_1}\cdot\cdot P_{i_k}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda)$$

$$+\sum_{h=0}^{p} 2^{h+1}\sigma_0(u,\lambda)+\sigma_0(u,\lambda)+\sum_{h=0}^{p}\sum_{l=1}^{h+1} 2^{h+1-l}\binom{h+1}{l}\frac{1}{(ml)!^s} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ 1\leq i_k\leq N}} \sigma_0(P_{i_1}\cdot\cdot P_{i_k}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda)$$

Puisque $\frac{[(p+1)m]!}{[(p+2)m]!} \leq \frac{1}{m!}$ et $\frac{[(p+1)m]!}{[(p+2)m]![(l-1)m]!} \leq \frac{1}{(lm)!}$, alors

$$\sigma_{p+2}(u,\lambda) \leq \sum_{l=1}^{p+2} 2^{p+2-l}\binom{p+1}{l-1}\frac{1}{(lm)!^s} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ 1\leq i_k\leq N}} \sigma_0(P_{i_1}\cdot\cdot P_{i_k}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda)$$

$$+ 2^{p+2}\sigma_0(u,\lambda) + \sum_{l=1}^{p+1} 2^{p+2-l}\binom{p+1}{l}\frac{1}{(ml)!^s} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ 1\leq i_k\leq N}} \sigma_0(P_{i_1}\cdot\cdot P_{i_k}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda)$$

$$\leq 2^{p+2}\sigma_0(u,\lambda) + \sum_{l=1}^{p+2} 2^{p+2-l}\binom{p+2}{l}\frac{1}{(ml)!^s} \sum_{\substack{1\leq k\leq l \\ 1\leq i_k\leq N}} \sigma_0(P_{i_1}\cdot\cdot P_{i_k}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda)$$

■

Enfin nous donnons la démonstration du théorème principal de ce paragraphe.

Théorème 3.3. Soient Ω un ouvert de R^n et $s \geq 1$, et soit $(P_j)_{j=1}^N$ un système d'opérateurs différentiels q-quasihomogènes à coefficients dans $G^{sq}(\Omega)$, alors

$$(P_j)_{j=1}^N \ q-quasielliptique\ dans\ \Omega \Rightarrow G^s\left(\Omega,(P_j)_{j=1}^N\right) \subset G^{sq}(\Omega)$$

Démonstration. Soit $u \in G^s\left(\Omega,(P_j)_{j=1}^N\right)$, il s'agit de vérifier l'estimation (1.2) pour u au voisinage de chaque point de Ω. Soit $x \in \Omega$, par une translation de x à l'origine, il existe un voisinage de l'origine ω relativement compact pour lequel les lemmes précédents ont lieu. D'où il existe $C > 0$ tel que

$$\|P_{i_0}\cdot\cdot P_{i_l}u\|_{L^2(\omega)} \leq C^{l+1}(lm)!^s \tag{3.5}$$

Soit $R \in]0,1[$ tel que $B_R \subset \omega$, alors d'après (3.5)

$$\sigma_0(P_{i_0}\cdot\cdot P_{i_l}u,\lambda_0) \leq C^{l+1}(lm)!^s \quad ,$$

par conséquent de (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{p+1}(u,\lambda_0) &\leq 2^{p+1}C + \sum_{l=1}^{p+1} 2^{p+1-l}\binom{p+1}{l}N^l C^{l+1} \\ &\leq C(2+NC)^{p+1} \quad ,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}|u|_{(p+1)m,B_{R/2}} &\leq \lambda_0^{pm+m}[(p+1)m]!^s C'^{p+1} \\ &\leq C_1^{(p+1)m}[(p+1)m]!^s \qquad (3.6)\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2. pour tout $k \in \mathcal{K}$, il existe $h \in Z_+$ et $r \in \mathcal{K}$, $r \leq mn-n$, tels que $k = hm + r$, et de (2.1) ,on a pour tout $\varepsilon \in]0,1[$

$$\begin{aligned}|u|_{k,B_{R/2}} &\leq \varepsilon\, |u|_{(h+n)m,B_{R/2}} + C_n \varepsilon^{-\frac{r}{mn-r}} |u|_{hm,B_{R/2}} \\ &\leq \varepsilon C_1^{(h+n)m}\left[(h+n)\, m\right]!^s + C_n \varepsilon^{-\frac{r}{mn-r}} C_1^{hm} (hm)!^s\end{aligned}$$

Posons $\varepsilon = \frac{[\Gamma(hm+r+1)]^s}{[\Gamma(hm+nm+1)]^s}$, alors d'après (2.4) on obtient

$$\begin{aligned}|u|_{k,B_{R/2}} &\leq C_1^{(h+n)m}\left[\Gamma\left(hm+r+1\right)\right]^s + C_n \left(\frac{\left[\Gamma\left(hm+nm+1\right)\right]^s}{\left[\Gamma\left(hm+r+1\right)\right]^s}\right)^{\frac{r}{nm-r}} (hm)!^s C_1^{hm} \\ &\leq C_2^{k+1}\left[\Gamma\left(k+1\right)\right]^s\end{aligned}$$

D'après un théorème d'immersion (voir [7]) des espaces de Sobolev anisotropes

$\exists C_3 > 0$, $\exists m_0 \in Z_+$, $m_0 \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2m_j}$; $\forall \alpha \in Z_+^n$

$$\sup_{B_{R/2}} |D^\alpha u| \leq C_3 \left(|u|_{<\alpha,q>,B_{R/2}} + |u|_{<\alpha,q>+m_0 n,B_{R/2}}\right)$$

d'où

$$\sup_{B_{R/2}} |D^\alpha u| \leq C_3 C_2^{<\alpha,q>+1} \left(\left[\Gamma(<\alpha,q>+1)\right]^s + C_2^{m_0 n}\left[\Gamma(<\alpha,q>+m_0 n+1)\right]^s\right)$$

d'après (2.3), on obtient

$$\sup_{B_{R/2}} |D^\alpha u| \leq C_4^{<\alpha,q>+1}\left[\Gamma(<\alpha,q>+1)\right]^s \quad ,$$

ce qui montre que $u \in G^{sq}\left(B_{R/2}\right)$. ■

Remarque : L'inclusion $G^{sq}(\Omega) \subset G^{sq}\left(\Omega, (P_j)_{j=1}^N\right)$ est toujours vraie indépendamment de la quasiellipticité du système $(P_j)_{j=1}^N$.

Le théorème 3.3 donne un résultat de régularité des solutions de systèmes d'équations différentielles quasielliptiques dans les classes de Gevrey anisotropes.

Corollaire 3.4. Soit Ω un ouvert de R^n et soit $(P_j(x,D))_{j=1}^N$ un système q-quasielliptique d'opérateurs différentiels à coefficients dans $G^{sq}(\Omega)$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) $u \in G^{sq}(\Omega)$

ii) $u \in C^\infty(\Omega)$ et $P_j(x,D)u \in G^{sq}(\Omega)$, $\forall j = 1,..,N$.

Remarque : En utilisant le résultat d'hypoellipticité des opérateurs aux dérivées partielles linéaires q-quasielliptiques obtenu dans [6], on peut remplacer dans le corollaire 3.4. *ii)* $u \in C^\infty(\Omega)$ par $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, en considérant l'opérateur différentiel $\sum_{j=1}^{N} P_j^* P_j$ $q-$quasielliptique dans Ω.

4 Réciproque du théorème des itérés quasielliptiques

Dans ce paragraphe nous démontrons la réciproque du Théorème 3.3., i.e.

Théorème 4.1. Soit Ω un ouvert de R^n, et soient $P_j(x,D)$, $j=1,..,N$, des opérateurs différentiels $q-$quasihomogènes à coefficients dans $G^{\sigma q}(\Omega)$ et $s>\sigma\geq 1$, alors

$$G^s\left(\Omega,(P_j)_{j=1}^N\right)\subset G^{sq}(\Omega)\Rightarrow (P_j)_{j=1}^N\ \ q-\textit{quasielliptique dans }\Omega$$

Démonstration. Supposons que le système n'est pas quasielliptique, i.e. il existe $x_0\in\Omega$ et $\xi_0\in S^{n-1}$ tels que

$$P_{jm}(x_0,\xi_0)=0,\quad \forall j=1,..,N, \tag{4.1}$$

où P_{jm} désigne la partie quasiprincipale d'ordre m de P_j . Nous exhibons une fonction $u\in G^s\left(\Omega,(P_j)_{j=1}^N\right)$, et $u\notin G^{sq}(\Omega)$.

On choisit ε tel que $0<\varepsilon\leq\frac{m(s-\sigma)}{2ms-\sigma}<\frac{1}{2}$ et $\varepsilon\leq\min\limits_{<\beta,q><m}(m-<\beta,q>)$, et posons $\eta=\frac{m-\varepsilon}{ms}$. Soit $\delta>0$ tel que $B_0=B(x_0,2\delta)$ soit relativement compact dans Ω, et soit $\varphi\in G^{\sigma q}(R^n)$ à support compact dans $B(0,2\delta)$ et $\varphi(x)\equiv 1$ dans $B(0,\delta)$. On considère la fonction

$$u(x)=\int_1^{+\infty}\varphi\left[r^{\varepsilon q}(x-x_0)\right]e^{-r^\eta}e^{i<x-x_0,r^q\xi_0>}dr\quad ,$$

où $r^{\varepsilon q}x=(r^{\varepsilon q_1}x_1,..,r^{\varepsilon q_n}x_n)$. Cette fonction est donnée par [4] dans le cas homogène, dans [8] il est montré que $u\notin G^{sq}(\Omega)$.

Montrons que $u\in G^s\left(\Omega,(P_j)_{j=1}^N\right)$. Comme les coefficients des P_j sont dans $G^{\sigma q}(\Omega)$, alors

$\exists M>0$, $\forall\alpha\in Z_+^n$, $\forall\beta\in Z_+^n$, $\forall x\in B_0$, $\forall r\geq 1$, $\forall j=1,..,N$

$$\left|\left(D_x^\beta P_j^{(\alpha)}\right)(x,r^q\xi_0)\right|\leq M^{|\beta|+1}\left[\Gamma(<\beta,q>+1)\right]^\sigma r^{m-<\alpha,q>} \tag{4.2}$$

D'autre part d'après (4.1)

$\forall\delta>0$, $\exists C_1>0$, $\forall r\geq 1$, $\forall x\in\Omega$, $|x-x_0|<2\delta r^{-\varepsilon}$, $\forall j=1,..,N$

$$|P_j(x,r^q\xi_0)|\leq C_1 r^{m-\varepsilon} \tag{4.3}$$

Comme $\varphi\in G_0^{\sigma q}(R^n)$, alors $\exists C_0>0$, $\exists L_0>0$, $\forall\beta\in Z_+^n$, $\forall x\in R^n$

$$\left|D^\beta\varphi(x)\right|\leq C_0L_0^{|\beta|}\Gamma(<\beta,q>+1)^\sigma \tag{4.4}$$

Par commodité on choisit $L_0\geq 2MC^{m\sigma}$, où C est la constante de l'inégalité (2.6).

Nous avons besoin d'une forme commode de $P_{i_k}..P_{i_0}u$ pour tout entier $k\geq 0$. D'après la formule de Leibniz généralisée on obtient

$$\begin{aligned}P_ju(x) &= \int_1^{+\infty}\sum_{<\alpha,q>\leq m}\frac{1}{\alpha!}D_x^\alpha\left(\varphi\left[r^{\varepsilon q}(x-x_0)\right]e^{-r^\eta}\right)P_j^{(\alpha)}\left(e^{i<x-x_0,r^q\xi_0>}\right)dr\\ &= \int_1^{+\infty}A_j(x,r)\,e^{-r^\eta}e^{i<x-x_0,r^q\xi_0>}dr\quad ,\end{aligned}$$

où

$$A_j(x,r) = \sum_{<\alpha,q>\leq m} \frac{1}{\alpha!} P_j^{(\alpha)}(x, r^q \xi_0) D_x^\alpha \left(\varphi\left[r^{\varepsilon q}(x-x_0)\right]\right)$$

Pour tout entier $k \geq 0$, $l \leq k$ et $1 \leq i_l \leq N$, on obtient

$$P_{i_k}..P_{i_0} u(x) = \int_1^{+\infty} A_{i_k \ldots i_0}(x,r) e^{-r^\eta} e^{i<x-x_0, r^q \xi_0>} dr \quad ,$$

où P_{i_0} désigne l'opérateur identité, et

$$\begin{cases} A_{i_0}(x,r) = \varphi\left[r^{\varepsilon q}(x-x_0)\right] \\ A_{i_{k+1}, i_k \ldots i_0}(x,r) = \sum\limits_{<\alpha,q>\leq m} \frac{1}{\alpha!} P_{i_{k+1}}^{(\alpha)}(x, r^q \xi_0) D_x^\alpha A_{i_k \ldots i_0}(x,r) \end{cases} \tag{4.5}$$

Lemme 4.2. $\exists L > 0$, $\forall k \in Z_+$, $\forall \gamma \in Z_+^n$, $\forall x \in B_0$, $\forall r \geq 1$

$$\begin{aligned} \left|D_x^\gamma A_{i_k \ldots i_0}(x,r)\right| \;\leq\; & C_0 (L_0 r^\varepsilon)^{|\gamma|} L^k \Big(r^{(m-\varepsilon)k} \left[\Gamma(<\gamma,q>+1)\right]^\sigma \\ & + \left[\Gamma(<\gamma,q>+km+1)\right]^\sigma r^{k\varepsilon(2m-1)} \Big) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Preuve du lemme 4.2. La démonstration se fait par récurrence sur k. En effet pour $k=0$, cela est vrai puisque $\varphi \in G_0^{\sigma q}(R^n)$, i.e. on retrouve (4.4). Supposons donc que l'estimation (4.6) a lieu à l'ordre k et vérifions qu'elle reste vraie à l'ordre $k+1$. Posons $\lambda = r^{1-\varepsilon/m}$, $\mu = r^{\varepsilon(2-1/m)}$ et

$S(k,\beta) = \lambda^{km} \left[\Gamma(<\beta,q>+1)\right]^\sigma + \left[\Gamma(<\beta,q>+km+1)\right]^\sigma \mu^{km}$

Nous avons, d'après l'inégalité (2.5),

$$r^{m-\varepsilon} S(k,\beta) \leq 2^{\sigma+1} S(k+1,\beta) \quad , \tag{4.7}$$

et de même

$$\lambda^{m-<\alpha,q>} \mu^{<\alpha,q>} S(k,\beta+\alpha) \leq 2^{\sigma+1} S(k+1,\beta), \quad <\alpha,q>\leq m \quad , \tag{4.8}$$

De (4.5) on a

$$\begin{aligned} \left|D_x^\gamma A_{i_{k+1} \ldots i_0}(x,r)\right| &\leq \left| \sum_{<\alpha,q>\leq m} \sum_{\beta \leq \gamma} \frac{1}{\alpha!} \binom{\gamma}{\beta} D_x^{\gamma-\beta} P_{i_{k+1}}^{(\alpha)}(x, r^q \xi_0) D_x^{\alpha+\beta} A_{i_k \ldots i_0}(x,r) \right| \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3 \quad , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \left|P_{i_{k+1}}(x, r^q \xi_0)\right| \left|D_x^\gamma A_{i_k \ldots i_0}(x,r)\right| \\ I_2 &= \sum_{\beta<\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \left|D_x^{\gamma-\beta} P_{i_{k+1}}(x, r^q \xi_0)\right| \left|D_x^\beta A_{i_k \ldots i_0}(x,r)\right| \\ I_3 &= \sum_{0<<\alpha,q>\leq m} \sum_{\beta \leq \gamma} \frac{1}{\alpha!} \binom{\gamma}{\beta} \left|D_x^{\gamma-\beta} P_{i_{k+1}}^{(\alpha)}(x, r^q \xi_0)\right| \left|D_x^{\alpha+\beta} A_{i_k \ldots i_0}(x,r)\right| \end{aligned}$$

Comme les $A_{i_k \ldots i_0}$ sont à supports compacts dans $B(x_0, 2\delta r^{-\varepsilon})$, alors d'après (4.3) et (4.7) on a

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_1 r^{m-\varepsilon} C_0 (L_0 r^\varepsilon)^{|\gamma|} S(k,\gamma) L^k \\ &\leq 2^{\sigma+1} C_1 C_0 (L_0 r^\varepsilon)^{|\gamma|} S(k+1,\gamma) L^k \end{aligned} \tag{4.9}$$

En utilisant (4.2) ,l'hypothèse de récurrence et (4.7) , on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{\beta<\gamma} \binom{\gamma}{\beta} M^{|\gamma-\beta|+1} \left[\Gamma(<\gamma-\beta,q>+1)\right]^\sigma r^m C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\beta|} S\left(k,\beta\right) L^k \\ &\leq \sum_{\beta<\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \left[\Gamma(<\gamma-\beta,q>+1)\right]^\sigma M^{|\gamma-\beta|+1} r^\varepsilon \times \\ &\quad \times C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\beta|} 2^{\sigma+1} S\left(k+1,\beta\right) L^k \end{aligned} \tag{4.10}$$

D'autre part (2.3) et (2.6) donnent pour tout $k \geq 1$

$$\binom{\gamma}{\beta} \left[\Gamma(<\gamma-\beta,q>+1)\right]^\sigma S\left(k,\beta\right) \leq C_2^{\sigma<\gamma-\beta,q>} S\left(k,\gamma\right) \tag{4.11}$$

De (4.10) et (4.11) on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{\beta<\gamma} C_2^{\sigma<\gamma-\beta,q>} M^{|\gamma-\beta|+1} r^\varepsilon C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\beta|} 2^{\sigma+1} S\left(k+1,\gamma\right) L^k \\ &\leq n \frac{MC_2^{m\sigma}}{L_0 r^\varepsilon} \sum_{\beta\geq 0} \left(\frac{MC_2^{m\sigma}}{L_0 r^\varepsilon}\right)^{|\beta|} r^\varepsilon 2^{\sigma+1} M C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\gamma|} S\left(k+1,\gamma\right) L^k \end{aligned}$$

Posons $C_3 = \sum\limits_{\alpha\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|}$, comme $L_0 \geq 2MC_2^{m\sigma}$ et $r \geq 1$, alors

$$I_2 \leq n \frac{MC_2^{m\sigma}}{L_0} C_3 2^{\sigma+1} M C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\gamma|} S\left(k+1,\gamma\right) L^k \tag{4.12}$$

Enfin d'après (4.2)

$$\begin{aligned} I_3 \leq \sum_{0<<\alpha,q>\leq m} \sum_{\beta\leq\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \left[\Gamma(<\gamma-\beta,q>+1)\right]^\sigma M^{|\gamma-\beta|+1} r^{m-<\alpha,q>} \\ C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\beta+\alpha|} S\left(k,\beta+\alpha\right) L^k \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in Z_+^n$, $0 < \alpha \leq m$, on a $r^{m-<\alpha,q>+\varepsilon<\alpha,q>} \leq \lambda^{m-<\alpha,q>} \mu^{<\alpha,q>}$, ce qui donne avec (4.8) et (4.11)

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \sum_{0<<\alpha,q>\leq m} \sum_{\beta\leq\gamma} \binom{\gamma}{\beta} \left[\Gamma(<\gamma-\beta,q>+1)\right]^\sigma M^{|\gamma-\beta|+1} r^{m-<\alpha,q>+\varepsilon|\alpha|} \times \\ &\qquad \times C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\beta|} L_0^{|\alpha|} S\left(k,\beta+\alpha\right) L^k \\ &\leq \sum_{0<<\alpha,q>\leq m} \sum_{\beta\leq\gamma} \left(\frac{MC_2^{m\sigma}}{L_0 r^\varepsilon}\right)^{|\gamma-\beta|} 2^{\sigma+1} M C_0 L_0^{|\alpha|} \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\gamma|} S\left(k+1,\gamma\right) L^k \end{aligned}$$

Posons $C_4 = \sum\limits_{0<<\alpha,q>\leq m} L_0^{|\alpha|}$, alors on obtient

$$I_3 \leq 2^{\sigma+1} M C_4 C_3 C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\gamma|} S\left(k+1,\gamma\right) L^k \tag{4.13}$$

Si on choisit

$$L \geq 2^{\sigma+1} \left(C_1 + n \frac{M^2 C_2^{m\sigma}}{L_0} C_3 + M C_3 C_4\right) \quad ,$$

on aura d'après (4.9) , (4.12) et (4.13) ,

$$I_1 + I_2 + I_3 \leq C_0 \left(L_0 r^\varepsilon\right)^{|\gamma|} S\left(k+1,\gamma\right) L^{k+1} \quad ,$$

ce qui signifie que (4.6) a lieu à l'ordre $k+1$. ∎

Lemme 4.3. $\exists L>0,\ \forall k\in Z_+,\ \forall x\in B_0,\ \forall r\geq 1$

$$|A_{i_k\ldots i_0}(x,r)|\leq 2C_0L^k(km)!^s\exp\left(\frac{r^\eta}{2}\right) \tag{4.14}$$

Preuve du lemme 4.3. En appliquant le lemme 4.2. pour $\gamma=0$, on trouve

$$|A_{i_k\ldots i_0}(x,r)|\leq C_0L^k\left(r^{(m-\varepsilon)k}+(km)!^\sigma r^{k\varepsilon(2m-1)}\right) \tag{4.15}$$

D'autre part on sait que

$$\forall\lambda\in R_+,\forall k\in Z_+,\forall s>0,\qquad \frac{\left(\frac{\lambda^{1/s}}{2s}\right)^k}{k!}\leq\exp\left(\frac{\lambda^{1/s}}{2s}\right)$$

D'où on obtient avec (4.15)

$$|A_{i_k\ldots i_0}(x,r)|\leq C_0L^k(2s)^{kms}(km)!^s\left[\exp\left(\frac{r^\eta}{2}\right)+\exp\left(\frac{r^{\eta'}}{2}\right)\right]\quad ,$$

où

$$\eta'=\frac{\varepsilon(2m-1)}{m(s-\sigma)}\leq\eta=\frac{m-\varepsilon}{ms}\quad ,$$

et par conséquent

$$|A_{i_k\ldots i_0}(x,r)|\leq 2C_0L'^k(km)!^s\exp\left(\frac{r^\eta}{2}\right)\qquad\blacksquare$$

Suite de la preuve du théorème 4.1. Ce dernier lemme nous donne

$$\begin{aligned}|P_{i_k\ldots}P_{i_0}u(x)| &\leq 2C_0L^k(km)!^s\int_1^{+\infty}\exp\left(-\frac{r^\eta}{2}\right)dr\\ &\leq C^{k+1}(km)!^s\quad ,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $u\in G^s\left(\Omega,(P_j)_{j=1}^N\right)$. $\blacksquare$

Références

[1] P. Bolley, J. Camus, Powers and Gevrey regularity for a system of differential operators, Czechoslovak Math.J., 29 (104), (1979), 649-661.

[2] P. Bolley, J. Camus, L. Rodino, Hypoellipticité analytique-Gevrey et itérés d'opérateurs, Ren. Sem. Mat. Univers. Politec. Torino, Vol. 45, 3, (1987), 1–61.

[3] T. Kotake, M. S. Narasimhan, Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, Bull. Soc. Math. France, 90, (1962), 449-471.

[4] G. Métivier, Propriété des itérés et ellipticité, Comm. Partial. Differential Equations, 3, 9, (1978), 827-876.

[5] E. Nelson, Analytic vectors, Ann. of Math., 70 (3), (1959), 572-615.

[6] L. R. Volevich, Propriétés locales des solutions de systèmes quasielliptiques, Math. Sbornik, 59(101), (1962), 3-52.

[7] L. Zanghirati, Iterati di operatori quasi-ellittici e classi di gevrey, Bollettino U.M.I., 5, 18-B, (1981), 411-428.

[8] L. Zanghirati, Complementi al teorema degli iterati quasi-ellitici, Bollettino U.M.I., 6, 1-A, (1982), 137-143.

Institut de Mathématiques.
Université d'Oran-Essenia. Algérie.
email : bouzarchikh@hotmail.com