Premiers Espaces de la Cohomologie de l'Algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson de l'Espace des Fonctions d'une Variété

Norbert Poncin

Résumé

Soit $\mathcal{E}$ l'algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson de l'espace des fonctions d'une variété. En poids -1, la cohomologie de $\mathcal{E}$ associée à la représentation adjointe est la somme directe de la cohomologie d'un noyau et de la cohomologie de $\mathcal{E}^0$ associée à la représentation canonique sur les fonctions. Nous avons déterminé les trois premiers espaces de cette cohomologie de Chevalley-Eilenberg dans [9]. L'objectif de ce papier est de donner une idée du calcul des espaces correspondants de la cohomologie graduée (les deux premiers seront déterminés en poids $q \leq -1$ arbitraire), utile en théorie des déformations.

Abstract

Let $\mathcal{E}$ be the Nijenhuis-Richardson graded Lie algebra of the space of functions of a manifold. The graded cohomology of weight -1 associated to the adjoint representation is the direct sum of the cohomology of some kernel and the Chevalley-Eilenberg cohomology of $\mathcal{E}^0$ associated to the canonical representation on functions. We computed the first three cohomology spaces of $\mathcal{E}^0$ in [9]. The aim of this paper is to determine the corresponding cohomology spaces of $\mathcal{E}$ (the first and the second will be given for an arbitrary weight $q \leq -1$), which are important in deformation theory.

Received by the editors January 2000.

Communicated by L. Van Hecke.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 17 B 56, 17 B 70.

Key words and phrases : cohomologie graduée, algèbre de Nijenhuis-Richardson, calcul symbolique.

1 Introduction

Ce travail s'insère dans le cadre général de la théorie des déformations de l'algèbre des fonctions des variétés symplectiques et des variétés de Poisson, inaugurée en 1978 comme voie d'approche nouvelle de la mécanique quantique, par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans un article fondateur paru aux Annals of Physics (voir [1]).

L'étude des déformations et plus particulièrement des $*$-produits est d'abord celle de leur existence et de leur classification. Le cas des variétés symplectiques a été entièrement résolu par M. De Wilde et P.B.A. Lecomte en 1983 (voir [2]). En 1991, H. Omori, Y. Maeda et A. Yoshioka traitent les variétés de Weyl (voir [7]), alors qu'en 1994, B. Fedosov présente une construction explicite d'un $*$-produit (voir [3]). Le cas des variétés de Poisson quelconques n'a pu être réglé qu'en 1997 par M. Kontsevich (voir [4]).

Les problèmes de déformation ont mis en lumière diverses structures algébriques liées aux variétés et les cohomologies associées. Ceci vaut notamment pour la cohomologie de l'algèbre de Lie graduée de Nijenhuis-Richardson de l'espace des fonctions d'une variété, au calcul de laquelle le présent papier est consacré.

Notons N l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions d'une variété M et désignons par $\mathcal{E} := A(N)_{loc,\,n.c.}$ l'espace des applications multilinéaires de $N \times \cdots \times N$ dans N, qui sont antisymétriques, locales et nulles sur les constantes. Rappelons l'expression du crochet de Nijenhuis-Richardson $[\ ,\ ]$ (voir [6]) sur $\mathcal{E}^b \times \mathcal{E}^{-1}$ et sur $\mathcal{E}^0 \times \mathcal{E}^b$ ($b \geq 0$). Si $B \in \mathcal{E}^b$ et $u \in \mathcal{E}^{-1} = N$,

$$[B, u] = i_u B,$$

où le membre de droite est le produit intérieur de B par u, et si $A \in \mathcal{E}^0 = gl(N)_{loc,\,n.c.}$, $B \in \mathcal{E}^b$ et $u_0, \ldots, u_b \in N$,

$$[A, B](u_0, \ldots, u_b) = A(B(u_0, \ldots, u_b)) - \sum_k B(u_0, \ldots, A(u_k), \ldots, u_b).$$

Il est bien connu que $[\ ,\ ]$ munit l'espace $\mathcal{E}$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée. Soient $H_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc}$ la cohomologie du complexe $(\wedge_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc}, \partial)$ associé à $\mathcal{E}$ opérant sur lui-même et $H(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ celle de l'espace différentiel $(\wedge(\mathcal{E}^0, N)_{loc}, \partial)$ associé à $\mathcal{E}^0$ représenté sur N, toutes les cochaînes étant locales. En poids $q = -1$, on peut considérer l'application "restriction"

$$\theta : T \in \wedge^p_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} \to T|_{\mathcal{E}^0 \times \cdots \times \mathcal{E}^0} \in \wedge^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc},$$

qui est un homomorphisme d'espaces différentiels. La cohomologie graduée de poids -1 et la cohomologie de Chevalley-Eilenberg sont liées par la relation (voir [5])

$$H^p_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} = H^p(\ker\theta) \oplus H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}. \tag{1}$$

Dans [9], nous avons établi le

THEOREME 1.1. - *Si $p \in \{1, 2, 3\}$ et M est une variété de classe C^∞, de dimension $m \geq p$, séparée, à base dénombrable et connexe, on a $H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc} \approx H^p_{DR}(M)$, où $H_{DR}(M)$ est la cohomologie de de Rham de M.*

On dispose ainsi d'un des deux termes des premiers espaces de la cohomologie graduée, utile en théorie des déformations. Cette motivation est plus que jamais d'actualité, le résultat de M. Kontsevich (voir [4]), selon lequel l'algèbre des fonctions des variétés de Poisson est toujours déformable, suggérant l'existence, dans la cohomologie graduée, de classes canoniques "universelles", liées aux déformations de N et à leur classification (voir [2]).

Le calcul de $H^p(\ker\theta)$ $(p \in \{2,3\})$ étant basé sur celui de $H^{p-1}_{alt}(\mathcal{E})_{-2,\,loc}$, nous déterminerons les espaces

$$H^1_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc} \quad (q \leq -1), \quad H^2_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc} \quad (q \leq -1) \quad \text{et} \quad H^3_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc}.$$

2 Calcul symbolique

Nos calculs ont mis en évidence deux équations fondamentales, ayant pu être résolues moyennant le formalisme suivant.

Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, nous représentons symboliquement les dérivées $D^\lambda_x f = D^{\lambda_1}_{x^1} \dots D^{\lambda_m}_{x^m} f$ $(f \in N = C^\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{N}^m)$ par les monômes $\xi^\lambda = \xi_1^{\lambda_1} \dots \xi_m^{\lambda_m}$ en les composantes de $\xi \in (\mathbb{R}^m)^*$. Nous avons expliqué dans [9] que si $T \in \wedge^1_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc}$, sa restriction (nous la noterons également T) à $\mathcal{E}^0$ (et de manière plus précise, au sous-espace $\mathrm{Diff}^r \subset \mathcal{E}^0$ $(r \in \mathbb{N}^*)$ des opérateurs différentiels homogènes de degré r) admet le polynôme symbolisant $T = T(\eta; X^r)$, où $\eta \in (\mathbb{R}^m)^*$ représente les dérivées agissant sur l'argument de T et où X^r $(X \in \mathbb{R}^m)$ - pour l'essentiel - symbolise cet argument. Rappelons aussi que $T = T(\eta; X^r)$ est de classe C^∞ en $x \in \Omega$ et à valeurs dans les polynômes en η à coefficients linéaires en X^r.

Cette notion de représentation symbolique s'étend aux restrictions des $T \in \wedge^p_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc}$ $(p \geq 1,\ q \leq -1)$ aux $\mathcal{E}^{b_1} \times \dots \times \mathcal{E}^{b_p}$ $(b_i \in \mathbb{N},\ \sum b_i = -q-1)$. On remarquera que ces restrictions sont encore à valeurs dans $\mathcal{E}^{-1} := N$ et que les arguments sont désormais des opérateurs multidifférentiels antisymétriques. On obtient ainsi des représentations symboliques $T = T(\eta^1, \dots, \eta^p;\ \wedge_{j=0}^{b_1} X_{1,j}^{r_{1,j}}, \dots, \wedge_{j=0}^{b_p} X_{p,j}^{r_{p,j}})$, polynômes en p variables $\eta^1, \dots, \eta^p \in (\mathbb{R}^m)^*$ – chaque variable étant associée à un argument et représentant les dérivées portant sur cet argument – à coefficients linéaires en les $\wedge_{j=0}^{b_i} X_{i,j}^{r_{i,j}}$ $(X_{i,j} \in \mathbb{R}^m,\ r_{i,j} \in \mathbb{N}^*)$, fonctions de classe C^∞ de $x \in \Omega$.

3 Résultats et esquisse de démonstration

THEOREME 3.1. - *Soit M une variété de classe C^∞, séparée, à base dénombrable et connexe.*

(1) Si $m = \dim M \geq 2$, les espaces $\wedge^1_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} \cap \ker\theta \cap \ker\partial$ et $\wedge^1_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc} \cap \ker\partial$ $(q \leq -2)$ sont nuls, de sorte que

(i) $H^1(\ker\theta) = 0$ et $H^1_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} \approx H^1_{DR}(M)$,
(ii) $H^1_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc} = 0$, si $q \leq -2$.

(2) Si $m = \dim M \geq 3$, on a

(i) $H^2(\ker\theta) = 0$ et $H^2_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} \approx H^2_{DR}(M)$,
(ii) $H^2_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc} = 0$, si $q \leq -2$

et

(iii) $H^3(\ker\theta) = 0$ *et* $H^3_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} \approx H^3_{DR}(M)$.

Soient $p \in \{1,2,3\}$ et $q \leq -1$. Un p-cocycle $T \in \wedge^p_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc}$ ($\cap \ker\theta$, si $q = -1$) de poids q étant nul sur des arguments $A_i \in \mathcal{E}^{a_i}$ dont le degré total $\sum a_i$ est inférieur ou égal à $-q-2$, il s'impose de procéder par récurrence et de prouver que T est nul si $\sum a_i \leq k$ ($k \geq -q-2$) implique T est nul si $\sum a_i \leq k+1$, modulo un bord lorsque $p \in \{2,3\}$.

Pour $k = -q-2$, certaines équations fondamentales sont triviales, de sorte que des cas délicats se manifestent. Si $p = 1$, il s'agit du degré $a = k+1 = -q-1$ ($= 0$ lorsque $q = -1$), si $p = 2$, c'est le degré $(a_1, a_2) = (0, k+1) = (0, -q-1)$ ($= (0,0)$ pour $q = -1$) et si $p = 3$ finalement, c'est $(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$ (q valant ici -1). En poids $q = -1$, la difficulté disparaît, car $T \in \ker\theta$, vu la décomposition $H^p_{alt}(\mathcal{E})_{-1,\,loc} = H^p(\ker\theta) \oplus H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ et vu le calcul antérieur de $H^p(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$. On élimine les cas restants $a = -q-1$ et $(a_1, a_2) = (0, -q-1)$ ($q \leq -2$) grâce à de très lointaines généralisations des calculs de $H^1(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ resp. de $H^2(\mathcal{E}^0, N)_{loc}$ (voir [8]).

Ces généralisations sont basées sur les lemmes suivants :

LEMME 3.2. - *Soient m la dimension de M, $Vect(M) \subset \mathcal{E}^0$ la sous-algèbre des champs de vecteurs de M et $T \in \wedge^p_{alt}(\mathcal{E})_{q,\,loc}$ avec $q \leq -1$.*

(i) Si $p = 1$, $m \geq 2$ et

$$A(T(B)) = T([A,B]), \quad \forall A \in Vect(M),\ \forall B \in \mathcal{E}^{-q-1}, \tag{2}$$

alors

$$T(B) = 0, \quad \forall B \in \mathcal{E}^{-q-1}.$$

(ii) Si $p = 2$, $m \geq 3$, $b \in \{0, \ldots, -q-1\}$ et

$$A(T(B,C)) = T([A,B],C) + T(B,[A,C]), \quad \forall A \in Vect(M),\ \forall B \in \mathcal{E}^b,\ \forall C \in \mathcal{E}^{-q-b-1}, \tag{3}$$

alors

$$T(B,C) = 0, \quad \forall B \in \mathcal{E}^b,\ \forall C \in \mathcal{E}^{-q-b-1}.$$

LEMME 3.3. - *Soient Ω un ouvert contractile de $\mathbb{R}^m$ avec $m \geq 3$ et $\mathcal{E}_\Omega$ l'algèbre $\mathcal{E}$ construite sur Ω. Tout 2-cocycle $T \in \wedge^2_{alt}(\mathcal{E}_\Omega)_{q,\,loc}$ de poids $q \leq -2$ est cohomologue à un cocycle T' tel que $T'(B,C) = 0$, $\forall B \in \mathcal{E}^0_\Omega$, $\forall C \in \mathcal{E}^{-q-1}_\Omega$.*

Afin d'établir 3.2.(i), 3.2.(ii) et 3.3., nous symbolisons les équations (2), (3) resp. $\partial T = 0$, ce qui mène à des équations (presque) purement algébriques, plus simples que les originaux.

Par exemple, si M est un ouvert Ω de $\mathbb{R}^m$, si $A = fW$ et $B = g\wedge_{j=0}^{-q-1} X_j^{r_j} = g\wedge X_j^{r_j}$ ($f, g \in N = C^\infty(\Omega)$; $W, X_j \in \mathbb{R}^m$; $r_j \in \mathbb{N}^*$) et si $\zeta, \eta \in (\mathbb{R}^m)^*$ représentent les dérivées de f resp. g, l'équation (2) se symbolise par

$$\begin{aligned}
&(W.T)(\eta;\ \wedge X_j^{r_j}) \\
&\quad = \ \langle W, \eta\rangle \left[T(\eta+\zeta;\ \wedge X_j^{r_j}) - T(\eta;\ \wedge X_j^{r_j})\right] \\
&\quad - \ \sum_{j=0}^{-q-1}\sum_{k=0}^{r_j-1} \binom{r_j}{k} \langle X_j, \zeta\rangle^{r_j-k} \frac{1}{k+1}\,(WD_{X_j})\,T(\eta+\zeta;\ X_0^{r_0}\wedge\ldots\wedge X_j^{k+1}\wedge\ldots\wedge X_{-q-1}^{r_{-q-1}}),
\end{aligned}$$

où $W.T$ signifie que W dérive les coefficients de T et où WD_{X_j} désigne la dérivée par rapport à X_j dans la direction de W. En gros, notre méthode consiste à étudier dans cette équation polynomiale, les termes de degrés $0, 1$ et 2 en ζ. Nous obtenons alors la constance des coefficients de T, son invariance sous l'action naturelle de $gl(m,\mathbb{R})$ et finalement sa nullité.

La preuve du lemme 3.3. est longue et très technique. Elle ne saurait être décrite utilement ici. Le caractère local de ce lemme est dû à des corrections par les bords de cochaînes définies localement, impossibles à recoller.

Soit à présent $k \geq -q-2$ quelconque.

L'étude des degrés $(a_1, a_2) = (-1, k+2)$ $(p = 2,\ q \leq -1)$ et $(a_1, a_2, a_3) = (-1, a_2, k-a_2+2)$ avec $-1 \leq a_2 \leq k-a_2+2$ $(p = 3,\ q = -1)$, exige des corrections par les bords de cochaînes S définies pour $a = k+2$ resp. $(b, c) = (b, k-b+2)$ par des égalités du type

$$S(A)(u_0, \ldots, u_{k+q+2}) = T(A, u_0)(u_1, \ldots, u_{k+q+2})$$

et

$$S(B, C)(u_0, \ldots, u_{k+1}) = T(B, C, u_0)(u_1, \ldots, u_{k+1}),$$

où les u_i sont des fonctions. Il s'agit évidemment de vérifier que $S(A) \in \mathcal{E}^{k+q+2}$ et que $S(B, C) \in \mathcal{E}^{k+1}$. C'est surtout la preuve de l'annulation sur les constantes qui pose des problèmes. On remarque alors que $I_1T = T(\bullet, \ldots, 1)$ est une $(p-1)$-cochaîne de poids $q-1$ et que $I_1\partial T = \partial I_1 T$, de sorte que $I_1 T \in \wedge_{alt}^{p-1}(\mathcal{E})_{q-1,\, loc} \cap \ker\partial$. Si $p = 2$, il découle de 3.1.(1) que $I_1T = 0$ et ainsi $S(A)$ est nul sur les constantes. Si $p = 3$, on déduit de 3.1.(2)(ii) que $I_1T = \partial R$, où $R \in \wedge_{alt}^{1}(\mathcal{E})_{-2,\, loc}$ et on construit un relèvement $\hat{R}$ de R i.e. une cochaîne $\hat{R} \in \wedge_{alt}^{2}(\mathcal{E})_{-1,\, loc} \cap \ker\theta$ telle que $I_1\hat{R} = R$. Le cocycle $T' = T - \partial\hat{R}$ est alors nul sur les constantes, car

$$I_1T' = I_1T - I_1\partial\hat{R} = I_1T - \partial I_1\hat{R} = I_1T - \partial R = 0.$$

Par conséquent, $S(B, C)$ défini à partir de T', est également nul sur les constantes. Finalement, on a bien $S \in \wedge_{alt}^{p-1}(\mathcal{E})_{q,\, loc}$ ($\cap \ker\theta$, si $q = -1$) et la correction par ∂S fournit un cocycle – nous le noterons encore T – nul sur les degrés étudiés.

La nullité de T sur les degrés restants $a = k+1 \geq -q-1 \geq 0$ $(p = 1)$, $(a_1, a_2) = (a_1, k-a_1+1)$ avec $0 \leq a_1 \leq k-a_1+1$ $(p = 2)$ resp. $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, k-a_1-a_2+1)$ avec $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq k-a_1-a_2+1$ $(p = 3)$, s'obtient à l'aide du lemme 3.2., du lemme 3.3., de l'hypothèse $T \in \ker\theta$ ou de l'équation de cocycle. Ceci complète la récurrence. Le résultat n'est cependant que local si $p = 2$ et $q \leq -2$, vu le caractère local de 3.3., mais on sait globaliser grâce à 3.1.(1).

Remarque. - Le poids $q = -1$ aurait pu être traité conjointement avec les poids $q \leq -2$. La décomposition (1) n'apporte pas de simplification substantielle, mais a le mérite d'isoler de manière élégante le cas critique.

Les démonstrations détaillées des précédents résultats seront publiées dans [10].

Remerciements. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet R&D no MEN/CUL/99/007, subventionné par l'Etat luxembourgeois. L'auteur remercie également les Professeurs M. De Wilde et P.B.A. Lecomte pour les discussions fructueuses qu'il a pu avoir avec eux.

Références

[1] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A. and Sternheimer D., Deformation theory and quantization, Ann. Phys. 111 (1978) 61-110 and 111-151.

[2] De Wilde M. and Lecomte P.B.A., Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products. Existence, equivalence, derivations, NATO ASI, Serie C, 247 (1988) 897-960.

[3] Fedosov B.V., A simple geometrical construction of deformation quantization, J. Diff. Geometry 40, 2 (1994) 213-238.

[4] Kontsevich M., Deformation quantization of Poisson manifolds, preprint IHES (1997).

[5] Lecomte P.B.A., Melotte D. and Roger C., Explicit Form and Convergence of 1-Differential Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra, Lett. Math. Phys. 18 (1989) 275-285.

[6] Nijenhuis A. and Richardson R., Deformation of Lie algebra structures, J. Math. Mech. 17 (1967) 89-105.

[7] Omori H., Maeda Y. and Yoshioka A., Weyl manifolds and deformation quantization, Advances in Math. 85, 2 (1991) 224-255.

[8] Poncin N., Cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre des opérateurs locaux sur l'espace des fonctions d'une variété, Publ. Centre Univ. Luxembourg, Trav. math. X (1998) 103-115.

[9] Poncin N., Cohomologie de l'algèbre de Lie des opérateurs différentiels sur une variété, à coefficients dans les fonctions, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I (1999) 789-794.

[10] Poncin N., Cohomology of the Nijenhuis-Richardson Graded Lie Algebra of the Space of Functions of a Manifold (preprint of the Institute of Mathematics of the University of Liège).

Département de Mathématiques
Centre Universitaire de Luxembourg
162 A, avenue de la Faïencerie

L-1511 Luxembourg
Courrier électronique : poncin@cu.lu