ARKIV FÖR MATEMATIK Band 7 nr 45

1.68 06 3 Communiqué le 10 avril 1968 par Arne Beurling et Lars Hörmander

Sur un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. II

Par Karl Dagerholm

0. Introduction

M'inspirant de T. Carleman [1], j'ai étudié comment résoudre certains systèmes de la forme

$$\sum_{q=1}^{\infty} c_{pq} x_q = c_p \quad (p=1,2,\ldots), \tag{1}$$

à la seule condition que les solutions $x=(x_1, x_2, \ldots)$ *rendent convergentes les séries du système considéré.*

Dans [3] j'ai démontré le théorème d'unicité suivant pour un système de la forme

$$\sum_{q=1}^{\infty} (p-aq)^{-1} x_q = c_p \quad (p=1,2,\ldots). \tag{2}$$

Si dans le plan complexe la constante a *se trouve en dehors de l'intervalle réel* $0 \leqslant a \leqslant 1$ *le système homogène* $c_p=0$ $(p=1,2,\ldots)$ *n'admet pas d'autres solutions que* $x=0$. *Si* a *est réel et* $0 \leqslant a < 1$ *il existe d'autres solutions.*

Il est entendu qu'on raye les termes qui deviennent infinis.

Dans cet article nous allons considérer le cas auparavant non résolu $a=1$

$$\sum_{q=1}^{\infty}{}' (p-q)^{-1} x_q = 0 \quad (p=1,2,\ldots), \tag{3}$$

où l'accent indique ici, et par la suite, qu'il faut supprimer les termes infinis.

Nous nous proposons de déterminer toutes les solutions $x=(x_1, x_2, \ldots)$ *qui rendent les séries de* (3) *convergentes.*

Le même problème a été posé dans [3], page 34.

Dans § 1 je prouve que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution $x \neq 0$ du système (3) équivaut à l'existence d'une fonction entière ayant des propriétés données. Dans § 2 je démontre l'existence de la fonction entière, mentionnée dans § 1. Dans § 3 je trouve l'unicité de la fonction entière et ainsi l'unicité de la solution du système (3).

En publiant le présent article nous avons la joie d'exprimer notre profonde reconnaissance à M. Arne Beurling, Professeur à l'Institute for Advanced Study, Princeton. Nous disons ici notre particulière gratitude pour les encouragements

et les idées dont il nous a fait bénéficier maintes fois depuis notre soutenance de thèse. L'élaboration du travail que nous publions aujourd'hui doit beaucoup à son fructueux enseignement et à son aide désintéressée.

1. Une condition nécessaire et suffisante pour une solution $x \neq 0$

Nous démontrerons le théorème suivant.

Pour qu'une suite $\{x_n\}_1^\infty$, *qui rend convergente la série*

$$\sum_1^\infty \frac{x_n}{n} \tag{4}$$

soit une solution de (3) *il faut et il suffit qu'il existe une fonction entière f possédant ces propriétés*

$$f(n) = (-1)^n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$f'(n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$f(n) = 0 \quad (n = 0, -1, -2, \ldots), \tag{7}$$

$$|f(x+iy)| = o(e^{\pi|y|}) \quad \textit{uniformément pour } x \leqslant 0, \tag{8}$$

$$|f(x+iy)| = o\left(\frac{|z|}{1+|y|} e^{\pi|y|}\right) \quad \textit{uniformément pour } x \geqslant 0. \tag{9}$$

Si (4) converge on forme la fonction méromorphe

$$h(z) = \sum_{q=1}^{\infty} (z-q)^{-1} x_q. \tag{10}$$

Par une sommation partielle il suit que

$$h(z) = o\left(\frac{|z|}{\Delta(z)}\right), \quad |z| \to \infty, \tag{11}$$

où $\Delta(z)$ désigne la distance de z aux nombres entiers positifs.

Si $\{x_q\}_1^\infty$ est une solution de (3) on aura

$$h(z) = (z-q)^{-1} x_q + O(z-q) \quad (z \to q = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

En posant

$$f(z) = \pi^{-1} \cdot \sin \pi z \cdot h(z) \tag{13}$$

on obtient enfin une fonction entière satisfaisante aux conditions énoncées.

Inversement si $f(z)$ satisfait aux conditions précédentes et si

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{f(n)}{n}$$

converge, alors $h(z)$ définie par (13) jouit des propriétés (10) et (12) avec $x_n = (-1)^n f(n)$ et fournit, par conséquent, une solution de (3).

2. L'existence de la fonction entière

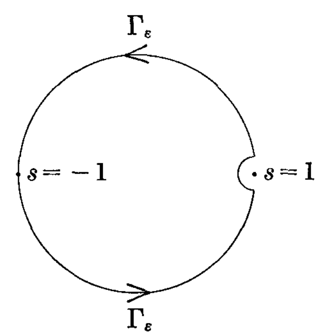
Démontrons maintenant l'existence d'une fonction entière $f \neq 0$, figurante dans le § 1. Soit

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n$$

une fonction analytique dans le cercle unité et telle que $\varphi(s)\,(1+s)^{\alpha}\,(1-s)^{\beta}$ soit continue pour $|s| \leqslant 1$, α et β étant des constantes positives, $\alpha < 1$, $\beta < 2$. Posons

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(s)\, e^{-z \log s} \frac{ds}{s},$$

où Γ_ε désigne le chemin d'intégration indiqué ci-dessous



et où la partie imaginaire du logarithme est prise dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Nous allons chercher à déterminer φ de sorte que la fonction entière $f(z)$ satisfasse aux conditions du théorème précédent. Nous avons

$$f(n) = \begin{cases} c_n & (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ 0 & (n = 0, -1, -2, \ldots). \end{cases}$$

La propriété $f'(n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ entraîne

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(s)\, s^{-(n+1)} \log s\, ds = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

D'après l'hypothèse faite sur φ on peut remplacer Γ_ε par $\Gamma_0(|s| = 1)$ et (14) s'écrit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta})\, \theta\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Puisque $\varphi(e^{i\theta})\,\theta \in L^1(-\pi, \pi)$ la relation (15) entraîne l'existence d'une fonction $\psi(s)$ appartenant à la classe de Hardy H^1 pour le domaine $|s| > 1$, telle que l'on ait p.p.

$$\lim_{r=1+0} \psi(r\,e^{i\theta}) = \psi(e^{i\theta}) = \theta\varphi(e^{i\theta}), \quad -\pi < 0 < \pi. \tag{16}$$

Le problème de la détermination de φ et ψ peut se résoudre par une méthode appliquée par Wiener et Hopf à des problèmes similaires pour le demi-plan, [2].

En écrivant $(1/s)\,\varphi(s)=\varphi_1(s)$ on doit trouver φ_1 et ψ dans les classes de Hardy H^1 pour $|s|<1$ et $|s|>1$ respectivement de sorte que p.p.

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-i\theta}}{\theta}=\dfrac{\varphi_1(e^{i\theta})}{\psi(e^{i\theta})}, & (17)\\ \varphi_1(s)\,(1+s)^{\alpha}\,(1-s)^{\beta} \text{ continue pour } |s|\leqslant 1. & (18)\end{cases}$$

Abstraction faite d'un facteur $=i$ le nombre gauche dans (17) peut s'écrire

$$\frac{1}{|\theta|}\,e^{-i\theta+i\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{sign}\,\theta}.$$

Nous déterminons d'abord une décomposition en facteurs de $1/|\theta|$.

Soit $g(s)=u+iv$ la fonction analytique dans $|s|<1$ dont la partie réelle satisfait à la condition

$$u(e^{i\theta})=\tfrac{1}{2}\log\frac{1}{|\theta|},\quad -\pi<\theta<\pi$$

et dont la partie imaginaire s'annule sur le segment $(-1,1)$.

La fonction $$\overline{g(1/\bar{s})}=u\left(\frac{1}{r},\theta\right)-iv\left(\frac{1}{r},\theta\right)\quad (s=re^{i\theta})$$

est donc analytique pour $|s|>1$. Pour $s=e^{i\theta}$, $-\pi<\theta<\pi$, l'on a

$$e^{g(s)}\Big/\overline{e^{-g(1/\bar{s})}}=e^{2u(1,\theta)}=\frac{1}{|\theta|}.$$

Il reste à trouver les facteurs de la fonction

$$e^{-i\theta+i\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{sign}\,\theta},\quad -\pi<\theta<\pi.$$

La solution est élémentaire

$$e^{-i\theta+i\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{sign}\,\theta}=\frac{\sqrt{1-s^{-2}}}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\Big/\frac{1}{\sqrt{1-s^{-2}}},\quad -\pi<\theta<\pi.$$

$\sqrt{1-s^2}$ étant réel >0 pour $-1<s<1$ et $\sqrt{1-s^{-2}}>0$ pour $s>1$.

Donc $$\frac{1}{|\theta|}\,e^{-i\theta+i\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{sign}\,\theta}=\frac{e^{g(s)}}{\sqrt{1-s^2}}\Big/\frac{\overline{e^{-g(1/\bar{s})}}}{\sqrt{1-s^{-2}}}\quad\text{pour } s=e^{i\theta},\ -\pi<\theta<\pi.$$

Il s'ensuit $$\frac{1}{\theta}=\frac{s\,e^{g(s)}}{\sqrt{1-s^2}}\Big/\frac{\overline{e^{-g(1/\bar{s})}}\cdot i}{\sqrt{1-s^{-2}}}=\frac{\varphi}{\psi},\tag{19}$$

où φ et ψ satisfont aux conditions données avec $\frac{1}{2}<\alpha<1$, $1<\beta<2$.

La fonction
$$\varphi(s)=\frac{s\,e^{g(s)}}{\sqrt{1-s^2}}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n s^n \tag{20}$$

donné, par conséquent, naissance à une fonction entière f du type considéré, pourvu que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1} c_n$$
converge.

Posons
$$u(1,\theta)=\tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right|+k(e^{i\theta}),$$
$$k(e^{i\theta})=\tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1-e^{i\theta}}{\theta}\right|=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\cos n\theta.$$

La fonction k est absolument continue et possède une dérivée à variation bornée. Donc $b_n=O(1/n^2)$. Il s'énsuit
$$g(s)=\tfrac{1}{2}\log\frac{1}{1-s}+k(s),\; k(s)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n.$$

On comprend que $k(s)$ est régulière dans $s=1$. On peut donc écrire
$$\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{2}\,(1-s)}\,e^{k(1)}+\frac{1}{1-s}\left(\frac{s}{\sqrt{1+s}}\,e^{k(s)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{k(1)}\right)$$
ou
$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{k(1)}}{\sqrt{2}}+c_n'\right)s^n.$$

Puisque les c_n' sont des coefficients de Taylor d'une fonction majorée par const$\cdot|s+1|^{-\frac{1}{2}}$, cela entraîne d'après Hausdorff–Young la convergence des séries $\sum|c_n'|^q$ pour $q>2$.

Donc la série
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1} c_n$$
converge.

3. L'unicité de la solution

S'il se trouvait deux fonctions linéairement indépendantes f et f_1, satisfaisant aux conditions (6)–(9), il existerait aussi une combinaison linéaire
$$g=af+bf_1;\quad |a|+|b|\neq 0,$$
telle que $g'(0)=0$ et que $g\neq 0$.

L'unicité est ainsi une conséquence du lemme suivant.

Lemme. *Les conditions* (6)–(9) *plus celle de* $g'(0)=0$ *entraînent*
$$g(z)\equiv 0.$$

D'après le théorème de Rolle, $g'(z)=0$, en certains points $z=-\lambda_n$, où $n<\lambda_n<n+1$, $n=0,1,2,\dots$.

En vertu de (8) et (9), il s'ensuit

$$|g'(x+iy)|=o(e^{\pi|y|}), \quad \delta<\arg z<2\pi-\delta. \tag{21}$$

Le principe de Phragmén–Lindelöf appliqué à $g'(z)/\sin \pi z$ dans l'angle $-\delta<\arg z<+\delta$ prouve que la formule (21) est valable uniformément pour $|z|\to\infty$. Donc

$$m(r)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\log|g'(re^{i\theta})|\,d\theta=2r-\omega(r), \tag{22}$$

où $\omega(r)\to\infty$ pour $r\to\infty$.

Si le lemme n'était pas vrai, il existerait un nombre entier $p\geqslant 1$, de sorte qu'on ait

$$g'(z)=a_p z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\dots \quad (a_p\neq 0).$$

La formule de Jensen appliquée à $g'(z)\,z^{-p}$ donne

$$\log|a_p|\leqslant m(r)-p\log r-\int_0^r n(t)\frac{dt}{t},$$

où $n(r)$ désigne le nombre des zéros de $g'(z)$ dans le domaine $0<|z|\leqslant r$.

Dans ce qui précède nous avons $n(r)\geqslant 2[r]$ pour tous $r>0$. Il s'ensuit

$$\log|a_p|\leqslant-\omega(r)-p\log r+2\int_0^r\frac{t-[t]}{t}\,dt\leqslant-\omega(r)-(p-1)\log r+O(1).$$

Par conséquent on obtient $a_p=0$. Cette contradiction démontre le lemme.

4. Une conclusion

Des résultats précédents on peut tirer la conclusion suivante.

Pour que le système homogène

$$\sum_{q=1}^{\infty}{}'\,(p-aq)^{-1}x_q=0 \quad (p=1,2,\dots)$$

ait une solution, non triviale, rendant convergentes les séries, il faut et il suffit que le nombre complexe a se trouve sur l'intervalle fermé $[0,1]$.

BIBLIOGRAPHIE

1. CARLEMAN, T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. Verh. des Intern. Math. Kongresses Zürich 1932, Bd I. Bericht und allg. Vorträge.
2. PALEY, R., et WIENER, N., Fourier transforms in the complex domain. Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Volume XIX. New York 1934.
3. PERSSON (DAGERHOLM), K., Sur une classe de systèmes linéaires à une infinité d'inconnues. Thèse pour le doctorat. Uppsala 1938.

Tryckt den 25 november 1968

Uppsala 1968. Almqvist & Wiksells Boktryckeri AB