The Annals of Probability
1998, Vol. 26, No. 3, 1016–1040

THÉORÈME CENTRAL LIMITE FONCTIONNEL POUR UNE MARCHE AU HASARD EN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE

By Didier Piau

Université Claude Bernard (Lyon-I)

The simple random walk on a supercritical Galton–Watson tree is transient when the tree is infinite. Moreover, there exist regeneration times, that is, times when the walk crosses an edge for the first and the last time. We prove that the distance and the range of the walk satisfy functional central limit theorems under the annealed law GP. This result is a consequence of estimates of the law of the first regeneration time τ_R. We show that there exist positive c, c', α and β such that, for all $n \geq 1$,

$$\exp(-c\,n^{\alpha}) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\,n^{\beta}).$$

La marche au hasard simple sur un arbre de Galton–Watson supercritique est transiente quand l'arbre est infini. De plus, elle possède des instants de régénération, c'est-à-dire, des instants où le marcheur traverse une arête pour la première et la dernière fois. Nous démontrons que la distance et le rang de la marche vérifient un théorème central limite fonctionnel sous la loi GP moyennée en l'environnement. Ce résultat repose sur une estimation de la loi du premier instant de régénérationτ_R. Nous montrons qu'il existe des constantes c, c', α et β strictement positives telles que, pour tout $n \geq 1$,

$$\exp(-c\,n^{\alpha}) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\,n^{\beta}).$$

1. Introduction. Utiliser un processus de Galton-Watson est une des façons naturelles de construire une mesure de probabilité sur l'espace des arbres A. Le nombre de descendants $Z(x)$ d'un sommet x est aléatoire et les $Z(x)$ sont i.i.d. de même loi qu'une variable aléatoire entière Z (une définition plus précise est en Section 2.1). On appelle régime supercritique le cas $m := E(Z) > 1$. Dans ce cas, le processus ne s'éteint pas, donc l'arbre est infini, avec une probabilité non nulle. Notons G la loi sur A conditionnée par la nonextinction. La loi de la marche au hasard simple $(x_n)_n$ sur $a \in A$ est notée P_a et nous considérons la loi GP qui consiste à choisir un arbre $a \in A$ selon G puis une trajectoire sur a selon P_a. Plus précisément, GP est une loi sur l'espace AC des couples $(a, \widehat{x})$ formés d'un arbre $a \in A$ et d'une suite $\widehat{x} = (x_n)_n$ de sommets de a, l'image de GP par l'application $\pi_1(a, \widehat{x}) = a$ est G et la famille $(P_a)_a$ est un conditionnement de GP par π_1. (Une définition équivalente de GP est rappelée en Section 4.1.)

La marche $(x_n)_n$ est un exemple de marche au hasard dans un environnement aléatoire. Solomon (1975), Kesten, Kozlov et Spitzer (1975) et Sinai (1982) ont montré, parmi d'autres, qu'une marche au hasard sur Z définie à

Received March 1997; revised January 1998.

AMS 1991 *subject classifications*. Primary 60J80; secondary 60J15.

Key words and phrases. Trees, Galton–Watson, branching process, random walk in random environment, speed, limit theorems, regeneration.

l'aide de probabilités de transitions aléatoires pouvait avoir un comportement très différent de celui d'une marche classique. Kesten (1986) a démontré que la marche simple sur un arbre de Galton–Watson au régime critique, conditionné par la nonextinction, avait un comportement sous-diffusif, résolvant ainsi la conjecture d'Alexander et Orbach. Plus récemment, Greven et den Hollander (1994), Dembo, Peres et Zeitouni (1996) et Gantert et Zeitouni (1997) ont obtenu des résultats de grandes déviations pour la marche sur Z définie à l'aide de probabilités de transitions aléatoires.

Revenons au cas d'un arbre de Galton–Watson supercritique. La marche est alors G presque sûrement transiente d'après un résultat non publié de Grimmett et Kesten (1984) [une preuve simple est donnée par Lyons, Pemantle et Peres (1995)], et la fuite vers l'infini du marcheur vérifie au premier ordre une loi de type loi des grands nombres. Par exemple, si $|x_n|$ désigne la distance entre x_n et x_0, alors $|x_n|/n$ tend GP presque sûrement vers une constante $v \in]0,1[$ [Lyons, Pemantle et Peres (1995)]. La même méthode montre que, si $r_n := \#\{x_1, \dots, x_n\}$ désigne le rang au temps n, alors r_n/n tend GP presque sûrement vers une constante $u \in]0,1[$ [Piau (1995)]. Nous démontrons que $|x_n|$ et r_n vérifient un théorème central limite fonctionnel.

THÉORÈME 1. *Soit G la loi sur l'espace des arbres associée à un processus de Galton–Watson supercritique, conditionné par sa nonextinction. Pour $n \geq 1$, soit w_n le processus indexé par $t \in [0,1]$ et défini par*

$$w_n(t) := \frac{|x_{[nt]}| - [nt]\,v}{\sqrt{n\,\sigma^2}},$$

où $[nt]$ est la partie entière de nt. Il existe des constantes $v \in]0,1[$ et $\sigma^2 > 0$ telles que w_n converge en loi sous GP vers un mouvement brownien standard indexé par $[0,1]$ et issu de 0. La convergence a lieu au sens de la topologie uniforme sur l'espace de Skorokhod des fonctions continues à droite et qui admettent des limites à gauche.

On obtient un résultat identique pour le rang r_n en remplaçant v et σ^2 par des constantes $u \in]0,1[$ et $\rho^2 > 0$ appropriées.

Pour démontrer le Théorème 1, nous étudions la loi des instants de régénération de la marche. Suivant, par exemple, Lyons, Pemantle et Peres (1995), nous appelons instant de régénération du processus $(x_n)_n$ un instant aléatoire $n \geq 1$ tel que

$$\forall\ p < n \leq q, \qquad x_p \neq x_n, \qquad x_q \neq x_{n-1}.$$

Ainsi les portions de trajectoires de $x_\bullet$ avant n et après n sont séparées par l'arête $\{x_{n-1}, x_n\}$ de l'arbre. On sait qu'il existe GP presque sûrement une infinité d'instants de régénération [voir Lyons, Pemantle et Peres (1995)]. Il existe aussi GP presque sûrement une infinité d'instants de régénération du processus des niveaux de $(x_n)_n$, c'est-à-dire, d'instants où le processus $(|x_n|)_n$ régénère. Bien évidemment, ces instants, que nous appelons instants de régénération en niveau, sont aussi des instants de régénération de $(x_n)_n$.

THÉORÈME 2. *Soit G la loi sur l'espace des arbres associée à un processus de Galton–Watson supercritique de loi de reproduction Z, conditionné par sa nonextinction. Soit τ_R le premier instant de régénération en niveau de la marche au hasard simple sur l'arbre a. Il existe des constantes α, β, c et $c' > 0$ telles que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\exp(-c\, n^{\alpha}) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\, n^{\beta}).$$

Les valeurs des exposants α et β dépendent de la loi de Z comme suit. Notons $p_k := P[Z = k]$. Si $p_0 > 0$, on a

$$\exp(-c\, n^{1/3}) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\, n^{1/6}).$$

Si $p_0 > 0$ et si Z est bornée, on a

$$\exp(-c\, n^{1/3}) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\, n^{1/5}).$$

Si $p_0 = 0$ et $p_1 > 0$, on a

$$\exp(-c\, n^{1/3}) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\, n^{1/3}).$$

Enfin, si $p_0 = p_1 = 0$ (donc $Z \geq 2$), on a

$$\exp(-c\, n) \leq GP[\tau_R \geq n] \leq \exp(-c'\, n).$$

Dans ce dernier cas, le même encadrement est satisfait G presque sûrement par $P_a[\tau_R \geq n]$. Les majorations ci-dessus sont encore satisfaites quand on remplace τ_R par le premier temps de régénération en arête σ_R car $\sigma_R \leq \tau_R$.

Cet article complète le résultat de Piau (1995, 1996), relatif au cas $Z \geq 2$. Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la Section 2, on précise les notations et on introduit quelques résultats auxiliaires. La Section 3 est consacrée à la démonstration du Théorème 2. Le Lemme 1 de la Section 2.2, dû à Grimmett et Kesten (1984), ainsi que la décomposition de trajectoire de la Section 3.3, jouent un rôle crucial dans cette démonstration. La décomposition de trajectoire est un résultat non publié de Kesten. Dans la Section 4, on déduit le Théorème 1 du Théorème 2. Enfin, dans la Section 4.5, on explicite, dans quelques cas particuliers, les valeurs des paramètres u, v, σ^2 et ρ^2 du Théorème 1.

2. Préliminaires. Nous précisons quelques notations et nous rappelons la construction de la marche au hasard sur un arbre de Galton–Watson. Nous démontrons ensuite des résultats auxiliaires.

2.1. *Notations.* On désigne par A l'ensemble des arbres pointés. Un élément $a \in A$ est un couple formé d'un arbre, c'est-à-dire d'un graphe localement fini, connexe et sans cycles, et d'un sommet de cet arbre, appelé racine de a. On note ce sommet rac(a) ou 0. Si x est un sommet de l'arbre sous-jacent à l'élément a, on écrit abusivement $x \in a$. La distance de graphe entre 0 et x est notée $|x|$. Pour $n \geq 0$, on désigne par a_n la $n$ième génération de a et par a_{0n} l'arbre obtenu en tronquant a au niveau n. On appelle durée de vie $\zeta(a)$ de l'arbre a sa hauteur, donc

$$\{a \in A;\ \zeta(a) \geq n\} = \{a \in A;\ a_n \neq \varnothing\}.$$

Le sous-arbre de a dont la racine est en x et dont les sommets sont les successeurs de x est noté x^+. Donc, $y \in x^+$ si et seulement si tout chemin reliant 0 à y passe par x. Le squelette a' de a est l'arbre formé des sommets $x \in a$ tels que x^+ est infini. On note $Z'(x)$ le nombre de descendants y de x tels que y^+ est infini et $Z(x)$ le nombre total de descendants de x. Par exemple,

$$\{\zeta = +\infty\} = \{Z'(0) \neq 0\} = \{0 \in a'\}.$$

Le processus de Galton–Watson non conditionné induit une loi G^* sur A comme suit. Le processus démarre d'un individu unique, représenté par la racine de l'arbre, et sa loi de reproduction est donnée par une variable aléatoire entière Z. Sous G^*, chaque sommet x possède $Z(x)$ descendants, les variables aléatoires $Z(x)$ sont des copies i.i.d. de Z, et une arête relie un sommet à chacun de ses descendants. On décrit la loi de Z par $p_k := P[Z = k]$, $k \geq 0$, ou par la fonction génératrice

$$f(s) := E[s^Z] = \sum_{k \geq 0} p_k\, s^k.$$

On suppose que $m := E[Z] = f'(1) \in]1, +\infty[$. La durée de vie ζ du processus est alors finie avec une probabilité $q < 1$ [voir Athreya et Ney (1972)]. On appelle G, respectivement G'', la loi G^* conditionnée par $\{\zeta = +\infty\}$, respectivement $\{\zeta < +\infty\}$. Si $p_0 = 0$, G'' est simplement une masse de Dirac en l'arbre $\{0\}$.

La loi G n'est pas dans le cas $p_0 > 0$ la loi d'un arbre de Galton–Watson non conditionné. Elle se décompose cependant comme suit [voir Athreya et Ney (1972)]. Chaque sommet du squelette a' possède $Z'(x)$ descendants dans a' et $Z(x) - Z'(x)$ descendants hors de a'. Les couples $(Z'(x), Z(x))$ pour $x \in a'$ sont i.i.d. et on connaît leurs lois en fonction de la loi de Z. En particulier, $Z(x)$ ne suit pas la loi de Z quand $p_0 > 0$. Par ailleurs, $Z' \geq 1$ dans tous les cas. Le squelette a' est donc un arbre de Galton–Watson non conditionné pour une loi $Z' \geq 1$. L'examen de la loi de Z' montre que $E[Z'] = E[Z] = m > 1$. Les arbres finis y^+ pour un sommet $y \notin a'$ descendant d'un sommet $x \in a'$ sont des copies i.i.d. d'un arbre de Galton–Watson sous-critique de loi G'' associée à une variable aléatoire Z''. La loi de Z'' est

$$p''_k := P[Z'' = k] = p_k\, q^{k-1}, \qquad E[s^{Z''}] = q^{-1} f(q\, s).$$

Un point important est que $m'' := E[Z''] = f'(q) < 1$ donc G'' ne charge effectivement que les arbres finis.

Pour un arbre donné a, la marche au hasard simple $(x_n)_n$ sur a est une chaîne de Markov sur l'ensemble des sommets de a telle que x_{n+1} est un des voisins de x_n, choisi de manière équiprobable parmi ces voisins. Pour une trajectoire $(x_n)_n$ sur a, τ_p est le premier instant $n \geq 1$ tel que $x_n \in a_p$, τ_x le premier instant tel que $x_n = x$ et τ_R le premier instant de régénération en niveau. Si un de ces instants n'existe pas, on pose $\tau_\bullet = +\infty$ dans le cas concerné. Quand le point de départ de la marche n'est pas précisé, la marche part de $x_0 = \mathrm{rac}(a)$.

Pour un arbre a donné, a^- est l'arbre obtenu en ajoutant à l'arbre a un sommet -1 et une arête $\{-1, 0\}$. La racine de a^- est $\mathrm{rac}(a) = 0$. La conductance électrique $C(a)$ de a entre la racine 0 et le bord de l'arbre s'obtient en considérant a comme un réseau électrique où chaque arête est un composant électrique de conductance 1 ohm^{-1}; voir Doyle et Snell (1984). Une définition équivalente est de poser

$$C(a)/(1 + C(a)) := P[\tau_{-1} = +\infty | x_0 = 0],$$

où τ_{-1} est le premier instant d'atteinte de -1 par la marche simple sur a^- issue de 0. En particulier, $C(a) = 0$ si a est fini.

On note $Q[B]$ la probabilité d'un événement B sous une probabilité Q et $Q[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire intégrable X. Quand on ne précise pas la mesure Q, l'espérance de X est notée $E[X]$. Le cardinal d'un ensemble B est noté $\#B$. Nous remplaçons parfois t_n par $t(n)$ pour toutes sortes de symboles t et n. Par exemple, $1(B)$ désigne la fonction indicatrice 1_B de B. Les constantes c_i, i entier, sont fixes et strictement positives, les constantes c et C peuvent varier d'une ligne à l'autre mais c et C sont strictement positives. Enfin, nous utilisons l'expression suivante: une suite de réels positifs ou nuls décroît exponentiellement si elle est majorée par une suite de terme général $C \exp(-cn)$.

2.2. *Quelques résultats techniques.* Les résultats techniques ci-dessous nous seront utiles.

LEMME 1 [Grimmett et Kesten (1984)]. *Soit B un sous-ensemble mesurable de A. Pour $x \in a$, appelons $\mathrm{BON}(\varepsilon_1, x)$ l'ensemble des sommets y situés sur le chemin reliant 0 à x, distincts de 0 et de x, vérifiant la propriété suivante: le nombre de descendants z de y tels que $x \notin z^+$ et $z^+ \in B$ est supérieur ou égal à $\varepsilon_1 Z(y)$.*

Il existe des constantes strictement positives ε_1, ε_2, ε_3 telles que, pour toute partie B telle que $G^*[A \setminus B] \le q + \varepsilon_2$, la suite de terme général

$$G^*\big[\exists\, x \in a_n,\ \#\mathrm{BON}(\varepsilon_1, x) \le \varepsilon_3\, n\big]$$

décroît exponentiellement. Tout ε_2 tel que $f'(q + \varepsilon_2) < 1$ convient.

Le résultat suivant est probablement connu, mais nous donnons sa démonstration.

LEMME 2. *La suite $G^*[\zeta < +\infty,\ \#a \ge n] = q\, G''[\#a \ge n]$ décroît exponentiellement.*

PREUVE. Si $p_0 = 0$, le résultat est vrai. Si $p_0 > 0$, il suffit de montrer que la variable aléatoire $\#a$ admet un moment exponentiel fini sous G''. Or, la fonction $f(s) := E[s^Z]$ est croissante, convexe et finie pour $s \in [0,1]$. De plus, $f(0) > 0$, $f(q) = q$ et $f(1) = 1$ donc $f'(q) < 1$ et il existe un unique $s \in]q, 1[$ tel que

$$f(s) = s\, f'(s).$$

Le point $(s, f(s))$ est l'unique point de la courbe dont la tangente passe par $(0,0)$. On sait que $\#a_{00} = 1$ et en conditionnant par la valeur de $Z(0)$, on obtient pour tout $t > 0$ la relation de récurrence suivante:

$$G''[\exp(t\,\#a_{0(n+1)})] = \exp(t)\, q^{-1}\, f(q\, G''[\exp(t\,\#a_{0n})]).$$

On sait alors que le comportement de la suite $G''[\exp(t\,\#a_{0n})]$ dépend de la position du graphe de la fonction $u \mapsto \exp(t)\, q^{-1}\, f(q\, u)$ par rapport à la première bissectrice du plan. La construction habituelle en escalier montre alors que $G''[\exp(t\,\#a_{0n})]$ reste inférieur à $q^{-1}s$ pour tout n si $\exp(t) \le 1/f'(s)$. Ainsi, $\exp(t\,\#a)$ est G'' intégrable. Pour $\exp(t) := 1/f'(s) > 1$, on trouve même

$$G''[\exp(t\,\#a)] = q^{-1}s. \qquad \square$$

Les lemmes suivants montrent que certaines quantités associées à des arbres de Galton–Watson admettent des moments exponentiels.

LEMME 3. *Pour k entier, soit G''_k la restriction de G'' aux arbres dont tous les sommets x vérifient $Z(x) \le k$. Posons par convention $\tau_0 := 0$ sur l'arbre trivial $\{0\}$. Il existe une constante c telle que, pour tout k,*

$$G''_k P[\exp(c\,\tau_0/k)] \le 2.$$

On peut choisir $c = \frac{1}{16}(1 - m'')^2$. En particulier, τ_0 admet des moments exponentiels.

PREUVE. Notons τ^n le temps d'atteinte de -1 par la marche issue de 0 sur $(a_{0n})^-$ (l'arbre a^- est défini dans la Section 2.1). Par exemple, $\tau^0 = 1$. Si a est fixé et si $Z(0) = z$, τ^{n+1} vaut 1 avec probabilité $1/(1+z)$ et suit la loi de $1 + \tau^n_* + \tau^{n+1}$ avec probabilité $z/(1+z)$, où τ^n_* suit la loi de τ^n sur l'arbre $(x_1^+)^- = x_1^+ \cup \{0\}$. On en déduit successivement

$$P_a[\exp(t\tau^{n+1})] = \frac{\exp(t)}{1+z} + \frac{\exp(t)\, z}{1+z}\, P_a[\exp(t\tau^{n+1})]\, P_a P_{x_1^+}[\exp(t\tau^n)]$$

$$(1 - z(\exp(t)\, P_a P_{x_1^+}[\exp(t\tau^n)] - 1))\, P_a[\exp(t\tau^{n+1})] = \exp(t).$$

Quand on intègre par rapport à $G''_k[\cdot | Z(0) = z]$ avec $z \in [0, k]$, l'arbre x_1^+ suit la loi de G''_k et il est indépendant de z, donc

$$(1 - z(\exp(t)\, G''_k P[\exp(t\tau^n)] - 1))\, G''_k P[\exp(t\tau^{n+1}) | Z(0) = z] = \exp(t).$$

Notons à présent, pour $u\, e^t < 1 + k^{-1}$,

$$g(u) := E\left[\frac{e^t\, 1(Z'' \le k)}{1 - Z''\,(u\, e^t - 1)}\right].$$

On voit que si $t_n := G_k'' P[e^{t\tau^n}]$, alors $t_0 = e^t$ et $t_{n+1} = g(t_n)$ tant que t_n vérifie $t_n\, e^t < 1 + k^{-1}$. La fonction g n'est pas très facile à manipuler et nous la remplaçons par une fonction linéaire comme suit. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, nous remarquons qu'il existe $c(\varepsilon)$ telle que

$$(1 - z(u\, e^t - 1))^{-1} \leq 1 + c(\varepsilon)\, z\, (u\, e^t - 1),$$

pour toute valeur de $z \in [0, k]$ et toute valeur de u telle que $u\, e^t < 1 + \varepsilon\, k^{-1}$. Il suffit de prendre $c(\varepsilon) := (1 - \varepsilon)^{-1}$. En d'autres termes,

$$t_n\, e^t < 1 + \varepsilon\, k^{-1} \quad \Rightarrow \quad t_{n+1} \leq g_\varepsilon(t_n),$$

$$g_\varepsilon(u) := e^t + c(\varepsilon) e^t (u\, e^t - 1) m_k,$$

où $m_k := E[Z''\, 1(Z'' \leq k)]$. On voit que g_ε est croissante. Supposons que g_ε admet un point fixe s tel que

$$s\, e^t < 1 + \varepsilon\, k^{-1}.$$

Alors, $t_0 \leq s$ implique $t_n \leq s$ pour tout n. En particulier, on aurait

$$G_k'' P[\exp(t\tau_0)] = p_0 + (1 - p_0)\, \exp(t)\, G_k'' P[\exp(t\tau^\infty)] \leq \exp(t)\, s.$$

Une façon de s'en assurer est donc d'imposer

$$k(e^t\, s - 1) < \varepsilon \quad \text{avec } s = e^t + c(\varepsilon)\, e^t\, (e^t\, s - 1)\, m_k.$$

Nous montrons à présent que cette condition est vérifiée pour un choix adéquat de ε et $t > 0$. Posons $\varepsilon := \frac{1}{2}(1 - m_k)$. Alors, $c(\varepsilon)\, m_k < 1$ et t doit vérifier

$$e^{2t} < \frac{k + \varepsilon}{k + \varepsilon\, c(\varepsilon)\, m_k} =: e^{2t_*}.$$

On peut choisir des valeurs $t > 0$ car $t_* > 0$. Avant de déterminer une valeur convenable de t, supposons simplement que $t < t_*$ et majorons $G_k'' P[\exp(t\tau_0)]$. Si $s(t)$ est le point fixe de g_ε dans ce cas, $s(t)\, e^t$ est croissant en t donc il suffit de majorer $s(t_*)\, e^{t_*}$. Après quelques lignes de calcul, on trouve

$$s(t_*)\, e^{t_*} = 1 + \varepsilon\, (1 - c(\varepsilon)\, m_k)\, \frac{k + \varepsilon\, c(\varepsilon)\, m_k}{k - \varepsilon\, c(\varepsilon)\, m_k}.$$

En remarquant que $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ et $\varepsilon\, c(\varepsilon)\, m_k = m_k\, (1 - m_k)/(1 + m_k) \leq \frac{1}{4}$, on obtient

$$s(t_*)\, e^{t_*} \leq 1 + \frac{1}{2}\, \frac{k + \frac{1}{4}}{k - \frac{1}{4}} < 2.$$

Il reste à trouver une condition simple sur t. Pour $u \in]0, 1[$, on peut utiliser l'inégalité $-\log(1 - u) > u$. Il vient

$$t_* \geq \frac{\varepsilon(1 - c(\varepsilon)\, m_k)}{2(k + \varepsilon)} = \frac{(1 - m_k)^2}{4(1 + m_k)\, (k + \varepsilon)} > \frac{(1 - m_k)^2}{16k}.$$

Enfin, $m_k \leq m''$, ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

LEMME 4. *Si* $q\exp(t) < 1$, *alors* $G[\exp(tZ(x)/Z'(x))|x \in a']$ *est fini.*

PREUVE. Pour $x \in a'$, les couples $(Z(x), Z'(x))$ sont i.i.d. et on connaît leur loi, voir Athreya et Ney (1972). Pour $j \in [1, i]$,

$$G[Z'(x) = j|Z(x) = i] = C_i^j\,(1-q)^j\,q^{i-j}\,(1-q^i)^{-1}.$$

Le théorème de grandes déviations de Cramér pour les sommes de variables aléatoires i.i.d. bornées montre que la probabilité qu'une variable binômiale de paramètres i et $1-q$ soit inférieure à si décroît exponentiellement en i si $s < 1-q$; voir, par exemple, Durrett (1991), Chapitre 1.9. On en déduit

$$G[Z'(x) \le s\,i|Z(x) = i] \le (1-q^i)^{-1}\,C\exp(-c(s)\,i),$$

où $c(s) > 0$ est aussi proche que l'on veut de l'action du principe de grandes déviations vérifié par les lois des variables binômiales. De plus, si $Z'(x) \ge s\,i$, alors $Z(x)/Z'(x) \le s^{-1}$. Pour tout $t > 0$, on a donc

$$G[\exp(tZ(x)/Z'(x))|Z(x) = i] \le (1-q^i)^{-1}\,C\exp((t-c(s))i) + \exp(t/s).$$

Pour $t \le c(s)$, cette borne est uniforme en i et le résultat est démontré. De plus, quand s tend vers zéro, $c(s)$ tend vers $-\log(q)$ donc on voit que t convient tant que $t < -\log q$. □

LEMME 5. *Soit* τ_R *le premier instant de régénération d'une marche au hasard asymétrique sur* Z. *Alors,* $P[\tau_R \ge n]$ *décroît exponentiellement.*

PREUVE. Supposons, par exemple, que la marche asymétrique $(\xi_n)_n$ part de $\xi_0 := 0$ et que $P[\xi_n + 1 = x - 1|\xi_n = x] =: p$ avec $p < \frac{1}{2}$. D'après le Lemme 5.1 de Dembo, Peres et Zeitouni (1996), $P[\tau_R \ge \tau_n]$ décroît exponentiellement. Par ailleurs, les variables aléatoires τ_1 et $(\tau_{n+1} - \tau_n)_{n\ge 1}$ sont i.i.d. et un argument de martingale montre qu'elles admettent des moments exponentiels. Par exemple,

$$E[s^{\tau_1}] = ((1-p)/p)^{1/2}, \qquad s := (4p(1-p))^{-1/2} > 1.$$

Le théorème de Cramér pour une suite de variables aléatoires i.i.d. admettant un moment exponentiel montre que $P[\tau_n \ge cn]$ décroît exponentiellement pour $c > E[\tau_1] = (1-2p)^{-1}$ [voir Durrett (1991), par exemple] et cela démontre le lemme. □

3. Loi de la variable aléatoire $\boldsymbol{\tau}_R$. La démonstration du Théorème 2 dans le cas $Z \ge 2$ est relativement directe (Section 3.1). Le cas $Z \ge 1$ (Section 3.4) nécessite d'éliminer certaines configurations d'arbres atypiques sous G (Section 3.2) et de décomposer judicieusement la trajectoire de la marche (Section 3.3). Le cas général $Z \ge 0$ (Section 3.7) suppose d'éliminer des configurations d'arbres supplémentaires (Section 3.6). Les minorations de la loi de τ_R sont plus faciles à obtenir et leur preuve se trouve dans la Section 3.5.

3.1. *Loi de τ_R: le cas $Z \geq 2$.* Ce cas est particulier car le résultat est en fait vrai pour chaque arbre a. Nous démontrons la proposition.

PROPOSITION 1. *Soit a un arbre tel que tous les sommets sauf la racine ont pour degré au moins 3. Alors, la marche sur a admet une infinité d'instants de régénération en niveau. Le premier d'entre eux, soit τ_R, est dominé stochastiquement par le premier instant de régénération de la marche sur l'arbre binaire. En particulier, la suite $P_a[\tau_R \geq n]$ décroît exponentiellement et cette majoration ne dépend pas de l'arbre a.*

Si tous les sommets sauf un nombre fini d'entre eux ont pour degré au moins 3, la décroissance exponentielle est encore vraie.

PREUVE. La démonstration consiste à coupler $(x_n)_n$ avec une marche asymétrique classique $(\xi_n)_n$ sur Z. Rappelons que a est fixé et détaillons cet argument de couplage. Pour tout $x \in a$, on a

$$P_a[|x_{n+1}| = |x_n| - 1 | x_n = x] \leq \tfrac{1}{3},$$
$$P_a[|x_{n+1}| = |x_n| + 1 | x_n = x] \geq \tfrac{2}{3}.$$

On se propose de construire sur un même espace de probabilité deux processus $(x_n)_n$ et $(\xi_n)_n$ issus, respectivement, de $x_0 = 0$ et $\xi_0 = 0$, tels que $(x_n)_n$ suit la loi P_a et $(\xi_n)_n$ suit la loi d'une marche asymétrique sur Z de probabilités de transitions $\frac{1}{3}$ vers la gauche et $\frac{2}{3}$ vers la droite. Pour cela, donnons nous une suite $(u_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1[$. Supposons que $(x_k)_{k\leq n}$ et $(\xi_k)_{k\leq n}$ ont été construits en utilisant $(u_k)_{k\leq n}$. Si $x_n = x$ et $\xi_n = p$, on note $(y_j)_{j\leq i}$ les i voisins de x en commençant par le prédécesseur de x si $x \neq 0$. On pose

$$x_{n+1} := y_j \quad \text{si } (j-1) \leq i\, u_{n+1} < j, \;\; j \in [1, i],$$
$$\xi_{n+1} := p - 1 \quad \text{si } u_{n+1} < \tfrac{1}{3},$$
$$:= p + 1 \quad \text{si } u_{n+1} \geq \tfrac{1}{3}.$$

Les processus $x_\bullet$ et $\xi_\bullet$ ont alors la loi souhaitée et, pour tout n,

$$|x_{n+1}| - |x_n| \geq \xi_{n+1} - \xi_n.$$

Ceci implique que le premier instant de régénération de $\xi_\bullet$ est un instant de régénération de $|x_\bullet|$, donc est supérieur à τ_R. En d'autres termes, il suffit de démontrer la proposition pour $(\xi_n)_n$. C'est le résultat du Lemme 5. □

3.2. *Première réduction de l'arbre.* Pour traiter le cas $P[Z \geq 2] < 1$, il faut éliminer certaines configurations atypiques d'arbres où la marche peut revenir facilement en 0.

LEMME 6. *Pour $c_1 > 0$ fixé, notons*

$$B_n = \{\exists\, x \in a_n,\; P_a[\tau_0 < +\infty | x_0 = x] \geq \exp(-c_1 n)\}.$$

En particulier, $B_n \subset \{\zeta \geq n\}$. *Si* c_1 *est suffisamment petit, les suites* $G^*[B_n]$ *et* $G[B_n]$ *décroissent exponentiellement.*

PREUVE. Nous utilisons le Lemme 1 en choisissant comme partie B l'ensemble suivant:

$$B := \{a \in A;\ C(a)/(1 + C(a)) \geq \varepsilon_4\}.$$

La conductance $C(a)$ est définie dans la Section 2.1. Conditionnellement à la nonextinction, $C(a) > 0$ presque sûrement donc $G^*[B]$ tend vers $1 - q$ quand ε_4 tend vers zéro. Fixons ε_4 tel que $G^*[B] \geq 1 - q - \varepsilon_2$. A présent, ε_1, ε_2, ε_3 sont fournies par le lemme et nous allons majorer $G^*[B_n]$.

Pour un sommet $x \in a_n$ donné, soit $(y_i)_i$ le chemin qui relie 0 à x avec $y_0 = 0$ et $y_n = x$. Soit $y_i \in \text{BON}(\varepsilon_1, x)$. Si, partant de y_i, le premier pas du marcheur est en direction d'un descendant z de y tel que $z^+ \in B$, alors ce marcheur a au moins ε_4 chances de ne jamais revenir en y_i et a fortiori en y_{i-1}, donc

$$P_a[\tau_{y_{i-1}} = +\infty | x_0 = y_i] \geq \frac{\varepsilon_3 Z(y)}{1 + Z(y)}\, \varepsilon_4 \geq \varepsilon_3 \varepsilon_4 / 2.$$

En itérant ce raisonnement, on voit que si $\#\text{BON}(\varepsilon_1, x) \geq \varepsilon_3 n$, alors la marche partant de x possède au plus

$$(1 - \varepsilon_3 \varepsilon_4 / 2)^{\varepsilon_3 n}$$

chances d'atteindre 0. En d'autres termes, pour c_1 assez petit, B_n est une partie de l'ensemble

$$\{\exists\ x \in a_n,\ \ \#\text{BON}(\varepsilon_1, x) \leq \varepsilon_3\, n\}$$

considéré dans le Lemme 1. Par conséquent, $G^*[B_n]$ décroît exponentiellement et, par un argument de conditionnement, $G[B_n]$ aussi. □

3.3. *Décomposition de la trajectoire.* La trajectoire de $|x_\bullet|$ restreinte à l'intervalle de temps $[0, \tau_R]$ peut se décomposer comme suit. Notons $m_0 := 0$ et $s_0 := 1$. Si $|x_\bullet|$ ne repasse jamais en 0, $\tau_R = 1$ et nous posons $\mu := 0$. Dans le cas contraire, posons:

$$r_1 := \inf\{n \geq 1;\ |x_n| = 0\},$$
$$m_1 := \sup\{|x_n|;\ n \leq r_1\},$$
$$s_1 := \inf\{n \geq 1;\ |x_n| = 1 + m_1\}.$$

Si $|x_\bullet|$ ne repasse jamais en m_1 après le temps s_1, alors $\tau_R = s_1$ et nous posons $\mu := 1$. De même, si r_k, m_k et s_k ont été définis avec $r_k < +\infty$, introduisons

$$r_{k+1} := \inf\{n \geq s_k;\ |x_n| = |x_{s_k}| - 1\},$$
$$m_{k+1} := \sup\{|x_n| - |x_{s_k}| + 1;\ n \leq r_{k+1}\},$$
$$s_{k+1} := \inf\{n \geq 1;\ |x_n| = |x_{s_k}| + m_{k+1}\}.$$

Si r_k est fini et r_{k+1} infini, alors $\tau_R = s_k$ et nous choisissons $\mu := k$. Sinon, on continue la construction. L'instant τ_R peut être un des instants s_k. Plus précisément, si μ est le premier indice k pour lequel r_{k+1} est infini, on a

$$\{\tau_R = s_k\} = \{\mu = k\} = \{r_k < +\infty = r_{k+1}\},$$

et dans ce cas, $|x_{\tau_R}| = 1 + m_1 + \cdots + m_k$. Les portions $[s_i, s_{i+1}[$ de la trajectoire ne sont pas indépendantes. Cependant, les portions $(|x_n| - |x_{s_i}|;\ s_i \leq n \leq r_{i+1})$ dépendent de niveaux disjoints de l'arbre et sont donc i.i.d. En particulier, les variables aléatoires $(m_i)_{i \leq \mu}$ sont i.i.d. De plus, τ_R est effectivement l'un des s_i car μ est fini presque sûrement. On a même le lemme.

LEMME 7. *Les suites $GP[\mu \geq n]$ et $GP[m_i \geq n | m_i < +\infty]$ décroissent exponentiellement.*

PREUVE. Soient x et y deux sommets de a tels que y est un descendant de x. Notons $h := |y|$ et

$$B_i(x, y) := \{r_i < +\infty,\ x(s_i - 1) = x,\ x(s_i) = y\}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} P_a[\mu \geq i+1 | \mu \geq i,\ B_i(x, y)] &= P_a[r_{i+1} < +\infty | r_i < +\infty,\ x(s_i) = y] \\ &= P_{x^+}[\tau_x < +\infty | x_0 = y] \\ &= C(y^+)/(1 + C(y^+)). \end{aligned}$$

Sous GP, la loi de $y^+ = x(s_i)^+$ n'est pas indépendante de la réalisation de l'arbre $a \setminus y^+$ à cause du conditionnement par $\{\zeta = +\infty\}$. Par contre, lorsque $C(y^+) > 0$, alors y^+ est infini et $\zeta(a) = +\infty$. De plus, sous G^*P, $x(s_i)^+$ conditionné par $\{r_i < +\infty\}$ est un arbre de loi G^*. Désignons par b un arbre de taille h tel que $y \in b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} g &:= GP[C(x(s_i)^+) \geq \varepsilon | a_{0h} = b,\ x(s_i) = y] \\ &= G^*P[C(x(s_i)^+) \geq \varepsilon | a_{0h} = b,\ x(s_i) = y,\ \zeta = +\infty] \\ &= G^*[C(y^+) \geq \varepsilon,\ a_{0h} = b]\, G^*[a_{0h} = b,\ \zeta = +\infty]^{-1} \\ &= G^*[C \geq \varepsilon]\, G^*[\zeta = +\infty | a_{0h} = b]^{-1} \\ &= G[C \geq \varepsilon]\,(1 - q)\,(1 - q^{\# b_h})^{-1} \leq G[C \geq \varepsilon]. \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt que

$$GP[\mu \geq i+1 | \mu \geq i] \leq G[C/(1 + C)] < 1.$$

Ainsi, la loi de μ décroît exponentiellement. De même, les $(m_i)_{i \leq \mu}$ sont i.i.d. et la loi de m_i décroît exponentiellement. En effet, si m_1 est finie et si $m_1 \geq n$, le marcheur repasse en 0 à partir du plus haut sommet visité pendant l'intervalle de temps $[0, r_1]$, c'est-à-dire, à partir d'un sommet $x \in a$ avec $|x| \geq n$. En particulier, quand $a \notin B_n$,

$$P_a[m_1 \geq n | m_1 < +\infty] \leq \max\{P_a[\tau_0 < +\infty | x_0 = x];\ x \in a_n\},$$

et cette suite décroît exponentiellement. Par ailleurs, $GP[B_n]$ décroît exponentiellement donc le lemme est démontré. □

3.4. *Loi de τ_R: le cas $Z \geq 1$.* Nous estimons maintenant la probabilité $GP[\tau_R \geq p]$. Une première étape est valable pour toute loi G. Pour n fixé, $\{\tau_R \geq p\}$ est une partie de la réunion de $\{\tau_R \geq \tau_n\}$ et de $\{\tau_n \geq p\}$, donc il suffit de majorer les probabilités de ces deux ensembles. Tout d'abord, on a le lemme.

LEMME 8. *Pour toute loi supercritique $Z \geq 0$, $GP[\tau_R \geq \tau_n]$ décroît exponentiellement.*

PREUVE. Nous décomposons à nouveau l'événement considéré. Pour toute constante c_5 fixée, on a

$$\{\tau_R \geq \tau_n\} \subset \{\mu \geq c_5 n\} \cup \left\{\sum_{i=1}^{\mu} m_i \geq n,\ \mu \leq c_5 n\right\}.$$

D'après le Lemme 7 de la Section précédente, la probabilité de $\{\mu \geq c_5 n\}$ décroît exponentiellement pour toute valeur de c_5. Pour traiter la somme des m_i, introduisons une suite $(m_i^*)_{i>\mu}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que m_1 conditionnée par $\{m_1 < +\infty\}$, et posons $m_i^* := m_i$ si $i \in [1, \mu]$. Il suffit de majorer la probabilité de

$$\left\{\sum_{i=1}^{c_5 n} m_i^* \geq n\right\},$$

qui décroît exponentiellement d'après le théorème de Cramér et le Lemme 7 dès que c_5 vérifie

$$c_5\, GP[m_1 | m_1 < +\infty] < 1. \qquad \square$$

La deuxième étape consiste à majorer $G[\tau_n \geq p]$. Nous supposons dans cette section que $Z \geq 1$. Un argument de couplage similaire à celui de la Section 3.1 dans le cas $Z \geq 2$ montre qu'on peut remplacer $(x_n)_n$ par la marche au hasard simple $(\xi_n)_n$ sur $\mathbb{Z}_+$ réfléchie en 0 et de probabilités de transitions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ partout ailleurs qu'en 0. La seule différence avec le couplage précédent est la suivante. Quand $\xi_n = 0$, on sait que $\xi_{n+1} = \xi_n + 1$ alors que $|x_\bullet|$ pourrait diminuer à cet instant. Cependant, si $\xi_n = 0$ et si $x_n \neq 0$, alors $|x_n| \geq 2$ car les deux marches partent de 0 en même temps donc les deux positions ont la même parité. On voit donc que, même dans ce cas défavorable, $\xi_{n+1} \leq |x_{n+1}|$. Ainsi, la relation presque sûre entre $\xi_\bullet$ et $|x_\bullet|$ devient

$$\xi_n \leq |x_n|.$$

Comme $\xi_\bullet$ atteint le niveau n après le temps τ_n, il suffit de majorer la loi du temps d'atteinte de n dans le cas de cette marche. Le lemme suivant implique en particulier que $GP[\tau_R \geq p]$ décroît exponentiellement avec n pour $p = n^3$.

LEMME 9. *Il existe des constantes c et c' strictement positives telles que la marche $\xi_\bullet$ sur $\mathbb{Z}_+$ réfléchie en 0 et de probabilités de transitions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ vérifie, pour tout $n \geq 1$,*

$$\exp(-cn) \leq P[\tau_n \geq n^3 | \xi_0 = 0] \leq \exp(-c'n).$$

PREUVE. Pour établir la majoration, nous montrons d'abord que, pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in [0, n]$, on a

$$P[\tau_n \geq n^2 | \xi_0 = x] \leq \exp(-c'),$$

avec $c' > 0$. Il suffit de traiter le cas $x = 0$ car τ_n avec $x_0 = 0$ domine stochastiquement τ_n avec $x_0 = x$ pour tout $x \in [0, n]$. Le principe d'invariance de Donsker montre que

$$P[\tau_n \geq n^2 | \xi_0 = 0]$$

tend vers la quantité équivalente pour un mouvement brownien standard issu de 0. Cette limite est strictement inférieure à 1 donc l'assertion est vraie. En conditionnant par les positions de la marche aux instants kn^2, $k \in [1, n]$, et en utilisant la propriété de Markov, on en déduit la majoration du lemme.

La preuve de la minoration suit le même principe: à nouveau par comparaison avec un mouvement brownien, il existe $c > 0$ telle que, pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in [0, n/2]$,

$$P[\tau_n \geq n^2,\ \xi_{n^2} \leq n/2 | \xi_0 = x] \geq \exp(-c).$$

En conditionnant par les positions de la marche aux instants kn^2, $k \in [1, n]$, et en utilisant la propriété de Markov, on en déduit la minoration du lemme. □

3.5. *Minorations.* Choisissons un sommet x voisin de 0 et imposons la valeur de $Z(0) = k$ et $Z(x) = l - 1$. Imposons que la marche fasse l'aller-retour entre 0 et x pendant $2n$ pas. La probabilité d'un tel événement est $p_k p_{l-1} (kl)^{-n}$ et si $x_{2n} = x_0$, alors $\tau_R \geq 2n$. Ceci montre que $\alpha = 1$ convient toujours.

Si $Z = 0$ ou 1 est possible, supposons pour simplifier que $p_1 > 0$. Si on commence par tirer n fois $Z = 1$, l'arbre commence par une portion linéaire de longueur n. Il faut pour cela une probabilité de p_1^n. Imposons ensuite que pendant ses n^3 premiers pas, la marche n'atteint pas n, puis qu'elle retourne en 0 avant de toucher n à partir de sa position au temps n^3. Le Lemme 9 montre que les n^3 pas ont une probabilité de $\exp(-cn)$. La dernière condition est de probabilité au moins n^{-1}. Finalement, $GP[\tau_R \geq n^3]$ vaut au moins $p_1^n \exp(-cn) n^{-1}$. Cela montre que $\alpha = 1/3$ convient.

REMARQUE 1. Cet argument est le même que celui qui permet à Dembo, Peres et Zeitouni (1996) de montrer des minorations de probabilités de grandes déviations en $\exp(-c\, n^{1/3})$ et il nous a été exposé par Yuval Peres.

3.6. *Secondes réductions de l'arbre.* Pour traiter le cas général où Z peut prendre la valeur 0, nous éliminons d'autres configurations d'arbres. Nous examinons successivement le cardinal de a_{0n}, la taille des sous arbres finis et la proportion de descendants dans a' d'un sommet de a'. Tout d'abord, on connaît

$$G[\#a_{0n}] \le (1-q)^{-1}\, G^*[\#a_{0n}] = (1-q)^{-1}\, m^n,$$

donc $G[\#a_{0n} \ge \exp(c_2 n)] \le C\, m^n \exp(-c_2 n)$ et, pour c_2 assez grand, on a montré que la suite $G[C_n]$ décroît exponentiellement, avec

$$C_n := \{\#a_{0n} \ge \exp(c_2 n)\}.$$

Soit $x \in a$. Nous voulons maintenant montrer que si $x \notin a'$, c'est-à-dire si x^+ est fini, x^+ n'est pas trop gros. Pour $x \in a \setminus a'$ fixé, le Lemme 2 donne

$$G[c_3 n \le \#x^+ < +\infty | x \in a \setminus a'] = G''[\#a \ge c_3 n] \le C \exp(-c\, c_3 n).$$

Notons ensuite

$$D_n := \{\exists\ x \in a_{0n},\ c_3 n \le \#x^+ < +\infty\} \setminus C_n.$$

Si un sommet $x \in a_{0n}$ vérifie la propriété qui sert à définir D_n, un sommet de $a_{0(n+1)} \setminus a'$ aussi. La probabilité de D_n est donc majorée par le nombre moyen de sommets $x \in a_{0(n+1)} \setminus a'$ tels que $c_3 n \le \#x^+ < +\infty$, donc par $\#a_{0(n+1)}$ fois la probabilité calculée ci-dessus pour un sommet donné. Si c_3 est assez grand,

$$G[D_n] \le \exp(c_2 n)\, C \exp(-c\, c_3(n+1)),$$

qui décroît exponentiellement. Enfin, nous montrons que la probabilité de rester dans le squelette a' après un pas n'est pas trop petite. Rappelons que $Z'(x)$ est le nombre de descendants de x qui appartiennent au squelette, et notons

$$F_n := \{\exists\ x \in a',\ |x| \le n,\ Z(x) \ge c_4 n\, Z'(x)\} \setminus C_n.$$

Pour $x \in a'$ donné, la probabilité de l'événement $\{Z(x) \ge c_4 n\, Z'(x)\}$ est au plus $C \exp(-t\, c_4 n)$, d'après le Lemme 4. On revient à l'arbre a' tout entier comme dans le cas de D_n en utilisant la borne de $\#a_{0n}$. Donc,

$$G[F_n] \le \exp(c_2 n) C \exp(-t\, c_4 n).$$

Pour c_4 assez grand, cette borne est exponentielle. Finalement, il existe des constantes c_i, $i \in [1, 4]$, telles que $G[H_n]$ décroît exponentiellement, avec

$$H_n := B_n(c_1) \cup C_n(c_2) \cup D_n(c_3) \cup F_n(c_4).$$

3.7. *Loi de τ_R: le cas général.* On suppose maintenant que Z peut prendre la valeur 0 et on reprend la décomposition de la Section 3.3. Le couplage avec une marche classique sur Z ou sur Z_+ est impossible car lorsque $x_\bullet$ arrive en un sommet de degré 1, le pas suivant est forcément un retour vers 0.

Le Lemme 8 de la Section 3.4 est toujours valable donc il suffit de majorer $P_a[\tau_n \ge p]$ pour un arbre $a \notin H_n$. Notons $x'_\bullet$ la marche induite par $x_\bullet$ sur a'. De façon intuitive, la trajectoire de $x'_\bullet$ est composée par les sommets de a' successivement occupés par la trajectoire de $x_\bullet$ donc $x'_\bullet$ est la marche simple sur un arbre de Galton–Watson a' avec $Z' \geq 1$. De façon plus rigoureuse, on pose $x'_n = x_{t(n)}$ pour $t(0) := 0$ et

$$t(n+1) := \inf\{k \geq t(n);\ x_k \in a',\ x_k \neq x_{t(n)}\}.$$

En particulier, $x'_\bullet$ atteint le niveau n au temps τ'_n et $GP[\tau'_n \geq n^3]$ décroît exponentiellement.

Notons ν_i le nombre d'excursions hors de a' effectuées par $x_\bullet$ entre les pas (x'_{i-1}, x'_i) et (x'_i, x'_{i+1}) de $x'_\bullet$; ces excursions sont donc issues de x'_i. Par ailleurs, $x'_i \in a'_{0n}$ pour tout instant $i \in [0, \tau'_n]$. Notons également

$$N_n := \sum_{i=1}^{\tau'_n} \nu_i,$$

et d_j la durée de la $j$ième excursion hors de a'. Pour c_6 donné, l'événement $\{\tau_n \geq c_6 n^6\}$ est inclus dans la réunion de $\{\tau'_n \geq n^3\}$, de K_n et de L_n, avec

$$K_n := \{N_n \geq c_6 n^4,\ \tau'_n \leq n^3\},$$

$$L_n := \left\{\sum_{j=1}^{N_n} d_j \geq c_6 n^6,\ N_n \leq c_6 n^4\right\}.$$

Supposons vrai le lemme suivant.

LEMME 10. *Pour c_6 assez grand, les suites $GP[K_n]$ et $GP[L_n]$ décroissent exponentiellement.*

Comme $GP[\tau'_n \geq n^3]$ décroît également exponentiellement, on aura démontré que $GP[\tau_R \geq c_6 n^6]$ décroît exponentiellement, donc la majoration du théorème 2 avec $\beta = 1/6$. Reste à prouver le Lemme 10.

PREUVE. Supposons que $a \notin H_n$ et examinons la propriété qui définit K_n. Comme $a \notin C_n \cup F_n$, et comme on ne considère que des indices $i \in [1, \tau'_n]$, le sommet $x'_i \in a'_{0n}$ et ν_i est le premier succès dans un jeu de pile ou face avec une probabilité de succès

$$Z'(x'_i)/Z(x'_i) \geq (c_4 n)^{-1}.$$

Pour $c_4 n \geq 1$, on peut construire par couplage une suite infinie de variables aléatoires $(\nu^*_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. de loi géométrique de paramètre $(c_4 n)^{-1}$ telles que $\nu_i \leq \nu^*_i$ presque sûrement pour tout $i \in [1, \tau'_n]$. On n'impose pas de relation entre ν^*_i et ν_i si $i > \tau'_n$. De plus, un calcul direct et l'inégalité $e^u(1-2u) \leq (1-u)$ pour tout $u \geq 0$ montrent que

$$E[\exp(\nu^*_i/(2c_4 n))] \leq 2\exp(1/(2c_4 n)) < 4.$$

Enfin, la somme des ν^*_i pour $i \in [1, n^3]$ est supérieure à la somme des ν_i pour $i \in [1, \tau'_n]$ donc l'inégalité de Chebyshev appliquée à la somme des ν^*_i pour $i \in [1, n^3]$ donne

$$GP[K_n;\ H^c_n] \leq 4^{n^3} \exp(-c_6 n^3/(2c_4)).$$

Pour c_6 assez grand, ceci décroît en $\exp(-cn^3)$. En ce qui concerne L_n, chaque d_j pour $j \in [1, N_n]$ est la durée d'une excursion dans un arbre fini de cardinal au plus $c_3 n$ donc on peut appliquer le Lemme 3 avec $k = c_3 n$. On en déduit, pour tout $j \in [1, N_n]$,

$$\begin{aligned} GP[d_j \geq n^2 | a \notin H_n,\ a'_{0n},\ x'_\bullet] &\leq G''_k P[\exp(c\tau_0/(c_3 n))] \exp(-c\,n/c_3) \\ &\leq 2\,\exp(-c\,n/c_3). \end{aligned}$$

Pour que la somme de $N_n \leq c_6 n^4$ termes comme d_j soit supérieure à $c_6 n^6$, un des termes doit être supérieur à n^2, donc

$$GP[L_n;\ H_n^c] \leq c_6 n^4\, 2 \exp(-cn/c_3),$$

et cette majoration décroît exponentiellement. Finalement, $GP[H_n]$ décroît exponentiellement, donc le lemme est démontré. □

REMARQUE 2. Dans la preuve du Lemme 10, on a majoré $GP[L_n;\ H_n^c]$ en utilisant simplement que tous les sommets d'un arbre b de cardinal $\#b \leq c_3 n$ ont un degré inférieur à $c_3 n$. Cela revient à remplacer H_n^c par un ensemble beaucoup plus grand; plus précisément, l'ensemble M_n des arbres a tels que, pour tout sommet $x \in a'_{0n}$, les degrés de tous les sommets de $x^+ \setminus a'$ sont inférieurs à $c_3 n$.

Remplacer H_n^c par M_n peut sembler être une façon grossière d'obtenir une majoration. Il se trouve cependant fréquemment que la durée du temps de retour τ_0 en 0 dans un arbre fini admet asymptotiquement, quand k devient grand, les mêmes moments exponentiels sous $G''_k P$ que sous la restriction $G''_{[k]} P$ de $G'' P$ aux arbres dont le cardinal est inférieur à k.

En effet, on a tout d'abord $G''_{[k]} \leq G''_k$. Supposons ensuite, pour simplifier, que la variable aléatoire Z n'est pas bornée et qu'elle peut prendre toutes les valeurs entières. Notons $b(k)$ l'arbre de hauteur 2 construit en dotant la racine 0 d'un seul descendant x et en dotant le sommet x de k descendants. Alors, $\exp(t\tau_0)$ pour l'arbre $b(k)$ est intégrable si et seulement si $e^{2t} < 1 + k^{-1}$. De plus, la probabilité de $\{a = b(k)\}$ sous $G''_{[k]}$ est strictement positive, donc $G''_{[k]} P[\exp(t\tau_0)]$ est infini si $e^{2t} \geq 1 + k^{-1}$. En conclusion, si on veut utiliser l'inégalité de Chebyshev pour majorer la distribution de la durée de la $j$ème excursion d_j, on doit choisir un réel t tel que $\exp(t\tau_0)$ est intégrable et cela revient à choisir t inférieur à un multiple de $(c_3 n)^{-1}$, que l'on se restreigne aux arbres dont le cardinal est inférieur à $c_3 n$ ou bien seulement aux arbres dont tous les sommets ont un degré inférieur à $c_3 n$.

Si Z est bornée, la situation est différente. En effet, $G'' = G''_k$ pour k assez grand et fixé donc $GP[d_j \geq n]$ décroît exponentiellement. On en déduit le corollaire.

COROLLAIRE 1. *Si le support de la loi de Z est fini, alors on peut remplacer la valeur $\beta = 1/6$ du Théorème 2 par $\beta = 1/5$.*

4. Théorème central limite. Nous rappelons la construction de la marche au hasard sur un arbre de Galton–Watson, vue globalement comme un système ergodique (Section 4.1). Cette construction est due à Lyons, Pemantle et Peres (1995) et elle a permis à ces auteurs de démontrer que la suite $(|x_n|)_n$ obéit à une loi forte des grands nombres. Dans la suite, nous étudions la convergence vers la loi normale des suites $|x_n|$ et r_n convenablement normalisées. Nous montrons notamment que cette convergence découle de propriétés d'intégrabilité d'un instant aléatoire n_R (Section 4.2). Nous en donnons la preuve dans le cas du rang r_n et nous indiquons comment l'adapter au cas de la distance $|x_n|$. Dans la Section 4.3, nous relions la loi de n_R et celle du temps σ_R introduit dans l'énoncé du Théorème 2. Ceci nous permet de majorer la loi de n_R. Nous démontrons la version fonctionnelle du théorème central limite dans la Section 4.4. Les résultats des Sections 4.2 et 4.4 sont dans Piau (1996) et nous les reprenons pour rendre le présent article plus autonome. Enfin, nous donnons dans la Section 4.5 quelques valeurs explicites des paramètres qui interviennent dans l'énoncé du Théorème 1.

4.1. *Un système ergodique.* Dans la construction de l'arbre de Galton–Watson, la racine est un sommet "singulier." En effet, rac(a) possède, en loi, Z voisins alors que les autres sommets en possèdent $Z+1$. Si on considère deux copies indépendantes de cet arbre et qu'on ajoute une nouvelle arête entre leurs racines, on obtient un arbre dont tous les sommets ont le même degré en loi. Soit Γ la loi ainsi obtenue, conditionnée par la non extinction. Comme l'arbre a est G-presque sûrement transient, la marche $(x_n)_n$ sur a finit par ne plus repasser par rac(a), et cette "augmentation" de la mesure G ne change pas les propriétés asymptotiques de la marche. Nous utilisons désormais la version augmentée Γ.

Notons que la loi ΓP n'est pas une mesure produit puisque, quand a change, la loi P_a change. On peut construire ΓP comme suit. Soit AC le fibré en A constitué des couples $(a, \widehat{y})$ où $a \in A$ et $\widehat{y} := (y_n)_n$ est une suite indexée par Z de sommets de a telle que $y_0 =$ rac(a). Désignons par $\pi(a, b)$ l'inverse du degré de rac(a) lorsque:

1. a et b ont le même graphe sous-jacent et
2. rac(b) est un voisin de rac(a),

et $\pi(a, b) := 0$ dans tous les autres cas. On voit facilement que π est le noyau de transition d'une chaîne de Markov $(a_n)_n$ sur A. De plus, Γ est stationnaire et réversible sous π [voir Lyons, Pemantle et Peres (1995), Théorème 3.1]. Soit ΓP la mesure sur AC associée à π et Γ. La trajectoire $(y_n)_n$ coïncide simplement avec la suite des racines (rac$(a_n))_n$ et la loi de $(y_n)_n$ sous ΓP conditionnée par la valeur de a coïncide avec P_a. L'opérateur de décalage S sur AC est

$$S(a, \widehat{y}) := (b, \widehat{z}),$$

avec $z_n := y_{n+1}$ et où b est l'arbre a avec une nouvelle racine rac$(b) := y_1$. L'ergodicité de S sous ΓP, démontrée par Lyons, Pemantle et Peres (1995), leur a permis d'obtenir la convergence ΓP presque sûre de $|x_n|/n$ (voir ci-dessous la Section 4.4 pour cet argument dans le cas du rang r_n et la Section 4.5 pour des valeurs des paramètres).

4.2. *Convergence vers la loi normale.* On note désormais $(a, \widehat{x})$ un élément de AC puisque la loi de $\widehat{x}$ sous ΓP coïncide avec la loi de la marche au hasard $(x_n)_n$. La mesure ΓP est invariante par S. Elle est aussi invariante par retournement du temps

$$(a, \widehat{x}) \mapsto (a, \widehat{z}), \qquad z_n := x_{-n}.$$

Soit R le sous-ensemble de AC défini par

$$R := \{\forall\ m < 0 \leq n,\ x_m \neq x_0,\ x_n \neq x_{-1}\}.$$

Un élément de AC est dans R si et seulement si la marche vient de franchir l'arête $\{x_{-1}, x_0\}$ pour la première et la dernière fois. La mesure de R est strictement positive (voir un calcul semiexplicite de $\Gamma P[R]$ à la fin de la Section 4.5) donc l'instant aléatoire

$$n_R(a, \widehat{x}) := \inf\{n \geq 1;\ S^n(a, \widehat{x}) \in R\}$$

est presque sûrement fini. Il en est de même pour les temps de passage successifs dans R, définis par

$$n_R^1 := n_R, \qquad n_R^{k+1} := n_R \circ S^{n_R^k}.$$

Appelons la portion de trajectoire et d'arbre comprise entre les temps n_R^k et n_R^{k+1}, la $k$ième tranche. Le trait fondamental de cette décomposition est que les tranches sont i.i.d. pour tout $k \geq 1$ (la tranche $[0, n_R]$ n'a pas la même loi que les suivantes). Ce fait intuitivement évident est démontré de façon rigoureuse dans Lyons, Pemantle et Peres (1996).

Soit $\overline{r}_k$ le rang de la $k$ième tranche et soit $(n_k)_k$ le processus de comptage associé à la suite $(n_R^k)_k$. Plus précisément, on pose

$$\overline{r}_k := \#\{x_n;\ n_R^k \leq n < n_R^{k+1}\}, \qquad \{n_k \geq p\} := \{k \geq n_R^p\}.$$

Le rang au temps $k \geq 1$ est alors

$$r_k = s_k + \sum_{l=1}^{n_k - 1} \overline{r}_l + t_k,$$

$$s_k := r(k \wedge n_R), \qquad t_k := (r_k - r(n_R^{n_k}))\, 1_{n \geq n_R}.$$

Le rang d'une portion de trajectoire restreinte à un intervalle de temps est au plus égal à la longueur de cet intervalle de temps donc $s_k \leq n_R$ et la suite $s_k/\sqrt{k}$ tend presque sûrement vers 0. De même, on a $t_k \leq \overline{r}(n_k)$. Notons que $\overline{r}(n_k)$ est la longueur de l'intervalle de recouvrement dans le processus de renouvellement associé à la suite $(\overline{r}_k)_k$ avec un premier terme de délai $r(n_R)$. La loi de cet intervalle de recouvrement n'est pas la loi commune des $\overline{r}_k$. Cependant, elle converge en loi quand k tend vers l'infini vers la loi d'une variable aléatoire $\overline{r}_\infty$; voir Durrett (1991), Section 3.4, par exemple. La loi de $\overline{r}_\infty$ est caractérisée par la relation

$$\Gamma P[f(\overline{r}_\infty)] = \Gamma P[\overline{r}_1 \, f(\overline{r}_1)]/\Gamma P[\overline{r}_1],$$

satisfaite pour toute fonction mesurable positive f. Donc $t_k/\sqrt{k}$ converge en loi vers 0 dès que $\overline{r}_\infty$ est presque sûrement finie, ce qui est le cas car $\overline{r}_1$ est intégrable.

Il reste à examiner la somme des rangs des tranches. D'après le théorème ergodique, n_k/k converge ΓP-presque sûrement vers une constante $\nu > 0$. De même, rappelons que r_n/n converge ΓP-presque sûrement vers une constante $u \in]0,1[$ (on peut exprimer u comme $u = \Gamma P[N]$ où l'ensemble N est défini dans la Section 4.3). Notons

$$\widetilde{r}_k := \overline{r}_k - u\,(n_R^{k+1} - n_R^k), \qquad \rho_k := \sum_{l=1}^{n_k-1} \widetilde{r}_l.$$

Si les v.a. centrées $\widetilde{r}_k$ sont de carré intégrable, $\rho_k/\sqrt{k}$ converge en loi vers une loi normale centrée. Mais $|\widetilde{r}_k| \le n_R^{k+1} - n_R^k$ et, par ailleurs, $n_R^{k+1} - n_R^k$ suit la loi de n_R conditionné par R. Ainsi, il suffit d'établir que $(n_R|R)$ est de carré intégrable, pour que la convergence vers la loi normale soit démontrée.

La distance $|x_n|$ se traite de la même façon. La seule remarque à faire est que sur un arbre, le plus court chemin de x_0 à x_k passe par toutes les arêtes de régénération rencontrées par la marche.

4.3. *Les lois de n_R et σ_R.* Fixons $(a, \widehat{x}) \in R$. Alors n_R coïncide avec le premier instant de régénération en arête σ_R introduit dans l'énoncé du Théorème 2, sur le sous-arbre a^* de a situé "au devant" de x_0, c'est-à-dire, sur l'arbre des sommets x tels que le chemin de x_0 à x ne passe pas par x_{-1}. Notons N le fait que x_0 est un nouveau sommet pour le marcheur, c'est-à-dire,

$$N := \{\forall\ n < 0,\ \ x_n \ne x_0\}.$$

LEMME 11. *La loi de a^* sous ΓP conditionnée par R est contrôlée par G au sens suivant: il existe c tel que, pour tout ensemble mesurable $B \subset A$,*

$$\Gamma P[a^* \in B|R] \le c\, G[B].$$

PREUVE. Si R est réalisé, alors x_0 est un nouveau sommet et la loi de a^* sous ΓP conditionnée par N est la loi de Galton–Watson nonconditionnée G^*. De plus, pour $b \in A$ fixé,

$$\Gamma P[R|a^* = b,\ N] = P_b[\tau_{-1} = +\infty] = \frac{C(b)}{1 + C(b)}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Gamma P[a^* \in B|R] &= \Gamma P[R|N]^{-1}\,\Gamma P[a^* \in B,\ R|N]\\ &= \Gamma P[R|N]^{-1}\int_B \Gamma P[R|a^* = b,\ N]\,\Gamma P[a^* \in db|N]\end{aligned}$$

$$= \Gamma P[R|N]^{-1} \int_B \frac{C(b)}{1+C(b)}\, G^*[db]$$
$$= G^*[C/(1+C)]^{-1}\, G^*[1_B\, C/(1+C)].$$

Enfin, $C(b) = 0$ si b est fini donc on peut restreindre les intégrales à l'ensemble des arbres b tels que $\zeta(b) = +\infty$, c'est-à-dire au support de G. Il vient

$$\Gamma P[a^* \in B|R] = G[C/(1+C)]^{-1}\, G[1_B\, C/(1+C)].$$

Le fait que $C/(1+C) \leq 1$ et que $G[C/(1+C)] > 0$ permet de conclure. □

Le Lemme 11 implique que la loi de n_R conditionné par R sous ΓP est dominée par un multiple de la loi de σ_R sous GP. Ceci prouve l'intégrabilité de n_R conditionné par R sous ΓP.

Dans la Section 4.4, nous aurons également besoin de la loi de n_R sans conditionnement. Le lemme suivant est une extension du lemme de Kac [voir Petersen (1983)] et, comme le lemme de Kac, il découle directement de la construction des tours de Kakutani d'un système ergodique.

LEMME 12. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels, $f_n \geq 0$, et $(g_n)_{n\geq 1}$ la suite "primitive," définie par*

$$g_n := \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

Soit R un sous-ensemble de mesure positive d'un espace de probabilité (Ω, Σ, Q) et S une transformation ergodique inversible de (Ω, Σ, Q). Alors, le temps n_R de retour dans R vérifie

$$Q[f(n_R)] = Q[g(n_R)\, 1_R] = Q[R]\, Q[g(n_R)|R].$$

En particulier, $f(n_R)$ est intégrable sous Q si et seulement si $g(n_R)$ est intégrable sous $Q[\cdot|R]$.

PREUVE. Posons $R_n := R \cap \{n_R = n\}$ et $R_{n,k} := S^k(R_n)$. Alors, les ensembles

$$(R_{n,k})_{n\geq 1,\, k\in[0,n[}$$

forment une partition de Ω et les ensembles $(R_n)_{n\geq 1}$ forment une partition de R. De plus, $Q(R_{n,k}) = Q(R_n)$ et $n_R = n - k$ sur $R_{n,k}$. Il reste à décomposer les intégrales considérées selon ces partitions. □

4.4. *Les théorèmes fonctionnels.* Scott (1973) donne, en utilisant une idée de Gordin (1969), une condition suffisante pour que la suite des itérés d'une variable aléatoire X sous l'action d'une transformation ergodique inversible S d'un espace de probabilité (Ω, Σ, Q) vérifie un théorème central limite fonctionnel. Une description de ce résultat se trouve dans Durrett (1991), Section 7.7.

On suppose que X est de carré intégrable et on se donne une sous-tribu Σ_0 de Σ telle que $\Sigma_0 \subset S^{-1}(\Sigma_0)$. On note $\Sigma_n = S^{-n}(\Sigma_0)$. La suite de sous-tribus $(\Sigma_n)_n$ est donc croissante. Scott démontre que, si la somme

$$\sum_{n\geq 1} \|Q[X|\Sigma_{-n}]\|_{L^2(Q)} + \|X - Q[X|\Sigma_n]\|_{L^2(Q)}$$

converge, la norme $L^2(Q)$ de

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} X \circ S^k$$

converge, quand n tend vers l'infini, vers $\sigma \geq 0$. De plus, la suite des interpolations habituelles des sommes de Birkhoff de X sous l'action de S converge en loi vers un mouvement brownien dès que $\sigma > 0$.

Dans notre cas, posons $\Omega = AC$, $Q = \Gamma P$ et prenons pour Σ_0 la sous-tribu du passé, c'est-à-dire la tribu engendrée par l'arbre des sommets voisins d'un sommet x_n pour $n \in]-\infty, 0]$, ainsi que par la trajectoire $(x_n)_{n\leq 0}$ elle-même. Alors, $S^{-1}(\Sigma_0)$ contient Σ_0.

Nous remplaçons d'abord r_n par une somme de Birkhoff, puis nous vérifions la condition de Scott. La convergence vers la loi normale déjà démontrée prouve alors que la variance de $r_n/\sqrt{n}$ converge vers une limite $\sigma^2 > 0$.

Rappelons que $N := \{\forall\, n \leq -1,\ x_n \neq x_0\}$. Soit $X := 1_N - \Gamma P[N]$ et r'_n la somme de Birkhoff associée à X,

$$r'_n := \sum_{k=1}^{n} X \circ S^k.$$

On vérifie que $u = \Gamma P[N]$ et que $r'_n + n\,u$ est le cardinal de l'ensemble

$$\{x_k;\ 1 \leq k \leq n\} \backslash \{x_k;\ k \leq 0\}.$$

Par conséquent, $r'_n \leq r_n - n \cdot u$ et $(r_n - n \cdot u) - r'_n$ est uniformément majoré par le cardinal de l'ensemble

$$\{x_k;\ k \geq 1\} \cap \{x_k;\ k \leq 0\}.$$

Cet ensemble est ΓP-presque sûrement fini car la marche est transiente; ce fait n'est pas entièrement évident puisqu'il s'agit de démontrer que la trajectoire $(x_n)_{n\geq 0}$ ne peut converger vers le même point du bord de l'arbre que la trajectoire $(x_n)_{n\leq 0}$, c'est-à-dire que la mesure harmonique sur le bord de l'arbre est presque sûrement diffuse, mais il est vrai [voir Lyons, Pemantle et Peres (1995) pour une démonstration]. On peut donc remplacer $r_n - n \cdot u$ par r'_n. Le lemme suivant assure que le contrôle de la loi de τ_R, et donc de n_R, démontré dans le Théorème 2 entraîne la condition de Scott.

LEMME 13. *Pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire X est Σ_n mesurable et*

$$\Gamma P[\Gamma P[X \,|\, \Sigma_{-n}]^2] \leq 2\,\Gamma P[n_R \geq n].$$

PREUVE. Notons $X_n := X \circ S^n$. Nous allons décomposer $\Gamma P[X_n \,|\, \Sigma_0]$ en comparant les valeurs de n et n_R. On a

$$X_n = X_{\sup(n,\, n_R)} + (X_n - X_{n_R})\, 1(n_R \geq n).$$

La différence $|X_n - X_{n_R}|$ vaut au plus 1. De plus, $X_{\sup(n,\, n_R)}$ est indépendant de Σ_0 et son espérance (en utilisant la relation ci-dessus dans l'autre sens) est au plus

$$|\Gamma P[X_{\sup(n,\, n_R)}]| \leq |\Gamma P[X_n]| + \Gamma P[1(n_R \geq n)] = \Gamma P[n_R \geq n].$$

Par conséquent, on a

$$\Gamma P[X_n \,|\, \Sigma_0]^2 \leq |\Gamma P[X_n \,|\, \Sigma_0]| \leq \Gamma P[n_R \geq n] + \Gamma P[n_R \geq n \,|\, \Sigma_0],$$

ce qui suffit pour conclure. □

Dans le cas de la distance, on choisit $X := [x_0 - x_{-1}]_{x_{-\infty}} - v$ où $[x-y]_s$ désigne l'horodistance entre deux sommets x et y par rapport au point s du bord de l'arbre [voir Lyons, Pemantle et Peres (1995)]. On remplace alors $|x_n| - n\, v$ par la somme de Birkhoff associée à X comme ci-dessus et la condition de Scott est à nouveau satisfaite dès que la somme

$$\sum_n \Gamma P[n_R \geq n]^{1/2}$$

converge, ce qui est le cas en vertu des estimations du Théorème 2 et des résultats de comparaison de la Section 4.3.

4.5. *Valeurs des paramètres.*

4.5.1. *Lois des degrés.* On utilise la mesure stationnaire Γ. Rappelons l'allure de a autour de sa racine sous la loi Γ. La racine 0 possède $Z(0)$ voisins x. Pour $Z'(0)$ d'entre eux, l'arbre x^+ est infini. La loi de $(Z(0), Z'(0))$ est

$$\Gamma[Z(0) = i,\ Z'(0) = j] = p_{i-1}\, C_i^j\, q^{i-j}(1-q)^j(1-q^2)^{-1},$$

pour $i \geq 1$ et $j \in [1, i]$, où q désigne la probabilité d'extinction du processus original. Ainsi, $q \in [0, 1[$ et q est une racine de l'équation

$$q = f(q).$$

Conditionnellement aux valeurs de $Z'(0)$ et $Z(0)$, les $Z'(0)$ arbres x^+ qui sont infinis suivent la loi G et les autres la loi G''. En particulier, si x est un des $Z'(0)$ descendants de 0 tels que x^+ est infini,

$$G[Z(x) = i,\ Z'(x) = j] = p_i\, C_i^j\, q^{i-j}(1-q)^{j-1},$$

pour $i \geq 1$ et $j \in [1, i]$. Soit Z' une variable aléatoire de même loi que la coordonnée $Z'(x)$ du couple $(Z(x), Z'(x))$ donné ci-dessus. Sous G, la partie a' de a est un arbre de Galton–Watson non conditionné de loi de reproduction Z'.

4.5.2. *Expressions de v, u, σ^2 et ρ^2.* On déduit de la loi de $Z(0)$ sous Γ la valeur de la vitesse [cette valeur est donnée par Lyons, Pemantle et Peres (1995)]

$$v = 1 - 2\Gamma[1/Z(0)] = \sum_{i \geq 0} p_i \, \frac{i-1}{i+1} \, \frac{1-q^{i+1}}{1-q^2}.$$

Pour le rang, on doit calculer $u = \Gamma P[N] = \Gamma P[\tau_0 = +\infty]$. Notons y_i les $Z'(0)$ descendants de 0 tels que y_i^+ est infini. Alors,

$$P_a[\tau_0 = +\infty] = Z(0)^{-1} \sum_{i=1}^{Z'(0)} \frac{C(y_i^+)}{1 + C(y_i^+)}.$$

Les $C(y_i^+)$ sont i.i.d. et indépendants de $(Z(0), Z'(0))$. Ils suivent la loi de $C(a)$ sous G. En intégrant, on trouve

$$u = \Gamma[Z'(0)/Z(0)] \, G[C/(1+C)] = (1+q)^{-1} \, G[C/(1+C)].$$

La loi de C sous G est caractérisée comme suit: la loi de C est aussi la loi d'une somme aléatoire

$$\sum_{i=1}^{Z'} \frac{C_i}{1+C_i},$$

où les C_i sont i.i.d. de même loi que C et où Z' est indépendante des C_i. On peut montrer [voir Lyons, Pemantle et Peres (1995)] que les lois sur $[0, +\infty]$ qui satisfont l'équation fonctionnelle donnée plus haut sont au nombre de deux: la loi δ_0 et la loi de C qui ne charge pas 0. Enfin, $E[Z'] = m$, donc

$$u = G[C] \, m^{-1} (1+q)^{-1}.$$

Quand $p_0 = 0$, la loi de C est solution de l'équation fonctionnelle donnée ci-dessus avec $Z' = Z$ (c'est la solution différente de δ_0) et on trouve

$$v = E[(Z-1)/(Z+1)], \qquad u = G[C] \, m^{-1}.$$

Nous ne connaissons pas d'expression de $G[C]$ et donc de u, ni a fortiori des variances σ^2 et ρ^2, directement à partir de la loi de Z. Cependant, quand l'arbre de Galton–Watson est dégénéré, c'est-à-dire quand il existe $k \geq 2$ avec $P[Z = k] = 1$, on peut obtenir [voir Piau (1996)]

$$v = (k-1)/(k+1), \qquad \sigma^2 = 1 - v^2,$$
$$u = (k-1)/k, \qquad \rho^2 = u(1-u) + 2 \sum_{i \geq 1} (k^i (1 + k^i))^{-1}.$$

4.5.3. *Moyenne de n_R.* En comparant les processus de renouvellement associés aux temps de passage successifs dans R par la marche sur a et par la marche sur a', on constate que

$$\Gamma P[n_R | R] = \Gamma' P[n_R | R] \, \Gamma P[t' | x_0 \in a'],$$

où Γ' désigne la loi augmentée associée à Z' et où le terme de délai t' est défini par

$$t' := \inf\{n \geq 1;\ x_n \in a',\ x_n \neq x_0\}.$$

Chaque excursion que la marche sur a effectue hors de a' dure en moyenne $2/(1-m'')$ pas. Si de plus $x_0 = x \in a'$ avec $Z(x) = i$ et $Z'(x) = j$ pour $i \geq 1$ et $j \in [1, i]$, la marche effectue en moyenne $(i+1)/(j+1)-1$ excursions à partir de x avant de faire un pas dans a'. La forme explicite de la loi de $(Z(x), Z'(x))$ sous G, rappelée plus haut, entraîne

$$\begin{aligned}\Gamma P[t'|x_0 \in a'] &= 1 + 2(1-m'')^{-1} G[(Z(x) - Z'(x))/(Z'(x)+1)]\\ &= (1+q)/(1-q).\end{aligned}$$

Il reste à calculer $\Gamma' P[n_R|R]$ ou, de façon équivalente, $\Gamma P[R]$ quand $p_0 = 0$. On a

$$P_a[R|x_0 = x, x_1 = y] = P_a[\tau_y = +\infty|x_0 = x]\, P_a[\tau_x = +\infty|x_0 = y],$$

donc $\Gamma P[R] = G[C/(1+C)]^2$ dans le cas $p_0 = 0$. En regroupant cette expression et celle de la moyenne de t', on obtient dans le cas général

$$\Gamma P[R] = u^2(1-q^2).$$

Remerciements. Je tiens à remercier Harry Kesten pour m'avoir procuré une copie de Grimmett et Kesten (1984), ainsi que Russell Lyons et Yuval Peres pour des discussions instructives.

REFERENCES

ATHREYA, K. and NEY, P. (1972). *Branching Processes*. Springer, New York.

DEMBO, A., PERES, Y. and ZEITOUNI, O. (1996). Tail estimates for one-dimensional random walk in random environment. *Comm. Math. Phys.* 181 667–683.

DOYLE, P. and SNELL, J. (1984). *Random Walks and Electrical Networks*. Math. Assoc. Amer., Washington, D.C.

DURRETT, R. (1991). *Probability: Theory and Examples*. Wadsworth, Belmont, CA.

GANTERT, N. and ZEITOUNI, O. (1997). Quenched sub-exponential tail estimates for one-dimensional random walk in random environment. *Comm. Math. Phys.* To appear.

GORDIN, M. (1969). The central limit theorem for stationary processes. *Soviet Math. Doklady* 10 1174–1176.

GREVEN, A. and DEN HOLLANDER, F. (1994). Large deviations for random walk in random environment. *Ann. Probab.* 22 1381–1428.

GRIMMETT, G. and KESTEN, H. (1984). Random electrical networks on complete graphs II: Proofs. Unpublished manuscript.

KESTEN, H. (1986). Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 22 425–487.

KESTEN, H., KOZLOV, S. and SPITZER, F. (1975). A limit law for random walk in a random environment. *Comp. Math.* 30 145–168.

LYONS, R., PEMANTLE, R. and PERES, Y. (1995). Ergodic theory on Galton–Watson trees: speed of random walk and dimension of harmonic measure. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 15 593–619.

LYONS, R., PEMANTLE, R. and PERES, Y. (1996). Biased random walks on Galton–Watson trees. *Probab. Theory Related Fields* 106 249–264.

PETERSEN, K. (1983). *Ergodic Theory*. Cambridge Univ. Press.

PIAU, D. (1995). Rang et vitesse de la marche au hasard simple sur un arbre de Galton–Watson transient: deux théorèmes fonctionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 321 1257–1261.

PIAU, D. (1996). Limit theorems for simple random walk on a supercritical Galton–Watson tree. In *Trees (Versailles, 1995)*. (B. Chauvin, S. Cohen, and A. Rouault, eds.) *Progr. Probab.* 40 95–106. Birkhäuser, Boston.

SCOTT, D. (1973). Central limit theorems for martingales and for processes with stationary increments using a Skorokhod representation approach. *Adv. in Appl. Probab.* 5 119–137.

SINAI, Y. (1982). The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium. *Theory Probab. Appl.* 27 256–268.

SOLOMON, F. (1975). Random walks in a random environment. *Ann. Probab.* 3 1–31.

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD (LYON-I)
43, BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE
E-MAIL: piau@jonas.univ-lyon1.fr