Advanced Studies in Pure Mathematics 43, 2006
Singularity Theory and Its Applications
pp. 271–309

Semidifférentiabilité et version lisse de la conjecture de fibration de Whitney

C. Murolo et D. J. A. Trotman

Abstract.

For controlled stratified maps $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ between two stratified spaces, we define what it means for f to be semi-differentiable, horizontally-C^1 and $\mathcal{F}$-semi-differentiable (where $\mathcal{F}$ is a foliation).

When $\mathcal{X}'$ is a smooth manifold, f is always semi-differentiable.

In general, semi-differentiability is equivalent to f being horizontally-C^1 with bounded differential.

Horizontally-C^1 regularity depends on the existence of (a)-regular horizontal stratified foliations of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}'$, which gives a smooth version of the stratified fibration whose existence was conjectured by Whitney for analytic varieties in 1965, and implies a horizontally-C^1 version of Thom's first isotopy theorem.

We obtain finally the corresponding theorems for the finer property of $\mathcal{F}$-semi-differentiability.

§1. Introduction

Dans $[\mathrm{MT}]_{1,2}$, nous avons considéré le problème de l'extension continue contrôlée d'un champ de vecteurs, donné sur une (ou plusieurs) strate(s) d'une stratification régulière, à toutes les strates supérieures.

Le cas d'un relèvement (extension) contrôlé est classique, et il est bien connu [Ma], [GWPL] que les flots relevés sur une stratification au moins (b)-régulière, définissent à tout instant $t \in \mathbb{R}$ des homéomorphismes stratifiés qui sont lisses sur chaque strate, mais qui ne donnent pas en général une application C^1 (exemple de la famille des quatre droites:

Received March 31, 2004.

Revised June 22, 2005.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58A35, 58A30; Secondary 57R30, 57R52.

Key words and phrases. Regular stratifications, stratified vector fields, topological triviality, stratified $C^{0,1}$ foliations.

[Wh], [GWPL]). C'est la raison pour laquelle les principaux théorèmes de la théorie des stratifications régulières sont des résultats de nature topologique et non différentiable. Le *premier théorème d'isotopie de Thom*, donnant la stabilité topologique de la fibre d'une submersion stratifiée contrôlée $f : \mathcal{X} \to M$ à valeurs dans une variété, en est l'exemple le plus célèbre; il est obtenu par la technique "standard" de relèvement contrôlé de champs de vecteurs v_i qui donne des flots globaux ϕ_i qui ne sont pas toujours C^1.

Nous avons considéré dans $[\mathrm{MT}]_{1,2}$ des extensions de champs qui de plus sont *continues*; notre question devient alors: *"quel type de régularité (en plus de la continuité* [Ma]*) obtient-on pour les flots relevés ?".*

Cet article est consacré à ce problème.

Quand on relève un champ ζ_X défini sur une strate X de dimension 1, les trajectoires du flot du champ relevé définissent un feuilletage "horizontal" de dimension 1, $\mathcal{F} = \{F_\beta\}$ de type $C^{0,\infty}$: i.e. des courbes lisses dont les espaces tangents, en coïncidant avec ceux de la distribution canonique $\mathcal{D}_X(y) = \{\mathcal{D}_{XY}(y)\}_{Y \geq X}$ $[\mathrm{MT}]_2$, tendent vers T_xX quand $y \to x$. En considérant alors un relèvement continu $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ du champ ζ_X, comme nous le montrons au §4 (théorème 4 et corollaires), une régularité de type C^1-affaibli :

$$\text{“} \lim_{(y_n, v_n) \to (x, v)} \phi_{Y*y_n}(v_n) = \phi_{X*x}(v) \quad , \quad \forall\, Y > X \text{ ”}$$

reste valable au moins pour les suites de vecteurs $v_n \in \mathcal{D}_X(y_n)$.

Cette observation est la motivation cruciale de cet article où nous donnons des réponses aux questions suivantes :

– *Quand* $\dim X > 1$ *quel est l'analogue du feuilletage horizontal* $\mathcal{F} = \{F_\beta\}_\beta$ *?*

– *Peut-on obtenir que ses feuilles tendent vers* T_xX *de manière* C^1 *quand* $y \to x$ *?*

– *Que peut-on dire de la différentiabilité du flot relevé (à l'instant* t*)* $\phi_Y : Y \to Y$ *(*$Y > X$*) le long de la "direction horizontale" ?*

Ce problème rappelle une conjecture de H. Whitney [Wh] pour des stratifications (b)-régulières d'une variété analytique. Whitney conjecture pour toute strate X et pour tout $x_0 \in X$ l'existence d'un feuilletage $\{F_\beta\}_\beta$ de même dimension que X vérifiant la condition $\lim_{z \to x} T_zF_\beta = T_xX$. Au §2.3, nous définissons cette propriété pour des stratifications réelles (définition 6), comme la (a)-*régularité (autour de* x_0*) du feuilletage horizontal* $\{F_\beta\}$.

Pour des stratifications réelles (b)-régulières, l'existence d'un tel "bon" feuilletage a été conjecturée par le deuxième auteur en 1993 ;

nous montrons au §5 qu'elle est une condition nécessaire et suffisante pour que les flots des champs relevés soient horizontalement-C^1, et plus généralement qu'elle est nécessaire pour que d'autres morphismes horizontalement-C^1 puissent exister. Nous réinterpretons alors la conjecture de Trotman comme la *version lisse de la conjecture de fibration de Whitney* ([Wh], §9, remarque 3). On peut voir $[\mathrm{MT}]_{1,3}$ pour plus de détails concernant les autres travaux sur les conjectures de Whitney et Trotman, et une indication de leurs multiples conséquences. Nous préparons actuellement (décembre 2006) avec A. du Plessis une étude approfondie de ces conjectures (lesquelles semblent bien être vraies).

Dans le §2, nous introduisons les notions de *semidifférentiabilité*, de régularité *horizontalement-C^1* et de $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité pour un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$; on précise les relations entre elles (théorème 1) et on montre que la réciproque d'un homéomorphisme horizontalement-C^1 est encore horizontalement-C^1 (théorème 2).

Une question importante reste ouverte :

– *Quand est-ce qu'un morphisme stratifié est horizontalement-C^1 ?*

Toute la théorie développée dans la suite est dédiée à ce problème. Dans le §3 nous analysons le cas particulier où le morphisme considéré est le flot stratifié $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ d'un champ de vecteurs $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ obtenu par relèvement continu contrôlé d'un champ ζ_X défini sur une strate X.

Dans le §4.1 nous supposons l'"involutivité d'une distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ relative à la strate X $[\mathrm{MT}]_{1,2}$ [1] et montrons que les flots (à l'instant t) $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ du champ ζ relevé continu contrôlé du champ ζ_X sont horizontalement-C^1 en tout point x_0 autour duquel $\mathcal{D}_X$ est involutive (théorèmes 3 et 4).

On remarque que si $\dim X \in \{1, \dim A - 1\}$, le flot ϕ est toujours horizontalement-C^1 en tout point de X (corollaires 4 et 5).

Dans le §4.2 on donne les résultats correspondants concernant la $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ (théorèmes 5 et 6).

Dans le §4.3 nous donnons quelques caractérisations de l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ en termes du feuilletage $\mathcal{H}$ induit par la trivialisation topologique locale $H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ d'une projection $\pi_X : T_X \to X$ (théorème 7).

Dans le §5 nous considérons le cas général où la distribution canonique n'est pas nécessairement intégrable. Dans le §5.1, après avoir énoncé

[1] D. Trotman et A. du Plessis ont vérifié en 1994 qu'en général une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ n'est pas involutive. M. Field [Fi] avait remarqué cette difficulté à D. Trotman, sous une forme équivalente, dans une lettre de 1976.

la *version lisse de la conjecture de fibration de Whitney* (i.e. la conjecture du feuilletage (a)-régulier), nous remplaçons l'intégrabilité de $\mathcal{D}_X$ par l'hypothèse plus faible de (a)-régularité d'un feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ (transverse aux fibres de la projection π_X) et qui équivaut à l'involutivité d'une nouvelle distribution canonique. On retrouve ainsi les mêmes théorèmes qu'au §4, et en particulier que les flots des champs relevés sont horizontalement-C^1 (théorème 8).

On donne ensuite des conditions suffisantes en termes de ces feuilletages pour qu'un morphisme stratifié arbitraire $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ soit horizontalement-C^1 (théorème 9) et on conclut la section en énonçant une version horizontalement-C^1 du premier théorème d'isotopie de Thom (théorème 10). Dans le §5.2 on établit enfin les versions $\mathcal{F}$-semidifférentiable des théorèmes 8, 9 et 10 du §5.1 (théorèmes 11, 12, 13).

Les démonstrations des théorèmes 10 et 13 du §5 omises, seront publiées séparément.

§2. Régularités de morphismes stratifiés.

Dans ce paragraphe, nous introduisons et étudions différentes conditions de régularité pour un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$.

On introduit d'abord la notion de *semidifférentiabilité*, qui dans le cas de deux strates $X < Y$ signifie que la différentielle $f_{X*} \cup f_{Y*} : TX \cup TY \to TX' \cup TY'$ d'un morphisme stratifié $f_X \cup f_Y : X \cup Y \to X' \cup Y'$ soit continue.

Le contrôle par rapport aux deux systèmes de données de contrôle (S.D.C.) de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ est supposé par définition[2], et implique qu'un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to M$ à valeurs dans une variété lisse M est toujours semidifférentiable.

La semidifférentiabilité se préserve par composition, mais ne se préserve pas par application réciproque. Nous introduisons alors la notion de morphisme horizontalement-C^1 et démontrons que la semidifférentiabilité de f équivaut à ce que f soit horizontalement-C^1 et ait des dérivées bornées (théorème 1) et que la réciproque f^{-1} d'un homéomorphisme stratifié $f : A \to A'$ horizontalement-C^1 est horizontalement-C^1 (théorème 2).

On conclut la section en introduisant la notion plus fine de $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité (le long un feuilletage $\mathcal{F}$) de f.

---

[2]On ne sait pas en général s'il est possible de construire deux S.D.C. par rapport auxquels $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ soit contrôlée ; mais ceci est bien connu quand f est une submersion et $\mathcal{X}' = M$ est une variété [Ma].

2.1. Morphismes semidifférentiables.

Dans tout le paragraphe $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ et $\mathcal{X}' = (A', \Sigma')$ seront deux stratifications (a)-régulières de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $A' \subseteq \mathbb{R}^m$ au sens de Whitney [Wh].

Une variété et/ou une application entre deux variétés sera dite *"lisse"* quand elle est de classe C^1.

Définition 1. *Un morphisme stratifié est une application continue $f : A \to A'$, stratifiée, i.e. qui envoie chaque strate X de A dans une unique strate X' de A' et telle que la restriction $f_X : X \to X'$ de f est lisse (non nécessairement une submersion).*

Grâce à la condition de frontière $X \subseteq \overline{Y}$ et la continuité de f, pour toutes strates $X < Y$ de A, $f(X) \subseteq f(\overline{Y}) \subseteq \overline{f(Y)}$. Donc les strates X' et Y' vérifient aussi $X' \subseteq \overline{Y'}$, i.e. $X' \leq Y'$.

Les stratifications $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ de cette section seront munies de deux systèmes de données de contrôle $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X \in \Sigma}$ et $\mathcal{T}' = \{(T_{X'}, \pi_{X'}, \rho_{X'})\}_{X' \in \Sigma'}$ [Ma] et tout morphisme stratifié f sera *contrôlé par rapport aux systèmes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$*, i.e. :

$$\forall X < Y \ , \ \exists \epsilon > 0 \quad \text{tel que :}$$

$$\forall y \in T^{\epsilon}_{XY} = T_X(\epsilon) \cap Y \text{ on ait : } \begin{cases} \pi_{X'} f_Y(y) = f_X \pi_X(y) \\ \rho_{X'} f_Y(y)) = \rho_X(y). \end{cases}$$

Si la stratification est seulement (a)-régulière et le système $\mathcal{T}$ se réduit à la famille des projections, alors la condition de contrôle devient $\pi_{X'} f_Y(y) = f_X \pi_X(y)$ ([MT]$_2$, §3 remarque 1). Remarquons que $\forall X < Y$, la condition de frontière et la (a)-régularité de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ impliquent que $TX \subseteq \overline{TY}$ et $TX' \subseteq \overline{TY'}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^{2m}$.

Définition 2. *Un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ sera dit semidifférentiable en $x \in X$ (resp. en $(x, v) \in TX$), si pour toute strate $Y > X$ (et donc $Y' \geq X'$) l'application différentielle $f_{X*} \cup f_{Y*} : TX \cup TY \to TX' \cup TY'$ est continue en tout point $(x, v) \in \{x\} \times T_x X \subseteq TX$ (resp. en (x, v)), i.e. la condition de limite est vérifiée :*

$$\forall \{(y_n, v_n)\}_n \subseteq TY \, ,$$

$$\lim_{n \to \infty} (y_n, v_n) = (x, v) \in TX \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} f_{Y * y_n}(v_n) = f_{X * x}(v).$$

On dira que f *est semidifférentiable sur* X si f est semidifférentiable en tout $x \in X$ et que f *est semidifférentiable* (*sur* $\mathcal{X}$) si f est semidifférentiable sur toute strate $X \in \Sigma$.

Des exemples élémentaires montrent que la semidifférentiabilité en un point x (sur une strate X ou sur A tout entier) d'un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ est en général plus faible que la C^1-régularité de f en x (sur X ou sur A). Si la stratification $\mathcal{X}'$ se réduit à une variété lisse, la semidifférentiabilité découle de la condition de contrôle :

Proposition 1. *Toute application $f : \mathcal{X} \to M$ à valeurs dans une variété M et π-contrôlée par rapport à la famille des projections d'un S.D.C. est semidifférentiable.*

Preuve. Pour tout couple de strates adjacentes $X < Y$ de $\mathcal{X}$, soit $\{(y_n, v_n)\}_n$ une suite dans TY telle que $\lim_n(y_n, v_n) = (x, v) \in TX$.

La stratification but de $f : \mathcal{X} \to M$, se réduisant à une variété $\mathcal{X}' = (M, \{M\})$, la condition de π-contrôle se réduit à $f_Y = f_X \circ \pi_{XY}$. Donc $f_{Y*} = f_{X*} \circ \pi_{XY*}$ et la relation $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v)$ découle immédiatement de la propriété que

$$\lim_n f_{X*x_n}(\pi_{XY*y_n}(v_n)) = f_{X*x}(v) \qquad \text{où} \qquad x_n = \pi_{XY}(y_n)$$

valable pour les applications lisses $f_X : X \to M$ et $\pi_{XY} : T_{XY} \to X$.
Q.E.D.

Les stratifications (b) et (c)-régulières admettent toujours des S.D.C. dont les projections et les fonctions distance sont lisses [Ma], [Be]. Cependant quand une projection $\pi_X : T_X \to X$ n'est pas C^1, comme elle est π-contrôleé par définition de S.D.C., on a :

Remarque 1. *Toute projection $\pi_X : T_X \to X$ du S.D.C. est semidifférentiable sur X.*

Les remarques 2 et 3 qui suivent sont élémentaires :

Remarque 2. *Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ est une application semidifférentiable il existe une application "différentielle" f_* de f, continue sur le "fibré tangent généralisé" $T\mathcal{X} = \cup_{X \in \Sigma} TX$ à la stratification $\mathcal{X}$:*

$$f_* = \cup_X f_{X*} \; : \; T\mathcal{X} = \cup_{X \in \Sigma} TX \longrightarrow T\mathcal{X}' = \cup_{X' \in \Sigma'} TX' \, .$$

Remarque 3. *Si $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ et $g : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}''$ sont semidifférentiables alors $g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}''$ l'est aussi.*

La proposition 3 anticipe des observations sur la convergence de f_* le long des directions des fibres des projections du S.D.C. qu'on développera à la section 2.2.

Proposition 2. *Pour qu'un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ soit semidifférentiable en un point $x \in X$ il faut que pour toute strate $Y > X$ la restriction $f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}} : \ker \pi_{XY*y} \to \ker \pi_{X'Y'*y'}$ soit de norme*

$$g_{XY}(y) := ||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}|| \quad \textit{bornée autour de } x \textit{ dans } X \cup Y.$$

Preuve. S'il existe une suite $\{y_n\} \subseteq Y$ convergente vers $x \in X$, telle que la suite $||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||$ soit divergente, il existe alors une suite de vecteurs $v_n \in \ker \pi_{XY*y_n} = T_{y_n}\pi_{XY}^{-1}(x_n) \subseteq T_{y_n}Y$ $(x_n = \pi_{XY}(y_n))$ telle que :

i) $||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}(v_n)|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n||$;
ii) $||v_n|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}||^{-\frac{1}{2}}$.

Comme $\{||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||\}_n$ est une suite divergente, de *ii)* on a $\lim_n v_n = 0 \in T_xX$ et $\lim_n(y_n, v_n) = (x, 0) \in TX$.

Or $\lim_n ||v_n|| = 0$, mais grâce à *i)* et *ii)* on trouve :

$$\begin{aligned} ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}(v_n)|| &= ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n|| \\ &= ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}||^{\frac{1}{2}} \to \infty \end{aligned}$$

ce qui implique que f n'est pas semidifférentiable en x. Q.E.D.

De la proposition 2, par des exemples élémentaires on a facilement :

Remarque 4. *L'application réciproque $f^{-1} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ d'un homéomorphisme semidifférentiable $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ n'est pas en général semidifférentiable.*

2.2. Morphismes horizontalement-C^1.

La proposition 2 suggère de séparer l'analyse de la convergence le long de "la direction verticale" (celle du sous-fibré $\ker \pi_{X*}$) et celle le long d'une "direction horizontale".

Pour une stratification (c)-régulière [Be], les auteurs du présent article ont montré le théorème suivant ($[\mathrm{MT}]_2$ théorème 4, §5) et donné la définition qui suit (voir aussi $[\mathrm{MT}]_1$, théorèmes 1 et 2) :

Théorème. *Soient $\mathcal{X}$ un espace stratifié (c)-régulier dans une variété C^1 M et $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times [0, \infty[\}_{X \in \Sigma}$ un système de données de contrôle de $\mathcal{X}$.*

Pour toute strate X de $\mathcal{X}$, il existe une distribution stratifiée continue $\mathcal{D}_X : T_X^\epsilon \to \mathbb{G}_n^l$ où $l = \dim X$, $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ et $\forall Y \geq X$, $\mathcal{D}_{XY} = \mathcal{D}_{X|T_{XY}}$ avec $T_{XY} = T_X \cap Y$, telle que :

i) $\forall Y \geq X$ *la restriction* $\mathcal{D}_{XY}$ *est un sous-fibré de* $\ker \rho_{XY*}$*;*

ii) $\mathcal{D}_{XX}(x) = T_x X \;\; , \;\; \forall x \in X$*;*

iii) $T_y Y = \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y}$ *est une somme directe* $\forall\, y \in T^\epsilon_{XY}$*;*

iv) la restriction $\pi_{XY*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to T_x X$ *où* $x = \pi_{XY}(y)$ *est un isomorphisme;*

v) pour tout champ de vecteurs C^1 ξ_X *sur* X*, la formule :*

$$\xi_Y(y) = \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi^{-1}_{XY*y}(\xi_X(x)) \quad , \quad x = \pi_X(y)$$

définit un relèvement stratifié continu contrôlé $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ *de* ξ_X *sur* $T^\epsilon_X = \cup_{Y \geq X} T^\epsilon_{XY}$.

Définition. *Toute distribution* $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ *vérifiant les conditions* $i), \ldots, v)$ *dans le théorème précédent est dite une distribution canonique (relative a la strate* X*).*

Définition 3. *Un morphisme stratifié* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ *sera dit horizontalement-*C^1 *en un point* x *d'une strate* $X \in \Sigma$ *s'il existe une distribution canonique locale* $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ *autour de* x *dans* A *(*[MT]$_{1,2}$, [Mu]*) telle que :*

$$\lim_{(y_n, v_n) \to (x,v)} f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v) \quad , \quad \forall\ (x,v) \in TX$$

soit vérifiée pour chaque suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq Y$ *convergente vers* (x,v) *avec* $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$*. On appellera horizontaux les vecteurs* $v_n \in \mathcal{D}_X(y_n)$ *et verticaux les* $v_n \in \ker \pi_{XY*y_n}$.

Un morphisme stratifié f est donc horizontalement-C^1 en $x \in X$ ssi $\forall\, Y > X$

$$f_{X*} \cup f_{Y*|\mathcal{D}_{XY}} : TX \cup \mathcal{D}_{XY} \to TX' \cup TY'$$

est continue en x.

On dira que f est *horizontalement-*C^1 *sur une strate* X (resp. *sur* (A, Σ)) si f est horizontalement-C^1 en tout point $x \in X$ (resp. $\forall x \in X$ et $\forall\, X \in \Sigma$).

Remarque 5. *Tout morphisme stratifié semidifférentiable* f *est horizontalement-*C^1.

Théorème 1. *Un morphisme stratifié contrôlé* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ *est semidifférentiable en un point* $x \in X$ *si et seulement s'il est horizontalement-*C^1 *en* x *et s'il existe un voisinage* U_x *de* x *dans* A *tel que pour toute strate* $Y > X$*, la fonction* $g_{XY}(y) = ||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}||$ *est bornée dans* $U_x \cap Y$.

Preuve. La remarque 5 et la proposition 2 montrent l'implication *"seulement si"*.

Pour toute strate $Y > X$ et pour toute suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ telle que $\lim_n(y_n, v_n) = (x, v) \in TX$, décomposons $[\mathrm{MT}]_{1,2}$ tout vecteur $v_n \in T_{y_n}Y = \mathcal{D}_{XY}(y_n) \oplus \ker \pi_{XY*y_n}$ en une somme directe $v_n = v_n^h + v_n^v$ de ses composantes horizontale et verticale de sorte que:

$$\lim_{n\to\infty} v_n^h = v \in T_xX \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} v_n^v = 0 \in T_xX\,.$$

Comme f est horizontalement-C^1 en x, on a $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n^h) = f_{X*_x}(v)$.

D'autre part, comme les différentielles le long des fibres des projections sont bornées autour de x, on peut écrire

$$0 \leq ||f_{Y*y_n}(v_n^v)|| \leq ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n^v|| \leq M \cdot ||v_n^v||$$

et en déduire que $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n^v) = 0$. En décomposant via f_* les images $f_{Y*y_n}(v_n)$ nous concluons que f est semidifférentiable en x :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n) &= \lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n^h) + \lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n^v)\\ &= f_{X*_x}(v) + 0 = f_{X*_x}(v)\,.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Remarque 6. *Une projection π_X d'un S.D.C., étant toujours semidifférentiable sur X, est également horizontalement-C^1 sur X.*

Quand $\mathcal{X}$ est (c)-régulière sur X au sens de K. Bekka [Be] on a aussi facilement :

Proposition 3. *Soit $\mathcal{X}$ une stratification (c)-régulière munie d'un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times [0, \infty[\,\}_{X\in\Sigma}$, tel que chaque voisinage tubulaire T_X est muni de la stratification induite de Σ et $[0, \infty[$ est stratifié par $\{0\}\cup]0, \infty[$. Alors toute fonction distance $\rho_X : T_X \to \{0\}\cup]0, \infty[$ est horizontalement-C^1 sur X.*

Preuve. Soit $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$ une distribution canonique obtenue à partir du S.D.C. $\mathcal{T}$ auquel ρ_X appartient.

Rappelons que $\forall Y > X$, $\mathcal{D}_{XY}$ est par définition un sous-fibré vectoriel de $\ker \rho_{XY*}$.

Etant donnée une suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ telle que $\lim_n(y_n, v_n) = (x, v) \in TX$ et dont les vecteurs v_n sont horizontaux $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$, à partir de l'inclusion $\mathcal{D}_{XY}(y_n) \subseteq \ker \rho_{XY*y_n}$ on trouve que $v_n \in \ker \rho_{XY*y_n}$, donc $\lim_n \rho_{XY*y_n}(v_n) = 0 = \rho_{XX*x}(v)$. Q.E.D.

Remarque 7. *Une fonction* $\rho_X : T_X \to \{0\} \cup]0, \infty[$ *est semidifférentiable sur* X *ssi* $\forall Y > X$ *la fonction* $g_{XY}(y) = ||\rho_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}||$ *est bornée.*

Définition 4. *Un homéomorphisme stratifié est un morphisme stratifié contrôlé* $f : \mathcal{X} = (A, \Sigma) \to \mathcal{X}' = (A, \Sigma)$ *tel que* $f : A \to A'$ *soit un homéomorphisme et* $\forall X \in \Sigma$ *la restriction* $f_X : X \to X'$ *soit un difféomorphisme.*

Dans ce cas f induit sur $\mathcal{X}'$ un S.D.C. $\mathcal{T}' = f_*(\mathcal{T})$ (§3, [MTP]) pour lequel $f^{-1} : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ est un morphisme stratifié contrôlé.

Théorème 2. *Si* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ *est un homéomorphisme stratifié horizontalement-*C^1 *sur un voisinage* U *de* x *dans* X, *alors* $\forall z' \in f(U)$ *tel que* $g(z') = ||f_{*z'}^{-1}||$ *soit bornée dans un voisinage* $V_{z'}$ *de* z' *dans* A', *l'homéomorphisme* f^{-1} *est horizontalement-*C^1 *en* z'.

La preuve du théorème 2 réside dans la proposition ci-dessous :

Proposition 4. *Si* $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ *est une distribution canonique définie dans un voisinage* W *de* x *dans* A *et* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ *est un homéomorphisme stratifié horizontalement-*C^1 *par rapport à* $\mathcal{D}_X$ *sur un voisinage* $U \subseteq W \cap X$ *de* x *dans* X, *alors la distribution* $\mathcal{D}_{X'} = \{\mathcal{D}_{X'Y'}\}_{Y' \geq X'}$ *définie dans le voisinage* $W' = f(W)$ *de* $x' = f(x) \in X'$ *dans* A', *par* $\mathcal{D}_{X'Y'}(y') = f_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y))$, $\forall y' = f(y)$, *est une distribution canonique locale dans le voisinage* W' *de* x'.

Preuve. Comme f est un homéomorphisme stratifié contrôlé, il est immédiat que :

i) $\forall Y' \geq X'$, $\mathcal{D}_{X'Y'}$ est un sous-fibré de $\ker \rho_{X'Y'*}$ de même dimension que TX;

ii) $\mathcal{D}_{X'X'}(z') = T_{z'}X'$ pour tout $z' \in U' \subseteq X'$;

iii) $T_{y'}Y' = \mathcal{D}_{X'Y'}(y) \oplus \ker \rho_{X'Y'*y'}$ est une somme directe $\forall y' \in Y'$ dans $V' = f(V)$;

iv) $\pi_{X'Y'*y'|} : \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \to T_{z'}X'$ où $z' = \pi_{X'Y'}(y')$ est un isomorphisme;

v) pour tout champ de vecteurs $\xi_{X'}$ sur X', la formule

$$\xi_{Y'}(y') := \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \cap \pi_{X'Y'*y'}^{-1}(\xi_{X'}(z')) , \quad \text{où } z = \pi_{X'}(y') ,$$

définit un relèvement $\xi' = \{\xi_{Y'}\}_{Y' \geq X'}$ de $\xi_{X'}$ contrôlé par rapport à $\mathcal{T}'$.

Afin de montrer que $\mathcal{D}_{X'}$ est une distribution canonique autour de x', soit $\{y'_n\} \subseteq W' = f(W')$ telle que $\lim_n y'_n = z'$ et montrons que $\lim_n \mathcal{D}_{X'}(y'_n) = T_{z'}X'$.

L'application f étant bijective on peut écrire $y'_n = f(y_n)$ avec $\lim_n y_n = z$, $T_{z'}X' = f_{X*z}(T_zX)$, et $v' = f_{X*z}(v)$ avec $v \in T_zX$.

Comme $\mathcal{D}_X$ est une distribution canonique et $\lim_n y_n = z$, il existe une suite $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$ telle que $\lim_n v_n = v$ et d'autre part, f étant horizontalement-C^1 en z', on trouve $\lim_{y_n \to z'} f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*z'}(v) = v'$.

Alors la suite de vecteurs $v'_n = f_{Y*y_n}(v_n) \in f_{Y*y_n}(\mathcal{D}_{XY}(y_n)) = \mathcal{D}_{X'Y'}(y'_n)$ vérifie $\lim_n v'_n = v'$, donc $T_{z'}X' = \lim_n \mathcal{D}_{X'Y'}(y'_n)$. Q.E.D.

Preuve (du théorème 2). Soit $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ la distribution canonique locale par rapport à laquelle f est horizontalement-C^1 en x. Considérons autour de $x' = f(x)$ la distribution canonique locale $\mathcal{D}_{X'} = \{\mathcal{D}_{X'Y'}(y) = f_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y))\}_{Y' \geq X'}$ et montrons que f^{-1} est horizontalement-C^1 autour de x' par rapport à $\mathcal{D}_{X'}$.

Fixons $z' \in U'$, $v' \in T_{z'}X'$, une strate $Y' > X'$ et une suite $\{(y'_n, v'_n)\}$ dans Y' telle que $\lim_n (y'_n, v'_n) = (z', v')$ avec $v'_n \in \mathcal{D}_{X'Y'}(y'_n)$.

Comme f est un homéomorphisme stratifié, nous pouvons écrire :

$$z' = f(z), \qquad X' = f(X), \qquad Y' = f(Y)$$

$$z \in X, \qquad X, Y \in \Sigma, \qquad Y > X$$

$$v' = f_{X*z}(v), \quad y'_n = f(y_n), \quad v'_n = f_{Y*y_n}(v_n)$$

$$v \in T_zX, \qquad y_n \in Y, \qquad v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$$

de sorte que la condition *"f^{-1} est horizontalement-C^1 en z'"* devient

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}_{Y'*y'_n}(v'_n) = f^{-1}_{X'*z'}(v') \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v\,.$$

Comme $f^{-1}_{Y'*}$ est bornée dans $V_{z'}$, la suite $\{v_n\}$ est également bornée

$$||v_n|| \leq ||f^{-1}_{Y'*y'_n}(v'_n)|| \leq ||f^{-1}_{Y'*y'_n}|| \cdot ||v'_n|| \leq M \cdot (||v'|| + 1)\,.$$

Montrons alors que $\{v_n\}$ s'accumule sur un point unique $v = f^{-1}_{X'*z'}(v')$. En fait, $\forall u \in T_zX$ limite d'une sous-suite convergente $\{v_{n_h}\}_h$ de $\{v_n\}$, comme f est horizontalement-C^1 en z, on déduit de l'égalité $u = \lim_h v_{n_h}$ que :

$$f_{X*z}(u) = \lim_{h\to\infty} f_{Y*y_h}(v_{n_h}) = \lim_{h\to\infty} v'_{n_h} = v'$$

et donc que $u = f^{-1}_{X'*z'}(v') = v$.

On conclut alors que $\{v_n\}$ a un unique point d'accumulation v, donc $\lim_n v_n = v$ et f^{-1} est horizontalement-C^1 en $z' \in U' = f(U)$. Q.E.D.

2.3. Morphismes $\mathcal{F}$-semidifférentiables.

Nous introduisons maintenant pour des morphismes stratifiés une notion de régularité, associée à un feuilletage, plus fine que la semi-différentiabilité et que la régularité horizontalement-C^1, et qui généralise ces notions et la condition (a_f) de Thom.

Nous noterons $\mathcal{F} = \{F_\beta\}_\beta$ un feuilletage en sous-variétés F_β lisses de dimension h ($\leq \dim \mathcal{X}$) d'un sous-ensemble ouvert U du support A de $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ et on supposera U stratifié par la stratification naturelle $\Sigma_U = \{Y \cap U\}_{Y \in \Sigma}$ induite par Σ sur U. Enfin, $\forall y \in U$, F_y notera la feuille de $\mathcal{F}$ qui passe par y ; on a alors $\mathcal{F} = \{F_y\}_{y \in U}$.

Définition 5. *On dit que $\mathcal{F}$ est un feuilletage stratifié compatible avec Σ (ou avec Σ_U) si toute feuille F_y de $\mathcal{F}$ est contenue dans la strate Y de Σ qui contient y.*

Les feuilletages que nous considérons seront toujours compatibles avec la stratification Σ fixée au départ et on parlera donc simplement de *"feuilletage stratifié"*.

Un feuilletage stratifié $\mathcal{F}$ de U détermine alors une famille de feuilletages $\{\mathcal{F}_Y\}_{Y \in \Sigma}$ où $\forall Y \in \Sigma$, $\mathcal{F}_Y = \{F_y\}_{y \in U \cap Y}$ est l'ensemble des feuilles contenues dans la strate Y. $\mathcal{F}$ est dit *de classe* $C^{0,1}$ si pour toute Y le feuilletage $\mathcal{F}_Y$ est de classe $C^{0,1}$ (les variétés C^1 F_y, "varient de manière C^0"). On considérera toujours des feuilletages de classe $C^{0,1}$.

Soient maintenant x un point de U et $X \in \Sigma$ la strate contenant x.

Définition 6. *Le feuilletage stratifié $\mathcal{F}$ sera dit (a)-régulier en x si pour toute suite $\{y_n\} \subseteq U$ telle que $\lim_n y_n = x$ et telle que la limite $\lim_n T_{y_n} F_{y_n}$ existe on a :*

$$\lim_n T_{y_n} F_{y_n} = \tau \in \mathbb{G}_h^n \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \tau \subset T_x X & si \quad h < \dim X \\ \tau = T_x X & si \quad h = \dim X \\ \tau \supset T_x X & si \quad h > \dim X. \end{cases}$$

Le feuilletage $\mathcal{F}$ sera dit (a)-régulier sur X s'il est (a)-régulier en tout point $x \in X$. Enfin $\mathcal{F}$ sera dit (a)-régulier quand il est (a)-régulier sur toute strate X.

Remarque 8. *Si* $\dim \mathcal{F} = \dim X = h$, *$\mathcal{F}$ est (a)-régulier en $x \in X$ (resp. sur X) si et seulement si (resp. $\forall x \in X$)* $\lim\limits_{y \to x} T_y F_y = T_x X$.

Dans le cas d'un feuilletage induit par une submersion stratifiée, la notion de feuilletage (a)-régulier généralise la condition (a_f) de Thom :

Remarque 9. *Une submersion stratifiée surjective, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$, de corang constant h, vérifie la condition (a_f) de Thom en un point x d'une strate X si et seulement si $\forall\, Y > X$ le feuilletage stratifié $\mathcal{F}(f) = \{f^{-1}(a')\}_{a' \in A'}$ est (a)-régulier en x.*

Preuve. Comme f est une submersion stratifiée de corang constant h, alors $\mathcal{F}(f) = \{f^{-1}(a')\}_{a' \in A'}$ est un feuilletage stratifié de variétés lisses de dimension h.

Donc la condition (a_f) de Thom en $x \in X$ est valable si et seulement si la limite $\lim\limits_{y \to x} T_y f^{-1}(y') = T_x X$, i.e. si $\mathcal{F}(f)$ est (a)-régulier en x.

Q.E.D.

Définition 7. *Le fibré tangent $T\mathcal{F}$ à un feuilletage stratifié $\mathcal{F}$ est le h-sous-fibré de TU des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$, i.e. :*

$$T\mathcal{F} = \cup_{y \in U} \{y\} \times T_y F_y \ .$$

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage stratifié (a)-régulier d'un voisinage ouvert U d'un point x d'une strate X et soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ un morphisme stratifié.

Définition 8. *On dira que f est $\mathcal{F}$-semidifférentiable en x si, pour chaque $(x, v) \in \{x\} \times T_x X \subseteq T(X \cap U)$ et $\forall\, \{(y_n, v_n)\}_n \subseteq T\mathcal{F}$ telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v)$, on a aussi $\lim_n f_{Y_n * y_n}(v_n) = f_{X * x}(v)$ où, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, Y_n désigne la strate de Σ_U qui contient y_n. De façon évidente on définit la $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité sur X (ou sur $X \cap U$) et sur $\mathcal{X}$.*

La $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité généralise la semidifférentiabilité et la régularité horizontalement-C^1. Si on note $\forall Y \in \Sigma$, $\{Y\}$ le feuilletage trivial de la strate Y on a évidemment:

Remarque 10. *La stratification Σ est (a)-régulière (en $x \in U \cap X$) si et seulement si chaque feuilletage trivial $\{U \cap Y\}$ est (a)-régulier (en $x \in U \cap X$).*

Proposition 5. *Un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ est semidifférentiable (en $x \in X$) si et seulement si pour toute strate $Y > X$ il est $\{Y\}$-différentiable (en x).*

Preuve. Si $\mathcal{F} = \{Y\}$ alors $T\mathcal{F} = \cup_{y \in Y} \{y\} \times T_y Y = TY$. Q.E.D.

Soient U un voisinage ouvert de $x \in X$ dans A, $\mathcal{F} = \{F_y\}_{y \in U}$ un feuilletage (a)-régulier de dimension $\dim F_y = \dim X$ transverse aux fibres de la projection π_X du S.D.C. de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ la distribution d'espaces tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$.

Proposition 6. *Un morphisme stratifié $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ est horizontalement-C^1 en x par rapport à $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$, si et seulement s'il est $\mathcal{F}$-semidifférentiable en x.*

Preuve. Si $\dim \mathcal{F} = \dim X$ et si $\mathcal{F}$ est (a)-régulier alors la distribution $\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ définie $\forall Y > X$ par $\mathcal{D}_{XY}(y) := T_y F_y$ est une distribution canonique sur U et le sous-fibré $\cup_{y \in U} \{y\} \times \mathcal{D}_X(y)$ coïncide avec l'espace tangent $T\mathcal{F}$ au feuilletage $\mathcal{F}$. Q.E.D.

§3. Le cas du flot d'un champ relevé.

A partir de ce paragraphe, nous étudierons la régularité d'un flot continu contrôlé obtenu par relèvement aux strates supérieures d'un champ de vecteurs défini sur un squelette de la stratification A.

Soient $\mathcal{X}$ une stratification (c)-régulière d'un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ζ_X un champ de vecteurs sur une strate X de $\mathcal{X}$ ayant un flot global Φ_X, $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ le relèvement continu contrôlé de ζ_X [MT]$_{1,2}$ sur un voisinage stratifié T_X et $\Phi = \{\Phi_Y\}_{Y \geq X}$ son flot.

Il est bien connu [Ma] que la seule hypothèse de *contrôle* de $\zeta = \{\zeta_Y\}$ suffit pour que $\Phi : \mathbb{R} \times T_X \to T_X$ soit un prolongement continu de $\Phi_X : \mathbb{R} \times X \to X$.

Remarque 11. *$\Phi : \mathbb{R} \times T_X \to T_X$ est C^1 par rapport à $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve. ζ étant continu sur X, $\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \zeta \circ \Phi$ l'est aussi. Q.E.D.

Considérons le relèvement contrôlé ζ qui soit de plus *continu* [MT]$_2$. Quelle amélioration de la régularité de $\Phi_* = \cup_{Y \geq X} \Phi_{Y*}$ a-t-on par rapport aux variables autres que $t \in \mathbb{R}$?

Fixons une strate X de $\mathcal{X}$ et le voisinage tubulaire T_X stratifié par la stratification $\Sigma_{T_X} = \{T_{XY}\}_{Y \geq X}$ induite de Σ. Notons, pour simplifier les notations, $T_X \equiv A$, $\Sigma_{T_X} \equiv \Sigma$ et donc tout $T_{XY} \equiv Y$. Fixons $t \in \mathbb{R}$.

L'homéomorphisme stratifié: $\Phi_t = \cup_{Y \geq X} \Phi_{Y t} : T_X \to T_X$ a pour restriction à $Y \geq X$ une application lisse $\phi_Y = \Phi_{Yt} : Y \to Y$ ($Y \equiv T_{XY}$) qui *a priori*, se prolonge de manière seulement continue sur le *lieu singulier* $X \subseteq \overline{Y}$.

Soit $\{y_n\}_n \subseteq Y$ une suite telle que $\lim_n y_n = x \in X$ et $\lim_n T_{y_n} Y = \tau$. On va étudier la convergence de la suite des différentielles $\phi_{Y*y_n} : T_{y_n} Y \to T_{y'_n} Y$ où $y'_n = \phi_Y(y_n)$.

Soit $\pi_X : T_X \to X$ la projection du système de données de contrôle et soit $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ la *distribution canonique* relative à X [MT]$_{1,2}$.

Rappelons alors que le champ $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ relevé contrôlé continu est défini sur toute strate $Y > X$ par la formule:

$$\zeta_Y(y) = {\pi_{XY}}_{*y}^{-1}(\zeta_X(x)) \cap \mathcal{D}_{XY}(y)\,, \quad \text{où} \quad x = \pi_{XY}(y).$$

Fixons $x_0 \in X$. La stratification $\mathcal{X}$ étant (c)-régulière, la submersion stratifiée $\pi_X : T_X \to X$ admet pour un voisinage U_{x_0} de x_0 dans X une trivialisation topologique locale, i.e. un homéomorphisme stratifié

$$H : U_{x_0} \times {\pi_X}^{-1}(x_0) \to {\pi_X}^{-1}(U_{x_0})$$

lisse sur les strates et qui est "l'identité" sur U_{x_0} $(H(p, x_0) = p\ ,\ \forall\,(p, x_0) \in \mathbb{R}^l \times x_0 \equiv X$. Ainsi, ${\pi_X}^{-1}(U_{x_0})$ est structuré par un *feuilletage vertical* $\mathcal{V}$ dont les feuilles sont les fibres de la projection π_X et par un *feuilletage horizontal* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_0}$ supplémentaire à $\mathcal{V}$. Notons :

$$\mathcal{V} = \left\{N_y = {\pi_X}^{-1}(\pi_X(y))\right\}_{y \in {\pi_X}^{-1}(U_{x_0})},$$
$$\mathcal{H} = \left\{M_{y_0} = H(\mathbb{R}^l \times y_0)\right\}_{y_0 \in {\pi_X}^{-1}(x_0)}.$$

Remarque 12. *Le feuilletage $\mathcal{H}_{x_0}$ est compatible avec la stratification de T_X.*

Remarque 13. *L'application $\phi = \{\phi_Y\}$ est compatible avec le feuilletage vertical $\mathcal{V}$:*

$$\phi_Y(N_y) = N_{y'} \quad \forall\, y, y' \in Y \, avec \;\; y' = \phi_Y(y)\,.$$

Preuve. Grâce à la condition de π_X-contrôle, pour toute strate $Y > X$ et $\forall\, y \in Y$, on a ${\pi_{XY}}_{*y}(\zeta_Y(y)) = \zeta_X(\pi_{XY}(y))$ ce qui équivaut à $\pi_{XY}(\phi_Y(y)) = \phi_X(\pi_{XY}(y))$. Alors ϕ_Y préserve les fibres de π_{XY} : $T_{XY} \to X$ (feuilles verticales dans Y) et on a : $\phi_Y(N_y) \subseteq N_{y'}$. Par symétrie, on a aussi $\phi_Y^{-1}(N_{y'}) \subseteq N_y$ et donc $\phi_Y(N_y) = N_{y'}$. Q.E.D.

L'étude de la convergence des applications $\phi_{Y*y} : T_yY \to T_{y'}Y$ peut alors être séparée selon les "composantes verticales"

$$\phi_{Y*y|T_yN_y} : T_yN_y \to T_{y'}N_{y'}$$

i.e.

$$\phi_{Y*y|\ker {\pi_{XY}}_{*y}} : \ker {\pi_{XY}}_{*y} \to \ker {\pi_{XY}}_{*y'}$$

qui sont l'application différentielle de

$$\phi_{Y|\ {\pi_{XY}}^{-1}(x)} : {\pi_{XY}}^{-1}(x) \to {\pi_{XY}}^{-1}(x')$$

où $x = \pi_{XY}(y)$ et $x' = \pi_{XY}(y')$ et les "composantes horizontales":

$$\phi_{Y*y|\mathcal{D}_{XY}(y)} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to T_{y'}Y\,.$$

Cependant ici deux précisions s'imposent :

i) On ne peut pas considérer la convergence des restrictions aux feuilles horizontales de $\mathcal{H}$, $\phi_{Y*y|T_yM_y} : T_yM_y \to T_{y'}M_{y'}$, car $\mathcal{H} = \{M_y\}_y$ n'étant pas nécessairement (a)-régulier sur U_{x_0}, la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y\}_Y$ pourrait ne pas avoir de sens.

ii) On ne peut pas écrire $\phi_{Y*y|\mathcal{D}_{XY}(y)} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$, car on n'a pas nécessairement $\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) \subseteq \mathcal{D}_{XY}(y')$,

On verra au §4 que la propriété $\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) \subseteq \mathcal{D}_{XY}(y')$ est équivalente à l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$ et au §5 que la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les flots des champs relevés soient horizontalement-C^1 et $\mathcal{H}$-semidifférentiables. De plus, sous l'hypothèse d'involutivité de $\mathcal{D}_X$ on trouvera $\mathcal{D}_{XY}(y) = T_yM_y$ ce qui *unifie* les deux choix ci-dessus et permet d'obtenir la bonne régularité des flots stratifiés.

Depuis la proposition 2 §2 on a :

Corollaire 1. *S'il existe une strate Y et une suite $\{y_n\}_n$ convergente en un point $x \in U_{x_0}$ telles que les restrictions verticales $\phi_{Y|\ \pi_{XY}{}^{-1}(x)} : \pi_{XY}{}^{-1}(x) \to \pi_{XY}{}^{-1}(x')$ aient des différentielles non-bornées, alors le flot $\phi_Y : Y \to Y$ relevé de $\phi_X : X \to X$ n'est pas semidifférentiable en x (mais il peut être horizontalement-C^1).*

Une situation récurrente est par exemple celle de l'*Escargot de Kuo* (ci-dessous) où le difféomorphisme $\phi_{Y|\ \pi_{XY}{}^{-1}(x)}$ transforme une fibre $\pi_{XY}{}^{-1}(x)$, à courbure inférieurement bornée en une fibre $\pi_{XY}{}^{-1}(x')$ à courbure arbitrairement grande. Ceci entraîne une divergence de la norme des différentielles pour $y \to x$ [Wi] : pour toute suite $\{y_n\}_n \subseteq \pi_{XY}{}^{-1}(x)$, la suite des normes $\{||\phi_{Y*y_n|N_{y_n}}||\}_n$ n'est pas bornée.

Example. *(Escargot de Kuo). Soit $A = X \cup Y \subseteq \mathbb{R}^3$ stratifié par $X =$ "l'axe des x" et une strate 2-dimensionelle Y contenant une surface Y' obtenue à partir d'une spirale avec un enroulement infini autour de l'axe des x d'équation en coordonnées polaires du type $\rho = h(\theta)$ (avec $\lim_{\theta\to\infty} h(\theta) = 0$) dans un plan $\{x = 1\}$ orthogonale à X en la réduisant le long de Ox jusqu'à la contracter en un point $x_0 = (0,0,0)$ (figure 1).*

En coordonnées cylindriques (x, ρ, θ), on peut représenter le morceau enroulé de Y par $Y' = \{(x, \rho, \theta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \rho = g(x) \cdot h(\theta),\, x \in [0, 1[\,,\, \theta \in [0, \infty[\,\}$. Selon les fonctions d'enroulement $h(\theta)$ et de contraction $g(x)$

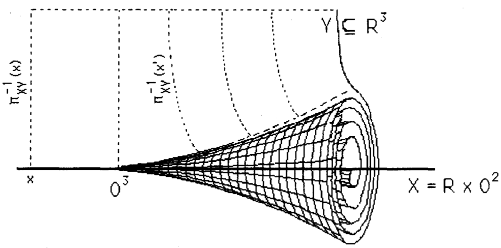

Fig. 1

on peut obtenir des escargots (c) ou (b)-réguliers (voir [Mu] pour plus de détails) mais jamais (w)-réguliers $[\mathrm{OT}]_{1,2}$.

La "géométrie de la strate" Y a donc des conséquences importantes sur la nature (des normes) d'une suite de restrictions $\{||\phi_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||\}_n$. Précisons aussi que la différentielle d'un flot relevé ϕ_Y peut être non bornée, même quand Y n'a pas de pathologies de courbure (voir [Kuo] pour un exemple de calcul explicite).

Pour des stratifications Lipschitziennes, les relèvements des champs peuvent être obtenus avec des flots à dérivées bornées [Pa] et grâce aux propositions 4 et 6 :

Proposition 7. *Si $\mathcal{X}$ est une stratification Lipschitzienne admettant un S.D.C. alors $\phi = \{\phi_Y\}_Y$ est semidifférentiable en $x \in U_{x_0}$ si et seulement si $\phi = \{\phi_Y\}_Y$ est horizontalement-C^1 en $x \in U_{x_0}$.*

Dans les prochaines sections nous considérerons la convergence du flot $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \geq X}$ relevé de ϕ_X le long des directions horizontales.

§4. Le cas où la distribution canonique est involutive.

Dès maintenant, toute extension contrôlée de champ de vecteurs sera considéré obtenue par la méthode du relèvement continu dans la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ $[\mathrm{MT}]_{1,2,3}$, ceci aussi pour les champs v_i et leurs flots ϕ_i qui définissent la trivialisation topologique H.

L'involutivité d'une distribution canonique locale $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est suffisante pour que le feuilletage horizontal

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_0} = \{M_{y_0} = H(U_{x_0} \times y_0) \quad | \quad y_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)\}$$

soit (a)-régulier autour de x_0 (proposition 8 et corollaire 2).

Dans ce cas nous démontrons alors que tout flot relevé $\Phi_t = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ est horizontalement-C^1 (théorèmes 3 et 4) sur U_{x_0} et même $\mathcal{H}$-semidifférentiable sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ (théorèmes 5 et 6).

Si $\dim X \in \{1, \dim A - 1\}$, l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ est toujours vérifiée et donc les flots des champs relevés dans $\mathcal{D}_X$ sont horizontalement-C^1 sur U_{x_0} (corollaires 3 et 4) et $\mathcal{H}$-semidifférentiables sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ (corollaires 5 et 6).

4.1. $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ est horizontalement-C^1 sur X.

Supposons qu'une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ soit involutive dans un voisinage $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ dans A. A. du Plessis et D. Trotman ont construit en 1994 un exemple montrant que ce n'est pas vrai en général.

Notre problème étant local, nous ne considérerons que la stratification induite de T_X sur le voisinage $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de x_0 dans A et identifierons alors U_{x_0} avec X et $\pi_{XY}^{-1}(U_{x_0}) = \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \cap Y$ avec $Y > X$.

D'autre part $U_{x_0} \equiv X$ étant le domaine d'une carte on peut aussi supposer $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ et $x_0 \equiv 0^n$.

Rappelons que pour une stratification qui vérifie une des conditions de régularité (c), (b), ou *Lipschitz* et dont les strates sont de classe C^k $(k \geq 2)$, l'homéomorphisme H de trivialisation topologique locale de la projection π_X est obtenu de la manière suivante.

Soient $E_1, \ldots, E_l$ les champs de vecteurs constants sur $\mathbb{R}^l \times 0 = X$ et $v_1, \ldots, v_l$ les champs relevés continus dans la distribution $\mathcal{D}_X$.

Les champs $v_i = v_i(y)$ étant contrôlés, leurs flots $\phi_1, \ldots, \phi_l$ existent $\forall\, t \in \mathbb{R}$, et l'application

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \ ,$$

$$H((t_1, \ldots, t_l), y_0) = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..) = y$$

est un homéomorphisme stratifié lisse sur les strates.

$\mathcal{D}_X$ étant involutive par hypothèse, il existe un feuilletage horizontal $\mathcal{H}' = \{M'_y\}_y$ tel que les espaces tangents aux variétés intégrales maximales sont précisément les espaces tangents à la distribution :

$$T_y M'_y = \mathcal{D}_X(y) \quad , \quad \forall\, y \in \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_X \, .$$

Lemme 1. *Si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est involutive, $\forall\, i, j \leq l$, $[v_i, v_j] = 0$ et en particulier les flots ϕ_i commutent entre eux. Réciproquement il est évident que $[v_i, v_j] = 0$ $\forall i, j \leq l$ entraîne l'involutivité de $\mathcal{D}_X$.*

Preuve. Fixons $Y > X$ et soit $y \in Y$.

Par définition les relevés $v_1(y), \ldots, v_l(y)$ sont tangents à $\mathcal{D}_{XY}(y)$, et comme $\mathcal{D}_X$ est involutive pour tout $i, j \leq l$ alors $[v_i, v_j](y)$ est tangent à $\mathcal{D}_{XY}(y)$. Donc $[v_i, v_j](y)$ coïncide avec sa composante horizontale.

Les champs $\{v_h\}_h$ étant des relèvements π_X-contrôlés, $\pi_{XY*}(v_h) = E_h \, \forall \, h \leq l$, d'où:

$$\pi_{XY*}[v_i, v_j](y) = [\pi_{XY*}(v_i), \pi_{XY*}(v_j)](y) = [E_i, E_j](y) = 0\,,$$

donc $[v_i, v_j](y) \in \ker \pi_{XY*y}$, i.e. sa composante horizontale est nulle.

Q.E.D.

Proposition 8. *Si $\mathcal{D}_X$ est involutive, alors les champs relevés v_i sont les images des champs canoniques par la trivialisation H :*

$$v_i(y) = H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) \quad , \quad \forall \, i = 1, \ldots, l\,.$$

De plus le feuilletage intégral $\mathcal{H}'$ tangent à $\mathcal{D}_X$ coïncide avec le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_{y_0} = H(\mathbb{R}^l \times y_0)\}_{y_0 \in \pi_{XY}{}^{-1}(x_0)}$ déterminé par H.

Preuve. Fixons une strate $Y > X$ et un point $y \in Y$ $(\equiv \pi_{XY}^{-1}(U_{x_0}))$.

Il suffira de montrer que les espaces tangents aux feuilles $T_y M_y$ et $T_y M'_y$ coïncident.

Pour tout $y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0) \in Y$ la variété intégrale horizontale $M_y = M_{y_0}$ définie par H et passant par y passe aussi par y_0 et donc $T_y M_y$ est engendré par les vecteurs $\{H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)\}_i$.

En notant $w_i(y) = H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)$, $\forall \, i = 1, \ldots, l$ on a :

$$\begin{aligned} T_y M_y = T_y M_{y_0} &= T_y H(\mathbb{R}^l \times y_0) \\ &= H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(\mathbb{R}^l \times x_0) = \big[w_1(y), \ldots, w_l(y)\big]. \end{aligned}$$

Par le lemme 1, les flots ϕ_i commutent, et on peut écrire (où $\widehat{\phi}$ signifie "omission de ϕ")

$$H(t_1, \ldots, t_l, y_0) = \phi_i(t_i, \phi_l(t_l, \ldots, \widehat{\phi_i(t_i}, \ldots, \phi_1(t_1, y_0) \ldots)\,.$$

Alors pour tout $i = 1, \ldots, l$ on a :

$$w_i(y) = \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_{\tau = t_i} \phi_i(\tau, \phi_l(t_l, \ldots, \widehat{\phi_i(t_i}, \ldots, \phi_1(t_1, y_0) \ldots) =$$

$$v_i(\phi_i(t_i, \phi_l(t_l, \ldots, \widehat{\phi_i(t_i}, \ldots, \phi_1(t_1, y_0) \ldots) = v_i(H(t_1, \ldots, t_l, y_0)) = v_i(y)$$

d'où

$$T_yM_y = \big[\, w_1(y), \ldots , w_l(y) \,\big] = \big[\, v_1(y), \ldots , v_l(y) \,\big] = \mathcal{D}_{XY}(y) = T_yM'_y \,.$$

Q.E.D.

Corollaire 2. *Si $\mathcal{D}_X$ est involutive, $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur X.*

Preuve. De $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ on déduit :

$$\lim_{y \to x} T_yM'_y = \lim_{y \to x} T_yM_y = \lim_{y \to x} \mathcal{D}_{XY}(y) = T_xX \,.$$

Q.E.D.

Théorème 3. *Si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est involutive, alors $\forall\, Y > X$ le difféomorphisme ϕ_Y préserve les variétés intégrales du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$, et $\forall\, y \in Y$, $y' = \phi_Y(y)$, l'isomorphisme $\phi_{Y*y} : T_yY \to T_{y'}Y$ vérifie $\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y) = \mathcal{D}_{XY}(y')$ (i.e. préserve la distribution $\mathcal{D}_{XY}$), et se décompose en une somme directe :*

$$\phi_{Y*y} = \phi^h_y \oplus \phi^v_y \;\; : \; \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY\,*y} \xrightarrow{\phi^h_y \oplus \phi^v_y} \mathcal{D}_{XY}(y') \oplus \ker \pi_{XY\,*y'} \,.$$

La matrice $A(y)$ de l'isomorphisme $\phi^h_y : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$ par rapport aux bases $\sigma = \{v_i(y)\,\}_{i=1}^l$ et $\sigma' = \{v_i(y')\,\}_{i=1}^l$ coïncide avec la matrice $A = A(x)$ de l'isomorphisme $\phi_{X*x} : T_xX \to T_{x'}X$ ($x = \pi_{XY}(y)$) par rapport à la base $\{E_i\}_{i=1}^l$.

Preuve. Soient $Y > X$ une strate, $y \in Y$ et ζ_Y le champ continu relevé de ζ_X sur Y. Comme ζ_Y est tangent à $\mathcal{D}_{XY}$, il est (proposition 1) tangent aux variétés du feuilletage $\mathcal{H}$ et chaque trajectoire de ζ_Y est contenue dans une unique variété intégrale maximale.

En particulier, $M_y = M_{y'}$, car $y' = \phi_Y(y) = (\Phi_Y)_t(y)$.

La même propriété étant vérifiée pour tout couple de points z, $z' = \phi_Y(z)$ correspondant par ϕ_Y, pour tout $z \in M_y$ on a $M_{z'} = M_z = M_y$.

Alors,

$$\phi_Y(M_y) = \cup_{z \in M_y} \big\{\, \phi_Y(z) \,\big\} \subseteq \cup_{z \in M_y} M_{z'} = \cup_{z \in M_y} M_y = M_y$$

et le difféomorphisme ϕ_Y préserve les variétés intégrales du feuilletage $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

De même en raisonnant sur $\phi_Y^{-1} = (\Phi_Y)_{-t}$ on a $\phi_Y(M_y) = M_y$.

Comme

$$\begin{aligned}\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) = \phi_{Y*y}(T_yM_y) &= T_{y'}\ \phi_Y(M_y)\\ &= T_{y'}M_y = T_{y'}M_{y'} = \mathcal{D}_{XY}(y')\end{aligned}$$

les sous-espaces supplémentaires $\mathcal{D}_{XY}(y')$ et $\ker \pi_{XY*y'}$ de T_yY se préservent par $\phi_{Y*y} : T_yY \to T_yY$, et on a la décomposition en somme directe :

$$\phi_{Y*y} : \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y} \xrightarrow{\phi^h \oplus \phi^v} \mathcal{D}_{XY}(y') \oplus \ker \pi_{XY*y'}.$$

Soit $A(x) = A = (A^i_j)_{\substack{i\leq l\\ j\leq l}}$ (i = indice de colonne, j = indice de ligne), la matrice de l'isomorphisme $\Phi_{X*x} : T_xX \to T_{x'}X$ dans la base canonique $\{E_i\}_{i=1}^l$ de $\mathbb{R}^l \times 0$.

Pour démontrer la formule de transformation

$$(*)_Y : \qquad \phi_{Y*y}(v_i(y)) = \sum_{j=1}^{l} A^i_j v_j(y') \quad , \qquad \forall i = 1,\ldots,l$$

comme les deux membres sont (maintenant!) des vecteurs de $\mathcal{D}_{XY}(y')$ et comme $\pi_{XY*y'} : \mathcal{D}_{XY}(y') \to \mathbb{R}^l \times 0 = T_{x'}X$ est un isomorphisme [MT]$_{1,2}$, il suffit de vérifier que

$$\pi_{XY*y'}(\phi_{Y*y}(v_i(y))) \;=\; \pi_{XY*y}\Big(\sum_{j=1}^{l} A^i_j v_j(y')\Big).$$

En fait, on a

$$\pi_{XY*y'}\Big(\sum_{j=1}^{l} A^i_j v_j(y')\Big) = \sum_{j=1}^{l} A^i_j \pi_{XY*y'}(v_j(y')) = \sum_{j=1}^{l} A^i_j E_j\,,$$

et grâce à la condition de contrôle ce vecteur coïncide avec

$$\pi_{XY*y'}\big(\phi_{Y*y}(v_i(y)\big) = \phi_{X*x}\big(\pi_{XY*y}(v_i(y))\big) = \phi_{X*x}(E_i) = \sum_{j=1}^{l} A^i_j E_j.$$

Q.E.D.

Théorème 4. *Si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$ est involutive, alors le flot $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ (à l'instant $t \in \mathbb{R}$) est horizontalement-C^1 sur $X \equiv U_{x_0}$.*

Preuve. Soit $Y > X$ une strate et $\{(y_n, v_n)\}_n \subseteq TY$ une suite de vecteurs v_n sans composante verticale, i.e.

$$v_n^v = 0 \quad \text{et} \quad v_n = v_n^h \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)\,.$$

Par continuité de l'application $\phi = \cup_{Y \geq X} \phi_Y : \cup_{Y \geq X} Y \to \cup_{Y \geq X} Y$ on a $\phi_Y(y_n) = \phi_X(x)$, et il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Y *_{y_n}}(v_n) = \phi_{X *_x}(v)\,.$$

Notons $A(y_n) = \left[\phi_{Y *_{y_n}}\right]$ la matrice du théorème 3 et utilisons les notations analogues pour $A(x_n)$, $x_n = \pi_{XY}(y_n) \in X$. Notons aussi $A(y_n)^i$ et $A(x_n)^i$ leurs i−èmes colonnes.

Les relevés canoniques $v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n)$ étant une base de $\mathcal{D}_{XY}(y_n)$ on peut écrire $v_n = \sum_{i=1}^l \lambda_i^n v_i(y_n)$ pour des $\lambda_i^n \in \mathbb{R}$ convenables.

Pour $v \in \mathbb{R}^l \times 0$, notons $v = \sum_{i=1}^l \lambda_i E_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$. Les champs de vecteurs v_i étant des relevés continus de champs canoniques E_i on a :

$$\lim_n v_i(y_n) = E_i \quad \text{et donc} \quad \lim_{n \to \infty} (\lambda_1^n, \ldots, \lambda_l^n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l).$$

En notant $M \cdot W = \sum_{i=1}^k \mu_i w_i$ par le produit d'un k-uplet de scalaires $M = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ et un k-uplet de vecteurs $W = (w_1, \ldots, w_k)$ on peut écrire :

$$\phi_{Y *_{y_n}}(v_n) = \sum_{i=1}^l \lambda_i^n \phi_{Y *_{y_n}}(v_i(y_n)) = \sum_{i=1}^l \lambda_i^n \left[\phi_{Y *_{y_n}}\right]^i \cdot (v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n))$$

qui grâce au théorème 3 coïncide avec

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i^n \left[\phi_{X *_{x_n}}\right]^i \cdot (v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n))$$

et donc on déduit que :

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Y *_{y_n}}(v_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^l \lambda_i^n \left[\phi_{X *_{x_n}}\right]^i \cdot (v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n)).$$

Alors on peut conclure que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \phi_{Y*y_n}(v_n) &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left[\phi_{X*x}\right]^i \cdot (E_1, \ldots, E_l) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \phi_{X*x}(E_i) = \phi_{X*x}(v),\end{aligned}$$

car $\lim_n \phi_{X*x_n} = \phi_{X*x}$, $\lim_{n\to\infty}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_l^n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, et les champs relevés canoniques $v_1, \ldots, v_l$ de $E_1, \ldots, E_l$ vérifient

$$\lim_{n\to\infty}(v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n)) = (E_1, \ldots, E_l)\,.$$

Q.E.D.

Corollaire 3. *Si* $\dim X = 1$, *toute distribution canonique locale ou globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. Donc tout relèvement continu contrôlé* $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y\geq X}$ *d'un champ de vecteurs* ζ_X *défini sur une strate* X *de dimension* 1 *a un flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ *horizontalement-*C^1 *sur* X.

Corollaire 4. *Si* $\dim X = \dim A - 1$, *la distribution canonique globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. Donc tout relèvement continu contrôlé* $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geq X}$ *d'un champ de vecteurs* ξ_X *a un flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ *horizontalement-*C^1 *sur* X.

Preuve. Si $\dim X = \dim A - 1$, alors, par (c)-régularité de la stratification, chaque système de donnée de contrôle $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}$ admet une seule distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$, qui s'obtient en prenant $\mathcal{D}_{XY}(y) = \ker \rho_{XY*y}$ pour toute $Y > X$.

Une telle distribution canonique globale $\mathcal{D}_X$ est nécessairement intégrable sur T_X tout entier, admettant comme variétés intégrales maximales les hypersurfaces de niveaux $\{\rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y)\}_y$ de $\rho_{XY} : T_{XY} \to [0, \infty[$. Le résultat découle alors du théorème 4. Q.E.D.

4.2. $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y\}_{Y\geq X}$.

Dans cette section, nous améliorons les résultats du 4.1 en démontrant que le flot $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ d'un champ $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geq X}$ relevé continu contrôlé dans une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ involutive est $\mathcal{F}$-semidifférentiable par rapport au feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)\}_{y\in\pi_X^{-1}(x_0)}$ de $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$, i.e. il est $\mathcal{H}$-semidifférentiable.

Ceci signifie qu'étant donnée une strate $Z > X$ et une suite $\{(z_n, v_n)\}_n \subseteq TZ$ convergeant en un point $(y, v) \in TY$, où Y est une strate telle que

$Z > Y > X$ on a $\lim_n \phi_{Z*z_n}(v_n) = \phi_{Y*y}(v)$, au moins pour les suites v_n "horizontaux par rapport à X" (X*−horizontaux*), i.e. : $v_n \in \mathcal{D}_{XZ}(z_n)$.

Avec les mêmes hypothèses et notations qu'aux théorèmes 3 et 4 :

Théorème 5. *Pour toutes $Z > Y > X$ et $\forall z \in Z \equiv T_{XZ} \cap T_{YZ}$ en notant $z' = \phi_Z(z)$, $y = \pi_{YZ}(z)$ et $y' = \pi_Y(z') = \phi_Y(y')$, la matrice $A(z)$ de l'isomorphisme restriction $\phi_{Z*z|} : \mathcal{D}_{XZ}(z) \to \mathcal{D}_{XZ}(z')$ par rapport aux bases $\sigma_z = \{v_i(z)\}_i$ et $\sigma'_{z'} = \{v_i(z')\}_i$ coïncide avec la matrice $A = A(y)$ de l'isomorphisme restriction $\phi_{Y*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$ par rapport aux bases canoniques $\sigma_y = \{v_i(y)\}_i$ et $\sigma'_{y'} = \{v_i(y')\}_i$.*

Preuve. Grâce au théorème 4, $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ étant involutive, on a bien deux isomorphismes de restriction

$$\phi_{Z*z|} : \mathcal{D}_{XZ}(z) \to \mathcal{D}_{XZ}(z') \quad \text{et} \quad \phi_{Y*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y').$$

En notant $A = \left(A^i_j\right)_{\substack{i \leq l \\ j \leq l}}$, la thèse s'obtient en démontrant la formule:

$$(*)_Z \quad : \quad \phi_{Z*z}(v_i(z)) = \sum_{j=1}^{l} A^i_j v_j(z') \quad , \qquad i = 1, \dots, l.$$

La distribution canonique $\mathcal{D}_X$ est (par construction) *multicompatible* avec une distribution canonique $\mathcal{D}_Y = \{\mathcal{D}_{YZ}\}_{Z \geq Y}$ ([MT]$_2$, Proposition dans §5) , c.à.d. $\mathcal{D}_{XZ}(z') \subseteq \mathcal{D}_{YZ}(z')$.

L'application $\pi_{YZ*z'} : \mathcal{D}_{YZ}(z') \to T_{y'}Y$ étant un isomorphisme, $\mathcal{D}_{XZ}(z')$ se projette isomorphiquement sur un sous-espace vectoriel de $T_{y'}Y$. Ce sous-espace est, grâce aux conditions de contrôle, précisément $\mathcal{D}_{XY}(y')$, et donc on a l'isomorphisme de restriction

$$\pi_{YZ*z'|} \ : \ \mathcal{D}_{XZ}(z') \ \to \ \mathcal{D}_{XY}(y').$$

et la preuve de $(*)_Z$ découlera l'égalité des deux images via $\pi_{YZ*z'}$:

$$\pi_{YZ*z'}(\phi_{Z*z'}(v_i(z'))) = \pi_{YZ*z'}\Big(\sum_{j=1}^{l} A^i_j v_j(z')\Big).$$

En fait, comme ϕ_Z est π_Y-contrôlé et $v_i(z)$ est le π_{YZ}-relevé contrôlé de $v_i(y)$ on a :

$$\pi_{YZ*z'}(\phi_{Z*z}(v_i(z))) = \phi_{Y*y}(\pi_{YZ*z}(v_i(z))) = \phi_{Y*y}(v_i(y))$$

et de façon analogue on trouve :

$$\pi_{YZ*z'}\Big(\sum_{j=1}^{l} A_j^i v_j(z')\Big) = \sum_{j=1}^{l} A_j^i \pi_{YZ*z'}\big(v_j(z')\big) = \sum_{j=1}^{l} A_j^i v_j(y') \,.$$

On conclut alors car l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ (théorème 1) entraîne

$$(*)_Y \quad : \quad \phi_{Y*y}(v_i(y)) = \sum_{j=1}^{l} A_j^i v_j(y') \quad , \qquad i = 1, \ldots, l \,.$$

Q.E.D.

Proposition 9. *Si $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est involutive, le feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)\}$ est (a)-régulier sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$.*

Preuve. Soit $Y > X$ une strate et fixons une strate $Z > Y$.

Pour tout $z \in Z \equiv T_{YZ}$, par l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ et la proposition 1 on a : $T_z\mathcal{H} = T_z M_z = \mathcal{D}_{XZ}(z)$.

La distribution canonique étant continue sur $Y \equiv T_{XY}$, $\forall\, y' \in T_{XY}$ on a

$$\lim_{z \to y'} T_z\mathcal{H} = \lim_{z \to y'} \mathcal{D}_{XZ}(z) = \mathcal{D}_{XY}(y')$$

et comme $\mathcal{D}_{XY}(y') \subseteq T_{y'}Y$, on déuit la (a)-régularité de $\mathcal{H}$ sur Y.

Q.E.D.

Théorème 6. *Si $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est involutive et si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_0} = \{M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)\}_y$ désigne le feuilletage défini sur le voisinage $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ par la trivialisation topologique de la projection $\pi_X : T_X \to X$, alors le flot relevé $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ est $\mathcal{H}$-semidifférentiable sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$.*

Preuve. Pour que la notion de $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité ait du sens il faut que le feuilletage $\mathcal{H}$ soit (a)-régulier et ceci est assuré par la proposition 9 ci-dessus.

En considérant alors une suite $\{(z_n, v_n)\} \in T\mathcal{H}$ $(y, v) \in \{y\} \times T_y\mathcal{H} \subseteq T_yY$, la preuve est analogue à celle du théorème 4. En fait, comme $v_n \in T_{z_n}\mathcal{H} = T_{z_n}M_{z_n} = \mathcal{D}_{XZ}(z_n)$ et ce dernier est engendré par les relevés canoniques $v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n)$, nous pouvons écrire

$$v_n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n v_i(z_n) \quad \text{pour des } \lambda_1^n, \ldots, \lambda_l^n \in \mathbb{R} \text{ convenables}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De même, comme $v \in T_y\mathcal{H} = T_yM_y = \mathcal{D}_{XY}(y)$ et que ce dernier est engendré par les vecteurs canoniques relevés $v_1(y), \ldots, v_l(y)$ on peut également écrire :

$$v = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i(y) \quad \text{pour des } \lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R} \text{ convenables.}$$

Les relèvements $v_i(z)$ étant continus sur Y de $\lim\limits_{z_n \to y} v_i(z_n) = v_i(z)$ on a :

$$(1): \qquad \lim_{n\to\infty} (\lambda_1^n, \ldots, \lambda_l^n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l).$$

En notant alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \pi_{YZ}(z_n)$, et en utilisant des notations analogues à celles du théorème 2 pour les matrices (et leurs i-colonnes)

$$A(z_n) = \left[\phi_{Z*z_n|}\right] \quad , \quad A(y_n) = \left[\phi_{Y*y_n|}\right] \quad , \quad A(y) = \left[\phi_{Y*y|}\right]$$

$$A(z_n)^i = \left[\phi_{Z*z_n|}\right]^i \quad , \quad A(y_n)^i = \left[\phi_{Y*y_n|}\right]^i \quad , \quad A(y)^i = \left[\phi_{Y*y|}\right]^i$$

on peut écrire :

$$\phi_{Z*z_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \phi_{Z*z_n}(v_i(z_n)) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Z*z_n|}\right]^i \cdot (v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n)) \,.$$

Par le théorème 3, les deux matrices suivantes coïncident :

$$[\phi_{Z*z_n|}] = A(z_n) = A(y_n) = [\phi_{Y*y_n|}]$$

et on a :

$$\phi_{Z*z_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Y*y_n|}\right]^i \cdot (v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n))$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Z*z_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Y*y_n|}\right]^i \cdot (v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n)) \,.$$

Finalement, par la continuité des relevés $v_i(z_n)$ qui convergent vers les champs $v_i(y)$ quand $z_n \to y$, la relation de limite (1) et la relation $\lim_{y_n \to y}\left[\phi_{Y*y_n|}\right] = \left[\phi_{Y*y|}\right]$ (car $\phi_Y : Y \to Y$ est lisse), on conclut que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \phi_{Z*z_n}(v_n) &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left[\phi_{Y*y}\right]^i \cdot (v_1(y), \ldots, v_l(y)) \\
&= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \phi_{Y*y} v_i(y) = \phi_{Y*y}(v) \,.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Comme pour le cas horizontalement-C^1, en améliorant les corollaires 3 et 4 on trouve:

Corollaire 5. *Si* $\dim X = 1$, *toute distribution canonique locale ou globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. En particulier tout flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ *obtenu à partir d'un relèvement continu contrôlé d'un champ de vecteurs* ζ_X *défini sur une strate* X *de dimension* 1 *est* $\mathcal{H}$*-semidifférentiable sur* X.

Corollaire 6. *Si* $\dim X = \dim A - 1$, *la distribution canonique globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. Donc tout relèvement continu contrôlé* $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ *d'un champ de vecteurs* ξ_X *a un flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ $\mathcal{H}$*-semidifférentiable.*

Preuve. Si $\dim X = \dim A - 1$ la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ est unique (comme on l'a vu au corollaire 3), globalement définie sur T_X et intégrable, car $\forall Z > X$ elle coïncide avec $\mathcal{D}_{XZ}(y) = \ker \rho_{XZ*y}$. De plus, le feuilletage $\mathcal{H}$ a pour feuilles les hypersurfaces de niveaux $\{\rho_{XZ}^{-1}(\rho_{XZ}(y)\}_y$ de la fonction distance $\rho_{XY} : T_{XZ} \to [0, \infty[$.
Comme $\dim X = \dim A - 1$ et $Z > X$, on a $\dim Z = \dim A$, et donc il n'existe aucune strate Y vérifiant $Z > Y > X$. Le flot $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ est alors $\mathcal{H}$-semidifférentiable si et seulement s'il est horizontalement-C^1. Q.E.D.

4.3. Quelques caractérisations de l'involutivité de $\mathcal{D}_X$.

Le domaine de la trivialisation H de la projection $\pi_X : T_X \to X$ est le produit $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$ dont la projection (*verticale*) sur $\mathbb{R}^l$ corresponde via H à π_X. De même, l'homéomorphisme H induit une *projection horizontale* π' correspondant à la projection pr_2 sur $\pi_X^{-1}(x_0)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) & \xrightarrow{H} & \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \\ {\scriptstyle pr_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ \pi_X^{-1}(x_0) & \xrightarrow{H|_{\pi_X^{-1}(x_0)} = id} & \pi_X^{-1}(x_0). \end{array}$$

Les deux feuilletages (horizontal et vertical) triviaux transverses de $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$ induisent via H deux feuilletages transverses dans $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$: le feuilletage horizontal que nous avons noté $\mathcal{H}$ et le feuilletage vertical, ayant pour variétés intégrales les fibres de la projection π_{XY} (H étant contrôlée), que nous avons précédemment noté $\mathcal{V}$ au §3.

Sur toute strate $Y > X$, les traces de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ induisent deux feuilletages transverses, $\mathcal{H}_Y$ et $\mathcal{V}_Y$, dont les feuilles $(M_y, {\pi_{XY}}^{-1}(x))$ se coupent en un unique point $\{y_x\} = M_y \cap {\pi_{XY}}^{-1}(x)$. Ce point y_x a pour variété intégrale verticale la fibre de π_{XY} passant par y_x, et pour variété intégrale horizontale la fibre M_y de π'.

Lemme 2. *Pour tout $Y > X$, et $y \in \pi_{XY}(U_{x_0})$, la projection horizontale π' envoie la variété intégrale horizontale M_y sur le point où elle rencontre la fibre ${\pi_{XY}}^{-1}(x_0)$:*

$$\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0)\,,$$
$$\pi'(M_y) = M_y \cap {\pi_{XY}}^{-1}(x_0) = y_0 \quad \text{où} \quad y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0).$$

Donc, les feuilles de $\mathcal{H}$ coïncident avec les fibres de la projection horizontale π'.

Définition 9. *Un champ de vecteurs ζ sur Y sera dit contrôlé par rapport à la projection π' si pour tout $y, y' \in Y$ dans la même fibre de π', on a : $\pi'_{*y}(\zeta(y)) = \pi'_{*y'}(\zeta(y'))$.*

Ceci est valable si et seulement si il existe un champ de vecteurs η tangent à $\pi_X^{-1}(x_0)$ tel que $\pi'_{*y}(\zeta(y)) = \eta(\pi'(y))\,,\ \forall\, y \in \pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

Un tel champ sera alors noté par $\eta(y_0) = \pi'_{*y}(\zeta(y))$, y étant un point arbitraire de la fibre $\pi'^{-1}(y_0)$.

Théorème 7. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est une distribution involutive dans $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

2) Pour tout relèvement continu contrôlé $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ d'un champ de vecteurs ζ_X sur X, et $\forall\, Y > X$,

$$\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) = \mathcal{D}_{XY}(y') \quad , \quad \forall\, y, y' = \phi_Y(y) \in Y$$

et en particulier on a la décomposition en somme directe $\phi_{Y*y} = \phi^h \oplus \phi^v$.

3) Pour tout champ ζ_X sur X, le relèvement continu contrôlé $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ du champ ζ_X dans $\mathcal{D}_X$ est contrôlé par rapport à la projection horizontale π' et on a $\pi'_*(\zeta_Y) = 0$.

4) $[v_i, v_j] = 0$ pour tout $i, j = 1, \ldots, l$.

Preuve. $(1 \Leftrightarrow 2)$. Voir les preuves des théorèmes 3 et 4 au §4.1.

$(1 = 2 \Rightarrow 3)$. Soit $Y > X$.

Par hypothèse d'involutivité, $\forall\ y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0) \in Y$ on a $\mathcal{D}_{XY}(y) = T_y M_{y_0}$, par définition du relèvement canonique $\zeta_Y(y) \in \mathcal{D}_{XY}(y)$, et alors $\zeta_Y(y) \in T_y M_{y_0} = \ker \pi'_{*y}$. Donc $\pi'_{*y}(\zeta_Y(y)) = 0$.

$(3 \Rightarrow 4)$. Par hypothèse, chaque relèvement v_i (du champ canonique E_i), est π'-contrôlé : $\pi'_{*y}(v_i(y)) = \pi'_{*y_0}(v_i(y_0)) = 0$.

Donc $\pi'_{*y}([v_i, v_j]) = [\pi'_{*y}(v_i), \pi'_{*y}(v_j)] = 0$, i.e. les crochets de Lie $[v_i, v_j](y) \in \ker \pi'_{*y}$ sont tangents au feuilletage horizontal $\ker \pi'_{*y}$.

D'autre part, par la condition de π_X-contrôle on a :

$$\pi_{XY*y}([v_i, v_j]) = [\pi_{XY*y}(v_i), \pi_{XY*y}(v_j)] = [E_i, E_j] = 0, \forall\, i, j = 1, \ldots, l$$

et donc $[v_i, v_j](y) \in \ker \pi_{XY*y}$ est un champ vertical.

Par transversalité et complémentarité de dimension on conclut alors:

$$[v_i, v_j](y) \in \ker \pi'_{*y} \cap \ker \pi_{XY*y} = \{0\}$$

$(4 \Leftrightarrow 1)$. C'est le lemme 1 au §4.1. Q.E.D.

§5. Cas général : $\mathcal{D}_X$ non nécessairement involutive.

Notons $\pi_X^{-1}(U_{x_0}) = W$ par simplicité.

Dans ce paragraphe, on montre que si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ n'est pas intégrable, la (a)-régularité du feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$ (condition nécessaire mais pas suffisante pour l'involutivité de $\mathcal{D}_X$) peut alors remplacer l'hypothèse d'involutivité de $\mathcal{D}_X$ en vue d'obtenir des flots relevés et de façon plus générale des morphismes stratifiés horizontalement-C^1 et $\mathcal{H}$-semidifférentiables.

La distribution canonique $\mathcal{D}_X$ introduite dans $[\mathrm{MT}]_{1,2}$ est "canonique" dans le sens où elle vérifie des propriétés importantes obtenues dans $[\mathrm{MT}]_{1,2}$, mais elle n'est pas univoquement déterminée et dépend du S.D.C. considéré et d'une partition de l'unité.

La distribution $\mathcal{D}'_X = \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tangent au feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$, i.e. :

$$\mathcal{D}'_X(y) = T_y\mathcal{H}_y = T_y M_y \quad , \quad \forall\, y \in W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$$

ne coïncide pas en général avec $\mathcal{D}_X$ (sauf quand $\mathcal{D}_X$ est integrable) et vérifie toutes ces conditions de $[\mathrm{MT}]_{1,2}$, sauf éventuellement la condition de continuité. D'autre part, la (a)-régularité du feuilletage local $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$ équivaut à la continuité de $\mathcal{D}'_X$ sur W et donc, si $\mathcal{H}$ est (a)-régulier, $\mathcal{D}'_X$ peut être réinterprétée comme une distribution canonique locale définie dans le voisinage W de x_0 dans $\mathcal{X}$.

La différence par rapport aux résultats du §4, où $\mathcal{D}_X$ est supposée involutive, est que maintenant nous trouvons des flots de champs relevés qui sont horizontalement-C^1, non plus par rapport à $\mathcal{D}_X$, mais par rapport à $\mathcal{D}'_X$. Cela signifie en particulier que nous devons remplacer les champs $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y\geq X}$ et les flots $\phi = \{\phi_Y\}_{Y\geq X}$ précédents (relevés dans $\mathcal{D}_X$) respectivement par les champs $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geq X}$ et les flots $\psi = \{\psi_Y\}_{Y\geq X}$ correspondants relevés sur le feuilletage $\mathcal{H}$ (i.e. sur $\mathcal{D}'_X$). Grâce à la (a)-régularité de $\mathcal{H}$, le relevé ξ sera (de même que ζ) un relèvement continu et contrôlé de ζ_X (mais, ne disposant pas de l'involutivité de $\mathcal{D}_X$[3], ξ ne coïncidera pas avec ζ, ni ψ avec ϕ).

5.1. Régularité horizontalement-C^1.

Avant d'énoncer les théorèmes de régularité des morphismes stratifiés soumis à l'existence d'un feuilletage (a)-régulier, précisons que A. du Plessis et D. Trotman ont vérifié en 1994 que, même dans le cas d'une stratification (b)-régulière, une distribution canonique n'est pas nécessairement involutive.

Conjecture (D. Trotman, 1993). *Toute stratification (b)-régulière admet localement une distribution canonique involutive (et donc un feuilletage horizontal (a)-régulier).*

Une telle propriété pourrait aussi avoir lieu pour des stratifications (c)-régulières.

Théorème 8. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Le relèvement contrôlé $\xi = \{\xi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ tangent à $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ de tout champ de vecteurs ξ_X sur X est continu sur U_{x_0} et a un flot $\psi = \{\psi^t_Y\}_{Y\geq X}$, horizontalement-$C^1$ sur U_{x_0}.

2) Les relèvements contrôlés w_i tangents à $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ des champs canoniques E_i sont continus sur U_{x_0} pour tout $i = 1,\dots,l$, et ont des flots $\psi_i = \{\psi^t_{iY} : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ horizontalement-C^1 sur U_{x_0}.

3) L'homéomorphisme de trivialisation topologique de la projection $\pi_X : T_X \to X$,

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$$

est horizontalement-C^1 sur $\mathbb{R}^l \times \{x_0\}$.

4) $\lim_{(t_1,\dots,t_l,y_0)\to x} H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) = E_i\,,\ \forall x \in X \equiv U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l\,,\ \forall i = 1,\dots,l$ *;*

5) Le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ induit par H est (a)-régulier sur U_{x_0} (i.e. il vérifie la conjecture de Trotman sur U_{x_0}) .

[3]Ce qui assurerait que $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}'_X$ comme on l'a vu au §4.

Le lemme suivant est nécessaire :

Lemme 3. *Chaque champ* $w_i(y) = H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)$ *est l'unique relèvement controlé du champ canonique* E_i *tangent aux feuilles du feuilletage horizontal* $\mathcal{H}$.

Preuve. Les champs $v_j(y)$ étant les relèvements contrôlés dans $\mathcal{D}_{XY}(y)$ leurs flots $\phi_j^\tau = \{\phi_{jY}^\tau : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ sont aussi contrôlés et vérifient $\forall\, j \leq l$:

$$\pi_{XY*y}\,\phi_{jY*y}^\tau = \phi_{jX*x}^\tau\,\pi_{XY*y} \qquad \text{où} \quad x = \pi_{XY}(y)$$

et $\phi_{jX*x}^\tau = id_{T_xX} = id_{\mathbb{R}^l}$ car chaque ϕ_{jX} est le flot “identique” du champ E_j sur X.

La trivialisation H définie par compositions des ϕ_j est alors contrôlée et on a

$$\begin{aligned}\pi_{XY*y}\big(w_i(y)\big) &= \pi_{XY*y}H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)\\ &= H_{*x}\pi_{XY*y}(E_i) = id_{\mathbb{R}^l}(E_i) = E_i\,.\end{aligned}$$

Chaque $w_i(y)$ est donc π_X-contrôlé et de manière similaire il est ρ_X-contrôlé.

Pour tout $y = H(t_1,\ldots,t_l,y_0)$, en considérant le difféomorphisme restriction de H, $H_{|\mathbb{R}^l\times y_0} : \mathbb{R}^l\times\{y_0\} \xrightarrow{\simeq} H(\mathbb{R}^l\times y_0)$, à la variété intégrale $M_y = M_{y_0} = H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ on a :

$$w_i(y) = H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) = \big[H_{|\mathbb{R}^l\times y_0}\big]_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)$$

et donc chaque $w_i(y)$ est tangent à la feuille horizontale M_y de $\mathcal{H}$.

En conclusion, pour tout $Y > X$, si $y \in Y$ on a

$$w_i(y) \in \pi_{XY*y}^{-1}(E_i) \cap T_y\,H(\mathbb{R}^l \times y_0)$$

où par transversalité et complémentarité de dimension dans T_yY, l'intersection $\pi_{XY*yy}^{-1}(E_i) \cap T_y\,H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ se réduit alors à un unique vecteur.
Q.E.D.

Preuve (du théorème 8). (3 $\Leftrightarrow$ 4). Considérons le domaine de H muni de la stratification produit de $\mathbb{R}^l$ et de $\pi_X^{-1}(x_0)$:

$$\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) = \mathbb{R}^l \times \{x_0\} \cup \big[\cup_{Y>X}\mathbb{R}^l \times \pi_{XY}^{-1}(x_0)\big]$$

et considérons sur $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$ le S.D.C. induit par l'homéomorphisme stratifié H.

Si $A = \mathbb{R}^l \times \{x_0\}$, alors toute strate $B > A$ de $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$ est du type $B = \mathbb{R}^l \times \pi_{XY}^{-1}(x_0)$ avec $Y > X$, et on a une distribution canonique évidente $\mathcal{D}_A = \{\mathcal{D}_{AB}\}_{B \geq A}$:

$$\mathcal{D}_{AB}(t_1, \ldots, t_l, y_0) = \mathbb{R}^l \times \{y_0\} \quad , \quad \forall\, (t_1, \ldots, t_l, y_0) \in B \ , \ \forall B > A$$

sur $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$ relative à la strate A.

Alors $\mathcal{D}_{AB}(t_1, \ldots, t_l, y_0) = [E_1, \ldots, E_l]$ et tout vecteur horizontal tangent à B est une combinaison linéaires de $E_1, \ldots, E_l$ et donc H est horizontalement-C^1 par rapport à $\mathcal{D}_A$ si et seulement si :

$$(*) \ : \ \lim_{(t_1,\ldots,t_l,y_0)\to x} H_{B*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) = H_{A*x}(E_i)\,, \quad \forall x \in A,\ \forall\, i \leq l\,.$$

Par l'identification $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$, la restriction H_A de H à A coïncide avec l'identité de la strate $A = \mathbb{R}^l \times \{x_0\}$. Donc $H_{A*x}(E_i) = E_i$ et on conclut grâce à (*).

($4 \Leftrightarrow 5$). Grâce au lemme 3, les champs de vecteurs images

$$H_{B*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) \quad \text{où} \quad y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0) \ , \ \forall\, i = 1, \ldots, l$$

coïncident avec les champs $w_i(y)$ relevés contrôlés sur le feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$.

Or, les feuilles $M_y = H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ ont pour espaces tangents

$$\begin{aligned} T_y\mathcal{H}_y = T_yM_y &= H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(\mathbb{R}^l \times 0) \\ &= \left[\left\{H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)\right\}_{i \leq l}\right] = [\{w_i(y)\}_{i \leq l}] \end{aligned}$$

et donc *4)* est valable si et seulement si $\forall\, x \in A$ et $\forall\, i \leq l$:

$$\begin{aligned} \lim_{(t_1,\ldots,t_l,y_0)\to x} H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) = E_i \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{y\to x} w_i(y) = E_i \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{y\to x} T_y\mathcal{H}_y = \mathbb{R}^l \times 0\,, \end{aligned}$$

i.e. si et seulement si $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur $X \equiv U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0$.

($4 = 5 \Rightarrow 1$). Comme $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur U_{x_0}, $\mathcal{D}'_X$ est alors continue sur $X \equiv U_{x_0}$ et une distribution canonique relative à la strate X.

En admettant comme feuilletage $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}'_X$ est intégrable et donc par le lemme 3 les relevés des champs canoniques E_i dans $\mathcal{D}'_X$ sont les champs w_i continus sur X.

De même, pour tout champ de vecteurs ξ_X sur X, son relevé $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ tangent à $\mathcal{H}$, coïncide avec le relevé canonique de ξ_X dans $\mathcal{D}'_X$ qui est continu sur X.

On conclut alors, grâce au théorème 4 du §4.1, que son flot (à tout instant $t \in \mathbb{R}$) $\psi = \{\psi_Y^t : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ est horizontalement-C^1 sur X.

($1 \Rightarrow 2$). C'est évident en considérant $w_i(y)$ comme relèvement de $\xi_X = E_i$, pour tout $i = 1, \ldots, l$.

($2 \Rightarrow 4$). Les champs de vecteurs $w_1, \ldots, w_l$ coïncident (lemme 3) avec les relèvements contrôlés tangents à $\mathcal{H}$ et

$$T_y\mathcal{H}_y = T_yM_y = [w_1(y), \ldots, w_l(y)] .$$

Par hypothèse, $w_1, \ldots, w_l$ étant continus sur X on a $\lim_{y \to x} w_i(y) = E_i$.

Donc : $\lim_{y \to x} T_y\mathcal{H}_y = \lim_{y \to x}[w_1(y), \ldots, w_l(y)] = [E_1, \ldots, E_l] = T_xX$.

Q.E.D.

La remarque ci-dessous est élémentaire.

Remarque 14. *Le feuilletage $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur $X \equiv U_{x_0}$ si et seulement si le morphisme stratifié de projection horizontale π'*

$$\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \longrightarrow \pi_X^{-1}(x_0) \quad , \quad \pi'(M_{y_0}) = y_0$$

vérifie la condition (a_f) de Thom sur $X \equiv U_{x_0}$.

Nous introduisons maintenant la notion d'application π'-contrôlée résumant les propriétés essentielles qui nous ont permis de démontrer les théorèmes de régularité horizontalement-C^1 et $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité des flots des champs relevés du §4.1 et §4.2. Ceci permettra d'obtenir des théorèmes analogues pour des morphismes stratifiés plus généraux.

Le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_0}$ n'est pas intrinsèque car il dépend de $x_0 \in X$ "centre" de la trivialisation H et de l'ordre de composition des flots $\phi_1, \ldots, \phi_l$ qui définissent H (mais si $\mathcal{D}_X$ est involutive, $\mathcal{H}$ devient intrinsèque !). Par conséquent, la projection horizontale $\pi' : W = \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0)$ n'est pas intrinsèque non plus.

Définition 10. *Soient $f = \{f_Y\}_Y : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ un morphisme stratifié, $X \in \Sigma$, $x_0 \in X$, $X' \in \Sigma'$ la strate telle que $f(X) \subseteq X'$, $x_0' = f_X(x_0)$, $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ et $W' = \pi_{X'}^{-1}(U'_{x_0'})$.*

On dira que f est π'-contrôlé (par rapport aux feuilletages horizontaux $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$ de A et $\mathcal{H}' = \{M'_y\}_{y' \in W'}$ de A') si pour toute feuille $M_y \in \mathcal{H}$, on a $f_Y(M_y) \subseteq M_{y'}$ où $y' = f_Y(y)$ (i.e. si f envoie chaque feuille horizontale de $\mathcal{H}$ dans une feuille de $\mathcal{H}'$).

D'après le lemme 2 du §4.3, $M_y = \pi'^{-1}_{XY}(\pi'_{XY}(y))$ et donc f est π'-contrôlé si et seulement s'il vérifie la *condition de contrôle horizontale*

$$f_Y\big(\pi'^{-1}_{XY}(\pi'_{XY}(y))\big) \subseteq \pi'^{-1}_{X'Y'}\big(\pi'_{X'Y'}(f_Y(y))\big) \quad , \quad \forall\, y \in Y \text{ et } \forall\, Y \geq X\,.$$

Le théorème 9 étend à des morphismes stratifiés plus généraux les résultats du §4.1.

Théorème 9. *Soit $f = \{f_Y\}_{Y\in\Sigma} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ un morphisme stratifié contrôlé entre deux espaces stratifiés (c)-réguliers $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$.*

Soient $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ et $\mathcal{H}' = \{M_{y'}\}_{y'\in W'}$ deux feuilletages stratifiés respectivement du voisinage $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de $x_0 \in X$ dans A et du voisinage $W' = \pi_{X'}^{-1}(U'_{x'_0})$ de $x'_0 = f(x_0) \in X'$ dans A'.

Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont (a)-réguliers sur U_{x_0} et $U'_{x'_0}$ et si f est π'-contrôlé par rapport à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$, alors f est horizontalement-C^1 sur U_{x_0}.

Preuve. Supposons $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A' \subseteq \mathbb{R}^m$ et considérons les distributions tangentes aux feuilletages $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ et $\mathcal{H}' = \{M_{y'}\}_{y'\in W'}$, définies localement sur W et W' par :

$$\mathcal{D}_X = \mathcal{D}(\mathcal{H}) \quad , \quad \mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X} \quad , \quad \mathcal{D}_{XY}(y) = T_yM_y$$

$$\mathcal{D}_{X'} = \mathcal{D}(\mathcal{H}') \quad , \quad \mathcal{D}_{X'} = \{\mathcal{D}_{X'Y'}\}_{Y'\geq X'} \quad , \quad \mathcal{D}_{X'Y'}(y') = T_{y'}M_{y'}\,.$$

Comme $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont deux feuilletages stratifiés de dimensions $\dim\mathcal{H} = \dim X$ et $\dim\mathcal{H}' = \dim X'$, les feuilles $M_y \in \mathcal{H}$ et $M_{y'} \in \mathcal{H}'$ sont transverses aux projections π_X et $\pi_{X'}$, contenues dans les fibres des fonctions distances ρ_X et $\rho_{X'}$, et $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont (a)-réguliers sur U_{x_0} et sur $U'_{x'_0}$, alors $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X'}$ définissent deux distributions canoniques locales relatives respectivement aux strates U_{x_0} et $U'_{x'_0}$ de W et W'.

Fixons une strate $Y \geq X$ de Σ. Soit $Y' \geq X'$ la strate de Σ' contenant $f_Y(Y)$, et pour tout $y \in Y$ notons $y' = f(y) \in Y'$.

Comme $f = \cup_{Z\in\Sigma} f_Z$ est π'-contrôlée par rapport aux feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ nous avons $f_Y(M_y) \subseteq M_{y'}$ et donc pour tout $y \in Y$ l'application $f_{Y*y} : T_yY \to T_{y'}Y'$ vérifie

$$f_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) = f_{Y*y}(T_yM_y) \subseteq T_{y'}M_{y'} = \mathcal{D}_{X'Y'}(y')\,.$$

Or, f est π-contrôlée d'où $f_Y(\ker\pi_{XY*y}) \subseteq \ker\pi_{X'Y'*y'}$ et f_{Y*y} se décompose en somme directe

$$f_{Y*y} = f_y^h \oplus f_y^v \;:\; \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker\pi_{XY*y} \longrightarrow \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \oplus \ker\pi_{X'Y'*y'}\,.$$

Soit $p \in U_{x_0}$ et $p' = f(p)$.

Afin de montrer que f est horizontalement-C^1 en p, U_{x_0} et $U'_{x'_0}$ étant des domaines des systèmes de coordonnées locales de X et X', on prend $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ et $U'_{x'_0} \equiv \mathbb{R}^{l'} \times 0^{m-l'}$.

Notons alors $\sigma = (E_1, \ldots, E_l)$ le champ de repères constants coordonnées de U_{x_0} et $\sigma_y = (v_1(y), \ldots, v_l(y))$ les champs de repères relevés continus contrôlés dans $\mathcal{D}_X$.

De même considérons les champs de repères $\sigma' = (E'_1, \ldots, E'_{l'})$ et $\sigma_{y'} = (v'_1(y'), \ldots, v'_{l'}(y'))$ et pour tout $y \in W$ notons $x = \pi_{XY}(y)$.

Comme f est π-contrôlée, on a l'égalité :

$$\pi_{X'Y'*y'} f_{Y*y} = f_{X*x} \pi_{XY*y} \quad , \quad \forall\, y \in Y \;\text{ et }\; \forall\, Y > X$$

grâce à laquelle il est facile de vérifier que la matrice $A(y)$ qui représente $f_y^h : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{X'Y'}(y')$ par rapport aux bases $\sigma_y = \{v_i(y)\}_{i=1}^{l}$ et $\sigma_{y'} = \{v'_j(y')\}_{j=1}^{l'}$ coïncide avec la matrice $A = A(x) = (A_j^i)_{i,j}$ qui représente l'application linéaire $f_{X*x} : T_x X \to T_{x'} X'$ par rapport aux bases canoniques $\sigma = (E_1, \ldots, E_l)$ et $\sigma' = (E'_1, \ldots, E'_{l'})$.

Cela s'obtient, comme pour le théorème 3 dans le §4.1, en observant que $\forall\, i = 1, \ldots, l$ les deux vecteurs $f_{Y*y}(v_i(y))$ et $\sum_{j=0}^{l'} A_j^i v'_j(y')$ appartiennent à $\mathcal{D}_{X'Y'}(y')$, qu'ils ont la même image via la restriction de la projection $\pi_{X'Y'*y'|} : \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \to T_{x'}X'$ et que cette dernière est un isomorphisme car $\mathcal{D}_{X'}$ est une distribution canonique.

La preuve suit alors d'une répétition formelle de celle du théorème 4 du §4.1 grâce à la continuité en $p' = f(p)$ des relèvements canoniques $(v'_1, \ldots, v'_{l'})$ dans $\mathcal{D}_{X'}$. Q.E.D.

On a vu au §2 que si les projections d'un S.D.C. d'une stratification (A, Σ) sont des applications C^1, alors toute application contrôlée $f : (A, \Sigma) \to M$ à valeurs dans une variété M est semidifférentiable. Si de plus l'application est une submersion propre, le 1^{er} *Théorème d'isotopie de Thom* dit alors que l'application f est une fibration topologiquement localement triviale (voir par exemple [Ma]).

Notons $\forall\, \epsilon > 0$, $U_{x_0}^{\epsilon} = \{x \in U_{x_0} \mid d(x, X - U_{x_0}) > \epsilon\}$.

Si δ note le diamètre de U_{x_0}, alors pour ϵ suffisamment petit et $< 1/2\delta$, $U_{x_0}^{\epsilon}$ est un ouvert vérifiant $\overline{U_{x_0}^{\epsilon}} \subseteq U_{x_0}$, qui est encore un voisinage de x_0 dans la strate $X \in \Sigma$ et un domaine d'un système de coordonnées locales autour de x_0.

Les théorèmes 8 et 9 permettent de montrer que toute stratification (c)-régulière vérifiant autour d'un point x_0 la conjecture du feuilletage

(a)-régulier admet un isomorphisme de trivialisation topologique localement horizontalement-C^1 (pour la preuve ici omise voir [Mu]).

Théorème 10. (1^{er} théorème d'Isotopie horizontalement-C^1).
Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ une stratification (c)-régulière, $X \in \Sigma$ et $x_0 \in X$ un point admettant un feuilletage $\mathcal{H}=\{M_y\}_{y \in W}$, (a)-régulier sur U_{x_0} du voisinage $W=\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de x_0 dans A.

Soit $f : (A, \Sigma) \to M$ une submersion stratifiée propre à valeurs dans une variété lisse. Pour tout $m_0 \in M$, pour tout domaine d'un système de coordonnées locales U_{m_0} de m_0 dans M et pour tout $U^{\epsilon}_{x_0} \subseteq U_{x_0}$, il existe alors un homéomorphisme stratifié

$$H \quad : \quad U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \longrightarrow f^{-1}(U_{m_0})$$

horizontalement-C^1 sur $U_{m_0} \times \left[f^{-1}(m_0) \cap U^{\epsilon}_{x_0}\right]$, et l'homéomorphisme stratifié réciproque

$$G = H^{-1} \quad : \quad f^{-1}(U_{m_0}) \longrightarrow U_{m_0} \times f^{-1}(m_0)$$

est horizontalement-C^1 sur $f^{-1}(U_{m_0}) \cap U^{\epsilon}_{x_0}$.

5.2. $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité.

Dans les théorèmes 8, 9 et 10 de la section précédente, nous avons vu que l'existence d'un feuilletage local $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z \in W}$ de $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$, (a)-régulier sur U_{x_0} implique la régularité horizontalement-C^1 pour les flots des champs relevés et pour d'autres morphismes stratifiés plus généraux.

Dans cette section, nous précisons que si la (a)-régularité de $\mathcal{H}$ est valable sur le voisinage W, les théorèmes analogues à la section §5.1 deviennent valables en déduisant de plus la propriété de $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité.

Rappelons que la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité donne, en plus de la régularité horizontalement-C^1, un contrôle des limites des restrictions $\lim_{z \to y'} f_{Z*z|T_z M_z} = f_{Y*y'|T_{y'} M_{y'}}$ quand z tend vers un point y' appartenant à une strate Y supérieure à X (voir le §2.3 pour la définition et le §4.2 pour quelques théorèmes). Nous avons alors :

Théorème 11. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Le relèvement contrôlé $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ tangent à $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z \in W}$ de tout champ de vecteurs ξ_X est continu sur W et a un flot $\psi = \{\psi^t_Y\}_{Y \geq X}$ qui est $\mathcal{H}$-semidifférentiable.

2) Pour tout $i = 1, \ldots, l$, les relèvements contrôlés w_i des champs E_i tangents à $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z \in W}$ sont continus sur W et ont des flots $\psi_i = \{\psi^t_{iY} : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ qui sont $\mathcal{H}$-semidifférentiables.

3) L'homéomorphisme stratifié de trivialisation de π_X autour de x_0,

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \qquad \textit{est} \qquad \mathcal{F}\textit{-semidifférentiable}$$

par rapport au feuilletage trivial $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}^l \times y_0\}_{y_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)}$ de $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$.

4) $\lim_{(t_1,\dots,t_l,z_0)\to y'} H_{*(t_1,\dots,t_l,z_0)}(E_i) = w_i(y')\,, \quad \forall\, i\,, \forall\, y' \in Y,\ \forall Y \geq X.$

5) Le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z\in W}$ induit par H est (a)-régulier sur W.

Preuve. La démonstration s'obtient de manière complètement analogue à celle du théorème 8 au §5.1 en utilisant que la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$ sur W équivaut à ce que les champs $w_1(z), \dots, w_l(z)$ tangents à $\mathcal{H}$ soient continus sur les strates de W. Nous soulignons que la conclusion de la preuve de $(4 = 5 \Rightarrow 1)$ s'obtient en rappelant le théorème 6 du §4. 2 au lieu du théorème 4 du §4.1. Q.E.D.

Pour un morphisme stratifié plus général on obtient :

Théorème 12. *Soit $f = \{f_Y\}_{Y\in\Sigma} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ un morphisme stratifié contrôlé entre deux espaces stratifiés (c)-réguliers $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$.*

Soient $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ et $\mathcal{H}' = \{M_{y'}\}_{y'\in W'}$ deux feuilletages stratifiés respectivement du voisinage $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de $x_0 \in X$ dans A et du voisinage $W' = \pi_{X'}^{-1}(U'_{x'_0})$ de $x'_0 = f(x_0) \in X'$ dans A'.

Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont (a)-réguliers et si f est π'-contrôlé par rapport à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$, alors f est $\mathcal{H}$-semidifférentiable.

Preuve. On remarque (par rapport à la preuve du théorème 9, §5.1) que, les feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ étant maintenant (a)-réguliers sur W et W', les distributions canoniques $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X'}$ induites sont continues sur les strates de W et W'.

Si on fixe des strates $Z > Y \geq X$, comme au théorème 9 du §5.1 on trouve que pour tout $z \in Z$ il existe une restriction de la différentielle $f_{Z*z|\mathcal{D}_{XZ}(z)} : \mathcal{D}_{XZ}(z) \to \mathcal{D}_{X'Z'}(z')$ avec laquelle, en utilisant la condition de contrôle $\pi_{Y'Z'*z'} f_{Z*z} = f_{Y*y} \pi_{YZ*z}$, $\forall\, z \in Z$ et $\forall Z > Y$ ainsi que le fait que la projection $\pi_{Y'Z'} : T_{YZ} \to Y'$ induise un isomorphisme de restriction $\pi_{Y'Z'*z'|} : \mathcal{D}_{X'Z'}(z') \to \mathcal{D}_{X'Y'}(y')$, on peut conclure de la même manière que dans le théorème 9 du §5.1 et le théorème 6 du §4.2. Q.E.D.

De même que pour les théorèmes 9 et 10, le théorème 12 permet de d'obtenir le suivant:

Théorème 13. (1^{er} théorème d'Isotopie $\mathcal{F}$-semidifférentiable [Mu]).
Soient $\mathcal{X}$ un espace stratifié (c)-régulier, X une strate de Σ et $x_0 \in X$ tels qu'il existe un feuilletage (a)-régulier $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$, du voisinage $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de x_0 dans A.

Soit $f : (A, \Sigma) \to M$ une submersion stratifiée propre à valeurs dans une variété lisse.

Pour tout point m_0 dans M et pour tout domaine U_{m_0} d'un système de coordonnées locales de m_0 dans M et pour tout $U^{\epsilon}_{x_0} \subseteq U_{x_0}$, il existe un homéomorphisme stratifié

$$H : U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \to f^{-1}(U_{m_0}) \quad \textit{qui est } \mathcal{F}\textit{-semidifférentiable}$$

par rapport à $\mathcal{F} = U_{m_0} \times \mathcal{H}_{|f^{-1}(m_0) \cap \pi_X^{-1}(U^{\epsilon}_{x_0})}$ et dont l'homéomorphisme réciproque

$$G = H^{-1} : \ f^{-1}(U_{m_0}) \to U_{m_0} \times f^{-1}(m_0)$$

est $\mathcal{H}_{|f^{-1}(U_{m_0}) \cap \pi_X^{-1}(U^{\epsilon}_{x_0})}$-semidifférentiable.

Bibliographie

[Be] K. Bekka, (C)-régularité et trivialité topologique, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, (ed. D. Mond, and J. Montaldi), Part I, Lecture Notes in Math., 1462, Springer, Berlin, 1991, pp. 42–62.

[Fi] M. Field, Lettre à D. Trotman, 29 Janvier 1976.

[GWPL] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis, E. J. N. Looijenga, Topological stability of smooth mappings, Lecture Notes in Math., 552, Springer Verlag, 1976.

[Go] C. Godbillon, Feuilletages. Etudes géométriques, Progress in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[Kuo] T. C. Kuo, A natural equivalence relation on singularities, Singularities (Warsaw, 1985), 239–243, Banach Center Publ., 20, PWN, Warsaw, 1988.

[Ma] J. Mather, Notes on topological stability, Mimeographed notes, Harvard University, 1970.

[MTP], C. Murolo, D. J. A. Trotman and A. A. du Plessis, Stratified transversality by isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., 355 (2003), 4881–4900.

$[MT]_1$ C. Murolo et D. J. A. Trotman, Semidifferentiable stratified morphisms, C. R. Acad. Sci. Paris, t 329, Série I, 1999, 147–152.

[MT]$_2$ C. Murolo et D. J. A. Trotman, Relèvements continus de champs de vecteurs, Bull. Sci. Math., 125 (2001), 253–278.

[MT]$_3$ C. Murolo et D. J. A. Trotman, Horizontally-C^1 controlled stratified maps and Thom's first isotopy theorem, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 330 (2000), 707–712.

[Mu] C. Murolo, Semidifférentiabilité, Transversalité et Homologie de Stratifications Régulières, thesis, University of Provence, 1997.

[OT]$_1$ P. Orro and D. Trotman, On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets, Bull. London Math. Soc., 18 (1986), 185–191.

[OT]$_2$ P. Orro et D. Trotman, Cône normal et régularités de Kuo-Verdier, Bulletin de la Société Mathématique de France, 130 (2002), 71–85.

[Pa] A. Parusiński, Lipschitz stratifications, Global Analysis in Modern Mathematics (ed. K. Uhlenbeck), Proceedings of a Symposium in Honor of Richard Palais' Sixtieth Birthday, Publish or Perish, Houston, 1993, pp. 73–91.

[Pf] M. J. Pflaum, Analytic and geometric study of stratified spaces. Lecture Notes in Mathematics, 1768. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Th] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. A. M. S., 75 (1969), 240–284.

[Wh] H. Whitney, Local properties of analytic varieties, Differential and Combinatorial Topology (ed. S. Cairns), Princeton Univ. Press, Princeton, 1965, pp. 205–244.

[Wi] H. E. Winkelnkemper, Estimating $\|d\phi^t\|$ for unit vector fields whose orbits are geodesics, J. Differential Geometry, 31 (1990), 847–857.

C. Murolo et D. J. A. Trotman
LATP : *Laboratoire d'Analyse Topologie et Probabilité*
- UMR 6632 du CNRS
Université de Provence - Centre de Mathématiques et Informatique
39, rue Joliot-Curie - 13453 Marseille Cedex 13, France.
Emails : murolo@cmi.univ-mrs.fr , trotman@cmi.univ-mrs.fr