OBSERVABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES SUR LES GROUPES DE LIE

PHILIPPE JOUAN*

Laboratoire de Mathématiques R. Salem, CNRS UMR 6085
Université de Rouen
BP 12, 76801 Saint-Etienne-du-Rouvray, France.

Abstract

Un champ de vecteurs linéaire sur un groupe de Lie est défini par un groupe à un paramètre d'automorphismes. On obtient un système linéaire en ajoutant des champs contrôlés invariants à gauche. Ayala et Hacibekiroglu ont étudié l'observabilité d'un tel système lorsque la sortie est un morphisme de groupes de Lie. On montre qu'aucun système linéaire observable n'existe sur un groupe semi-simple, et on donne des conditions nécessaires pour qu'un tel système existe sur un groupe de Lie quelconque.

AMS Subject Classification: Primary 93B07, 22E15; Secondary 93B25.

Keywords: Groupe de Lie; Système linéaire; Observabilité.

1 Définitions

1.1 Champs de vecteurs linéaires.

Les champs de vecteurs affines de $\mathbb{R}^n$ sont les champs du type

$$x \longmapsto Ax + Y$$

où A est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et Y un champ de vecteurs constant, qu'on peut identifier à un vecteur. On vérifie aisément qu'un champ de vecteurs F sur $\mathbb{R}^n$ est affine si et seulement si pour tout champ de vecteurs constant Z le crochet $[F, Z]$ est un champ de vecteurs constant. Un tel champ de vecteurs est linéaire lorsqu'il s'annule pour $x = 0$.

C'est cette caractérisation qui peut se généraliser.

Soit G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie (ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche, identifié à $T_e G$, l'espace tangent au point e , élément neutre de G), et $\Gamma(G)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques de G .

*E-mail address: Philippe.Jouan@univ-rouen.fr

Définition 1. Un champ de vecteurs $\mathcal{X}$ sur G est **linéaire** si il vérifie une des conditions équivalentes:

(i) $\mathcal{X}$ appartient au normalisateur de $\mathfrak{g}$ dans $\Gamma(G)$, autrement dit

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad [\mathcal{X}, Y] \in \mathfrak{g}$$

et vérifie $\mathcal{X}(e) = 0$;

(ii) Le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $\mathcal{X}$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de G .

Un champ linéaire vérifie l'égalité

$$\forall g, g' \in G \quad \mathcal{X}_{gg'} = TL_g \cdot \mathcal{X}_{g'} + TR_{g'} \cdot \mathcal{X}_g$$

D'autre part on lui associe naturellement la dérivation D de $\mathfrak{g}$ définie par:

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad DY = -[\mathcal{X}, Y]$$

L'apparition du signe $-$ est justifiée par le cas "usuel" dans $\mathbb{R}^n$, où l'on a $[Ax, b] = -Ab$, et permet d'éviter les signes $-$ dans l'égalité

$$\forall Y \in \mathfrak{g} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_t(\exp Y) = \exp(e^{tD}Y).$$

1.2 Exemple: le cas des dérivations intérieures.

On suppose ici que la dérivation $-D = ad(\mathcal{X})$ est intérieure: il existe un champ de vecteurs X invariant à gauche tel que $ad(X) = ad(\mathcal{X})$. On montre que dans ce cas les champs $\mathcal{X}$ et X diffèrent d'un champ de vecteurs invariant à droite (la connexité de G est ici indispensable). Plus précisément, si on note X_e la valeur de X en l'élément neutre e , on a pour tout $g \in G$

$$\mathcal{X}_g = T_e L_g \cdot X_e - T_e R_g \cdot X_e$$

et le flot de $\mathcal{X}$ est donné par

$$\varphi_t(g) = \exp(-tX)g \exp(tX)$$

Si l'on note I l'application $g \mapsto g^{-1}$ le champ de vecteur I_*X est invariant à droite et vaut $-X_e$ au point e . Par conséquent on a

$$\mathcal{X} = X + I_*X$$

Lorsque G est semi-simple toutes les dérivations de $\mathfrak{g}$ sont intérieures donc tous les champs de vecteurs linéaires sont du type précédent.

Lorsque le groupe G n'est pas simplement connexe on ne peut pas toujours associer un groupe à un paramètre de difféomorphismes à une dérivation donnée D . Ce défaut d'existence du champ de vecteurs linéaire ne peut pas advenir lorsque $D = -ad(X)$ est une dérivation intérieure puisque dans ce cas le flot $\varphi_t(g) = \exp(-tX)g \exp(tX)$ existe toujours.

1.3 Systèmes linéaires sur les groupes de Lie.

Définition 2. Un **système linéaire** sur un groupe de Lie connexe G est un système contrôlé

$$(\Sigma) \quad \dot{g} = X_g + \sum_{j=1}^m u_j Y_g^j$$

où X est un champ de vecteurs linéaire et les Y^j des champs de vecteurs invariants à gauche. Les contrôles u_j sont pris dans $\mathbb{R}$.

Un contrôle $t \mapsto u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, L^∞ sur $[0, T]$, étant fixé, on note $g_u(t)$ la trajectoire de Σ qui vérifie $g_u(0) = g$.

Un calcul standard permet de montrer que si on note $e_u(t)$ la trajectoire issue de e pour ce contrôle, celle qui est issue de g est

$$g_u(t) = \varphi_t(g)e_u(t)$$

où $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est comme précédemment le flot de X .

2 Observabilité et observateurs.

Considérons un instant un “vrai” système linéaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, et A et B sont des matrices de tailles appropriées. Le problème de l’observabilité est le suivant. On ne connaît pas x , mais seulement une “partie” de l’état x , qui, dans le cas linéaire, dépend linéairement de x :

$$y = Cx$$

où $y \in \mathbb{R}^p$, avec $p < n$ et C est une matrice de taille appropriée. On cherche à déduire de la connaissance de l’évolution de la sortie: $t \mapsto y(t) = Cx(t)$, la trajectoire $t \mapsto x(t)$ du système. Plus précisément fixons une entrée $t \mapsto u(t)$, et notons $t \mapsto x(t)$ la trajectoire issue de x . On dit que le système est observable pour cette entrée si

$$[\forall t \geq 0 \quad Cx(t) = Cx'(t)] \implies x = x'$$

Le système est **uniformément observable** si cette propriété a lieu pour toute entrée. Pour les systèmes linéaires, l’observabilité ne dépend pas de l’entrée, comme le montre la formule:

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{tA}x + C \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds$$

La théorie linéaire dit que le système est (uniformément) observable si et seulement si

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(CA^i) = \{0\}$$

On dit alors que la paire (C, A) est observable.

Dans ce cas on peut construire un **observateur**, c'est-à-dire un système dont les entrées sont u et la sortie y du système original:

$$\dot{z} = Az + Bu - K(Cz - Y)$$

L'erreur $e = z - x$ satisfait l'équation

$$\dot{e} = (A - KC)e$$

Lorsque la paire (C, A) est observable, on peut choisir arbitrairement les valeurs propres de $A - KC$, via le choix de K . Si leurs parties réelles sont strictement négatives, l'erreur converge exponentiellement vite vers 0.

Ainsi pour un état initial arbitraire de l'observateur, la trajectoire $z(t)$ converge à vitesse exponentielle vers la trajectoire inconnue $x(t)$.

3 Observabilité des systèmes linéaires sur les groupes de Lie.

On considère ici un système linéaire sur un groupe de Lie connexe G contrôlé et observé

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{g} &= X_g + \sum_{j=1}^m u_j Y_g^j \\ y &= h(x) \end{cases}$$

On pourrait supposer que les propriétés de la fonction de sortie h sont seulement d'être lisse ou analytique et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et appliquer la théorie de l'observabilité non linéaire, mais il est bien sûr intéressant d'étudier l'observabilité d'un tel système lorsque la fonction d'observation possède des propriétés liées à la structure de groupe de Lie de l'espace d'état.

Dans [1] les auteurs ont étudié les systèmes dont l'espace d'observation est un groupe de Lie V et la fonction d'observation un morphisme de groupes de Lie.

3.1 Le résultat d'Ayala et Hacibekiroglu.

On a vu que pour toute entrée u (définie sur un intervalle $[0, T_u[$) et tout $g \in G$

$$g_u(t) = \varphi_t(g)e_u(t).$$

Si g et g' sont deux points de G , on a

$$\begin{aligned} & \forall t \in [0, T_u[\quad h(g_u(t)) = h(g'_u(t)) \\ \iff & \forall t \in [0, T_u[\quad h(\varphi_t(g)e_u(t)) = h(\varphi_t(g')e_u(t)) \\ \iff & \forall t \in [0, T_u[\quad h(\varphi_t(g'g^{-1})) = h(e) \end{aligned}$$

et par analyticit ce ci est quivalent $\forall t \in \mathbb{R} \quad h(\varphi_t(g'g^{-1})) = h(e)$.

Il suffit donc d'tudier l'ensemble des lments indistinguables de l'lment neutre. On note I cet ensemble:

$$I = \{g \in G / \varphi_t(g) \in \ker h \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

C'est un sous-groupe distingué et fermé, donc un sous-groupe de Lie distingué, de G . Il est de plus stable par le flot de X .

On note $\mathfrak{J}$ son algèbre de Lie. On montre qu'elle est stable par $ad(X)$ et qu'elle est égale à

$$\mathfrak{J} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(T_e h \circ D^i)$$

Il est clair que le système est observable (uniformément) si et seulement si le groupe I est réduit à l'élément neutre, et localement uniformément observable si et seulement si I est discret, donc si et seulement si son algèbre de Lie est réduite à $\{0\}$ (le système est localement uniformément observable si tout point g possède un voisinage dont les éléments sont distingués de g par la sortie pour n'importe quelle entrée).

Dans ([1]) Ayala et Hacibekiroglu ont établi:

Théorème 1. *On note $\mathcal{PF}$ l'ensemble des points fixes de X . Le système Σ est*

1. *localement observable si et seulement si $\mathfrak{J} = 0$ donc si et seulement si*

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(T_e h \circ D^i) = \{0\};$$

2. *observable si et seulement si il est localement observable et*

$$\ker(T_e h) \cap \mathcal{PF} = \{e\}.$$

L'observabilité locale d'un système linéaire, caractérisée par $\mathfrak{J} = 0$, se réduit ainsi à des conditions algébriques: si l'on note $F = T_e h$ l'observabilité locale est équivalente à ce que la paire (F, D) soit observable. Mais cette paire n'est pas quelconque: D doit être une dérivation de $\mathfrak{g}$ et F un morphisme d'algèbres de Lie; le paragraphe suivant montre que certains groupes de Lie n'admettent aucune paire observable.

3.2 Quelques cas où ce théorème ne peut s'appliquer.

3.2.1 Le cas des dérivations intérieures

Supposons que la dérivation est intérieure: $D = -ad(X)$ pour un certain $X \in \mathfrak{g}$. Si $Y \in \ker(T_e h)$ alors

$$T_e h.DY = -T_e h.[X, Y] = -[T_e h.X, T_e h.Y] = 0$$

et par une récurrence évidente $D^i Y \in \ker(T_e h)$ pour tout i , donc $Y \in \mathfrak{J}$. On obtient ainsi

$$\mathfrak{J} = \{0\} \iff \ker(T_e h) = \{0\}$$

Si l'on impose la condition $\dim V < \dim G$, sans laquelle la notion d'observabilité est vide, on voit qu'un système linéaire dont la dérivation associée est intérieure n'est jamais observable ni même localement observable. En particulier si le groupe G est semi-simple toute dérivation est intérieure, donc aucun système linéaire n'est localement observable.

3.2.2 Le cas Heisenberg

Considérons l'algèbre de Heisenberg

$$\mathfrak{h} = \text{Vect}\{Y_1, Y_2, Y_3\}$$

avec $[Y_1, Y_2] = Y_3$. On vérifie facilement que $\mathbb{R}Y_3$ est stable par toute dérivation D . Soit F un morphisme surjectif de $\mathfrak{h}$ sur une algèbre $\mathfrak{v}$. Cette algèbre doit être nilpotente puisque c'est l'image par un morphisme d'une algèbre nilpotente, mais la condition $\dim \mathfrak{v} < \dim \mathfrak{h} = 3$ impose alors à $\mathfrak{v}$ d'être abélienne. Par conséquent

$$F.Y_3 = F.[Y_1, Y_2] = [F.Y_1, F.Y_2] = 0$$

et comme $\mathbb{R}Y_3$ est stable par D

$$\forall k \geq 0 \quad F.D^k Y_3 = 0$$

Conclusion: aucune paire observable n'existe sur $\mathfrak{h}$.

On montre de la même manière qu'aucune paire observable n'existe sur l'algèbre de Lie non abélienne de dimension 2.

3.3 Une c.n.s. d'observabilité par morphisme.

Les exemples qui précèdent amènent à se poser le problème de l'**existence** de systèmes linéaires observables, en dehors du cas où G est égal à $\mathbb{R}^n$. Est-il possible de trouver un système

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{g} &= X_g + \sum_{j=1}^m u_j Y_g^j \\ y &= h(x) \end{cases}$$

où h est un morphisme à valeurs dans un groupe de Lie V (avec $\dim V < \dim G$) qui satisfasse les conditions du théorème d'Ayala-Hacibekiroglu?

Reformulée en termes algébriques la question à laquelle on veut répondre dans ce paragraphe est la suivante:

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ étant donnée, est-il possible de trouver une dérivation D de $\mathfrak{g}$, et un morphisme d'algèbres de Lie F , tels que la paire (F, D) soit observable, avec la condition $\dim \text{Im}(F) < \dim \mathfrak{g}$?

Le théorème 2 permet de réduire le problème au cas nilpotent.

Théorème 2. *Si le système est localement observable, alors le noyau de $F = T_e h$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.*

Idée de la démonstration (Cf [7]).

On considère la série centrale descendante $C^i K$, $i \geq 1$, du noyau K de F . On montre que $C^i K \subset \bigcap_{l=0}^{i-1} \ker(FD^l)$. L'observabilité de la paire (F, D) entraîne $C^i K = 0$ pour i suffisamment grand.

□

Notons $\mathfrak{N}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. C'est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$ (Cf [6] p.70), donc stable par D . Si le système est observable le théorème précédent montre que $\ker(F) \subset \mathfrak{N}$, et la paire (F, D) induite sur $\mathfrak{N}$ est observable.

On s'intéresse désormais à l'observabilité sur les groupes nilpotents.

Notations. Pour tout algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ on note $C_i\mathfrak{a}$, $i \geq 0$, la série centrale ascendante de $\mathfrak{a}$, et si $\mathfrak{a}$ est nilpotente, on appelle *longueur de $\mathfrak{a}$* le plus petit entier p tel que $C_{p-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Théorème 3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, F un morphisme surjectif de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre de Lie $\mathfrak{v}$, et D une dérivation de $\mathfrak{g}$. La paire (F, D) est observable si et seulement si:*

1. $\mathfrak{v}$ est une algèbre de Lie nilpotente de même longueur que $\mathfrak{g}$,
2. Pour tout i la paire induite par (F, D) sur $C_{i+1}\mathfrak{g}/C_i\mathfrak{g}$ est observable.

Idée de la démonstration (Cf [7]).

Les $C_i\mathfrak{g}$ sont des idéaux caractéristiques. La dérivation D induit une dérivation D_i sur $C_{i+1}\mathfrak{g}/C_i\mathfrak{g}$, et le morphisme F un morphisme F_i de $C_{i+1}\mathfrak{g}/C_i\mathfrak{g}$ sur $C_{i+1}\mathfrak{v}/C_i\mathfrak{v}$. La paire (F_i, D_i) doit être observable. □

Ce théorème montre qu'un système observable se décompose en une suite d'extensions de systèmes observables **abéliens**. De plus il montre que la structure d'une algèbre de Lie sur laquelle une paire observable existe ne peut pas être quelconque, même dans le cas nilpotent, d'où le corollaire:

Corollaire 1. *Pour qu'une paire observable existe sur l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$, il est nécessaire que $\mathfrak{g}$ possède un quotient dont la longueur soit la même que celle de $\mathfrak{g}$.*

Sur un tel groupe de Lie, on peut exhiber une paire observable, comme en témoigne l'exemple suivant.

3.4 Exemple

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de dimension 7, dont les vecteurs de base $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, T, W\}$ vérifient

$$[X_1, X_2] = Z \quad [Y_1, X_2] = [X_1, Y_2] = T \quad \text{et} \quad [Y_1, Y_2] = W$$

Tous les autres crochets sont nuls, en particulier tous les crochets de longueur supérieure ou égale à 3 sont nuls, donc l'identité de Jacobi est automatiquement vérifiée et $\mathfrak{g}$ est bien une algèbre de Lie.

On définit la dérivation D par

$$DX_1 = Y_1 \quad DX_2 = Y_2 \quad \text{et} \quad DY_1 = DY_2 = 0$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} DZ &= [DX_1, X_2] + [X_1, DX_2] = [Y_1, X_2] + [X_1, Y_2] = 2T \\ DT &= [DX_1, Y_2] + [X_1, DY_2] = [Y_1, Y_2] + [X_1, 0] = W \\ DW &= [DY_1, Y_2] + [Y_1, DY_2] = [0, Y_2] + [Y_1, 0] = 0 \end{aligned}$$

On peut vérifier que D est bien une dérivation de $\mathfrak{g}$.

Considérons maintenant l'idéal $\mathfrak{J}$ engendré par $\{X_1, X_2, Z, T\}$ et la sous-algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $\{Y_1, Y_2, W\}$. Ils sont supplémentaires, donc la sous-algèbre $\mathcal{A}$ est isomorphe au quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$.

Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre $\mathfrak{g}/\mathfrak{J}$ et F la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{H}$. Alors la paire (F, D) est observable. En effet

$$\begin{aligned}\ker F &= \mathfrak{J} = \text{Span}\{X_1, X_2, Z, T\} \\ \ker F \cap \ker FD &= \{Z\} \quad \text{car } DX_1 = Y_1 \quad DX_2 = Y_2 \quad DT = W \\ \ker F \cap \ker FD \cap \ker FD^2 &= \{0\} \quad \text{car } D^2Z = 2W\end{aligned}$$

□

3.5 Remarque finale

Dans la définition d'une paire observable on a imposé la condition $\dim \text{Im}(F) < \dim \mathfrak{g}$. C'est une condition tout à fait naturelle du point de vue de l'observabilité. En effet si $\dim \text{Im}(F) \geq \dim \mathfrak{g}$ la fonction de sortie peut fournir l'état initial instantanément, indépendamment de la dynamique.

Par contre l'abandon de cette condition peut avoir un sens du point de vue de la construction d'observateurs. En effet la fonction de sortie, même injective, peut être difficile à inverser. On peut préférer construire sur le groupe de Lie un observateur (local) commandé par la sortie. C'est ce qui est fait dans [5], avec toutefois un champ de vecteur invariant à gauche à la place du champ linéaire.

References

- [1] V. Ayala et A. Hacibekiroglu *Observable linear pairs*, Comput. Appl. math. 16 (3), 205–214 (1997).
- [2] V. Ayala, A. Hacibekiroglu et E. Kizil *Observability of general linear pairs*, Comp. and Math. with Appl. 39 (2000) 35–43.
- [3] V. Ayala et J. Tirao *Linear control systems on Lie groups and Controlability*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol 64, AMS, 1999, 47–64.
- [4] S. Bonnabel, Ph. Martin, et P. Rouchon *Invariant observers*
<http://arxiv.org/abs/math/0612193v2>
- [5] S. Bonnabel, Ph. Martin, et P. Rouchon *Non-linear Observers on Lie Groups for left-invariant dynamics with right compatible outputs* <http://arxiv.org/abs/0707.2286v1>
- [6] N. Bourbaki *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre I*, CCLS Diffusion, 1971.
- [7] P. Jouan *Observability of Linear Systems on Lie Groups*, en préparation.
- [8] E.D. Sontag *Mathematical Control Theory*, Springer (1998).
- [9] W.M. Wonham *Linear Multivariate Control*, Springer (1985).