Ark. Mat., **33** (1995), 1–44

Ombres. Convexité, régularité et sous-harmonicité

Alano Ancona

Abstract. Let $f: V \to \mathbf{R}$ be a function defined on a subset V of $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$, let $\varphi: x \mapsto \inf\{f(x,t); t$ such that $(x,t) \in V\}$ denote the *shadow* of f, and let $\Phi = \{(x,t) \in V; f(x,t) = \varphi(x)\}$. This paper deals with the characterization of some properties of φ in terms of the infinitesimal behavior of f near points $\xi \in \Phi$, proving in particular a conjecture of J.-M. Trépreau concerning the case $d=1$. Characterizations of this type are provided for the convexity, the subharmonicity, or the $C^{1,1}$-regularity of φ in the interior of $I = \{x \in \mathbf{R}^n; \exists t \in \mathbf{R}^d, (x,t) \in V\}$, and, in the $C^{1,1}$ case, an expression for $D^2\varphi$ is given. To some extent, an answer is given to the following question : which convex function $\varphi: I \to \mathbf{R}$, I interval $\subset \mathbf{R}$ (resp. which function $\varphi: I \to \mathbf{R}$ of class $C^{1,1}$) is the shadow of a C^2 function $f: I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$?

Un problème dû à Jean-Marie Trépreau est à l'origine de ce travail. Etant donné un ouvert X de $\mathbf{R}^n$ et une fonction réelle continue u sur $X \times [a,b]$, $(a<b)$, Trépreau a cherché des conditions pour que $U(x) = \inf\{u(x,t); a \le t \le b\}$ soit sous-harmonique sur X. Notant $J(x) = \{t \in [a,b]; u(x,t) = U(x)\}$, il a établi les deux théorèmes suivants.

Théorème A. ([Tr1], Theorem 1; voir aussi [Tr2], p. 30). *Supposons que u soit de classe C^3 et que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :*

(a) *Pour tout $x \in X$, il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $t \mapsto u(x,t)$ décroisse sur $[a,t_0]$ et croisse sur $[t_0,b]$.*

(b) *On a $\Delta_x u(x,t) \ge 0$ pour $t \in J(x)$, $x \in X$.*

(c) *Si $u'_t(x,t)=0$, alors $\Delta_x u(x,t) + 2\, u''_{xt}(x,t).\xi + u''_{tt}(x,t)|\xi|^2 \ge 0$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$.*

Alors, $U(x) = \inf\{u(x,t); a \le t \le b\}$ est sous-harmonique sur X.

Théorème B. ([Tr1], Theorem 2). *Si u est analytique réelle, alors U est sous-harmonique sur X si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(a) *$u'_x(x,t)$ est indépendant de $t \in J(x)$.*

(b) $\Delta_x u(x,t) \geq 0$ *pour* $t \in J(x)$, $x \in X$.
(c) *Si* $x \in X$, $t \in J(x) \cap]a,b[$ *et* $\xi \in \mathbf{R}^n$, *on a*

$$\Delta_x u(x,t) + 2u''_{xt}(x,t).\xi + u''_{tt}(x,t)|\xi|^2 \geq 0.$$

Le cas $n=1$ donne un critère de convexité pour U et sert d'ailleurs à obtenir le cas $n>1$. Il a aussi une interprétation géométrique claire : si Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^3$ à bord analytique, et si $\omega = \pi(\Omega)$ désigne la projection de Ω sur un plan, alors ω est convexe si, et seulement si, pour tout $\xi \in \partial\omega$, la normale extérieure à Ω est constante le long de $A_\xi = \pi^{-1}(\xi) \cap \partial\Omega$ et si, en chacun des points de A_ξ, la deuxième forme fondamentale de $\partial\Omega$ (associée à la normale extérieure) est positive.

Ayant établi ces résultats, Trépreau a conjecturé qu'au moins si $n=1$, le théorème B s'étend au cas où u est seulement C^2, la nécessité des conditions étant claire. Une question analogue se pose aussi évidemment pour $n>1$, mais il est raisonnable, comme on le verra, de distinguer les deux questions.

Dans ce travail, nous proposons d'abord une réponse positive à la première question (cas $n=1$) (Théorème 1), et nous montrons ensuite, à l'aide de ce premier résultat, mais par une méthode très éloignée de [Tr1] (Theorem 1), l'extension du théorème B pour u de classe C^2 à tout $n \geq 2$ (Théorème 5). Pour l'obtenir, on interprète le résultat du cas $n=1$ comme une caractérisation des fonctions u de classe C^2 admettant une ombre U de classe $C^{1,1}$ et on donne une expression de U'' (Théorème 3) ; ces propriétés s'étendent ensuite au cas $n>1$ (Théorème 3.bis), ce qui entraîne la caractérisation cherchée des ombres sous-harmoniques (Théorème 5). On donne aussi des variantes du théorème 1 avec une régularité $C^{1,\alpha}$ pour u (Théorème 1.bis), et un énoncé (Théorème 2) montrant en quel sens ces résultats sont optimaux.

Le théorème 3 montre en particulier qu'une ombre convexe (ou seulement $C^{1,1}$) d'une fonction u de classe C^2 est une fonction de classe $C^{1,1}$ bien particulière ; les ombres $C^{1,1}$ telles que $J(x)$ soit réduit à un point distinct de a et b pour tout $x \in X$ sont encore plus particulières, et nous avons pu caractériser complètement ces fonctions (Théorème 4). On décrit aussi une classe assez large de fonctions $C^{1,1}$ pouvant être associées à une fonction u de classe $C^{2,1}$.

Dans une dernière partie (sections 9 à 11), nous donnons une extension des théorèmes 1 et 3 pour des fonctions du type $U(x) = \inf\{u(x,t); (x,t) \in V\}$, avec $V \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$ et u fonction continue sur V (Théorème 1.ter, Théorème 3.ter). Ici, il est naturel de supposer u de classe C^{d+1}. En application, on obtient par exemple des conditions nécessaires de régularité pour la projection sur un sous-espace d'un corps convexe lisse de $\mathbf{R}^N$; on donne aussi une caractérisation des ombres sous-harmoniques généralisant le théorème 5.

On renvoie le lecteur à [Tr1] et au livre de Lars Hörmander ([Hö1]) pour les applications du théorème 5 (et du théorème A) que Trépreau avait en vue ; ces applications étendent certains résultats de [Tr2] portant sur la résolubilité des opérateurs différentiels de type principal sur le bord d'un domaine strictement pseudo-convexe.

La littérature sur les ombres (même pour un objet de départ convexe) semble assez réduite (voir [CFG], [Ki1], [Ki3]). Dans [Ki1], C. O. Kiselman a montré que dans $\mathbf{R}^3$, la projection sur un plan d'un corps convexe C de classe C^3 (resp. C^ω) est à frontière deux fois différentiable (resp. $C^{2+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon>0$), mais que cette frontière n'est pas en général C^2 si C est de classe C^∞. [Ki2] étudie la régularité de l'inf-convolution $f\bullet g$ de deux fonctions numériques f, g sur $\mathbf{R}^N$ (par définition $f\bullet g(x)=\inf\{f(y)+g(x-y); y\in\mathbf{R}^N\}$) en vue de l'application aux sommes vectorielles de parties convexes. Cette étude a été poursuivie par J. Boman ([Bo1], [Bo2]). Le résultat de [Bo1] montre qu'il existe dans $\mathbf{R}^7$ des convexes à frontière analytique réelle et admettant une projection sur le plan $\mathbf{R}^2\times\{0\}$ qui n'est pas de classe C^2 (voir [Ki3]).

Remerciements. J.-M. Trépreau m'a intéressé à sa conjecture et m'a fait généreusement part de son manuscrit [Tr1] ; sans lui, je n'aurai abordé aucune des questions considérées ici. J'ai aussi bénéficié de l'intérêt de Lars Hörmander pour ces questions et de ses nombreux commentaires critiques sur les premières versions de ce travail.

1. Caractérisations de la convexité d'une ombre. (Cas $n=d=1$)

On désigne par $f\colon (x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction réelle continue sur le produit $I\times J$ d'un intervalle *ouvert* (non vide) I de $\mathbf{R}$ avec un intervalle compact $J=[a,b]$ $(a<b)$. On note $\varphi(x)=\inf\{f(x,t); a\le t\le b\}$ l'*ombre* de f, $\Phi=\{(x,t)\in I\times J; \varphi(x)=f(x,t)\}$ l'ensemble de *contact*, et pour $x\in I$, $\Phi_x=\{t\in J; (x,t)\in\Phi\}$. On note aussi ∂_x et ∂_t les opérateurs de dérivation partielle sur $I\times J$ relativement à la première et la deuxième variable respectivement, et on pose $\partial^2_{xx}=\partial_x\circ\partial_x$, $\partial^2_{xt}=\partial_x\circ\partial_t$, $\partial^2_{tt}=\partial_t\circ\partial_t$. On écrira $f\in C^1_x(I\times J)$ si f admet une dérivée partielle $\partial_x f$ continue sur $I\times J$.

On dira que l'ensemble $\widetilde{\Phi}\subset\Phi$ est *plein* si pour tout $x\in I$, il existe $t\in J$ tel que $(x,t)\in\widetilde{\Phi}$. On notera pour $x\in I$, $\widetilde{\Phi}_x=\{t\in\mathbf{R}; (x,t)\in\widetilde{\Phi}\}$. Le résultat suivant sera étendu plus loin au cas d'un paramètre t multidimensionnel (section 9).

Théorème 1. *On suppose que f est de classe C^2 sur $I\times J$ et on se donne une partie pleine fermée $\widetilde{\Phi}$ de Φ. Alors, l'ombre φ de f est convexe sur l'intervalle I si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\partial_x f(x,t)$ est constante sur $\widetilde{\Phi}_x$.*

(ii) *Pour tout $\xi\in\widetilde{\Phi}$, on a $\partial^2_{xx}f(\xi)\ge 0$.*

(iii) *Pour tout* $\xi\in\widetilde{\Phi}$ *tel que* $\partial_t f(\xi)=0$, *on a* $|\partial^2_{xt}f(\xi)|^2\leq(\partial^2_{xx}f(\xi))\ (\partial^2_{tt}f(\xi))$.
De plus, si φ *est convexe,* φ *est de classe* $C^{1,1}$ *sur* I.

Remarque 1.1. L'énoncé reste correct si on remplace la propriété (iii) par la suivante :

(iii′) $\forall\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$ tel que $a<t<b$, on a $|\partial^2_{xt}f(\xi)|^2\leq(\partial^2_{xx}f(\xi))(\partial^2_{tt}f(\xi))$.

Remarques 1.2. (a) Pour $\xi\in\tilde{\Phi}$ tel que $\partial_t f(\xi)=0$, (ii) et (iii) signifient que $f''(\xi)$ est une forme quadratique positive.

(b) Pour $f\in C^1_x(I\times J)$, il est facile de voir que l'ombre φ est de classe C^1 sur I si et seulement si la condition (i) du théorème 1 est satisfaite, et qu'alors $\partial_x f(x,t)=\varphi'(x)$ pour $x\in I$, $t\in\widetilde{\Phi}_x$ (Lemme 4.1, section 4) ; d'autre part, il est immédiat que si (i) est en défaut, φ ne peut être convexe.

Le théorème 1 admet un analogue relatif aux fonctions f de classe $C^{1,1}$ ou même plus généralement de classe $C^{1,\tau}$, (c'est à dire lorsque f' vérifie localement une condition de Hölder d'exposant τ sur $I\times J$).

Théorème 1.bis. *Supposons que* $f\in C^1_x(I\times J)$, *que* $\partial_x f$ *soit localement höldérienne d'exposant* τ *sur* $I\times J$, $0<\tau\leq 1$, *et soit* $\widetilde{\Phi}$ *une partie pleine fixée de* Φ. *Pour que l'ombre* φ *de* f *soit convexe sur* I, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées* :

(i) *Pour tout* $x\in I$, $t\mapsto\partial_x f(x,t)$ *est constante sur* $(\overline{\widetilde{\Phi}})_x$.

(ii) *Pour tout* $\xi\in\widetilde{\Phi}$, *on a (en notant* $\xi'=(x',t')$*)* :

$$\liminf_{\xi'\to\xi,\xi'\in I\times J}\frac{f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)}{|\xi'-\xi|^{1+1/\tau}}\geq 0.$$

De plus, si φ *est convexe, elle est de classe* $C^{1,\tau}$ *sur* I.

On observera que si φ est convexe C^1, on a (en utilisant la remarque 1.2.b) :

$$f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)\geq\varphi(x')-\varphi(x)-\varphi'(x)(x'-x)\geq 0$$

si $\xi'=(x',t')\in I\times J$ et $\xi=(x,t)\in\Phi$; donc, si $f\in C^1_x(I\times J)$ et si φ est convexe, (ii) est vérifié pour tout τ !

Remarque 1.3. L'énoncé précédent reste vrai si on remplace (ii) par la condition :

(ii′) Pour $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$, on a, si $t\neq a$, $t\neq b$,

$$\liminf_{\xi'\to\xi}\frac{f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)}{|\xi'-\xi|^{1+1/\tau}}\geq 0,$$

(où $\xi'=(x',t')$), et si $t\in\{a,b\}$, on a

$$\liminf_{x'\to x}\frac{f(x',t)-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)}{|x'-x|^2}\geq 0.$$

Il est peut-être intéressant d'observer que si on suppose a priori assez de régularité sur l'ombre φ de f, une régularité C^1 pour f suffit dans l'énoncé précédent.

Proposition 1.1. *Si $f\in C^1_x(I\times J)$ vérifie la propriété* (ii) *du théorème* 1.*bis pour un $\tau\in]0,1]$ et une partie pleine $\widetilde{\Phi}$ de Φ, et si φ est $C^{1,\tau}$ sur I, alors φ est convexe sur I.*

Les théorèmes 1 et 1.bis seront établis en section 4, et la proposition 1.1 en section 5. L'énoncé suivant (qui est évident si $\gamma=1$) montre que l'hypothèse de régularité sur f dans le théorème 1.bis est en un certain sens optimale. Voir la preuve en section 12.

Théorème 2. *Soient $0<\gamma'<\gamma\leq 1$ et $\Omega=[0,1]\times[0,1]$. Il existe $f:\Omega\to\mathbf{R}$, de classe $C^{1,\gamma}$ sur Ω et vérifiant les trois propriétés suivantes* (*on note* $\varphi(x)=\inf\{f(x,t)\,;\,0\leq t\leq 1\}$, $\Phi=\{(x,t);0\leq x,t\leq 1,\varphi(x)=f(x,t)\}$, $J=[0,1]$) :

(i) *$\forall x\in J$, $\Phi_x=\{t\in J;\varphi(x)=f(x,t)\}$ est réduit à un élément distinct de* 0 *et de* 1.

(ii) *Il existe $c_0>0$ tel que pour tout $\xi=(x,t)\in\Phi$ et tout $\xi'=(x',t')\in\Omega$:*

$$f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)\geq -c_0|\xi'-\xi|^{1+1/\gamma}.$$

(iii) *L'ombre φ de f est concave* (*non affine*) *sur I et de classe $C^{1,\gamma'}$.*

2. Régularité $C^{1,1}$ d'une ombre. Calcul de la dérivée seconde. ($n=1, d=1$)

On conserve les notations de la partie précédente et on utilise aussi la terminologie suivante. f étant supposée de classe C^2 sur $I\times J$, on dira que $x\in I$ est *régulier* (pour f) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Pour tout $t\in\Phi_x$ tel que $\partial_t f(x,t)=0$, on a $\partial^2_{tt}f(x,t)\neq 0$;

(2) pour tout $t\in\Phi_x\cap\{a,b\}$ tel que $\partial_t f(x,t)=0$, on a aussi $\partial^2_{tx}f(x,t)\neq 0$.

Si $x\in I$ est non régulier, toute valeur $t\in\Phi_x$ telle que $\partial_t f(x,t)=0$ et mettant en défaut l'une des propriétés (1) et (2) précédentes sera dite *associée* à x.

Si x est régulier, on dira que x est *régulier exceptionnel*, s'il existe effectivement un $t\in\Phi_x\cap\{a,b\}$ tel que $\partial_t f(x,t)=0$ et $\partial^2_{tx}f(x,t)\neq 0$. L'ensemble R des points réguliers de I est un ouvert, et les points réguliers exceptionnels forment une partie discrète et fermée de R.

L'énoncé suivant (qui contient le théorème 1) sera démontré en section 6 (voir aussi les énoncés des sections 3 et 11). La partie A est un corollaire simple du théorème 1.

Théorème 3. *On suppose que f est de classe C^2 sur $I\times J$. Alors :*

A. Pour que l'ombre φ soit de classe $C^{1,1}$ sur l'intervalle I, il faut et il suffit que les deux propriétés suivantes soient réalisées.

(a) *Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\partial_x f(x,t)$ est constante sur Φ_x.*

(b) *Pour chaque partie compacte K de I, il existe un réel $A_K\geq 0$ tel que*

$$\forall\xi=(x,t)\in\Phi \text{ avec } x\in K \text{ et } \partial_t f(\xi)=0, \text{ on a } |\partial^2_{xt}f(\xi)|^2\leq A_K\partial^2_{tt}f(\xi).$$

B. Si φ est de classe $C^{1,1}$ sur I, on peut calculer la dérivée seconde $\varphi''(x)$ (qui existe presque partout sur I) de la manière suivante :

(a) *φ est de classe C^2 sur l'ensemble ouvert ω des points réguliers non exceptionnels de I et pour $x\in\omega$, Φ_x est fini et on a*

$$\varphi''(x)=\inf\left\{\partial^2_{xx}f(\xi)-\varepsilon(\xi)\frac{|\partial^2_{xt}f(\xi)|^2}{\partial^2_{tt}f(\xi)};\xi=(x,t),t\in\Phi_x\right\},$$

où $\varepsilon(x,t)=0$ (resp. $\varepsilon(x,t)=1$) si $\partial_t f(x,t)\neq 0$ (resp. si $\partial_t f(x,t)=0$).

(b) *Pour presque tout $x\in I$ irrégulier, on a $\varphi''(x)=\partial^2_{xx}f(x,t)$ pour tout $t\in\Phi_x$ associé à x.*

Remarque 2.1. On peut remplacer la condition (b) du A par la suivante, $\widetilde{\Phi}$ désignant une partie *pleine* (cf. 1) de Φ :

(b′) Pour chaque partie compacte $K\subset I$, il existe $A>0$ tel que $|\partial^2_{xt}f(\xi)|^2\leq A\partial^2_{tt}f(\xi)$, pour $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$ avec $x\in K$ et $a<t<b$.

Remarque 2.2. Si les conditions du A sont vérifiées, le théorème montre que pour tout intervalle compact $K\subset J$, on a

$$\|\varphi''\|_{\infty,K}\leq A_K+\sup\{|\partial^2_{xx}f(x,t)|;x\in K,(x,t)\in\Phi\}.$$

Le corollaire suivant dit que si l'ombre φ d'une fonction f de classe C^2 sur $I\times J$ est de classe $C^{1,1}$ (par exemple si φ est convexe, et a fortiori si f est convexe), alors cette ombre est un fonction de classe $C^{1,1}$ bien particulière.

Corollaire 2.1. *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 3. On suppose que φ est de classe $C^{1,1}$ sur I et que $\Phi_x\subset]a,b[$, $\forall x\in I$. Il existe alors une fonction h semi-continue supérieurement (s.c.s.) et localement bornée sur I telle qu'on ait :*

(1) *$\varphi''=h$ presque partout sur I.*

(2) *L désignant la fermeture de l'ensemble des points de discontinuité de h, la restriction $h_{|L}$ est continue en presque tout point de L.*

Si Φ_x est réduit à un élément pour tout $x\in I$, ou si $f(x,t)$ est convexe en t, on peut choisir h telle que $h_{|L}$ soit continue et φ est alors de classe C^2 sur un ouvert dense de I.

Remarque 2.3. C. O. Kiselman a montré un résultat plus précis si f est convexe de classe $C^{2,1}$ et $\Phi_x\cap\{a,b\}=\emptyset$, $\forall x\in I$: l'ombre φ est alors deux fois dérivable sur I (mais non C^2 en général), et pour *tout* $x\in I$ irrégulier, on a $\varphi''(x)=\inf\{\partial^2_{xx}f(x,t);$ t associé à $x\}$ ([Kil]). On peut voir alors que φ'' est s.c.s. et de restriction $\varphi''_{|L}$ continue.

L'énoncé suivant montre que le corollaire 2.1 caractérise les ombres $C^{1,1}$ des fonctions C^2 dans le cas «d'unicité» (Φ_x est réduit à un point pour tout $x\in I$).

Théorème 4. *Soient F une partie compacte de $\mathbf{R}$, h une fonction s.c.s. bornée et à support compact sur $\mathbf{R}$, de restrictions à F et à $\mathbf{R}\setminus F$ continues. Il existe alors une fonction $f\colon\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ de classe C^2 telle que :*

(a) *Pour tout compact $L\subset\mathbf{R}$, $\lim_{|t|\to\infty}f(x,t)=+\infty$ uniformément sur L.*
(b) *L'ombre $\varphi(x)=\inf\{f(x,t);t\in\mathbf{R}\}$ est $C^{1,1}$ sur $\mathbf{R}$ et telle que $\varphi''(x)=h(x)$ p.p.*
(c) *$\Phi_x=\{t\in\mathbf{R};f(x,t)=\varphi(x)\}$ est réduit à un élément pour tout $x\in\mathbf{R}$.*
(d) *On a $F=\{x;\partial^2_{tt}f(x,t)=0$ pour $t\in\Phi_x\}$.*

Avec quelques hypothèses supplémentaires, on peut obtenir une fonction f de classe $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha\leq 1$. A titre d'exemple, on établira la proposition suivante.

Proposition 2.2. *On se place dans les hypothèses du théorème 4, et on suppose en outre que pour une certaine constante $C>0$:*

(i) *Pour $x\in F$ et $x'\in\mathbf{R}$, $h(x')\leq h(x)+C|x'-x|$.*
(ii) *Si $x,x'\in\mathbf{R}\setminus F$ et $|x'-x|\leq\frac{1}{2}d(x,F)$, on a*

$$|h(x')-h(x)|\leq C\,d(x,F)^{-1}|x'-x|.$$

(iii) *La somme des racines carrées des longueurs des composantes bornées de $\mathbf{R}\setminus F$ est finie.*

Il existe alors $f\in C^{2,1}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ vérifiant les conclusions du théorème 4.

Les trois propositions précédentes sont établies en section 8.

3. Applications au cas $n\geq 1$, $d=1$ et au problème de Trépreau

On considère maintenant une fonction continue $f\colon U\times J\to\mathbf{R}$ sur le produit Ω d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ et d'un intervalle compact $J=[a,b]$ $(a<b)$, et son *ombre* $\varphi(x)=\inf\{f(x,t);t\in J\}$ qui est définie et continue sur U. On note encore

$$\Phi=\{(x,t)\in\Omega;\varphi(x)=f(x,t)\}\quad\text{et}\quad\Phi_x=\{t\in J;(x,t)\in\Phi\}.$$

Si f est C^2 sur $U\times J$, on dira que $x\in U$ est régulier (pour f) si :

(1) pour tout $t\in\Phi_x$ tel que $\partial_t f(x,t)=0$ on a $\partial^2_{tt}f(x,t)\neq 0$ et

(2) pour $t\in\Phi_x$ égal à l'une des extrémités de J et tel que $\partial_t f(x,t)=0$, on a $\partial_t(\nabla_x f)(x,t)\neq 0$. Si x est régulier, et s'il existe $t\in\Phi_x\cap\{a,b\}$ tel que $\partial_t f(x,t)=0$, x sera dit *régulier exceptionnel.* L'ensemble ω_f des points réguliers est ouvert et l'ensemble des points réguliers exceptionnels est fermé dans ω_f, contenu (localement) dans la réunion d'au plus deux sous-variétés de codimension 1 (et de classe C^1) de ω_f ; cet ensemble est donc négligeable dans $\mathbf{R}^n$.

Si $x\in U$ est non régulier, tout $t\in\Phi_x$ tel que $\partial_t f(x,t)=0$ et mettant en défaut l'une des propriétés (1) et (2) précédentes est dit associé à x. On a alors l'extension suivante du théorème 3 (voir la preuve en section 7).

Théorème 3.bis. *On suppose que f est de classe C^2 sur $U\times J$.*

A. Pour que φ soit (localement) de classe $C^{1,1}$ sur U il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

(i) *Pour tout $x\in U$, $t\mapsto\partial_x f(x,t)$ est constant sur Φ_x.*

(ii) *Pour tout compact $K\subset U$, il existe $A_K>0$ tel que pour tout $(x,t)\in\Phi$ avec $x\in K$ et $a<t<b$ on a : $|\nabla_x(\partial_t f)(\xi)|^2\leq A_K\ (\partial^2_{tt}f(\xi))$.*

B. Si φ est de classe $C^{1,1}$ sur U, on peut exprimer $D^2\varphi(x)$ (qui est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ définie pour presque tout $x\in U$) de la manière suivante :

(a) *φ est de classe C^2 sur l'ensemble (ouvert) ω_0 des points $x\in U$ réguliers non exceptionnels, et pour chaque $x\in\omega_0$, il existe $t\in\Phi_x$ tel que :*

$$D^2\varphi(x)=D^2_{xx}f(x,t)-\varepsilon(x,t)\,|\partial^2_{tt}f(x,t)|^{-1}(D_x(f'_t)(x,t))^{\otimes 2}$$

où $\varepsilon(x,t)=0$ ou 1 selon que $\partial_t f(x,t)\neq 0$ ou $\partial_t f(x,t)=0$.

(b) *Pour presque tout $x\in U$ non régulier, on a $D^2\varphi(x)=D^2_{xx}f(x,t)$ pour tout $t\in J$ associé à x.*

On verra aussi que $\varphi\in C^{2,\gamma}(\omega_0)$ si $f\in C^{2,\gamma}(U\times J)$ vérifie le (a) et le (b) du A, $(0<\gamma\leq 1)$. L'énoncé précédent entraîne très facilement le critère de sous-harmonicité de l'ombre d'une fonction de classe C^2 conjecturé par J.-M. Trépreau.

Théorème 5. *On suppose que f est de classe C^2 sur $U\times J$. Pour que l'ombre $\varphi(x)=\inf\{f(x,t);t\in J\}$ de f soit sous-harmonique sur U, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Pour $x\in U$, $t\mapsto\partial_x f(x,t)$ est constant sur Φ_x.*

(ii) *Pour $\xi=(x,t)\in\Phi$ tel que $a<t<b$, et pour $u\in\mathbf{R}^n$, on a*

$$\Delta_x f(\xi)+2\,\nabla_x(\partial_t f)(\xi).u+\partial^2_{tt}f(\xi)|u|^2\geq 0.$$

(iii) *Pour tout $\xi\in\Phi$, on a $\Delta_x f(\xi)\geq 0$.*

De plus, si φ est sous-harmonique, φ est nécessairement de classe $C^{1,1}$ sur U.

Remarque 3.1. La condition donnée en (ii) équivaut aux inégalités $\Delta_x f(\xi) \geq 0$, $\partial^2_{tt} f(\xi) \geq 0$, et $|\nabla_x(\partial_t f)(\xi)|^2 \leq (\Delta_x f(\xi))(\partial^2_{tt} f(\xi))$ pour les points $\xi=(x,t)$ concernés.

4. Preuve des théorèmes 1 et 1.bis

Commençons par établir la remarque 1.2.a avec l'énoncé suivant déjà observé dans [Tr1] pour $\widetilde{\Phi}=\Phi$. Les notations sont celles de la section 1.

Lemme 4.1. *Si $f \in C^1_x(I\times J)$ et si $\tilde{\Phi}$ est une partie pleine fermée de Φ, l'ombre φ est dérivable sur I si et seulement si $\partial_x f(x,t)$ est indépendant de t sur $\widetilde{\Phi}$. Dans ce cas, $\varphi'(x)=\partial_x f(x,t)$ pour tout $(x,t)\in\Phi$ et φ est de classe C^1 sur I.*

Preuve. Montrons que la condition du lemme est suffisante (la nécessité est évidente). Si $\xi=(x,t)$ et $\xi'=(x',t')$ sont deux points de $\widetilde{\Phi}$ avec x, x' dans un intervalle compact fixé $I'\subset I$, on a puisque $\partial_x f$ est continue :

$$\varphi(x')-\varphi(x)-\partial_x f(x,t)(x'-x) \leq f(x',t)-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x) \leq |x'-x|\,\delta(|x'-x|)$$

où $\delta(s)=\sup\{|\partial_x f(\zeta)-\partial_x f(\zeta')|; \zeta,\zeta'\in I'\times J, \text{ et } |\zeta-\zeta'|\leq s\}$. En permutant les rôles de ξ et ξ', on obtient, en notant $A=\varphi(x')-\varphi(x)-\partial_x f(x,t)(x'-x)$:

$$A \geq -|x'-x|\delta(|x'-x|)-|x'-x||\partial_x f(\xi')-\partial_x f(\xi)|.$$

D'après l'hypothèse, pour $\xi\in\widetilde{\Phi}$ fixé, $\lim_{\xi'\in\widetilde{\Phi},x'\to x} \partial_x f(\xi')=\partial_x f(\xi)$, et $\varphi(x')=\varphi(x)+\partial_x f(x,t)(x'-x)+o(x'-x)$ pour $x'\to x$. Le reste est immédiat.

Les conditions des théorèmes 1 *et* 1.*bis sont nécessaires.* Supposons φ convexe et $f\in C^1_x(I\times J)$. Le (i) du théorème 1 (ou 1.bis) découle du principe suivant appliqué à $g(x)=f(x,t_0)$, $(x_0,t_0)\in\Phi$: si φ est convexe sur I majorée par $g\in C^1(I)$ et si $\varphi(x_0)=g(x_0)$, alors $\varphi'(x_0)$ existe et vaut $g'(x_0)$.

Donc, φ est C^1 et $\varphi'(x)=\partial_x f(x,t)$, $\forall(x,t)\in\Phi$. On a déjà observé que la convexité de φ entraîne alors : $f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)\geq 0$ pour tout $\xi=(x,t)\in\Phi$, $\xi'=(x',t')\in I\times J$, et a fortiori la condition (ii) du théorème 1.bis. Si f est C^2, $\xi=(x,t)\in\Phi$, avec $\partial_t f(\xi)=0$, un développement de Taylor montre ensuite que $f''(\xi)$ est positive. D'où la nécessité des conditions du théorème 1 ([Tr1]).

Caractère $C^{1,\tau}$ de φ si φ est convexe et $\partial_x f$ localement höldérienne d'exposant τ. On sait déjà que φ est C^1. Soient x et x' deux points dans un sous-intervalle compact K fixé de I, et soient $\xi=(x,t)$, $\xi'=(x',t')$ des points correspondants dans Φ. On a, puisque $\partial_x f$ est C^τ,

$$\varphi(x')=f(\xi')\leq f(x',t)\leq f(\xi)+\partial_x f(\xi)(x'-x)+C|x'-x|^{1+\tau}$$
$$\varphi(x)=f(\xi)\leq f(x,t')\leq f(\xi')+\partial_x f(\xi')(x-x')+C|x'-x|^{1+\tau}.$$

En ajoutant, et comme φ' est croissante, on obtient la propriété voulue :

$$|\varphi'(x')-\varphi'(x)|\leq 2C|x'-x|^\tau.$$

Passons à la preuve des implications non triviales des théorèmes 1 et 1.bis (parties «les conditions sont suffisantes»). Le théorème 1 est conséquence du théorème 1.bis, mais il est intéressant d'en donner une preuve indépendante un peu plus simple.

Les conditions (i), (ii), *et* (iii)$'$ du théorème 1 *sont suffisantes.* Fixons un intervalle compact $[\alpha,\beta]$ contenu dans I, et convenons de dire que $x\in I$ est *terminal* (pour φ' et $[\alpha,\beta]$) si $\alpha\leq x\leq\beta$ et si $\varphi'(x)\geq\varphi'(u)$ pour tout $u\in[x,\beta]$; un point $\xi=(x,t)\in\Phi$ sera dit terminal si x est terminal. On établira (sous les hypothèses (i) (ii) et (iii$'$) du théorème 1) la proposition suivante.

Proposition 4.2. *L'ensemble* $\{\varphi'(x); x$ *terminal pour* φ' *et* $[\alpha,\beta]\}$ *est négligeable* (*pour la mesure de Lebesgue* λ *sur* $\mathbf{R}$).

Une fois cette propriété établie, il est immédiat que φ' est croissante sur I et donc que φ est convexe : φ' étant continue, si $\varphi'(\alpha)>\varphi'(\beta)$, chaque valeur θ de l'intervalle $]\varphi'(\beta),\varphi'(\alpha)[$ est atteinte par φ' en au moins un point terminal x pour φ' et $[\alpha,\beta]$; ce qui contredit la proposition 4.2. Pour établir celle-ci, commençons par dégager le principe général suivant qui nous resservira et dont la preuve est donnée un peu plus loin.

Lemme 4.3. *Soient* $B\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, $d\geq 1$, *et* $F\colon B\to\mathbf{R}$ *une application telle que :*

(i) $F(x,t)$ *est fonction croissante de* x *sur* B, *soit* $F(x,t)=G(x)$ *avec* G *croissante.*

(ii) *Pour tout* $\xi=(x,t)\in B$, *on a* $F(\xi')-F(\xi)=o(|x'-x|+|t'-t|^d)$ *pour* $\xi'=(x',t')\in B$, $x'\geq x$ *et* $\xi'\to\xi$.

Alors, $F(B)$ *est une partie négligeable de* $\mathbf{R}$.

Fin de la preuve du théorème 1. On décompose l'ensemble $\widetilde{\Phi}_0$ des points terminaux de $\widetilde{\Phi}$ (pour $[\alpha,\beta]$) en parties B_j auxquelles on pourra appliquer le lemme 4.3, avec $F(x,t)=-\partial_x f(x,t)=-\varphi'(x)$. Posons

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{(x,t)\in\widetilde{\Phi}_0; t=a\},\\
B_2 &= \{(x,t)\in\widetilde{\Phi}_0; t=b\},\\
B_3 &= \{(x,t)\in\widetilde{\Phi}_0; a<t<b, \partial^2_{tt}f(x,t)\neq 0\},\\
B_4 &= \{(x,t)\in\widetilde{\Phi}_0; a<t<b, \partial^2_{tt}f(x,t)=0\}.
\end{aligned}$$

Soit $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}_0$; pour $\xi'=(x',t')$ (terminal) tendant vers ξ, et d'après la formule de Taylor, on a :

$$\varphi'(x')-\varphi'(x)=\partial^2_{xx}f(\xi)(x'-x)+\partial^2_{tx}f(\xi)(t'-t)+o(|\xi'-\xi|).$$

Comme x' et x sont terminaux, $\varphi'(x')-\varphi'(x)$ et $\partial^2_{xx}f(\xi)(x'-x)$ sont de signes opposés (d'après (ii) du théorème 1). De plus, si $\xi,\xi'\in B_4$, la nullité de $\partial^2_{tt}f(\xi)$ entraîne celle de $\partial^2_{tx}f(\xi)$ d'après (iii)$'$; par conséquent, $\varphi'(x')-\varphi'(x)=o(|\xi'-\xi|)$. De même, pour $\xi,\xi'\in B_j$, $j=1,2$ et $\xi'\to\xi$, on a $\varphi'(x')-\varphi'(x)=o(|\xi'-\xi|)$, d'après (ii) et $t'-t=0$. Ainsi, d'après le lemme 4.3, $\{\varphi'(x)\,;\,(x,t)\in B_j\}$ est négligeable pour $j=1,2,4$.

Enfin si $\xi\in B_3$, le théorème des fonctions implicites dit que les points $\xi'=(x',t')$ voisins dans $\widetilde{\Phi}_0$ sont sur une courbe $t'=g(x')$, avec g de classe C^1 sur un voisinage de x, $g(x)=t$, et $g'(x)=-\partial^2_{xt}f(\xi)/\partial^2_{tt}f(\xi)$. D'où, maintenant

$$\varphi'(x')-\varphi'(x)=\left\{\partial^2_{xx}f(\xi)-\frac{(\partial^2_{tx}f(\xi))^2}{\partial^2_{tt}f(\xi)}\right\}(x'-x)+o(|\xi'-\xi|).$$

A nouveau, $\varphi'(x')-\varphi'(x)$ et le premier terme du développement étant de signes opposés $\varphi'(x')-\varphi'(x)=o(|\xi'-\xi|)$ pour $\xi'\to\xi$, $\xi'\in B_3$, et on conclut à l'aide du lemme 4.3. Ce qui achève la preuve du théorème 1.

Avant d'établir le lemme 4.3, montrons les deux propriétés élémentaires suivantes. On notera λ^* la mesure de Lebesgue extérieure sur $\mathbf{R}$.

Lemme 4.4. (a) *Soit $g\colon C\to\mathbf{R}$, $C\subset\mathbf{R}^d$, $(d\geq 1)$ une application telle que pour tout $t\in C$, $(g(t')-g(t))^+=o(|t'-t|^d)$ si $t'\to t$, $t'\in C$. Alors, $g(C)$ est négligeable dans $\mathbf{R}$.*

(b) *Soient g une fonction croissante sur l'intervalle $L=[\alpha,\beta]$, ε un réel >0 et $C\subset L$ tels que : $\forall t\in C$, $\exists t'\in]t,\beta]$, $g(t')-g(t)\leq\varepsilon(t'-t)$. Alors on a : $\lambda^*(g(C))\leq\varepsilon(\beta-\alpha)$.*

Preuve. (a) Supposons $C\subset[0,1]^d$. Pour j entier ≥ 1 et $\varepsilon>0$, notons $C_\varepsilon(j)$ l'ensemble des $t\in C$ tels que

$$(g(t')-g(t))^+\leq\varepsilon d^{-d}|t-t'|^d \quad \text{si } t'\in C, |t'-t|\leq d2^{-j}.$$

Si Q est un cube dyadique d'ordre j, $g(Q\cap C_\varepsilon(j))$ est de diamètre $\leq\varepsilon 2^{-dj}$; d'où $\lambda^*\{g(C_\varepsilon(j))\}\leq\varepsilon$. D'après l'hypothèse, $C_\varepsilon(j)$ croit vers C pour $j\to+\infty$; d'où $\lambda^*(g(C))\leq\varepsilon$, puis $\lambda^*(g(C))=0$.

(b) On vérifie aisément que

$$C(j)=\{t\in[\alpha,\beta-j^{-1}];\exists t'\in[t+j^{-1},\beta],g(t'-0)-g(t+0)\leq\varepsilon(t'-t)\}$$

est fermé, puis que le plus grand $x\in L$ tel que $\lambda^*(g(C(j)\cap[\alpha,x]))\leq\varepsilon(x-\alpha)$ est $x=\beta$. Comme les $C(j)$ croissent vers $C_\infty\supset C$, on a bien $\lambda^*(g(C))\leq\varepsilon(\beta-\alpha)$.

Preuve du lemme 4.3. On peut supposer $B\subset[\alpha,\beta]\times\mathbf{R}^d$ ($\alpha,\beta\in\mathbf{R}$) et G définie croissante sur $[\alpha,\beta]$. Soit $\xi=(x,t)\in B$ tel qu'il existe une suite de points $\xi_j=(x_j,t_j)$ dans B avec $|t-t_j|^d<x_j-x\leq 1/j$. Alors $G(x_j)-G(x)=o(x_j-x)$. Si E est l'ensemble de ces ξ et si $C=\{x;(x,t)\in E\}$, le (b) du lemme 4.4 dit que $G(C)=F(E)$ est négligeable.

Par construction, $B\setminus E$ est réunion des

$$B(j)=\{(x,t)\in B;\forall(x',t')\in B \text{ avec } x<x'\leq x+j^{-1}, \text{ on a } |x'-x|\leq|t'-t|^d\} \quad \text{et}$$

$$B(j)=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}B(j,k) \quad \text{si}$$

$$B(j,k)=\{(x,t)\in B(j);kj^{-1}\leq x\leq(k+1)j^{-1}\}.$$

On peut donc supposer que B est l'un des $B(j,k)$. Dans ce cas, $|x'-x|\leq|t'-t|^d$ pour (x,t), (x',t') dans B, et B est le graphe $\{(h(t),t);t\in C\}$ d'une fonction $h\colon C\to\mathbf{R}$, $(C\subset\mathbf{R}^d)$. D'après (ii) on a pour $t\in C$, $[G(h(t'))-G(h(t))]^+=o(|t'-t|^d)$ si $t'\to t$, $t'\in C$. Il résulte alors du lemme 4.4 que $G(h(C))=F(B)$ est négligeable.

Remarque 4.1. Remplaçons le (ii) du lemme 4.3 par : (ii') $\forall\xi=(x,t)\in B$, $F(\xi')-F(\xi)\leq\varepsilon(x'-x)+o(|x-x'|+|t'-t|^d)$ pour $\xi'=(x',t')\in B$, $x'\geq x$, $\xi'\to\xi$. Si de plus $B\subset[\alpha,\beta]\times\mathbf{R}^d$, la même démonstration montre qu'alors $\lambda^*(F(B))\leq\varepsilon(\beta-\alpha)$.

Remarque 4.2. Le lemme 4.3 entraîne un énoncé de G. Choquet ([Cho]) qui est au fond très voisin : sur un arc plan $t=f(x)$, $0\leq x\leq 1$, (f continue), une fonction $(x,t)\mapsto F(x,t)=G(x)$ qui admet un point critique en chaque point de l'arc est constante. (Si par exemple $G(0)<G(1)$, considérer $B=\{(x,f(x));G(u)\leq G(x), \forall u\in[0,x]\}$.)

Les conditions (i) *et* (ii') *du théorème* 1.*bis sont suffisantes.* On va de nouveau établir la conclusion de la proposition 4.2. Notons $\widetilde{\Phi}_1$ (resp. $\widetilde{\Phi}_2$) l'ensemble des points $(x,t)\in\widetilde{\Phi}$ terminaux pour $[\alpha,\beta]\subset I$ tels que $a<t<b$ (resp. $t\in\{a,b\}$), et fixons $\beta'>\beta$, $\beta'\in I$.

1. Montrons d'abord que pour $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}_1$ fixé, on a $\varphi'(x')-\varphi'(x)=o(|\xi'-\xi|)$, si $\xi'\to\xi$, $\xi'=(x',t')\in\widetilde{\Phi}_1$, $0\le x'-x\le|t'-t|$.

Soit donc $\xi'=(x',t')\in\widetilde{\Phi}_1$, avec $0\le x'-x\le|t'-t|$. Notons Δ le nombre ≥ 0 tel que $\varphi'(x')=\varphi'(x)-\Delta|t'-t|$. Comme $\partial_x f$ est $C^{0,\tau}$, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout y vérifiant $x'\le y\le x''=x'+(\frac{1}{2C}\Delta|t'-t|)^{1/\tau}$, et $y\le\beta'$, on ait

$$\partial_x f(y,t')\le\partial_x f(\xi)-\tfrac{1}{2}\Delta|t'-t|.$$

Donc, si x' et x sont assez proches, on a $x''\le\beta'$ (φ' est continue sur $[\alpha,\beta]$!), et

$$\begin{aligned} f(x'',t')-f(x',t')-\partial_x f(\xi)(x''-x') &= \int_{x'}^{x''}(\partial_x f(y,t')-\partial_x f(\xi))\,dy \\ &\le -\tfrac{1}{2}\Delta|t'-t|(x''-x'), \end{aligned}$$

ou

$$f(x'',t')-f(x',t')-\partial_x f(\xi)(x''-x')\le -c\,(\Delta|t'-t|)^{1+1/\tau},$$

pour une certaine constante $c>0$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x) &= \varphi(x')-\varphi(x)-\varphi'(x)(x'-x) \\ &= \int_x^{x'}(\varphi'(u)-\varphi'(x))\,du\le 0 \end{aligned}$$

puisque x est terminal. D'où, en ajoutant et en notant $\xi''=(x'',t')$,

$$f(\xi'')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x''-x)\le -c\,(\Delta|t'-t|)^{1+1/\tau}.$$

Donc, d'après notre hypothèse (ii), $c(\Delta|t'-t|)^{1+1/\tau}\le|\xi''-\xi|^{1+1/\tau}\delta(|\xi''-\xi|)$ pour une certaine fonction $\delta=\delta_\xi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ tendant vers zéro à l'origine. Or, d'après la régularité $C^{0,\tau}$ de $\partial_x f$, on a :

$$\Delta|t'-t|=|\partial_x f(\xi')-\partial_x f(\xi)|\le c|t'-t|^\tau,$$

de sorte que $x''-x'\le c|t'-t|$ et $|\xi''-\xi|\le c|t'-t|$ (c varie d'une inégalité à l'autre). D'où, la propriété annoncée : $|\varphi'(x')-\varphi'(x)|\le c|t'-t|\delta_1(|t'-t|)$, (en posant $\delta_1(s)=(\delta(cs))^{\tau/(\tau+1)}$).

2. Pour N,m entiers ≥ 1, notons $A_j(N,m)$ $(j=1,2)$ l'ensemble des $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}_j$ tels que $f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x)\ge-|\xi'-\xi|^2/N$ pour tout $\xi'=(x',t')\in\widetilde{\Phi}_j$ vérifiant $|\xi'-\xi|\le 1/m$. Pour $N\ge 1$ fixé, $A_j(N,m)$ croit vers $\widetilde{\Phi}_j$ et, par construction, si $\xi=(x,t)$ et $\xi'=(x',t')$ sont deux points de $A_j(N,m)$, avec $|\xi'-\xi|\le 1/m$ et $x'-x\ge|t'-t|$, on a :

$$\begin{aligned} f(\xi')-f(\xi)-\partial_x f(\xi)(x'-x) &\ge -\frac{1}{N}|\xi'-\xi|^2, \\ f(\xi)-f(\xi')-\partial_x f(\xi')(x-x') &\ge -\frac{1}{N}|\xi'-\xi|^2. \end{aligned}$$

En ajoutant et en tenant compte du caractère terminal de ξ, on obtient :

$$|\partial_x f(\xi') - \partial_x f(\xi)||x'-x| \le \frac{2}{N}|\xi'-\xi|^2,$$

et comme $(x'-x) > |t'-t|$, on a donc : $|\varphi'(x') - \varphi'(x)| \le 4N^{-1}|x'-x|$.
3. On voit alors que pour $\xi = (x,t) \in A_j(N,m)$, on a :

$$\partial_x f(\xi) - \partial_x f(\xi') \le 4N^{-1}(x'-x) + o(|t'-t|),$$

si $\xi' = (x',t') \in A_j(N,m)$, $x' \ge x$, $\xi' \to \xi$. Donc, d'après la remarque 4.1,

$$\lambda^*\{\varphi'(x); (x,t) \in A_j(N,m)\} \le 4N^{-1}(\beta - \alpha);$$

faisant tendre m, puis N, vers l'infini, on obtient $\lambda^*\{\varphi'(x); (x,t) \in \widetilde{\Phi}_j\} = 0$, $(j = 1, 2)$. Ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.3. Suivant une observation de Trépreau, on obtient des variantes plus élémentaires des démonstrations précédentes en notant qu'il suffit de montrer la convexité de $\varphi(x) + \varepsilon x^2$ pour tout $\varepsilon > 0$, et donc de traiter $f_\varepsilon(x,t) = f(x,t) + \varepsilon x^2$ au lieu de f.

5. Preuve de la proposition 1.1

Soit $f \in C^1_x(I \times J)$ vérifiant le (ii) du théorème 1.bis (pour un $\tau \in]0,1]$ et une partie pleine $\widetilde{\Phi}$ de Φ), et telle que de plus, l'ombre φ soit de classe $C^{1,\tau}$; montrons qu'alors φ est convexe sur I. Ici encore, on va considérer l'ensemble (compact) T des points terminaux pour φ' et un intervalle $[\alpha,\beta] \subset I$, et montrer que φ' doit être constante sur T. Supposons $T \neq \emptyset$, et notons g la fonction continue décroissante sur $[\alpha,\beta]$, égale à φ' sur T et localement constante sur $[\alpha,\beta] \setminus T$; soit $\mu = -dg$ la mesure de Stieljes (positive) correspondante portée par T.

L'ensemble des points $\xi \in \Phi$ vérifiant le (ii) du théorème 1.bis est un $F_{\sigma\delta}$ de $\mathbf{R}^2$ et on peut donc supposer que $\widetilde{\Phi}$ est borélien. D'après le théorème de capacitabilité ([Bou]), il existe $K \subset \widetilde{\Phi}$ compact de projection $T' = \{x; (x,t) \in K\}$ contenue dans T et telle que $\mu(T') \ge \frac{1}{2}\mu(T)$. On peut alors construire une application borélienne $\xi : x \mapsto \xi(x) = (x, t(x))$ de T' dans K et d'après le théorème de Lusin, on pourra même supposer ξ continue sur T'.

Posons

$$B(N,j) = \{x \in T'; \forall x' \in T', |x'-x| \le j^{-1} \Longrightarrow \varphi(x') - \varphi(x) - \varphi'(x)(x'-x) \ge -N^{-1}|\xi(x') - \xi(x)|^{1+1/\tau}\}, \quad (j, N \ge 1).$$

D'après l'hypothèse (ii), les $B(N,j)$ croissent vers T' pour $j\to+\infty$, N fixé. On peut donc choisir des entiers j_N tels que $\mu(B(N,j_N))\geq(1-2^{-N-2})\mu(T')$; posant $L=\bigcap_{N\geq 1} B(N,j_N)$, on obtient un compact $L\subset T'$ tel que $\mu(L)\geq\frac{1}{2}\mu(T')$ et

$$\varphi(x')-\varphi(x)-\varphi'(x)(x'-x)\geq-|\xi(x')-\xi(x)|^{1+1/\tau}\delta(|x'-x|),$$

pour x,x' dans L et une fonction $\delta\colon\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ vérifiant $\lim_{s\to 0}\delta(s)=0$. Ajoutant l'inégalité précédente avec celle obtenue en permutant x et x', on obtient :

$$\forall x,x'\in L,\quad |\varphi'(x')-\varphi'(x)|.|x'-x|\leq 2|\xi(x')-\xi(x)|^{1+1/\tau}\delta(|x'-x|)$$

puisque φ' est décroissante sur L. On en déduit, pour $x,x'\in L$, $\xi'=\xi(x')$, $\xi=\xi(x)$:

$$\left(\frac{|\varphi'(x')-\varphi'(x)|}{|\xi'-\xi|}\right)^{1+1/\tau}\leq 2\left(\frac{|\varphi'(x')-\varphi'(x)|}{|x'-x|^{\tau}}\right)^{1/\tau}\delta(|x'-x|)\leq C\delta(|x'-x|)$$

puisque φ est $C^{1,\tau}$. Ce qui prouve que

$$\lim_{x'\to x,x'\in L}\left|\frac{g(x')-g(x)}{\xi(x')-\xi(x)}\right|=0$$

pour chaque $x\in L$ (non isolé). Comme la limite $\lim_{x'\to x}(g(x)-g(x'))/(x'-x)$ existe (dans $[0,+\infty]$) et est strictement positive μ-presque partout ([Rud]), on voit qu'on a

$$\lim_{x'\to x,x'\in L}\left|\frac{g(x')-g(x)}{t(x')-t(x)}\right|=0$$

pour μ-presque tout $x\in L$. Il s'ensuit, d'après le lemme suivant, que $\mu(L)=\mu(T)=0$ et g est donc bien constante.

Lemme 5.1. *Pour tout compact $L\subset[\alpha,\beta]$ et toute fonction borelienne $h\colon L\to\mathbf{R}$, on a*

$$\liminf_{x'\to x,x'\in L}\frac{|h(x')-h(x)|}{|g(x')-g(x)|}<+\infty$$

pour μ-presque tout $x\in L$.

Preuve. On peut supposer L parfait, $\mu(L)>0$, g strictement croissante sur L, et h continue sur L. Raisonnant par l'absurde, on peut supposer aussi que pour chaque $x\in L$,

$$\lim_{x'\to x,x'\in L}\frac{|h(x')-h(x)|}{|g(x')-g(x)|}=+\infty.$$

Utilisant le changement de variable $x\mapsto g(x)$, on est ramené au cas où $g(x)=x$ (on sait que $g(\mu)$ est la mesure de Lebesgue sur $g([\alpha,\beta])$). Ecrivant $L=\bigcup_{j\geq 1} L_j$,

$$L_j=\{x\in L;\forall x'\in L,0<|x'-x|\leq j^{-1},\text{on a }|h(x')-h(x)|\geq|x'-x|\},$$

on voit qu'on peut supposer aussi que $|h(x')-h(x)|\geq|x'-x|$ pour $x,x'\in L$.

La fonction h est alors injective et tout point de $L'=h(L)$ est critique pour l'application inverse $u=h^{-1}$. On sait qu'alors $L=h^{-1}(L')$ est négligeable (Lemme 4.4), ce qui est absurde.

6. Démonstration du théorème 3

On aura besoin du lemme élémentaire suivant (qui sera étendu plus loin).

Lemme 6.1. *Soit* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ *une suite finie de fonctions réelles de classe* C^2 *sur l'intervalle* $U =]\alpha, \beta[$ $(\alpha < \beta)$. *L'enveloppe inférieure* $\varphi = \inf\{\varphi_j; 1 \leq j \leq n\}$ *est dérivable sur* U *si et seulement si on a* $\varphi'_j(x) = \varphi'_k(x)$ *pour* $x \in U$ *et* $j, k \in \{1, ..., n\}$ *tels que* $\varphi(x) = \varphi_j(x) = \varphi_k(x)$. *Si* φ *est dérivable sur* U, *alors* φ *est aussi de classe* C^2 *sur* U *et on a :*

$$\varphi''(x) = \inf\{\varphi''_j(x); 1 \leq j \leq n \text{ et } \varphi_j(x) = \varphi(x)\}.$$

Preuve. En considérant les développements limités des φ_j à l'ordre 1 en $x_0 \in U$, on voit facilement que φ est dérivable en x_0 si et seulement si on a $\varphi'_j(x_0) = \varphi'_k(x_0)$ pour $j, k \in I_{x_0} = \{i; 1 \leq i \leq n, \varphi_i(x_0) = \varphi(x_0)\}$, la dérivée $\varphi'(x)$ étant égale à la valeur commune des $\varphi'_j(x_0)$, $j \in I_{x_0}$.

D'autre part, si φ est dérivable sur U, on a, pour x assez voisin de $x_0 \in U$, $x \neq x_0$, $\varphi(x) < \varphi_j(x)$ pour tous les j tels que $\varphi''_j(x_0) > \gamma(x_0) = \inf\{\varphi''_k(x_0); k \in I_{x_0}\}$ (en regardant les développements limités à l'ordre 2) ; en particulier, si x est assez voisin de x_0, le reste $\varphi'(x) - \varphi'(x_0) - \gamma(x_0)(x - x_0)$ coïncide avec un reste analogue pour une φ'_j, telle que $\varphi''_j(x_0) = \gamma(x_0)$, $\varphi_j(x_0) = \varphi(x_0)$; donc φ est deux fois dérivable en tout $x_0 \in U$ et $\varphi''(x_0) = \gamma(x_0)$. Ce raisonnement montre aussi que si x est assez voisin de $x_0 \in U$, il existe $j \in I_{x_0} \cap I_x$ (dépendant de x) tel que $\varphi''_j(x) = \varphi''(x)$ et $\varphi''_j(x_0) = \varphi''(x_0)$, ce qui donne évidemment la continuité de φ'' en x_0.

Une fois la continuité de φ'' établie, on peut aussi préciser (localement) un module de continuité pour φ'' en appliquant le principe suivant aux fonctions $\psi = \varphi''$, $\psi_j = \varphi''_j$.

Lemme 6.2. *Soient* $\psi_1, ..., \psi_n$ n *fonctions réelles continues sur un intervalle compact* $K \subset \mathbf{R}$ *et soit* $\psi: K \to \mathbf{R}$ *continue et telle que* $\psi(x) \in \{\psi_1(x), ..., \psi_n(x)\}$ *pour* $x \in K$. *Si* $\omega(s) = \sup\{|\psi_j(x') - \psi_j(x)|; x, x' \in K, |x - x'| \leq s, 1 \leq j \leq n\}$ *pour* $s \geq 0$, *alors* $|\psi(y) - \psi(x)| \leq n\omega(|y - x|)$.

Preuve. Supposons $x < y$. On voit aisément qu'on peut trouver une subdivision $s_0 = x < s_1 < ... < s_m = y$ et des indices $j(k)$ tels que $1 \leq j(k) \leq n$, $\psi(s_k) = \psi_{j(k)}(s_k)$, $\psi(s_{k+1}) = \psi_{j(k)}(s_{k+1})$ pour $0 \leq k \leq m - 1$. Il est clair qu'on peut toujours réduire ensuite le nombre m de sous-intervalles $[s_k, s_{k+1}]$ nécessaires à $m \leq n$.

Corollaire 6.3. *Si les* φ_j *du lemme* 6.1 *sont de classe* $C^{2,\alpha}$ *sur* U, $0 < \alpha \leq 1$, *et si* φ *est* C^1, φ *est aussi de classe* $C^{2,\alpha}$ *sur* U.

Passons alors à la preuve du théorème 3.

A. Supposons d'abord les conditions (a) et (b′) (cf. remarque 2.1) réalisées et montrons que $\varphi \in C^{1,1}(I)$. Soient K un sous-intervalle compact de I et A_K la constante correspondante dans (b′). Si $2M \geq (A_K + \|\partial^2_{xx} f\|_{\infty, K\times J})$, on voit en appliquant le théorème 1 (et la remarque 1.1) à la fonction $f_1\colon (x,t) \to f(x,t) + Mx^2$ (et l'adhérence de $\widetilde{\Phi}$) que $\varphi(x) + Mx^2$ est convexe et $C^{1,1}$ sur $K \setminus \partial K$. Donc, φ est aussi $C^{1,1}$ sur $K \setminus \partial K$.

Inversement, si φ est $C^{1,1}$ sur I, $x \mapsto \varphi(x) + Mx^2$ est convexe sur le sous-intervalle compact K de I dès que $2M \geq \|\varphi''\|_{\infty, K}$. En appliquant le théorème 1 à la fonction $f(x,t) + Mx^2$, on obtient le (a) et que

$$|\partial^2_{xt} f(x,t)|^2 \leq (2M + \|\partial^2_{xx} f\|_{\infty, K\times J}) \partial^2_{tt} f(\xi),$$

pour $x \in K \setminus \partial K$, $(x,t) \in \Phi$ et $\partial_t f(x,t) = 0$. D'où (en tenant compte de la remarque 1.2.(b)) la propriété (b) du théorème 3.A.

B. Pour la suite de la démonstration, on suppose que ces conditions (a) et (b) du théorème 3 sont vérifiées. On peut aussi supposer, et nous le ferons, que toutes les dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de f sont bornées sur $I \times J$.

B.1. *Calcul de $\varphi''(x_0)$ pour x_0 régulier non exceptionnel.* Faisons d'abord les observations suivantes.

(i) Si Φ_{x_0} contient l'extrémité a de J alors pour tout x assez voisin de x_0, $t \mapsto f(x,t)$ est croissante sur un intervalle $[a, a+\eta]$; de même si $b \in \Phi_{x_0}$, $t \mapsto f(x,t)$ est décroissante sur $[b-\eta, b]$ si x est assez proche de x_0.

(ii) Si $t_0 \in \Phi_{x_0}$, $a < t_0 < b$, on a $\partial^2_{tt} f(x_0, t_0) \neq 0$ et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $\partial_t f(x,t) = 0$ au voisinage de $\xi_0 = (x_0, t_0)$.

On voit alors que $\Phi_{x_0} \cap]a,b[$ peut être rangé en une suite finie croissante $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, et qu'il existe m fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_m$ de classe C^1 sur un voisinage ouvert V de x_0 et à valeurs dans J telles que $g_j(x_0) = t_j$, $\partial_t f(x, g_j(x)) = 0$ et

$$\{t \in]a,b[; t \in \Phi_x\} \subset \{g_1(x), \ldots, g_m(x)\}$$

si $x \in V$. On a donc, pour $x \in V$, et en convenant de poser $g_0(x) = a$, $g_{m+1}(x) = b$,

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, g_j(x)); 0 \leq j \leq m+1\}.$$

Pour $1 \leq j \leq m$, chacune des fonctions $\varphi_j\colon x \mapsto f(x, g_j(x))$ est de classe C^1 sur V, de dérivée

$$\varphi_j'(x) = \partial_x f(x, g_j(x)) + g_j'(x) \partial_t f(x, g_j(x)) = \partial_x f(x, g_j(x)).$$

Donc $\varphi_j \in C^2(V)$ et on a, puisque $g_j'(x) = -(\partial^2_{xt} f(x, g_j(x)))/(\partial^2_{tt} f(x, g_j(x))$,

$$\varphi_j''(x) = \partial^2_{xx} f(x, g_j(x)) - (\partial^2_{xt} f(x, g_j(x)))(\partial^2_{tt} f(x, g_j(x))^{-1}$$

si $1 \leq j \leq m$. Si $j=0$ ou $j=m+1$, $\varphi_j(x)=f(x,t_j)$ est aussi de classe C^2 et $\varphi_j''(x)=\partial^2_{xx}f(x,t_j)$. Il n'y a plus qu'à appliquer le lemme 6.1 pour obtenir l'assertion (a) du théorème 3.B.

B.2. Notons L l'ensemble des points $x \in I$ non réguliers et tels que (i) $\varphi''(x)$ existe et (ii) $\varphi''(x) \neq \partial^2_{xx}f(x,t)$ pour au moins un $t \in \Phi_x$ associé à x. Il s'agit de voir que L est négligeable.

Soit A_N l'ensemble des couples $(x,t) \in \Phi$ avec $x \in L$, $t \in \Phi_x$ associé, et tels que $|\varphi'(x')-\varphi'(x)-(x'-x)\partial^2_{xx}f(x,t)| \geq N^{-1}|x'-x|$ pour tout $x' \in I$ tel que $|x'-x| \leq N^{-1}$. Si L_N désigne la projection de A_N sur l'axe des x, il est clair que $L=\bigcup_{N \geq 1} L_N$.

Soit $\xi=(x,t) \in A_N$. D'après la formule de Taylor, on a si $\xi'=(x',t') \in A_N$ et $\xi' \to \xi$:

$$\varphi'(x')-\varphi'(x)-\partial^2_{xx}f(\xi)(x'-x)=o(|\xi'-\xi|).$$

Il faut observer ici que si t est associé à x, on a $0=\partial_t f(\xi)=\partial^2_{tx}f(\xi)$ et aussi que $\varphi'(x)=\partial_x f(x,t)$. Donc, toujours si $\xi' \to \xi$, $\xi'=(x',t') \in A_N$, on a

$$|x'-x|=o(|\xi'-\xi|).$$

Il n'y a plus qu'à appliquer le lemme 4.3 (pour $d=1$) à $B=A_N$ et $F(x,t)=x$ pour conclure que $\lambda^*(L_N)=0$ et achever ainsi la preuve du théorème 3.

7. Démonstration des théorèmes 5 et 3.bis

Le théorème 3.bis est un corollaire du théorème 3 (et de sa démonstration), compte tenu de la proposition suivante (qui étend le lemme 6.1) et du lemme 7.4 plus bas.

Proposition 7.1. *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ m fonctions de classe C^2 sur l'ouvert U de $\mathbf{R}^n$ et soit φ l'enveloppe inférieure des φ_j. Alors, φ est différentiable sur U si et seulement si $d\varphi_j(x)=d\varphi_k(x)$ chaque fois que $\varphi_j(x)=\varphi_k(x)=\varphi(x)$. Si φ est différentiable sur U, alors $\varphi \in C^2(U)$, et on a pour chaque $x \in U$:*

(i) $\varphi''(x)(h,h)=\inf\{\varphi_j''(x)(h,h)\,;\, j$ tel que $\varphi_j(x)=\varphi(x)\}$, pour $h \in \mathbf{R}^n$.

(ii) $\exists j \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\varphi(x)=\varphi_j(x)$ et $\varphi''(x)=\varphi_j''(x)$.

Preuve. La toute première assertion s'établit sans difficulté exactement comme l'assertion analogue du lemme 6.1. Supposons donc φ différentiable sur U et montrons la deuxième assertion. D'après le lemme 6.1, pour tout $X \in \mathbf{R}^n$, la dérivée seconde $\partial^2_{XX}\varphi(x)$ existe en tout point x de U (c'est par définition la dérivée seconde en $s=0$ de la fonction $s \mapsto \varphi(x+sX)$), on a la formule

$$\partial^2_{XX}\varphi(x)=\inf\{\varphi_j''(x)(X,X); \varphi_j(x)=\varphi(x)\}$$

et $\partial^2_{XX}\varphi$ est continue sur chaque segment parallèle à X contenu dans U.

Pour vérifier la continuité de $\partial^2_{XX}\varphi$ en $x_0 \in U$, considérons

$$I_{x_0} = \{j\,;\, \varphi_j(x_0) = \varphi(x_0)\}, \quad J_{x_0} = \{j \in I_{x_0}\,;\, \partial^2_{XX}\varphi_j(x_0) > \partial^2_{XX}\varphi(x_0)\}$$

et a tel que $\partial^2_{XX}\varphi(x_0) < a < \partial^2_{XX}\varphi_j(x_0)$ pour tout $j \in J_{x_0}$. D'après la formule de Taylor, si $r > 0$ est fixé assez petit (avec $B(x_0, 2r) \subset U$), on a $\varphi_k(x \pm rX) < \varphi_j(x \pm rX)$, si $j \in J_{x_0}$ et $k \in I_{x_0} \setminus J_{x_0}$, pour tout x dans un voisinage assez petit $V \subset B(x_0, r)$ de x_0. Sur le segment S_x d'extrémités $x \pm rX$ ($x \in V$), $\partial^2_{XX}\varphi$ est continue, prend ses valeurs dans $\mathbf{R} \setminus \{a\}$ (si r est assez petit), et atteint des valeurs $< a$ en $x \pm rX$; il s'ensuit que $\partial^2_{XX}\varphi < a$ sur S_x et donc $\partial^2_{XX}\varphi(x) < a$ au voisinage de x_0. La continuité de $\partial^2_{XX}\varphi$ s'ensuit. (Voir aussi la remarque 7.3.)

La deuxième assertion de la proposition et la propriété (i) découlent alors de la remarque suivante : si $X = e_i + e_j$ est somme de deux vecteurs e_i et e_j de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on a au sens des distributions (et avec des notations évidentes), l'identité $2\partial^2_{ij}\varphi = \partial^2_{XX}(\varphi) - \partial^2_{ii}(\varphi) - \partial^2_{jj}(\varphi)$ puisque cette formule est correcte pour φ régulière. Il s'ensuit que toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de φ au sens des distributions sur U sont des fonctions continues sur U ; la fonction φ est donc de classe C^2 sur U.

Enfin l'assertion (ii) résulte de ce qui précède et du lemme suivant.

Lemme 7.2. *Soient $q_1, \ldots, q_m$ une suite finie de formes quadratiques (réelles) sur $\mathbf{R}^n$. Si l'enveloppe inférieure q des q_j est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$, alors il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $q = q_j$ sur $\mathbf{R}^n$.*

Preuve. D'après la partie déjà démontrée de la proposition 7.1, q est de classe C^2 et homogène de degré 2 sur $\mathbf{R}^n$; donc q est une forme quadratique (formule de Taylor en 0). D'autre part, les fermés $F_j = \{q = q_j\}$ recouvrant $\mathbf{R}^n$, l'un au moins des F_j est d'intérieur non vide; d'où un indice $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $q = q_j$ sur un ouvert non vide, ce qui entraîne évidemment $q = q_j$ sur $\mathbf{R}^n$.

Remarques 7.3. (a) On peut aussi établir la continuité de $\psi = \partial^2_{XX}\varphi$ en $x_0 \in U$ en utilisant le lemme 6.2 : d'après 6.2, il existe un voisinage V de x_0 et $\omega : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ telle que $\lim_{s \to 0} \omega(s) = 0$ et $|\partial_X\varphi(x + tX) - \partial_X\varphi(x) - t\psi(x)| \leq |t|\omega(|t|)$ pour $x \in V$, $x + tX \in V$; ψ est donc limite uniforme sur V d'une suite de fonctions continues.

(b) Une fois établi le caractère C^2 de φ, on peut préciser un module de continuité (local) pour φ''. Si K est une partie convexe compacte de U, et si on note $\omega(s) = \sup\{|\partial^2_{XX}\varphi_j(x) - \partial^2_{XX}\varphi_j(y)|\,;\, x, y \in K,\ |x - y| \leq s,\ 1 \leq j \leq m\}$, $s \geq 0$, le lemme 6.2 montre que $|\partial^2_{XX}\varphi(u) - \partial^2_{XX}\varphi(v)| \leq m\omega(|u - v|)$, pour $u, v \in K$. En particulier, si les φ_j sont $C^{2,\tau}$, $(0 < \tau \leq 1)$, et si φ est C^1, alors $\varphi \in C^{2,\tau}(U)$.

Lemme 7.4. *Soit φ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbf{R}^n$. On suppose que pour tout $a \in U$, il existe M et ε réels >0 vérifiant $B(a, 2\varepsilon) \subset U$ et tels que $t \mapsto \varphi(x+tX)$ admette une dérivée M-lipschitzienne sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, pour tout vecteur unitaire $X \in \mathbf{R}^n$ et tout $x \in B(a, \varepsilon)$. Alors φ est (localement) de classe $C^{1,1}$ sur U (i.e. $\nabla\varphi$ est localement lipschitzienne sur U).*

Preuve. D'abord, pour tout vecteur unitaire X de $\mathbf{R}^n$, la dérivée seconde $\partial^2_{XX}\varphi$ existe p.p. sur U et est localement bornée sur U ; on voit aisément que la dérivée correspondante au sens des distributions est donnée aussi par cette fonction. Par le jeu des mêmes identités que dans la fin de la preuve de la proposition 7.1, on obtient que toutes les dérivées partielles secondes $\partial_i\partial_j\varphi$ (au sens des distributions sur U) sont des fonctions localement bornées. Il est bien connu que cela signifie que $\nabla\varphi$ est localement lipschitzienne sur U (i.e. que φ est de classe $C^{1,1}$ sur U).

Preuve du théorème 5. D'après le théorème 3.bis, les conditions (i) et (ii) du théorème 5, assurent que φ est $C^{1,1}$ et qu'on peut utiliser les expressions du théorème 3.bis pour exprimer $\varphi''(x)$ (presque partout). Ces expressions montrent immédiatement (compte tenu de (ii) et (iii)) que $\Delta\varphi(x) \geq 0$ presque partout sur U, et donc aussi au sens des distributions sur U. Ce qui implique que φ est sous-harmonique.

On vérifie aisément que les conditions du théorème 5 sont nécessaires (observation due à [Tr1]). Si $\xi_0 = (x_0, t_0) \in \Phi$, $t_0 \neq a$, $t_0 \neq b$, et si $w \in \mathbf{R}^n$, on doit avoir pour tout $\varrho > 0$ assez petit (et avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned} f(\xi_0) &\leq |B(x_0, \varrho)|^{-1} \int_{B(x_0,\varrho)} \varphi(x_0+u)\, du \\ &\leq |B(x_0, \varrho)|^{-1} \int_{B(x_0,\varrho)} f(x_0+u, t_0+u.w)\, du. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor pour $\psi\colon u \mapsto f(x_0+u, t_0+u.w)$, on a donc $\Delta\psi(0) \geq 0$, soit : $\Delta_x f(\xi_0) + 2\,\partial^2_{xt} f(\xi_0).w + |w|^2\,\partial^2_{tt} f(\xi_0) \geq 0$.

On obtient de même la condition (iii). Pour le (i), on observe que si $\varphi \in C(U)$ vérifie en $x_0 \in U$, $\varphi(x_0+h) \leq \varphi(x_0) + \inf\{l_1(h), l_2(h)\} + o(|h|)$ pour $h \to 0$, avec $l_j \in (\mathbf{R}^n)^*$ et $l_1 \neq l_2$, φ ne peut être sous-harmonique (d'après les inégalités de moyenne).

8. Preuve du théorème 4, du corollaire 2.1 et de la proposition 2.2

8.1. *Preuve du corollaire* 2.1. Notons F l'ensemble des points irréguliers de I, et posons $h(x) = \sup\{\partial^2_{xx} f(x,t);\ t \text{ associé à } x\}$ pour $x \in F$ et $h(x) = \varphi''(x)$ pour

$x \in I \setminus F$. Il est clair que h est s.c.s. (en utilisant les formules du théorème 3 donnant φ''). D'autre part, le théorème 3 dit que pour presque tout x dans F, $h(x)$ coïncide avec $h_1(x) = \inf\{\partial^2_{xx} f(x,t); t \text{ associé à } x\}$, et h_1 est manifestemment s.c.i. sur F.

Dans le cas où Φ_x est toujours réduit à un élément, on a $h = h_1$ sur F ; d'où la continuité de $h_{|F}$ et le renforcement du 2.

Considérons enfin le cas où f est convexe par rapport à t ; notons qu'alors chaque Φ_x est un intervalle compact, et que si x est irrégulier, tout $t \in \Phi_x$ est associé. Posons $H(x) = \inf\{\partial^2_{xx} f(x,t); t \in \Phi_x\}$, pour $x \in I$; si on définit maintenant h en posant $h(x) = \varphi''(x)$ pour x régulier, et $h(x) = H(x)$ sinon, on obtient une fonction du type voulu, compte tenu du lemme suivant (dont l'argument est repris de [Ki1], lemme 2.3), et du théorème 3 (partie B).

Lemme 8.1. *Si $f(x,t)$ est convexe en t, alors pour toute suite $\xi_j = (x_j, t_j) \in \Phi$ convergeant vers $\xi = (x,t) \in \Phi$, et telle que $x_j \neq x$ pour tout $j \geq 1$, on a $\partial^2_{xx} f(\xi) = H(x)$.*

Preuve. Si $H(x) = \partial^2_{xx} f(x,\tau_0) < \partial^2_{xx} f(x,t)$, $(x,\tau_0) \in \Phi$, avec par exemple $\tau_0 < t$, on peut choisir τ_1 tel que $\tau_0 < \tau_1 < t$ et $H(x) < \partial^2_{xx} f(x,\tau_1)$. La formule de Taylor montre que $f(u,\tau_0) < f(u,\tau_1)$ pour $u \neq x$, u assez voisin de x. Pour ces u, $\tau \mapsto f(u,\tau)$ doit donc croitre sur $[\tau_1, b]$; d'où $f(x_j,t_j) > f(x_j,\tau_0)$ pour j assez grand. Ce qui est absurde.

8.2. *Preuve du théorème* 4. L'outil principal sera le théorème de prolongement de Whitney ([Wh1] ; voir [Hö2] ou [Ste]). Quitte à rajouter à h une fonction test convenable, on pourra supposer $h \geq 0$.

A. Soit Φ le graphe $\{(x, G(x)); x \in \mathbf{R}\}$ d'une fonction G continue croissante sur $\mathbf{R}$, de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus F$, et vérifiant : $\lim_{d(x,F) \to 0, x \notin F} G'(x) = +\infty$. On supposera aussi que $G(x') - G(x) \geq x' - x$ pour $x, x' \in \mathbf{R}$, $x' > x$, et que $G'(x) = 1$ au voisinage de l'infini. (On peut poser

$$G(x) = x + \sum_{j \geq 1} \left\{ \int_0^x 1_{F^c}(s) \varphi_j(s)\, ds \right\},$$

avec $\varphi_j \in C^\infty(\mathbf{R})$, $1_F \leq \varphi_j \leq 1_{\omega_j}$, où $\omega_j = \{x \in \mathbf{R}; d(x,F) < \varepsilon_j\}$, les $\varepsilon_j > 0$ étant tels que $\sum_{j \geq 1} \int_{\mathbf{R} \setminus F} 1_{\omega_j}(s)\, ds < \infty$.)

On fixe aussi (ce qui est possible d'après les hypothèses sur h) une fonction k continue sur $\mathbf{R}$, constante au voisinage de l'infini et telle que $k = h$ sur F, $h < k$ sur $\mathbf{R} \setminus F$; on pose $\theta(x) = (k(x) - h(x))/G'(x)^2$ si $x \in \mathbf{R} \setminus F$, $\theta(x) = 0$ si $x \in F$. La fonction θ est continue sur $\mathbf{R}$ et constante au voisinage de l'infini.

B. Soit $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x h(u)(x-u)\, du$ pour $x \in \mathbf{R}$; la fonction φ est nulle au voisinage de $-\infty$, convexe $C^{1,1}$ et telle que $\varphi'' = h$ p.p. En vue de construire f, on va associer à φ une «fonction» g de classe C^2 sur Φ (au sens de Whitney).

Posons pour $(x,t)\in\Phi$, $X,T\in\mathbf{R}$: $g(x,t)=\varphi(x)$, $L(x,t)(X,T)=\varphi'(x)X$, et

$$Q_{(x,t)}(X,T)=k(x)X^2-2\sqrt{\theta(x)}\,\sqrt{k(x)-h(x)}\,XT+\theta(x)T^2.$$

On va vérifier que g est de classe C^2 au sens de Whitney sur Φ, pour les dérivées d'ordre ≤ 2 données par $dg(\xi)=L(\xi)$, $D^2g(\xi)=Q_\xi$, $\xi\in\Phi$. Considérons d'abord le reste

$$R(\xi,\xi')=\varphi(x')-\varphi(x)-\varphi'(x)(x'-x)-\tfrac{1}{2}Q_\xi(\xi'-\xi)$$

pour $\xi'=(x',G(x'))$, $\xi=(x,G(x))$, où $x',x\in\mathbf{R}$.

Lemme 8.2. *Pour tout $\varepsilon>0$ fixé, il existe $\eta_0>0$ tel que :*

$$|x-x'|\leq\eta_0 \implies |R(\xi',\xi)|\leq\varepsilon|\xi'-\xi|^2.$$

Preuve. Comme θ s'annule sur F, il est clair qu'on a

$$|Q_\xi(\xi'-\xi)-k(x)(x'-x)^2|\leq\frac{\varepsilon}{2}|\xi'-\xi|^2$$

pour $d(x,F)\leq\eta=\eta(\varepsilon)$; il suffit donc pour ces x de considérer

$$\begin{aligned}\varrho(\xi',\xi)&=\varphi(x')-\varphi(x)-\varphi'(x)(x'-x)-\tfrac{1}{2}k(x)(x'-x)^2\\&=\int_x^{x'}(x'-u)(h(u)-k(x))\,du.\end{aligned}$$

Comme k est bornée et uniformément continue, il existe $\eta_1=\eta_1(\varepsilon)>0$ tel que si $|[x,x']\cap F|\geq(1-\eta_1)|x'-x|$ et si $|x'-x|$ est assez petit, alors $|\varrho(\xi',\xi)|\leq\frac{1}{2}\varepsilon|x'-x|^2$ (on note ici et dans la suite $|A|$ la mesure du borélien $A\subset\mathbf{R}$). Si au contraire $|[x,x']\setminus F|\geq\eta_1|x'-x|$, il existe $\eta_2=\eta_2(\eta_1)>0$, tel que si (de plus) $d(x,F)\leq\eta_2$, $|x'-x|\leq\eta_2$, alors

$$|G(x')-G(x)|\geq\eta_1|x'-x|\inf\{G'(u);u\in[x,x']\setminus F\}\geq\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\right)^{-1/2}\sqrt{\|k\|_\infty}|x'-x|,$$

et on a $|\varrho(\xi',\xi)|\leq\|k\|_\infty|x'-x|^2\leq\frac{1}{2}\varepsilon|\xi'-\xi|^2$.

Il reste donc à raisonner pour $d(x,F)\geq\eta_2'=\frac{1}{2}\min\{\eta,\eta_2\}$. Dans ce cas, on écrit $R=R_1-R_2$ avec :

$$R_1=\varphi(x')-\varphi(x)-\varphi'(x)(x'-x)-\tfrac{1}{2}h(x)(x'-x)^2,$$

$$2R_2=(k(x)-h(x))(x'-x)^2-2\{\theta(x)(k(x)-h(x))\}^{1/2}(x'-x)(t'-t)+\theta(x)(t'-t)^2.$$

La fonction h étant uniformément continue sur $\{d(x,F)\geq\frac{1}{2}\eta_2'\}$, il est clair que si $d(x',x)$ est assez petit,

$$|R_1|=\left|\int_x^{x'}(x'-u)(h(u)-h(x))\,du\right|\leq\tfrac{1}{2}\varepsilon|x'-x|^2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}2R_2&=\left\{\sqrt{\theta(x)}(t'-t)-\sqrt{k(x)-h(x)}(x'-x)\right\}^2, \quad \text{soit}\\ 2R_2&=\theta(x)\{G(x')-G(x)-G'(x)(x'-x)\}^2;\end{aligned}$$

puisque G est C^1 sur $\mathbf{R}\backslash F$, on a donc aussi $|R_2|\leq\frac{1}{2}\varepsilon|x'-x|^2$ pour $d(x',x)$ assez petit, (et $d(x,F)\geq\eta_2'$). Le lemme est établi.

C. Il y a encore deux conditions de Whitney à vérifier :

$$\begin{aligned}&R_3(\xi',\xi)=\varphi'(x')-\varphi'(x)-k(x)(x'-x)+\sqrt{\theta(x)(k(x)-h(x))}(t'-t), \quad \text{et}\\ &R_4(\xi',\xi)=\sqrt{\theta(x)(k(x)-h(x))}(x'-x)-\theta(x)(t'-t)\end{aligned}$$

sont des $o(|\xi'-\xi|)$ (uniformes), pour $\xi,\xi'\in\Phi$.

Les vérifications sont similaires aux précédentes. Par exemple, $\varepsilon>0$ étant fixé, si $d(x,F)\leq\eta=\eta(\varepsilon)$ est assez petit, le dernier terme de R_3 est de module inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon|t'-t|$, et la somme des trois premiers termes est $R_3'=\int_x^{x'}(h(u)-k(x))\,du$. A nouveau, si la densité de F dans $[x,x']$ est assez voisine de 1, il est clair que $|R_3'|\leq\frac{1}{2}\varepsilon|x'-x|$; sinon, quitte à diminuer (beaucoup) η, $|x'-x|\leq\frac{1}{2}\varepsilon\|k\|_\infty^{-1}|\xi'-\xi|$, et on a alors $|R_3'|\leq\frac{1}{2}\varepsilon|\xi'-\xi|$. Il reste donc à raisonner pour $d(x,F)$ et $d(x',F)$ supérieurs à une constante >0 fixe. Dans ce cas, on écrit $R_3=\varrho_1+\varrho_2$ avec

$$\begin{aligned}\varrho_1&=\varphi'(x')-\varphi'(x)-h(x)(x'-x),\\ \varrho_2&=(h(x)-k(x))(x'-x)+\sqrt{\theta(x)(k(x)-h(x))}(t'-t)\\ &=\sqrt{\theta(x)(k(x)-h(x))}\{G(x')-G(x)-G'(x)(x'-x)\},\end{aligned}$$

et il est clair que ces deux quantités sont des $o(|x'-x|)$, si x, x' restent à distance minorée de F.

R_4 se traite de même et est même un peu plus simple.

D. D'après le théorème de prolongement de Whitney, il existe une fonction $\tilde{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ de classe C^2 prolongeant g et telle que $d\tilde{g}(x,t)=\varphi'(x)\,dx$, $D^2\tilde{g}(x,t)=Q_{(x,t)}$ pour $(x,t)\in\Phi$, $D^2\tilde{g}$ étant uniformément continue. Quitte à ajouter à $\tilde{g}$ un multiple d'une régularisée de $\{(t-x)^2-A\}^+$ (A assez grand), on peut aussi supposer $\lim_{|t|\to+\infty}\tilde{g}(x,t)=+\infty$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}$.

E. Observons maintenant qu'il existe $\delta\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que $\lim_{s\to 0}\delta(s)=0$, et $\tilde{g}(x,t)-\varphi(x) \geq -|d(\xi,\Phi)|^2\delta(d(\xi,\Phi))$ pour tout $\xi=(x,t)\in\mathbf{R}^2$.

Prenons $\xi_0=(x_0,t_0)\in\Phi$ à distance minimum de ξ. D'après la formule de Taylor,

$$\tilde{g}(\xi)-\tilde{g}(\xi_0)-\partial_x\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0)-\tfrac{1}{2}D^2\tilde{g}(\xi_0)(\xi-\xi_0)=o(|\xi-\xi_0|^2)$$

puisque $D^2\tilde{g}$ est uniformément continue. D'où (pour un $o(|\xi-\xi_0|^2)$ uniforme et en notant $x_s=x_0+s(x-x_0)$)

$$\tilde{g}(x,t)-\varphi(x)=o(|\xi-\xi_0|^2)+\int_0^1 (1-s)\{D^2\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0,t-t_0)-h(x_s)(x-x_0)^2\}\,ds.$$

Si $x_0\notin F$, un calcul utilisant la relation $x-x_0=-G'(x_0)\,(t-t_0)$, donne

$$D^2\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0,t-t_0)=\left\{k(x_0)+\left(\frac{2}{G'(x_0)^2}+\frac{1}{G'(x_0)^4}\right)(k(x_0)-h(x_0))\right\}(x-x_0)^2,$$

et si $x_0\in F$, $D^2\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0,t-t_0)=k(x_0)\,(x-x_0)^2$. Donc, dans tous les cas, puisque k est uniformément continue sur $\mathbf{R}$ et $k\geq h$:

$$\begin{aligned}
&D^2\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0,t-t_0)-h(x_s)(x-x_0)^2\\
&\qquad\qquad\geq -(x-x_0)^2\delta(|x_s-x_0|)+(k(x_s)-h(x_s))(x-x_0)^2\\
&\qquad\qquad\geq -|x-x_0|^2\delta(|x-x_0|)
\end{aligned}$$

où $\delta\colon\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ est croissante et tend vers 0 en 0; et finalement $(\varphi(x)-\tilde{g}(x,t))_+ = o(d(\xi,\Phi)^2)$.

F. D'après le lemme ci-dessous, on peut alors construire $g_1\in C^2(\mathbf{R}^2)$ positive s'annulant exactement sur Φ, de dérivées partielles d'ordre ≤ 2 nulles sur Φ et majorant $(\varphi(x)-\tilde{g}(x,t))_+$. Il reste à poser $f=\tilde{g}+g_1$ pour obtenir la fonction f annoncée et terminer la preuve du théorème 4.

Lemme 8.3. *Soient L une partie fermée de $\mathbf{R}^2$ et $\psi\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}_+$ une fonction telle que $\psi(\xi)\leq d(\xi,L)^2\delta(d(\xi,L))$ pour $\xi\in\mathbf{R}^2$, où $\delta\colon\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ vérifie $\lim_{s\to 0}\delta(s)=0$. Il existe alors une fonction ψ_1 de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ qui s'annule sur L ainsi que ses deux premières dérivées, et qui majore strictement ψ sur $\mathbf{R}^2\setminus L$.*

Preuve. Soit $\{C_j\}_{j\geq 1}$ un recouvrement de Whitney de $\mathbf{R}^2\setminus L$ par des carrés dyadiques (de coté noté d_j), et $\{\theta_j\}$ des fonctions tests correspondantes formant une partition de l'unité (localement finie) sur $\mathbf{R}^2\setminus L$. Soient ε_j tels que

$$\sup\{\psi(\xi);\xi\in C_j\}=\varepsilon_j\,d_j^2,$$

et $\varepsilon_j''=\varepsilon_j+\varepsilon_j'$, où $\varepsilon_j'>0$ et $\lim_{j\to\infty}\varepsilon_j'=0$. Par hypothèse, $\varepsilon_j\to 0$ si $d_j\to 0$ et il suffit de poser $\psi_1(\xi)=C\sum_{j\geq 1}\varepsilon_j''\,d_j^2\,\theta_j(\xi)$ avec $C>0$ assez grand. Les vérifications sont élémentaires.

8.3. *Preuve de la proposition* 2.2.

A. On suppose désormais que $\sum_{I\in\mathcal{I}}\sqrt{|I|}<\infty$, $\mathcal{I}$ désignant la famille des composantes connexes bornées de $\mathbf{R}\backslash F$. On suppose aussi que h est positive, bornée et à support compact, et que pour une certaine constante $C>0$:

$$x\in F,\ x'\in\mathbf{R}\Longrightarrow h(x')\leq h(x)+C|x'-x|,$$
$$\forall x,x'\in\mathbf{R}\backslash F,\quad |x'-x|\leq\tfrac{1}{2}d(x,F)\Longrightarrow|h(x')-h(x)|\leq C(d(x,F))^{-1}\,|x'-x|.$$

On prendra maintenant pour k une fonction positive vérifiant (outre les propriétés du 8.2.A) une condition de Lipschitz sur $\mathbf{R}$, et pour G, la fonction $G(x)=\int_0^x m(u)\,du$, où $m(x)=\sup\{(d(x,F))^{-1/2},1\}$ pour $x\notin F$, et $m(x)=1$ si $x\in F$ ($m\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ parce que $\sum_{I\in\mathcal{I}}\sqrt{|I|}<\infty$). Avec ces choix pour G et k, la construction précédente conduit, comme on va le voir, à une fonction f de classe $C^{2,1}$. Dans toute la suite, C désigne une constante positive assez grande.

B. Observons d'abord que pour tout intervalle $[x,x']$ rencontrant F, on a

$$(G(x')-G(x))^2\geq\left(\int_{[x,x']\backslash F}G'(s)\,ds\right)^2\geq 4|[x,x']\backslash F|$$

puisque pour tout intervalle $]y,z[\subset\mathbf{R}\backslash F$ dont une extrémité est dans F, $G(z)-G(y)\geq 2(z-y)^{1/2}$. Plus généralement, si $|x'-x|\geq\frac{1}{2}d(x,F)$, on aura l'estimée $(G(x')-G(x))^2\geq C^{-1}\,|[x',x]\backslash F|$, puisque si $[x',x]\cap F=\emptyset$,

$$|G(x')-G(x)|\geq\int_{[x,x']}(d(s,F))^{-1/2}\,ds\geq 2\big(1-\sqrt{2/3}\,\big)|x'-x|^{1/2}.$$

(Observer que $\int_a^b du/\sqrt{u}=2(\sqrt{b}-\sqrt{a})\geq 2\big(1-\sqrt{2/3}\,\big)\sqrt{b-a}$, si $0<\frac{3}{2}a<b$).

C. Considérons à nouveau $R(\xi,\xi')$ (avec les notations du 8.2.B). Si $d(x,F)\leq 2\,|x'-x|$, on aura, grâce à la remarque précédente,

$$\int_{[x',x]}|k(x)-h(s)||x'-s|\,ds\leq C\{|x'-x|^3+|x'-x||[x',x]\backslash F|\}\leq 2C|t'-t|^3,$$

en considérant séparément l'intégrale sur $[x',x]\cap F$ et l'intégrale sur $[x',x]\backslash F$, et en tenant compte des hypothèses sur h et k. D'autre part, toujours si $d(x,F)\leq 2\,|x'-x|$, on a $\theta(x)\leq C\,d(x,F)\leq C'|t'-t|^2$. D'où,

$$|2\{\theta(x)(k(x)-h(x))\}^{1/2}(x'-x)(t'-t)|\leq C|\xi'-\xi|^3,$$

et $\theta(x)(x'-x)^2 \le C|\xi'-\xi|^3$. Ce qui donne la majoration voulue $|R(\xi,\xi')| \le C|\xi'-\xi|^3$, au moins si $d(x,F) \le 2|x'-x|$.

Si $|x'-x| \le \frac{1}{2}d(x,F)$, on décompose $R(\xi,\xi')$ comme ci-dessus dans le cas $d(x,F) \ge \eta_2$ (lemme 8.2). On aura (puisque $|t'-t| \ge C^{-1}\,(d(x,F))^{-1/2}\,|x'-x|$)

$$|R_1(\xi,\xi')| = \left|\int_x^{x'} (x'-u)(h(u)-h(x))\,du\right| \le C\,d(x,F)^{-1}|x'-x|^3 \le C^3|\xi'-\xi|^3$$

d'après l'hypothèse sur h ; par ailleurs,

$$\begin{aligned}\left\{|k(x)-h(x)|^{1/2}(x'-x)-\sqrt{\theta(x)}(t'-t)\right\}^2 &= \theta(x)\{(t'-t)-G'(x)(x'-x)\}^2\\ &\le \theta(x)(x'-x)^2(\sup\{|G'(u)-G'(x)|;\,|x-u| \le |x'-x|\})^2.\end{aligned}$$

Or,

$$|G'(x)-G'(u)| \le C\,d(x,F)^{-3/2}|x'-x|, \quad \theta(x) \le C\,d(x,F),$$

et

$$|x'-x| \le C|d(x,F)|^{1/2}|t'-t|;$$

donc

$$|R_2(\xi,\xi')| \le C|t'-t|^4 \le C|\xi'-\xi|^4,$$

et $R(\xi,\xi')=O(|\xi'-\xi|^3)$ (d'après la formule de définition de R, on a évidemment $R(\xi,\xi')=O(|\xi'-\xi|^2)$). On montre de même que les deux autres restes de Whitney R_3, R_4 sont $O(|\xi'-\xi|^2)$, et on vérifie sans difficulté que les coefficients de Q_ξ sont des fonctions lipschitziennes de ξ sur Φ.

D. Le prolongement de Whitney $\tilde{g}$ de g est donc $C^{2,1}$ sur $\mathbf{R}^2$. Une inspection du 8.2.E montre que maintenant $(\varphi(x)-\tilde{g}(x,t))^+$ est $O(d(\xi,\Phi)^3)$ ($\xi=(x,t)$ variant dans $\mathbf{R}^2$), compte tenu du caractère lipschitzien de k et $D^2\tilde{g}$.

On peut ensuite achever comme en 8.2.F, en observant que si dans le lemme 8.3 on prend $\delta(\xi)=d(\xi,L)$, la fonction ψ_1 obtenue (avec $\varepsilon'_j=d_j$) sera de classe $C^{2,1}$ (les vérifications sont encore élémentaires).

9. Extensions au cas où (x,t) varie dans une région V de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$. (Cas $d\ge 2$)

On va d'abord énoncer une extension partielle du théorème 1 qu'on complétera à la fin de la section (Théorème 1.ter). Soient $f\colon V \mapsto \mathbf{R}$ une fonction continue sur l'ouvert V de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ et I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. On note (de même que plus haut), pour $x\in I$, $\varphi(x)=\inf\{f(x,t);(x,t)\in V\}$, $\Phi=\{\xi=(x,t)\in V; f(\xi)=\varphi(x)\}$. On dira qu'une partie Ψ de Φ est *bien pleine* pour I si :

(a) $\forall x\in I$, $\Psi_x=\{t\in\mathbf{R}^d;(x,t)\in\Psi\}$ est non vide, et

(b) pour tout compact L de I, $\{(x,t)\in\Psi; x\in L\}$ est compacte dans V.

Proposition 9.1. *On suppose que f est de classe C^{d+1} sur V, $(d\geq 1)$, et que $\widetilde{\Phi}$ est une partie de Φ, bien pleine pour l'intervalle ouvert $I\subset\mathbf{R}$. Alors, φ est convexe si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\partial_x f(x,t)$ est constant sur $\widetilde{\Phi}_x$.*

(ii) *Pour $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$, $x\in I$, $f''(\xi)$ est une forme quadratique positive sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$.*

De plus, si ces propriétés sont vérifiées, φ est de classe $C^{1,1}$ sur I.

Remarques 9.1. (a) On ne peut sérieusement affaiblir l'hypothèse de régularité sur f (voir la proposition 9.4).

(b) La condition (ii) équivaut aux inégalités : $\partial^2_{xx}f(\xi)\geq 0$ et $|\partial_T\partial_x f(\xi)|^2\leq \partial^2_{xx}f(\xi).f''_{tt}(\xi)(T,T)$, pour $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$, $x\in I$ et $T\in\mathbf{R}^d$.

D'abord, même pour f seulement de classe C^1 sur V, (i) est une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit de classe C^1 sur I ; de plus, si (i) est vérifiée, on a $\varphi'(x)=\partial_x f(x,t)$ pour tout $(x,t)\in\Phi$ (même preuve que pour le lemme 4.1). Il est clair aussi que la condition (ii) est nécessaire pour la convexité de φ sur I (cf. le début du 4) et que si φ est convexe, on a (i), et φ est $C^{1,1}$ (même preuve qu'en section 4 pour $d=1$). Il s'agit donc ici de voir que les conditions (i) et (ii) entraînent la convexité de φ.

Comme au paragraphe 4, on va montrer, un intervalle compact $J=[\alpha,\beta]\subset I$ étant fixé, que l'ensemble $\{\varphi'(x); x\in J$ terminal pour φ' et $J\}$ est négligeable dans $\mathbf{R}$. D'où résultera la convexité de φ. Pour faire le raisonnement par récurrence sur la dimension d on est conduit à établir le résultat plus général suivant.

Proposition 9.2. *Soit f une fonction de classe C^{d+1} sur le domaine V de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ $(d\geq 0)$, et soit Ψ une partie de V telle que :*

(a) *Si $\xi=(x,t)$ et $\xi'=(x',t')$ sont deux points de Ψ tels que $x\leq x'$, on a :*

$$\partial_x f(\xi)\geq\partial_x f(\xi').$$

(b) *Si $d\geq 1$, $\partial_t f(\xi)=0$ pour tout $\xi\in\Psi$.*

(c) *Pour tout $\xi_0=(x_0,t_0)\in\Psi$, il existe $\delta\colon\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ tel que $\lim_{s\to 0}\delta(s)=0$ et*

$$f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)(x-x_0)\geq -|\xi-\xi_0|^2\delta(|\xi-\xi_0|),\quad \forall\xi=(x,t)\in V.$$

Alors, $\{\partial_x f(x,t);(x,t)\in\Psi\}$ est négligeable dans $\mathbf{R}$.

Bien entendu, dès que $d\geq 1$, (c) équivaut à la positivité de $f''(\xi)$ pour $\xi\in\Psi$.

Preuve. A. Cas $d=0$: V est un ouvert de $\mathbf{R}$, $\Psi\subset V$, $f\in C^1(V)$, $f'(x)$ décroit sur Ψ, et pour $s_0\in\Psi$, $(f(s)-f(s_0)-f'(s_0)(s-s_0))^-=o((s-s_0)^2)$ pour $s\in V$, $s\to s_0$. Il suffit alors de reprendre un argument de la section 4 : si $J\subset V$ est un intervalle compact, $\Psi'=\Psi\cap J$ et $\Psi'(N,j)=\{x\in\Psi'; f(x)-f(x')-f'(x)(x'-x)\geq -N^{-1}|x-x'|^2$ pour tout $x'\in\Psi'$ tel que $|x'-x|\leq j^{-1}\}$ (N,j entiers ≥ 1), on a pour $x,x'\in\Psi'(N,j)$ avec $0\leq x-x'\leq j^{-1}$, et exactement comme au paragraphe 4 (en tenant compte de (c) et de la monotonie de f' sur Ψ) :

$$|f'(x')-f'(x)|\leq \frac{2}{N}|x-x'|.$$

On peut alors conclure, puisque $\Psi'=\bigcup_{j\geq 1}\Psi'(N,j)$, que $\lambda^*\{f'(x);x\in\Psi'\}\leq 2N^{-1}\lambda(J)$. D'où l'assertion.

B. Amorçons alors le raisonnement par récurrence en supposant $d\geq 1$ et la proposition 9.1 établie pour les dimensions $<d$. Notons, pour $j\in\{1,...,d\}$, $\Psi(j)$ l'ensemble (ouvert dans Ψ) des $\xi=(x,t)\in\Psi$ tels que $\partial^2_{t_jt_j}f(\xi)\neq 0$ et vérifions que l'hypothèse de récurrence assure que $\lambda^*\{\partial_x f(\xi);\xi\in\Psi(j)\}=0$. Le théorème des fonctions implicites (appliqué à l'équation $\partial_{t_j}f(x,t)=0$) permet de construire une suite d'ouverts $V_p\subset V$ recouvrant $\Psi(j)$, et des plongements (immersions injectives) β_p: $C_p=I_p\times B(\varepsilon_p)\to V_p$ de classe C^d, où $I_p\subset\mathbf{R}$ est un intervalle ouvert et où $B(\varepsilon_p)$ désigne la boule ouverte de rayon $\varepsilon_p>0$ et centre 0 dans $\mathbf{R}^{d-1}$, vérifiant les propriétés suivantes :

(1) β_p conserve la première coordonnée, soit : $\beta_p(x,s)=(x,\gamma_p(x,s))$ pour $(x,s)\in C_p$, avec $\gamma_p: C_p\to\mathbf{R}^d$ de classe C^d,

(2) $\Psi(j)\cap V_p\subset\Psi\cap V_p\subset\beta_p(C_p)$.

Alors $f_p=f\circ\beta_p$ est de classe C^d sur C_p et, si on note $\Psi_p=\beta_p^{-1}(\Psi(j))$, on a :

(1) $\partial_x f_p(x,s)$ est sur Ψ_p fonction décroissante de x (car $\partial_x f_p(x,s)= \partial_x f(\beta_p(x,s))$ si $(x,s)\in\Psi_p$).

(2) $\partial_s f_p(\xi)=\partial_t f(\beta_p(\xi))\circ\partial_s\gamma_p(\xi)=0$ pour tout $\xi\in\Psi_p$.

(3) Si $\xi_0=(x_0,s_0)\in\Psi_p$, on a évidemment (d'après (c) de la proposition 9.2 et l'égalité $\partial_x f_p(x,s)=\partial_x f(\beta_p(x,s))$ sur Ψ_p) :

$$\forall\xi=(x,s)\in C_p,\quad f_p(\xi)-f_p(\xi_0)-\partial_x f_p(\xi_0)(x-x_0)\geq -|\xi-\xi_0|^2\delta(|\xi-\xi_0|)$$

pour une fonction $\delta:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ telle que $\lim_{u\to 0}\delta(u)=0$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure que

$$\{\partial_x f_p(\xi);\xi\in\Psi_p\}=\{\partial_x f(\xi);\xi\in V_p\cap\Psi(j)\}$$

est négligeable. Par conséquent, notant $\Psi_0=\bigcup_{1\leq j\leq d}\Psi(j)$, on voit que l'ensemble $\{\partial_x f(\xi);\xi\in\Psi_0\}$ est négligeable.

C. Il reste à considérer $A=\Psi\setminus\Psi_0$. Autrement dit, on peut supposer désormais que $\partial^2_{tt}f(\xi)=0$ en tout $\xi\in\Psi$. Pour traiter ce dernier cas, on s'inspire d'un lemme de Morse ([Mor] ; voir [Str] p. 52) en notant la proposition suivante (complètement similaire au lemme 3.6 de [Str]).

Lemme 9.3. *Soient A une partie de l'ouvert V de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ $(d\geq 1)$ et k un entier ≥ 0. Il existe une décomposition $A=\bigcup_{p\geq 0} A_p$ et des plongements $\beta_p\colon C_p=I_p\times B_{d_p}\to V$ de classe C^1 (où B_{d_p} désigne la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^{d_p}$, $0\leq d_p\leq d$, et I_p un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$) et tels que :*

(i) *Chaque β_p préserve la première coordonnée et $\beta_p(C_p)\supset A_p$.*

(ii) *Pour toute f de classe C^k sur V et nulle sur A, il existe des fonctions $\delta_p\colon\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ vérifiant les deux propriétés :*

(a) $\lim_{s\to 0}\delta_p(s)=0$.

(b) *Si $\xi=(x,s)\in C_p$, $\beta_p(\xi)\in A_p$, $\xi'=(x',s')\in C_p$ et $x=x'$, alors :*

$$|f(\beta_p(\xi'))|\leq|s'-s|^k\,\delta_p(|s'-s|).$$

On peut établir ce lemme en adaptant le raisonnement par récurrence sur k de [Str]. Il n'y a aucune difficulté particulière et nous ne récrirons donc pas la preuve.

D. *Suite de la preuve de la proposition* 9.2. Appliquons le lemme 9.3 à l'ensemble $A=\Psi$ réduit comme en C (i.e. $\Psi_0=\emptyset$), pour l'entier $k=d-1$, et vérifions pour conclure que pour chaque $p\geq 1$, $\{\partial_x f(\xi);\xi=(x,t)\in A_p\}$ est négligeable.

Observons d'abord que la positivité de $f''(\xi)$ et la nullité de $\partial^2_{tt}f(\xi)$ pour $\xi\in A$, entrainent $\partial_t\partial_x f(\xi)=0$ sur A. On peut donc appliquer la conclusion du lemme 9.3 à (chaque composante de) $\nabla_t\,\partial_x f$. Observons aussi que $\partial_x\{(\partial_x f)\circ\beta_p)\}$ est positive sur $A'_p=\beta_p^{-1}(A_p)$ puisque pour tout $(x,s)\in A'_p$,

$$\begin{aligned}\partial_x(\partial_x f(x,\gamma_p(x,s)) &= \partial^2_{xx}f(x,\gamma_p(x,s))+(\partial_t\partial_x f)(x,\gamma_p(x,s)).(\partial_x\gamma_p(x,s))\\ &= \partial^2_{xx}f(x,\gamma_p(x,s))\geq 0.\end{aligned}$$

Prenons maintenant $\xi=(x,s)\in A'_p$ fixé, et $\xi'=(x',s')\in A'_p$ voisin de ξ. La formule de la moyenne, le (ii) du lemme 9.3, et les observations précédentes donnent :

$$\begin{aligned}&|\partial_x f(\beta_p(x,s))-\partial_x f(\beta_p(x,s'))|\\ &\qquad\leq|s-s'|\sup\{|\nabla_t\partial_x f(\beta_p(x,s''))||\partial_s\gamma_p(x,s'')|;s''\in[s,s']\}\\ &\qquad\leq C|s-s'|^d\delta_p(|s-s'|).\end{aligned}$$

Notant alors $\psi(y)=\partial_x f(y,\tau)$ pour $(y,\tau)\in A$, et utilisant la décomposition

$$\begin{aligned}&\psi(x')-\psi(x)\\ &=\{\partial_x f(x',\gamma_p(x',s'))-\partial_x f(x,\gamma_p(x,s'))\}+\{\partial_x f(x,\gamma_p(x,s'))-\partial_x f(x,\gamma_p(x,s))\},\end{aligned}$$

on voit que pour $\xi'\in A'_p$ tendant vers ξ, on aura (compte tenu du caractère décroissant en x de $\partial_x f$ sur A et du signe de $\partial_x(\partial_x f\circ\beta_p)(\xi')$) :

$$|\psi(x')-\psi(x)|\leq|x'-x|\delta(|x'-x|)+|s-s'|^d\delta(|s'-s|)$$

pour une certaine fonction $\delta\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que $\lim_{u\to 0} \delta(u)=0$. On peut maintenant conclure grace au lemme 4.3 : chaque ensemble

$$\{\partial_x f(\beta_p(\xi)); \xi \in A'_p\} = \{\partial_x f(\xi); \xi \in A_p\}$$

est négligeable. Ce qui achève de prouver la proposition 9.2 (et la proposition 9.1).

L'énoncé suivant montre qu'on ne peut beaucoup affaiblir l'hypothèse de régularité sur f dans l'énoncé de la proposition 9.1.

Proposition 9.4. *Pour tout* $\alpha \in]0,1[$, *il existe* $f\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}$ *de classe* $C^{2,\alpha}$ *sur* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ *et telle que :*

(a) $\varphi(x)=\inf\{f(x,t); t\in\mathbf{R}^2\}$ *est concave sur* $I=]0,1[$ (*et même égale sur* I *à* $-ax^2$, *pour un* $a>0$).

(b) $\forall x\in I$, $\Phi_x=\{t; \varphi(x)=f(x,t)\}$ *est réduit à un point de* $[0,1]\times[0,1]$.

(c) *Pour* $0<x<1$, $t\in\Phi_x$, $f''(x,t)$ *est une forme quadratique* ≥ 0.

Preuve. Soit $0<\alpha<1$. On sait ([Wh2] ; voir aussi [Fed]) qu'il existe $G\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ de classe $C^{1,\alpha}$ et un arc simple compact $C\subset[0,1]^2$ tels que G' s'annule sur C, et $G(C)=[0,1]$ (l'énoncé classique donne seulement G de classe C^1, mais l'examen de la construction habituelle montre qu'on peut trouver G de classe $C^{1,\alpha}$) ; d'après [Cho], on peut même supposer G injective sur C. Notons S la surface $S=\{(x,t); x=G(t)\}$. D'après le lemme 9.5 plus bas, on peut choisir $v\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}$ positive, de classe $C^{2,\alpha}$, et telle que, pour tout $\xi\in S$, $v(\xi)=0$, $dv(\xi)=0$, et $D^2v(\xi)(Z,Z)=2\,|\langle N_\xi, Z\rangle|^2$ pour $Z\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$, N_ξ désignant une normale unitaire à S en ξ. Fixons aussi une fonction $w\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, positive, de classe C^∞, nulle sur $\Phi=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2; x=G(t), t\in C\}$, et strictement positive sur $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2)\setminus\Phi$.

Il suffit alors de poser $f(x,t)=-\varepsilon x^2+v(x,t)+w(x,t)$ (où $\varepsilon>0$). Clairement, f est $C^{2,\alpha}$ et, pour $0<x<1$, on a :

$$\varphi(x)=-\varepsilon x^2, \quad \text{et} \quad \{(x,t); 0<x<1, \varphi(x)=f(x,t)\}=\Phi\cap\{(x,t); 0<x<1\}.$$

De plus, si $\varepsilon<1$, manifestement $f''(x,t)$ est positive pour tout $(x,t)\in\Phi$, $0<x<1$.

Lemme 9.5. *Soit* S *une hypersurface fermée de* $\mathbf{R}^m$ *de classe* $C^{1,\alpha}$, $(0<\alpha\leq 1)$. *Il existe* $u\colon \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ *positive, de classe* $C^{2,\alpha}$, *et telle que pour tout* $\xi\in S$ *on ait :* $u(\xi)=0$, $du(\xi)=0$, $D^2u(\xi)(Z,Z)=2|\langle N_\xi, Z\rangle|^2$, ($Z\in\mathbf{R}^m$, N_ξ *normale unitaire à* S *en* ξ).

Preuve. Il suffit d'appliquer convenablement le théorème d'extension de Whitney ([Ste]). On constate que si on pose pour $\xi\in S$, $Z\in\mathbf{R}^m$, $g(\xi)=0$, $dg(\xi)(Z)=0$ et $D^2g(\xi)(Z,Z)=2\,|\langle Z, N_\xi\rangle|^2$, on définit (localement) une «fonction» de classe $C^{2,\alpha}$

sur S au sens de Whitney. Les vérifications faciles sont omises et laissées au lecteur. Les formules d'extension de Whitney donnent évidemment un prolongement positif de g.

Cas où V est un compact à bord. Soient maintenant V un compact à bord lisse de $\mathbf{R}^{d+1}$, $(d\geq 1)$, $f\in C^{d+1}(V)$ et $I\subset\mathbf{R}$ un intervalle ouvert. Posons

$$\varphi(x)=\inf\{f(x,t);(x,t)\in V\},\quad \Phi=\{(x,t)\in V;x\in I,\varphi(x)=f(x,t)\},$$

et soit Ψ une partie fermée de Φ telle que :

(i) $\Psi_x=\{t\in\mathbf{R}^d;(x,t)\in\Psi\}\neq\emptyset$, pour $x\in I$,

(ii) pour $\xi\in\Psi\cap\partial V$, $T_\xi(\partial V)$, le plan tangent à ∂V en ξ, contient des vecteurs $Z=(X,T)$ avec $X\neq 0$.

Pour $\xi\in\Psi\cap\partial V$, on note $\delta_x(f)(\xi)=f'(\xi)(1,T)$, si $(1,T)\in T_\xi(\partial V)$, ($\delta_x(f)(\xi)$ ne dépend pas du choix de T), et pour $\xi\in\Psi\setminus\partial V$, $\delta_x(f)(\xi)=\partial_x f(\xi)$. Si $\xi\in\partial V\cap\Psi$ et $Z_0\in T_\xi(\partial V)$, on note aussi :

$$(\delta^2 f)(\xi)(Z_0,Z_0)=D^2 f(\xi)(Z_0,Z_0)+f'(\xi)(D_{Z_0}Z),$$

où Z est un champ de vecteurs au voisinage de ξ sur ∂V, égal à Z_0 en ξ et de première composante constante ($(\delta^2 f)(\xi)(Z_0,Z_0)$ ne dépend pas du choix de Z). On a alors :

Théorème 1.ter. *La fonction φ est convexe sur I si et seulement si on a les trois propriétés suivantes.*

(i) *Pour tout $x\in I$, $t\mapsto\delta_x f(x,t)$ est constante sur Ψ_x.*

(ii) *Si $\xi\in\Psi\setminus\partial V$, $f''(\xi)$ est positive.*

(iii) *Si $\xi\in\Psi\cap\partial V$, $\delta^2 f(\xi)$ est positive sur $T_\xi(\partial V)$.*

Indications. Le lecteur se convaincra aisément que la condition (i) est nécessaire et suffisante pour que φ soit dérivable et qu'alors $\varphi'(x)=\delta_x f(x,t)$, $\forall t\in\Psi_x$. Si les conditions sont vérifiées et si $[\alpha,\beta]\subset I$, on montre que $\{\varphi'(x);(x,t)$ terminal pour $[\alpha,\beta]\}$ est négligeable en décomposant l'ensemble Ψ_0 des points terminaux de Ψ pour $[\alpha,\beta]$ selon $\Psi_0=\Psi_1\cup\Psi_2$, $\Psi_1=\Psi_0\setminus\partial V$ et $\Psi_2=\Psi_0\cap\partial V$. La proposition 9.2 donne alors le résultat voulu (pour Ψ_2, des changements de variable locaux conservant la première coordonnée ramènent à la proposition 9.2 en dimension $d-1$).

Remarque 9.2. Posons pour $\xi\in\Psi$,

$$m(\xi)=\inf\{|(\delta^2 f)(\xi)(B,B)|;B=(1,T)\in T_\xi(\partial V)\}\quad \text{si } \xi\in\partial V,$$

et

$$m(\xi)=\inf\{|f''(\xi)(B,B)|;B=(1,T),T\in\mathbf{R}^d\}\quad \text{si } \xi\in V\setminus\partial V.$$

En majorant φ au voisinage de $x_0\in I$ par les fonctions de la forme $f(x,\gamma(x))$ avec γ lisse telle que $(x,\gamma(x))\in V$, $\gamma(x_0)\in\Psi_{x_0}$, on voit que si φ est convexe sur I, alors $\varphi\in C^{1,1}(I)$ et $\varphi''(x)\leq m(x)$ pour $x\in I$ tel que $\varphi''(x)$ existe.

10. Cas $n=1$, $d\geq 1$ (suite). Calcul de φ''

Le but de cette section est d'étendre les formules du théorème 3 donnant φ'', lorsque φ est de classe $C^{1,1}$. Fixons d'abord la convention suivante : si B est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^d$, l'endomorphisme symétrique associé $L(B)$ induit un automorphisme de $V(B)=\{\mathrm{Ker}(B)\}^\perp=\mathrm{Im}(L(B))$; on notera B^{-1} la forme bilinéaire symétrique sur $V(B)$ associée à l'inverse de cet automorphisme. Si on regarde B comme une application linéaire $E=\mathbf{R}^d\to E'$, B est associée à un isomorphisme $B_1: E/\mathrm{Ker}(B)\to\mathrm{Ker}(B)^\circ$ ($\mathrm{Ker}(B)^\circ$ est l'orthogonal dans E' de $\mathrm{Ker}(B)$) dont l'inverse sera noté B^{-1}.

On utilisera ici $B=\partial^2_{tt}f(\xi)$ où f est de classe C^2 sur un ouvert ω de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ contenant le point ξ et vérifie $\nabla_t(\partial_x f)(\xi)\in V(B)$; on pourra alors considérer le réel $(\partial^2_{tt}f(\xi))^{-1}(\nabla_t\partial_x f(\xi),\nabla_t\partial_x f(\xi))$. Si $\partial^2_{tt}f(\xi)=f''_{tt}(\xi)$ est vue comme élément de $L(E,E')$ (point de vue intrinsèque), $f''_{tx}(\xi)$ comme élément de $(E/\mathrm{Ker}(f''_{tt}(\xi)))'$, ce réel s'écrit aussi $f''_{tx}(\xi)\{(f''_{tt}(\xi))^{-1}(f''_{tx}(\xi))\}$.

On a alors l'extension suivante du théorème 3, partie B (voir la remarque 10.1).

Théorème 3.ter. *Soient $f: V\to\mathbf{R}$ de classe C^{d+1} ($d\geq 1$) sur l'ouvert $V\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, et $\varphi: I\to\mathbf{R}$ de classe C^1 sur l'ouvert $I\subset\mathbf{R}$ tels que $\varphi(x)\leq f(x,t)$, $\forall(x,t)\in V$, $x\in I$; soient Ψ une partie de $\Phi=\{(x,t)\in V; x\in I, \varphi(x)=f(x,t)\}$, L la projection de Ψ sur l'axe des x et supposons φ' dérivable en presque tout point de L. Alors, pour presque tout $x\in L$, on a $\nabla_t\partial_x f(\xi)\in(\mathrm{Ker}\, f''_{tt}(\xi))^\perp$ et*

$$\varphi''(x)=\partial^2_{xx}f(x,t)-(\partial^2_{tt}f(\xi))^{-1}(\nabla_t\partial_x f(\xi),\nabla_t\partial_x f(\xi))$$

si $\xi=(x,t)\in\Psi$. De plus, si φ est $C^{1,1}$ sur I, $\nabla_t\partial_x f(\xi)\in(\mathrm{Ker}\, f''_{tt}(\xi))^\perp$ pour tout $\xi\in\Phi$.

Remarque 10.1. On voit en particulier que dans les conditions du théorème 3 (partie B), on peut, pour presque tout x irrégulier, calculer $\varphi''(x)$ à l'aide d'un point quelconque $t\in\Phi_x$ (sans qu'il faille se restreindre aux t associés).

Remarques 10.2. (a) Une version du théorème pour $d=0$ est donnée par le lemme 10.2.

(b) Des cartes locales (de domaines $\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{d'}$ et conservant la première coordonnée) permettent de ramener à celui de l'énoncé le cas où V est plus généralement une sous-variété de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, pourvu que $T_\xi(V)\not\subset\{0\}\times\mathbf{R}^d$ pour $\xi\in\Psi$ (cette hypothèse étant même superflue d'après le théorème de Sard !).

Remarque 10.3. L'exemple de la proposition 9.4 montre que pour $d=2$ et tout $\alpha\in]0,1[$, cet énoncé tombe en défaut si on remplace l'hypothèse «$f\in C^3(V)$» par «$f\in C^{2,\alpha}(V)$» même si φ est l'ombre de f, et l'ensemble de contact Φ relativement compact dans V.

Début de la preuve du théorème 3.ter. Il est clair que $\partial_x f(x,t)=\varphi'(x)$ pour $(x,t)\in\Phi$. De plus, si $\xi_0=(x_0,t_0)\in\Phi$, et si $\varphi''(x_0)$ existe, alors $\nabla_t\,\partial_x f(\xi_0)$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}\{f''_{tt}(\xi_0)\}$: quitte à ajouter à f et à φ un multiple de x^2 on peut supposer $\varphi''(x_0)>0$; alors

$$\begin{aligned} f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)(x-x_0) &\geq \varphi(x)-\varphi(x_0)-\varphi'(x_0)(x-x_0)\\ &= \tfrac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2+o(|x-x_0|^2)\geq 0\end{aligned}$$

pour $\xi=(x,t)$ voisin de ξ_0, et $f''(\xi_0)$ doit donc être positive. D'où $|\partial_T\partial_x f(\xi_0)|^2\leq (\partial^2_{xx}f(\xi_0))\,(f''_{tt}(\xi_0)(T,T))$ pour tout $T\in\mathbf{R}^d$, et la remarque s'ensuit. Si φ est $C^{1,1}$, et si ξ_0 est un point quelconque de Φ, on se ramène après ajout d'un multiple de x^2 au cas où φ est convexe au voisinage de x_0 et à nouveau $f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)\times(x-x_0)\geq 0$ au voisinage de ξ_0 ; d'où, $\nabla_t\partial_x f(\xi_0)\in(\operatorname{Ker} f''_{tt}(\xi_0))^{\perp}$.

On dira maintenant que $\xi=(x,t)\in\Psi$ est irrégulier d'ordre k si

$$\dim(\operatorname{Ker}(\partial^2_{tt}f(\xi)))=k.$$

Le point $x\in I$ est irrégulier d'ordre k si tout $(x,t)\in\Psi$ est irrégulier d'ordre $\leq k$ et s'il existe $(x,t)\in\Psi$ irrégulier d'ordre k; ces dernières valeurs de t sont dites associées à x. On note $\Psi_k=\{(x,t)\in\Psi; (x,t)$ irrégulier d'ordre $\geq k\}$, $F_k=\{x; x$ irrégulier d'ordre $\geq k\}$.

Le théorème 3.ter découlera alors des trois lemmes suivants.

Lemme 10.1. *Pour presque tout $x\in F_d$, on a $\varphi''(x)=\partial^2_{xx}f(x,t)$ pour tout $t\in\mathbf{R}^d$ associé.*

Preuve. Soient $\{A_j\}$ une suite de parties recouvrant $A=\Psi_d$ et $\beta_j\colon C_j=I_j\times B_{d_j}\to V_j$ une suite d'immersions de classe C^1 avec $A_j\subset\beta_j(C_j)\cap A$ et les propriétés du lemme 9.3 pour $k=d-1$. Fixons une suite $\{K_N\}_{N\geq 1}$ de compacts de C_j recouvrant C_j et notons $A'_j=\beta_j^{-1}(A_j)$,

$$B(j,N)=\{(x,s)\in A'_j\cap K_N; \varphi''(x) \text{ existe et } |\varphi''(x)-\partial^2_{xx}f(\beta_j(x,s))|\geq N^{-1}\};$$

il s'agit de montrer que $\{x\in I; \exists s$ tel que $(x,s)\in B(j,N)\}$ est négligeable.

Fixons $\xi=(x,s)\in B(j,N)$. Pour $\xi'=(x',s')\in A'_j$ tendant vers ξ, on a (en omettant l'indice j et en notant $\beta(x,s)=(x,\gamma(x,s))$) :

$$\begin{aligned}\varphi'(x')-\varphi'(x) &= \partial_x f(\beta(\xi'))-\partial_x f(\beta(\xi))\\ &= \{\partial_x f(x',\gamma(x',s'))-\partial_x f(x,\gamma(x,s'))\}\\ &\quad+\{\partial_x f(x,\gamma(x,s'))-\partial_x f(x,\gamma(x,s))\}\\ &= \partial^2_{xx}f(\beta(\xi))(x'-x)+o(|x'-x|)+R(\xi,\xi')\end{aligned}$$

avec, si on applique la conclusion du lemme 9.3 à $\partial^2_{xt} f$,

$$|R(\xi,\xi')| \le |s'-s| \sup\{|\partial^2_{xt} f(x,\gamma(x,\sigma)).\gamma'_s(x,\sigma)|; \sigma\in[s,s']\} \le |s-s'|^d \delta(|s'-s|)$$

où $\delta\colon \mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ vérifie $\lim_{u\to 0}\delta(u)=0$. On a utilisé la nullité de $\partial^2_{tx} f$ sur A_j, et l'égalité $\partial_y(\partial_x f(\beta(y,\tau)))=\partial^2_{xx} f(y,\tau)$ pour $(y,\tau)\in A'_j$.

Donc, pour ξ' assez voisin de ξ, on a $|x'-x|\le 2N\ |s-s'|^d\delta(|s'-s|)$. On conclut à l'aide du lemme 4.3 (appliqué à $F(x,t)=x$, $B=B(j,N)$).

Lemme 10.2. *Si φ_1 et φ_2 sont de classe C^1 sur l'intervalle I et si*

$$D=\{x\in I; \varphi''_1(x) \text{ et } \varphi''_2(x) \text{ existent}\},$$

on a $\varphi''_1=\varphi''_2$ p.p. sur l'ensemble $F=D\cap\{\varphi_1=\varphi_2\}$.

Preuve. En effet, si $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$, la dérivée φ' s'annule sur l'ensemble F' des points non isolés de F, et $\varphi''(x)=0$ pour tout point $x\in F''$. Or, $F\setminus F''$ est dénombrable.

Lemme 10.3. *Soit $\beta{:}C=J\times B_{d'}(\varrho)\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, $d-1\le d'\le d$, (où $\varrho>0$ et où $J\subset\mathbf{R}$ désigne un intervalle ouvert) une immersion C^2 injective et conservant la première coordonnée, $\beta\colon(x,s)\mapsto(x,t)=(x,\gamma(x,s))$, $(x,s)\in C$. Soient $\xi'_0=(x_0,s_0)\in C$, $\xi_0=\beta(\xi'_0)$ deux points correspondants, f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $U\ni\xi_0$, et $g=f\circ\beta$. On suppose que $\partial_t f(\xi_0)=0$ et, si $d'=d-1$, que $\partial_{t_d} f=0$, $\partial^2_{t_dt_d} f\neq 0$ sur $\beta(C)\cap U$. Alors, si $f''_{tx}(\xi_0)$ s'annule sur $\operatorname{Ker}(f''_{tt}(\xi_0))$ (i.e. si $\nabla_t f'_x(\xi_0)\in (\operatorname{Ker}(f''_{tt}(\xi_0)))^\perp$), $g''_{sx}(\xi'_0)$ doit aussi s'annuler sur $\operatorname{Ker}(g''_{ss}(\xi'_0))$ et on a :*

$$\begin{aligned} &f''_{xx}(\xi_0)-(\partial^2_{tt} f(\xi))^{-1}(\nabla_t f'_x(\xi_0),\nabla_t f'_x(\xi_0))\\ &\qquad\qquad = g''_{xx}(\xi'_0)-(\partial^2_{ss} g(\xi'_0))^{-1}(\nabla_s g'_x(\xi'_0),\nabla_s g'_x(\xi'_0)).\end{aligned}$$

Preuve. Il suffit de considérer les deux cas suivants.

Cas (a) : $d'=d$ (et β est un difféomorphisme qui conserve la première coordonnée).

Cas (b) : $d'=d-1$ et on a $\beta(x;s_1,\dots,s_{d-1})=(x;s_1,\dots,s_{d-1},0)$. (Si $d'=d-1$, β est au voisinage de ξ'_0 le produit d'un difféomorphisme du premier type et d'une immersion du second type.)

Cas (a). On peut faire un calcul direct utilisant le point de vue intrinsèque, mais la vérification est moins lourde si on s'appuie, selon une suggestion du referee, sur l'observation suivante : si B est une forme bilinéaire symétrique sur $E=\mathbf{R}^d$, et si $T\in\operatorname{Ker}(B)^\perp$, alors $-B^{-1}(T,T)$ est l'unique valeur critique de $t\mapsto B(t,t)+2\langle T,t\rangle$, $t\in E$.

Si $u,v\in E$, on a $\partial^2_{ss}g(\xi'_0)(u,v)=\partial^2_{tt}f(\xi_0)(\gamma'_s(\xi'_0).u,\gamma'_s(\xi'_0).v)$ puisque $f'_t(\xi_0)=0$, et

$$g''_{sx}(\xi'_0).u=f''_{tx}(\xi_0)(\gamma'_s(\xi'_0).u)+\partial^2_{tt}f(\xi_0)(\gamma'_x(\xi'_0),\gamma'_s(\xi'_0).u),$$
$$g''_{xx}(\xi'_0)=f''_{xx}(\xi_0)+2f''_{tx}(\xi_0)(\gamma'_x(\xi'_0))+\partial^2_{tt}f(\xi_0)(\gamma'_x(\xi'_0),\gamma'_x(\xi'_0)),$$

où $g''_{sx}(\xi'_0)\in E'$, $\gamma'_x(\xi'_0)\in E$,... . L'assertion sur $g''_{sx}(\xi'_0)$ est alors claire, et d'après l'observation préliminaire $\varrho=g''_{xx}(\xi'_0)-(\partial^2_{ss}g(\xi'_0))^{-1}(\nabla_s g'_x(\xi'_0),\nabla_s g'_x(\xi'_0))$ est l'unique valeur critique de

$$s\mapsto g''_{xx}(\xi'_0)+\partial^2_{ss}g(\xi'_0)(s,s)+2g''_{sx}(\xi'_0)(s),\quad s\in E;$$

les formules précédentes et le changement de variable $t=\gamma'_s(\xi'_0)(s)$ montrent alors que ϱ est aussi l'unique valeur critique de

$$t\mapsto f''_{xx}(\xi_0)+B(t,t)+2f''_{tx}(\xi_0)(t)+2B(\gamma'_x(\xi'_0),t)+\varrho',\quad t\in E,$$

si $B=\partial^2_{tt}f(\xi_0)$ et $\varrho'=2\,f''_{tx}(\xi_0)(\gamma'_x(\xi'_0))+B(\gamma'_x(\xi'_0),\gamma'_x(\xi'_0))$.

Or, cette valeur critique est également, si on note l l'endomorphisme de E associé à B,

$$\varrho=f''_{xx}(\xi_0)-B^{-1}\big(\nabla_t f'_x(\xi_0)+l(\gamma'_x(\xi'_0)),\nabla_t f'_x(\xi_0)+l(\gamma'_x(\xi'_0))\big)+\varrho'.$$

En développant, on a la formule voulue : $\varrho=f''_{xx}(\xi_0)-B^{-1}(\nabla_t f'_x(\xi_0),\nabla_t f'_x(\xi_0))$.

Cas (b). Si $\xi\in\beta(C)$, $1\le j<d$, on a : $f''_{tt}(\xi)(e_j,e_d)=0$, où les e_j sont les vecteurs de base usuels de $E=\mathbf{R}^d$; il suffit de différentier l'identité : $f'_{t_d}(x,t_1,...,t_{d-1},0)=0$, si $(x;t_1,...,t_{d-1})\in C$. Donc $f''_{tt}(\xi_0)$ se scinde en $g''_{ss}(\xi'_0)\oplus\alpha\,(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}}\otimes\mathrm{Id}_{\mathbf{R}})$, $\alpha=f''_{t_dt_d}(\xi_0)$. De même, $f''_{xt}(\xi_0)(e_d)=0$, et $f''_{xt}(\xi_0)=g''_{sx}(\xi_0)\oplus 0_{\mathbf{R}}$. D'où facilement, la formule du lemme.

Fin de la preuve du théorème 3.*ter*. On raisonne par récurrence sur d.

1. Cas $d=1$. En décomposant Ψ, on voit qu'il suffit de raisonner dans les seuls cas où $\Psi_1=\emptyset$ ou bien $\Psi=\Psi_1$; compte tenu du lemme 10.1, on peut même supposer $\Psi_1=\emptyset$ (tous les points $\xi\in\Psi$ sont réguliers). Mais alors, le théorème des fonctions implicites et une nouvelle décomposition de Ψ permettent de se ramener au cas où Ψ est contenu dans le graphe $t=h(x)$, $x\in I$, d'une fonction h de classe C^1 sur un intervalle I, telle que $f'_t(x,h(x))=0$, $f''_{tt}(x,h(x))\neq 0$; on a déjà vu qu'alors $\psi(x)=f(x,h(x))$ est de classe C^2 avec

$$\psi''(x)=f''_{xx}(x,h(x))-\{f''_{tt}(x,h(x))\}^{-1}|f''_{xt}(x,h(x))|^2.$$

Ce qui donne le résultat voulu compte tenu du lemme 10.2.

2. Cas $d>1$. Là encore, on peut supposer $\Psi=\Psi_{d-1}$ (d'après le lemme 10.1). Le théorème des fonctions implicites permet alors de se ramener au cas où $\Psi\subset\beta(C)$, avec $\beta\colon C=B_{d-1}(1)\times J\to V$ immersion injective de classe C^d préservant la première coordonnée, et telle que pour un $j\in\{1,\dots,d\}$, on ait : $f'_{t_j}=0$, $f''_{t_jt_j}\neq 0$ sur $\beta(C)$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $f\circ\beta$, φ et $\beta^{-1}(\Psi)$. On obtient le résultat voulu compte tenu de l'invariance (donnée par le lemme 10.3) du second membre de la formule du théorème 3.ter.

11. Cas $n\geq 1$, $d\geq 1$ (suite). Applications

Dans cette section, on considère d'abord la situation suivante : W est un ouvert de $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^d$ $(n,d\geq 1)$, $f\colon W\to\mathbf{R}$ est une fonction de classe C^{d+1} d'ombre $\varphi(x)=\inf\{f(x,t);(x,t)\in W\}$ et $\widetilde{\Phi}$ est une partie de l'ensemble de contact $\Phi=\{(x,t);\varphi(x)=f(x,t)\}$, bien pleine relativement à l'ouvert $U\subset\mathbf{R}^d$ (i.e. pour tout compact non vide K de U, $\{(x,t)\in\widetilde{\Phi};x\in K\}$ est un compact non vide de W). On note $\widetilde{\Phi}_x=\{t\in\mathbf{R}^d;(x,t)\in\widetilde{\Phi}\}$ pour $x\in\mathbf{R}^n$.

A. D'abord, exactement comme pour le cas $d=1$ (théorèmes 3 et 3.bis), on tire de la proposition 9.1 (ou du théorème 1.ter) la conséquence suivante pour la régularité $C^{1,1}$ de φ.

Corollaire 11.1. *Supposons $\varphi\in C^1(U)$ (pour $x\in U$ et $(x,t)\in\widetilde{\Phi}$, $\partial_x f(x,t)$ ne dépend que de x). Alors, φ est de classe $C^{1,1}$ sur U si, et seulement si, pour tout compact K de U, il existe $A=A(K)>0$ tel que $|D^2_{XT}f(\xi)|^2\leq A|X|^2(D^2_{TT}f(\xi))$ pour $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$, $x\in K$, $X\in\mathbf{R}^n$ et $T\in\mathbf{R}^d$.*

Il n'est pas non plus difficile de voir (à l'aide de la proposition 7.1) que φ est de classe C^2 sur l'ouvert $\omega\subset U$ des points réguliers. Le point $x\in U$ est dit ici régulier si pour tout $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$, $\partial^2_{tt}f(\xi)$ est une forme quadratique sur $\mathbf{R}^d$ non dégénérée. Il est clair aussi (compte tenu du théorème 3.ter) que si φ est $C^{1,1}$, on a pour presque tout $x\in U$:

$$D^2\varphi(x)(X,X)=\partial^2_{XX}f(\xi)-f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t\partial_X f(\xi),\nabla_t\partial_X f(\xi))$$

pour tout $t\in\mathbf{R}^d$ tel que $\xi=(x,t)\in\widetilde{\Phi}$ et tout $X\in\mathbf{R}^n$.

B. On peut prolonger l'observation du corollaire 2.1 avec l'énoncé suivant. On suppose que φ est $C^{1,1}$ et on note comme précédemment

$$\widetilde{\Phi}_m=\{\xi\in\widetilde{\Phi};\dim\{\mathrm{Ker}(f''_{tt}(\xi))\}\geq m\},$$
$$F_m=\{x\in U;\exists t\in\mathbf{R}^d \text{ tel que } (x,t)\in\widetilde{\Phi}_m\}.$$

Les F_m sont fermés dans U, et décroissent avec m; évidemment $F_0=U$, $F_{d+1}=\emptyset$. Notons $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$.

Corollaire 11.2. *Pour tout $Z\in\mathbf{R}^n$, il existe une application $h_Z\colon U\to\mathbf{R}$ localement bornée, s.c.s., admettant pour tout $m\in\{0,\dots,d\}$ une restriction $(h_Z)_{|X_m}$ continue presque partout sur $X_m=F_m\setminus F_{m+1}$, et telle que $\partial^2_{ZZ}\varphi(x)=h_Z(x)$ p.p. sur U. Si on suppose de plus que $\widetilde{\Phi}_x$ est réduit à un point pour tout $x\in U$, il existe une application $\mathcal{A}\colon U\to\mathcal{L}_2(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ localement bornée sur U, dont les restrictions à chaque X_m $(0\le m\le d)$ sont continues, et qui est telle que $D^2\varphi(x)=\mathcal{A}(x)$ p.p. sur U. En particulier, φ est alors de classe C^2 sur un ouvert dense de U.*

Preuve. On observe que $\xi\to f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t\partial_Z f(\xi),\nabla_t\partial_Z f(\xi))$ est s.c.i. sur $\widetilde{\Phi}$ et de restriction à chaque $\widetilde{\Phi}_m\setminus\widetilde{\Phi}_{m+1}$ continue (voir la remarque plus bas). Soit alors $h_Z(x)=\sup\{H_Z(x,t);(x,t)\in\widetilde{\Phi}\}$, où

$$H_Z(\xi)=\partial^2_{ZZ}f(\xi)-f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t\partial_Z f(\xi),\nabla_t\partial_Z f(\xi)).$$

La fonction h_Z est s.c.s. sur U et égale p.p. sur X_m à la fonction s.c.i. $\tilde{h}_{Z,m}(x)=\inf\{H_Z(x,t);(x,t)\in\widetilde{\Phi}_m\setminus\widetilde{\Phi}_{m+1}\}$. Ce qui prouve le premier point du corollaire (compte tenu du théorème 3.ter).

Si $\widetilde{\Phi}_x$ n'admet qu'un élément pour tout $x\in U$, les fonctions h_Z ainsi construites ont des restrictions aux X_m continues, et il suffit de poser $\mathcal{A}(x)(Y,Z)=\frac{1}{2}(h_{Y+Z}(x)-h_Y(x)-h_Z(x))$, soit $\mathcal{A}(x)(Y,Z)=\partial^2_{YZ}f(\xi)-f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t\partial_Y f(\xi),\nabla_t\partial_Z f(\xi))$ où ξ est l'unique point de la forme (x,t) dans $\widetilde{\Phi}$.

On a utilisé la propriété élémentaire : si A_j est une suite d'endomorphismes symétriques et positifs de $E=\mathbf{R}^d$ qui converge vers $A\in L(E,E)$, si $u_j\in\mathrm{Im}(A_j)$ converge vers $u\in\mathrm{Im}(A)$, alors $\liminf_{j\to\infty}\langle A_j^{-1}(u_j),u_j\rangle\ge\langle A^{-1}(u),u\rangle$, (on peut procéder par diagonalisation des A_j et extraction de sous suites convergentes). Si de plus, $\dim\{\mathrm{Im}(A_j)\}=\dim\{\mathrm{Im}(A)\}$ pour $j\ge1$, alors $\lim_{j\to\infty}\langle A_j^{-1}(u_j),u_j\rangle=\langle A^{-1}(u),u\rangle$.

C. Considérons maintenant le cas où on a $n=1$ et les propriétés suivantes :

(i) Pour $x\in U$, $W_x=\{t;(x,t)\in W\}$ est convexe et $t\mapsto f(x,t)$ est convexe sur W_x.

(ii) φ est de classe $C^{1,1}$ sur U.

(iii) $\widetilde{\Phi}=\Phi(=\{(x,t)\in W;x\in U,\varphi(x)=f(x,t)\})$.

((i) et (ii) sont assurés si W est convexe et f convexe sur W). Sous ces hypothèses (et celles indiquées au début de cette partie), la deuxième assertion du corollaire 11.2 est encore vraie :

Proposition 11.3. *Il existe une fonction h s.c.s. sur U, admettant des restrictions $h_{|X_m}$ continues $(0\le m\le d)$, et vérifiant $\varphi''(x)=h(x)$ presque partout sur U. En particulier, φ est C^2 sur un ouvert dense de U.*

Preuve. On observera d'abord que l'hypothèse de convexité (i) entraîne que Φ_x est convexe et que le noyau $\mathrm{Ker}(f''_{tt}(x,t))$ est indépendant de $t \in \Phi_x$ pour chaque $x \in U$ fixé. Posons maintenant $h(x) = \inf\{H(x,t); (x,t) \in \Phi\}$, où $H(x,t) = f''_{xx}(\xi) - f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t f'_x(\xi), \nabla_t f'_x(\xi))$.

Il suffira de vérifier que si $\xi_j = (x_j, t_j)$ est une suite de points de Φ convergeant vers $\xi_0 = (x_0, t_0) \in \Phi_m \setminus \Phi_{m+1}$, $x_j \neq x_0$, alors :

(a) $h(x_0) \geq \limsup_{j \to \infty} H(\xi_j)$,

(b) si $\xi_j \in \Phi_m$ pour tout $j \geq j_0$, alors $h(x_0) = \lim_{j \to \infty} H(\xi_j)$.

Le cas $m=0$ est immédiat puisque la section Φ_x est réduite à un point pour $x \in F_0 \setminus F_1$. Si $m=d$ (c'est à dire que $f''_{tt}(\xi_0)=0$), $H(\xi_0) = f''_{xx}(\xi_0)$ et on adapte sans difficulté les arguments de la preuve du cas $d=1$ (section 8.1) pour obtenir que $h(x_0) = H(\xi_0) (= f''_{xx}(\xi_0))$. D'où, les propriétés (a) et (b) puisque $H(\xi_j) \leq f''_{xx}(\xi_j)$ (et $H(\xi_j) = f''_{xx}(\xi_j)$ si $\xi_j \in \Phi_m$).

Considérons le cas où $m<d$, $2 \leq d$; on peut supposer que $\mathrm{Ker}(f''_{tt}(\xi_0))$ est le sous-espace $t_{m+1}=0, \ldots, t_d=0$ de $\mathbf{R}^d$; on a donc $\Phi_{x_0} = K \times \{\tau\}$, avec $K \subset \mathbf{R}^m$ convexe, $\tau \in \mathbf{R}^{d-m}$. A l'aide du théorème d'inversion locale, (et compte tenu des remarques préliminaires) on voit qu'il existe une immersion injective $\beta \colon C = J \times V \to W$ de classe C^d avec les propriétés suivantes. V est un voisinage convexe de K dans $\mathbf{R}^m$, J un voisinage de x_0, β est de la forme : $\beta(x,s) = (x; t, \gamma(x,s))$ avec $\gamma \colon C \to \mathbf{R}^{d-m}$ de classe C^d, $f'_{t_k}(\beta(\xi)) = 0$ pour $\xi \in C$ et $k > m$; aussi, $\Phi \cap W' \subset \beta(C)$ pour un voisinage convenable $W' \subset W$ de Φ_{x_0} (dans $\mathbf{R}^{d+1}$).

Si $g = f \circ \beta$, on vérifie sans difficulté que :

(i) $g(x,s)$ est convexe par rapport à $s \in V \subset \mathbf{R}^m$ ($g(x,s) = \inf\{f(x,s,s'); s' \in \mathbf{R}^{d-m}, (x,(s,s')) \in W\}$),

(ii) l'ombre de g considérée comme fonction de classe C^d sur $W'_1 = J \times V$ est $\varphi_{|J}$, et (iii) $g''_{xx}(\xi) - g''_{ss}(\xi)^{-1}(\nabla_s g'_x(\xi), \nabla_s g'_x(\xi)) = H(\beta(\xi))$ pour tout $\xi \in \beta^{-1}(\Phi)$ (en utilisant le lemme 10.3). On peut donc appliquer à g, pour le point $\xi'_0 = (x_0; t_0^1, \ldots, t_0^m)$, le résultat déjà acquis pour $m=d$, ce qui donne précisément les propriétés (a) et (b) annoncées.

Illustration. Soient C un corps convexe lisse de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^d$, C' sa projection sur $\mathbf{R}^2$, $\Gamma = \partial C'$ et $\varrho \in L^\infty_+(\Gamma)$ la courbure de Γ. Il existe alors $h \colon \Gamma \to \mathbf{R}_+$ s.c.s., et une suite de compacts $F_0 = \Gamma \supset F_1 \supset \ldots \supset F_{d+1} = \emptyset$ tels que si $X_m = F_m \setminus F_{m+1}$: (i) $h_{|X_m} \in C(X_m)$, $(0 \leq m \leq d)$ et (ii) $\varrho = h$ *p.p.* En particulier, Γ contient un ouvert dense de classe C^2.

D. *Extension du théorème* 5. Soient V un compact à bord lisse de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$, $(d \geq 1)$, $f \in C^{d+1}(V)$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Notons toujours

$$\varphi(x) = \inf\{f(x,t); (x,t) \in V\}, \quad \Phi = \{(x,t) \in V; x \in U, \varphi(x) = f(x,t)\}$$

et soit $\Psi \subset \Phi$ un fermé de Φ tel que :

(i) $\forall x \in U$, $\Psi_x = \{t; (x,t) \in \Psi\} \neq \emptyset$ et

(ii) $\forall \xi \in \Psi \cap \partial V$, $\forall X \in \mathbf{R}^n$, $\exists B = (X,T) \in T_\xi(\partial V)$.

Comme à la fin du 9, on pose $\delta_x f(\xi) = \partial_x f(\xi)$ si $\xi \in \Psi \setminus \partial V$, $\delta_x f(\xi)(X) = f'(\xi)(B)$ si $\xi \in \partial V \cap \Psi$, $B = (X,T) \in T_\xi(\partial V)$;

$$\delta^2 f(\xi)(B,B) = f''(\xi)(B,B) + f'(\xi)(D_B(Z))$$

si $Z = (Z_x, Z_t)$ est un champ de vecteurs sur ∂V au voisinage de ξ, égal à B en ξ et de composante Z_x constante. On note $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Théorème 5.bis. *L'ombre φ est sous-harmonique sur U si et seulement si les trois propriétés* (i)–(iii) *suivantes sont vérifiées et φ est alors de classe $C^{1,1}$ sur U.*

(i) *Pour tout $x \in U$, $t \mapsto \delta_x f(x,t)$ est constant sur Ψ_x.*

(ii) *Si $\xi \in \Psi \setminus \partial V$, et si $T_k \in \mathbf{R}^d$ pour $1 \leq k \leq n$, on a*

$$\Delta_x f(\xi) + 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \langle \nabla_t f'_{x_k}(\xi), T_k \rangle + \sum_{1 \leq k \leq n} f''_{tt}(\xi)(T_k, T_k) \geq 0.$$

(iii) *Si $\xi \in \Psi \cap \partial V$, on a*

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \delta^2 f(\xi)(B_k, B_k) \geq 0$$

pour $B_k = (e_k, T_k) \in T_\xi(\partial V)$.

Preuve. La nécessité du (i) (c'est à dire du caractère C^1 de φ) se voit comme dans le cas $d=1$. Pour obtenir celle du (ii), on observe que pour $\xi = (x,t) \in \Psi$, $x \in U$ et $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^d$ linéaire, $\psi(u) = f(x+u, t+l(u))$ est de classe C^{d+1}, minorée par $\varphi(x+u)$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, et que $\psi(0) = \varphi(x)$. D'où, si φ est sous-harmonique, $\Delta\psi(0) \geq 0$, soit la propriété (ii) en ξ (avec $T_k = l(e_k)$). Pour le (iii), l'argument est le même en considérant $\psi(u) = f(u, \gamma(u))$, où $u \mapsto (u, \gamma(u))$ est une application de classe C^2 sur un voisinage de x dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans ∂V.

Réciproque : La condition (i) assure le caractère C^1 de φ. Si $\xi = (x,t) \in \Psi \setminus \partial V$, $B = (X,T) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$ et $X = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, on a, en prenant dans le (ii) $T_k = \alpha_k T / |X|^2$,

$$f''(\xi)(B,B) \geq f''(\xi)((X,0),(X,0)) - \Delta_x f(\xi)|X|^2.$$

Si $\xi = (x,t) \in \Psi \cap \partial V$, on applique ce raisonnement à la forme quadratique $Q_\xi(B) = \delta^2 f(\xi)(B', B')$, où $B' = \pi_\xi(B) = B - \langle B, N \rangle N_t$, où N_t désigne la deuxième composante (normalisée, $|N_t| = 1$) d'une normale N à ∂V en ξ ((iii) s'écrit aussi $\sum_{1 \leq k \leq n} Q_\xi(B_k) \geq 0$ si $B_k = (e_k, T_k)$, $T_k \in \mathbf{R}^d$). Si $a(\xi) = \sum_{1 \leq k \leq n} Q_\xi((e_k, 0))$ on obtiendra :

$$\delta^2_{xx} f(\xi)(B,B) \geq Q_\xi(X,0) - a(\xi)|X|^2, \quad \forall B = (X,T) \in T_\xi(\partial V).$$

On voit alors que pour toute boule fermée $B\subset U$, et d'après la proposition 9.5 (et la remarque 9.2), $x\mapsto\varphi(x)+C\,x^2$ est convexe $C^{1,1}$ sur B si C est assez grand.

On peut maintenant calculer $\Delta_x\varphi$ avec le théorème 3.ter. Si $(x,t)\in\Psi\setminus\partial V$, on obtient en prenant $T_k=-f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t f'_{x_k}(\xi))$ dans la condition (ii),

$$\sum_{1\leq k\leq n} f''_{tt}(\xi)^{-1}(\nabla_t f'_{x_k}(\xi),\nabla_t f'_{x_k}(\xi))\leq\Delta_x f(\xi),$$

et le théorème montre que $\Delta\varphi(x)\geq 0$ pour presque tout $x\in U$ tel que $(x,t)\notin\partial V$ pour au moins un $t\in\Psi_x$. D'autre part, en utilisant des cartes locales de ∂V de la forme $\beta\colon U'\times B_{d-1}(0,1)\to\partial V$, $\beta(x,s)=(x,\gamma(x,s))$, et en remarquant que $\delta^2(f)(\beta(\xi))$ est égal à $g''(\xi)$, si $g=f\circ\beta$, le calcul précédent et une nouvelle application du théorème 3.ter donneront que $\Delta_x\varphi(x)\geq 0$ pour presque tout $x\in U$ tel que $(x,t)\in\partial V$ pour au moins un $t\in\Psi_x$. Donc φ est sous-harmonique sur U.

12. Démonstration du théorème 2

On notera $I=[0,1]$ et c désignera une (grande) constante >0 dépendant des paramètres utilisés, la valeur précise de c pouvant varier d'une inégalité à une autre.

A. *Préliminaires.* Soit $K=K(\lambda)$, $0<\lambda<1$, l'ensemble de Cantor triadique usuel : $K=\bigcap_{n\geq 1}K_n$, où $K_0=[0,1]$, et où K_n $(n\geq 1)$ est réunion de 2^n intervalles compacts disjoints de longueur $l_n(\lambda)=((1-\lambda)/2)^n$ obtenus en supprimant dans chaque composante de K_{n-1} l'intervalle ouvert médian de longueur $\lambda l_{n-1}(\lambda)$. On notera $\mu=\mu_\lambda$ la mesure de «Lebesgue» (ou uniforme) sur $K(\lambda)$, $u(x)=\int_0^x d\mu(t)$ la fonction de Lebesgue associée à K, et $\alpha=\alpha(\lambda)=\log(2)/(\log(2)+|\log(1-\lambda)|)$ la dimension de Hausdorff de K. Il est classique (et facile de vérifier) que :

$$\forall x,y\in[0,1],\quad |u(x)-u(y)|\leq c\,|x-y|^\alpha.$$

Si v est une fonction höldérienne d'ordre α sur K, on ne peut espérer avoir aussi $|v(x)-v(y)|\geq c^{-1}\,|x-y|^\alpha$ pour tous les x,y de K. Mais si on fixe $\alpha'\in]\alpha,1[$, on a :

Lemme 12.1. *Il existe une fonction continue strictement croissante $\Psi\colon I=[0,1]\to]0,1[$ telle que l'on ait, pour une constante $C>1$ assez grande :*

(i) *pour $x,y\in I$ tels que $x<y$, on a $\Psi(y)-\Psi(x)\geq C^{-1}\{(u(y)-u(x))+(y-x)\}$,*

(ii) *pour $x,y\in I$, on a $|\Psi(x)-\Psi(y)|\leq C|x-y|^\alpha$,*

(iii) *pour $x,y\in I$ tels que $[x,y]\cap K\neq\emptyset$, on a $|\Psi(x)-\Psi(y)|\geq C^{-1}|x-y|^{\alpha'}$.*

Preuve abrégée. On introduit $g(x)=(d(x,K))^{\alpha'-1}$. Il est facile de voir que $\int_0^1 g(t)\,dt<+\infty$ et, par homogénéité, que pour chaque composante J de K_n, on a : $\int_J g(t)\,dt=(l_n(\lambda))^{\alpha'}\cdot\int_0^1 g(t)\,dt$. En utilisant cette remarque, on voit sans difficulté qu'il existe $c>0$ tel que :

$$\forall x,y\in I,\quad \text{tels que } x<y, \text{ et } [x,y]\cap K\neq\emptyset,\quad \text{on a } \int_x^y g(s)\,ds\geq c^{-1}|x-y|^{\alpha'}$$

et

$$\forall x,y\in I,\ x<y,\quad \int_x^y g(s)\,ds\leq c|x-y|^{\alpha'}.$$

Donc si c_1 est une constante >0 assez petite, la fonction croissante $\Psi(x)=c_1+c_1\{\int_0^x d\mu(t)+\int_0^x d(t,K)^{\alpha'-1}\,dt\}$ possède toutes les propriétés voulues.

B. *Construction de f.* Fixons $\gamma,\gamma'\in]0,1[$, $\gamma'<\gamma$, choisissons α,α' tels que $0<\gamma'\leq\alpha<\alpha'<\gamma<1$, puis λ tel que $\alpha(\lambda)=\alpha$. Soit $\Phi=\{(x,t);t=\Psi(x),0\leq x\leq 1\}$ (Φ sera l'ensemble de contact), où Ψ est associée à K comme dans le lemme 12.1.

On pose $\varphi(x)=-\int_0^x(x-s)\,d\mu(s)$, $x\in\mathbf{R}$, ce qui définit une fonction φ concave de classe $C^{1,\alpha}$ sur $\mathbf{R}$ telle que $\varphi'(x)=-u(x)$. Cette fonction φ sera l'ombre de la fonction f que nous construirons.

Considérons ensuite la fonction $g\colon\Phi\to\mathbf{R}$ telle que $g(x,t)=\varphi(x)$ pour $(x,t)\in\Phi$, et vérifions que g est de classe $C^{1,1}$ au sens de Whitney sur Φ pour la différentielle de Whitney $dg(x,t)=\varphi'(x)\,dx$ ([Ste], p. 167–180). Pour $\xi_1=(x_1,t_1)$, $\xi_2=(x_2,t_2)$ éléments de Φ, le reste $R(\xi_1,\xi_2)=g(\xi_2)-g(\xi_1)-\varphi'(x_1)\,(x_2-x_1)$ vérifie :

$$|R(\xi_1,\xi_2)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}(x_2-s)\,d\mu(s)\right|\leq|x_2-x_1|\mu([x_1,x_2]) \tag{12.1}$$

et par conséquent :

$$|R(\xi_1,\xi_2)|\leq c|t_2-t_1|^{1/\alpha'+1}\leq c|\xi_2-\xi_1|^2$$

(on peut supposer $[x_1,x_2]\cap K\neq\emptyset$ et utiliser alors le (iii) du lemme 12.1). La différentielle $dg(\xi)$ vérifie aussi une condition de Lipschitz, puisque d'après le (i) du lemme 12.1,

$$|\varphi'(x_2)-\varphi'(x_1)|\leq C|\Psi(x_2)-\Psi(x_1)|=C|t_2-t_1|\leq C|\xi_2-\xi_1|.$$

Soit alors $\tilde g$ un prolongement de Whitney de g; $\tilde g$ est de classe $C^{1,1}$ sur $\mathbf{R}^2$ de la forme (pour $\xi=(x,t)\in\mathbf{R}^2\setminus\Phi$) :

$$\tilde g(\xi)=\sum_{p=1}^{+\infty}\theta_p(\xi)\{\varphi(x_p)+\varphi'(x_p)(x-x_p)\},$$

où $\{\theta_p\}_{p\geq 1}$ est une partition de l'unité associée de la manière usuelle à un recouvrement de Whitney $\{C_p\}_{p\geq 1}$ de $\mathbf{R}^2\setminus\Phi$ par des carrés dyadiques. Notant l_p le diamètre de C_p, on peut supposer que $l_p\leq d(C_p,\Phi)\leq 4l_p$, que le support de θ_p est contenu dans le carré C'_p de même centre que C_p et de diamètre $\frac{5}{4}l_p$, et que les intérieurs des C'_p sont N à N disjoints pour $N=12^2$; les $\xi_p=(x_p,t_p)$ sont des points de Φ tels que $d(C_p,\xi_p)=d(C_p,\Phi)$. (Voir [Ste].)

Voici alors la définition de f : pour $\xi=(x,t)\in I\times I$, $f(\xi)=\tilde{g}(x,t)+\delta(\xi)^{1+\gamma}$ où δ est la «régularisée» de $\xi\mapsto d(\xi,\Phi)$ obtenue par la formule : $\delta(\xi)=\sum_{p\geq 1} l_p\theta_p(\xi)$ ([Ste] p. 170–171). Il est classique (et facile de vérifier) que $\delta^{1+\gamma}$ est de classe $C^{1,\gamma}$ sur $\mathbf{R}^2$ et f est donc $C^{1,\gamma}$ sur $I\times I$. La concavité de φ et la formule définissant $\tilde{g}$ donnent aussi $\tilde{g}(x,t)\geq\varphi(x)=\tilde{g}(x,\Psi(x))$ pour tout $(x,t)\in I\times\mathbf{R}$, de sorte que l'ombre de f est bien φ, et l'ensemble de contact correspondant est Φ. De plus, $df(\xi)=d\tilde{g}(\xi)=\varphi'(x)dx$ sur Φ.

C. Il s'agit maintenant de vérifier que pour $\xi_0=(x_0,t_0)\in\Phi$ et $\xi\in[0,1]\times[0,1]$, on a, pour une certaine constante $c_0>0$,

$$f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)(x-x_0)\geq -c_0\,|\xi-\xi_0|^{1+1/\gamma}. \tag{12.2}$$

C.1. Commençons par supposer $\xi_0\in\Phi_0=\{(x,\Psi(x));x\in K\}$, et observons que pour $\xi=(x,t)\in\Phi$, on a, d'après le lemme 12.1, les inégalités :

$$|t-t_0|^{1/\alpha}\leq c_1|x-x_0|\leq c_2|t-t_0|^{1/\alpha'}\leq c_2|t-t_0|^{1/\gamma} \tag{12.3}$$

où les c_j sont des constantes >0 indépendantes de ξ_0 et de ξ.

Prenons $\xi=(x,t)\in I\times I$ tel que $d(\xi,\xi_0)\leq r$, $r>0$ petit et fixé ultérieurement. Pour $\xi=(x,t)$ dans la région $|x-x_0|>c'|t-t_0|^{2/(1+\gamma)}$, on a

$$\delta(\xi)^{1+\gamma}\geq c^{-1}|x-x_0|^{1+\gamma}\geq c^{-1}(c')^{1+\gamma}|t-t_0|^2.$$

Donc, si r est choisi assez petit et si $c'>0$ est fixé assez grand, on aura $\delta(\xi)^{1+\gamma}\geq \varkappa(\nabla\tilde{g})|\xi-\xi_0|^2$, où $\varkappa(\nabla\tilde{g})$ désigne la constante de Lipschitz de $\nabla\tilde{g}$; alors, $-\delta(\xi)^{1+\gamma}\leq \tilde{g}(\xi)-\tilde{g}(\xi_0)-\partial_x\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0)$, et on a (12.2) avec $c_0=0$.

Notons $U=\{\xi=(x,t)\in I\times I;|x-x_0|\leq c'|t-t_0|^{2/(1+\gamma)},|\xi-\xi_0|\leq r\}$ la région complémentaire dans la boule $B(\xi_0,r)$. Pour $\xi=(x,t)\in U\setminus\Phi$, et d'après l'expression de $\tilde{g}(\xi)$, on a :

$$\begin{aligned}&\tilde{g}(\xi)-\tilde{g}(\xi_0)-\partial_x\tilde{g}(\xi_0)(x-x_0)\\&\quad=\sum_{p\geq 1}\theta_p(\xi)\big\{[\varphi(x_p)-\varphi(x_0)-\varphi'(x_p)(x_p-x_0)]+[(\varphi'(x_p)-\varphi'(x_0))(x-x_0)]\big\}.\end{aligned}$$

D'où, d'après la définition de f et l'inégalité (12.1),

$$\begin{aligned}&f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)(x-x_0)\\&\geq \delta(\xi)^{1+\gamma}-\max\{\mu(I(x_0,x_p));p\in N(\xi)\}\cdot(|x-x_0|+2\max\{|x_p-x_0|;p\in N(\xi)\}),\end{aligned}$$

où $I(x_0,x_p)$ désigne l'intervalle d'extrémités x_0 et x_p, et où $N(\xi)$ désigne l'ensemble des p tels que $|\xi_p-\xi|\leq 4\,d(\xi,\Phi)$. Comme $\mu(I(x_0,x_p))\leq C|t_0-t_p|$, (et si r est assez petit) :

$$\begin{aligned}(12.4)\quad &f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)(x-x_0)\\&\qquad\geq \delta(\xi)^{1+\gamma}-c|t-t_0|(|x-x_0|+\max\{|x_p-x_0|;p\in N(\xi)\}).\end{aligned}$$

Distinguons alors trois cas :

1. D'abord, soit $\xi\in U$ tel que $|x-x_0|\geq A|t-t_0|^{1/\gamma}$, $A>1$. D'après les encadrements (12.3) précisant l'allure de Φ au voisinage de ξ_0, on voit aisément qu'on a : $\delta(\xi)\geq c|x-x_0|$ et $\max\{|x_p-x_0|;p\in N(\xi)\}\leq c|x-x_0|$. Donc, si on fixe A assez grand, on a bien (12.2) (avec $c_0=0$).

2. Supposons ensuite $|t-t_0|^{1/\alpha'}\leq|x-x_0|\leq A\,|t-t_0|^{1/\gamma}$. On a maintenant

$$c|t-t_0|\,|x-x_0|\leq cA|t-t_0|^{1+1/\gamma}\leq cA|\xi-\xi_0|^{1+1/\gamma},$$

et $|x_p-x_0|\leq c|x-x_0|$ pour $p\in N(\xi)$. D'où à nouveau (12.2).

3. Enfin, dans la région $|x-x_0|\leq|t-t_0|^{1/\alpha'}$, on peut majorer $|x-x_0|$ et les $|x_p-x_0|$, $p\in N(\xi)$, par $c|t-t_0|^{1/\alpha'}$, et a fortiori par $c|t-t_0|^{1/\gamma}$.

C.2. Reste à traiter le cas où $\xi_0\notin\Phi_0$. On se ramènera au cas précédent en introduisant un point $\xi_1=(x_1,t_1)\in\Phi_0$ (d'abscisse $x_1\in K$) avec $|\xi_1-\xi_0|$ minimum : comme φ est affine sur chaque intervalle contigu à K, on a

$$f(\xi)-f(\xi_0)-\partial f_x(\xi_0)(x-x_0)=f(\xi)-f(\xi_1)-\partial_x f(\xi_1)(x-x_1).$$

D'où, d'après ce qui précède,

$$f(\xi)-f(\xi_0)-\partial f_x(\xi_0)(x-x_0)\geq -c_0|\xi-\xi_1|^{1+1/\gamma}\geq -c_0'|\xi-\xi_0|^{1+1/\gamma}$$

si $|\xi-\xi_0|\geq\frac{1}{100}|\xi-\xi_1|$. Pour $|\xi-\xi_0|\leq\frac{1}{100}|\xi-\xi_1|$, on a $\xi\in B=B\big(\xi_0,\frac{1}{99}|\xi_0-\xi_1|\big)$, et comme $\tilde g$ est affine sur B,

$$f(\xi)-f(\xi_0)-\partial_x f(\xi_0)(x-x_0)=\delta(\xi)^{1+\gamma}\geq 0.$$

On a donc encore l'inégalité (12.2) (avec un nouveau $c_0>0$). Ce qui achève la preuve du théorème 2.

Bibliographie

[Bo1] BOMAN, J., Smoothness of the sum of convex sets with real analytic boundaries, *Math. Scand.* **66** (1990), 225–230.

[Bo2] BOMAN, J., The sum of two plane convex C^∞ sets is not always C^5, *Math. Scand.* **66** (1990), 216–224.

[Bou] BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématiques, Topologie générale, chap. 9*, Hermann, Paris, 1958.

[Cho] CHOQUET, G., L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure, *Mathematica Timisoara* **20** (1944), 29–64.

[CFG] CROFT, H. T., FALCONER, K. J. and GUY, R. K., *Unsolved Problems in Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Fed] FEDERER, H., *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[Hö1] HÖRMANDER, L., *Notions of Convexity*, Birkhäuser, Boston 1994.

[Hö2] HÖRMANDER, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1983.

[Ki1] KISELMAN, C. O., How smooth is the shadow of a convex body? *J. London Math. Soc.* **33** (1986), 101–169.

[Ki2] KISELMAN, C. O., Smoothness of vector sums of plane convex sets, *Math. Scand.* **60** (1987), 101–109.

[Ki3] KISELMAN, C. O., Regularity classes for operations in convexity theory, *Kodai Math. J.* **15** (1992), 354–374.

[Mor] MORSE, A. P., The behavior of a function on its critical set, *Ann. of Math.* **40** (1939), 62–70.

[Tr1] TRÉPREAU, J.-M., Subharmonic minima and convex shadows, *Manuscrit*, Février 1993.

[Tr2] TRÉPREAU, J.-M., Sur la résolubilité analytique microlocale des opérateurs pseudo-différentiels de type principal, *Thèse de Doctorat d'Etat*, Reims, 1984.

[Rud] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966.

[Ste] STEIN, E., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

[Str] STERNBERG, S., *Differential Geometry*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1983.

[Wh1] WHITNEY, H., Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** (1934), 63–89.

[Wh2] WHITNEY, H., A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.* **1** (1935), 514–517.

Reçu le 28 septembre 1993

Alano Ancona
Département de Mathématiques
Campus d'Orsay, Bât. 425
Université Paris Sud
F-91405 ORSAY
France
email: ancona@matups.matups.fr