

QUELQUES PROBLÈMES ISOPÉRIMÉTRIQUES.

PAR

T. BONNESEN

À COPENHAGUE.

Dans quelques mémoires précédents nous avons traité le problème des isopérimètres¹ et le problème des isépiphanes² au point de vue de la géométrie. Les propriétés extrémantes du cercle et de la sphère — savoir que parmi les figures à périmètre donné, soit dans le plan soit sur la surface de la sphère, c'est le cercle qui a la plus grande aire, et que la sphère a un volume plus grand que tout autre corps de même superficie — peuvent être exprimées par des inégalités isopérimétriques (voir § 1). Le but de ces recherches fut de donner des démonstrations élémentaires de ces inégalités sans supposer et sans démontrer d'avance l'existence d'une figure maximante. Ce but a été atteint en améliorant les inégalités isopérimétriques, c'est-à-dire en montrant qu'au second membre de l'inégalité, au zéro, peut être substituée une quantité positive en général, et qui ne s'annule identiquement que dans le cas du cercle ou de la sphère. Par ce procédé nous avons évité aussi tout emploi de limite, exception faite, cela va sans dire, pour la définition du périmètre, de la superficie et du volume des figures.

Dans ce qui suit nous nous proposons d'envisager ces problèmes au point de vue du calcul des variations en débutant par quelques remarques sur les inéga-

¹ Comptes rendus. Paris t. 172 (1921), p. 1087—89. Mat. Tidsskr. Copenhague 1921. B, p. 1—13, 48—51. Math. Annalen t. 84 (1921), p. 216—27 (cité par la lettre A). Mat. Tidsskr. Copenhague 1923 B, p. 15—22. Math. Annalen t. 91 (1924), p. 252—58 (cité par B).

² Festschrift til C. JUEL. Mat. Tidsskr. Copenhague 1925 B, p. 73—80. Boll. dell'Unione Mat. Italiana, IV 1925, p. 49—56. Math. Annalen t. 95 (1925) p. 267—76 (cité par C).

lités isopérimétriques en général. Par la méthode du multiplicateur d'Euler-Lagrange tout problème isopérimétrique est lié à un problème d'extremum libre. Les deux problèmes ont en effet les mêmes extrémales. Mais l'extrémante du problème isopérimétrique n'est pas toujours aussi extrémante pour l'extremum libre. Dans le cas où les solutions se confondent l'extrémante du problème libre fournit immédiatement l'inégalité isopérimétrique, mais cette inégalité ne peut pas être améliorée par les méthodes en question. Dans le cas contraire, où l'extrémale du problème isopérimétrique n'est pas l'extrémante du problème libre, on peut néanmoins, dans certaines conditions, parvenir à l'inégalité isopérimétrique par les procédés mêmes de l'extremum libre et même à une inégalité améliorée.

Les principes de la section I sur les inégalités isopérimétriques sont appliqués en détail dans les sections III—VI aux problèmes des isopérimètres, de l'aire mixte de deux ovales, des isépiphanes et des inégalités de Minkowski relatives aux corps convexes. Dans tous les cas l'existence de la solution du problème libre est démontrée par la construction de Weierstrass. Et par les coordonnées tangentielles utilisées on peut donner de l'intégrale de Weierstrass, $\int E(x, y, y', p) dx$, une interprétation géométrique qui conduit à des démonstrations directes des inégalités isopérimétriques sans faire usage des méthodes du calcul des variations.

Avant d'entrer dans les détails de ces problèmes il a été nécessaire d'exposer dans la section II quelques formules concernant les figures convexes. Ces formules sont bien connues en partie; pourtant, nous en avons donné les démonstrations en nous appuyant sur les méthodes de géométrie infinitésimale exposées par M. HJELMSLEV.

I Inégalités isopérimétriques.

1. Soient (C) un ensemble de courbes C , I_C et K_C deux fonctionnelles, fonctions de la courbes C . Envisageons dans (C) le sous-ensemble (C') formé par les courbes pour lesquelles la fonctionnelle K_C a une valeur donnée K . Le problème isopérimétrique général consiste en la détermination dans (C') d'une courbe C_0 telle que I_{C_0} ait dans (C') sa valeur minima (maxima).

Supposons que le problème ait une solution pour toutes les valeurs de K d'un certain intervalle, $K_1 < K < K_2$. I_{C_0} est alors une fonction de $K = K_C$,

$$I_{C_0} = \Phi(K_{C_0}),$$

et par hypothèse l'inégalité

$$I_C \geq \Phi(K_C)$$

est valable pour toutes les courbes C , sur lesquelles $K_1 < K_C < K_2$. Cette inégalité sera appelée *l'inégalité isopérimétrique* du problème. Citons comme exemples l'inégalité isopérimétrique du cercle et l'inégalité isépiphanique.

Soient P le périmètre et F l'aire d'une figure plane. L'inégalité isopérimétrique

$$\frac{1}{4\pi} P^2 - F \geq 0$$

exprime alors que parmi toutes les figures de périmètre P c'est le cercle qui a la plus grande superficie.

Soient V le volume et F l'aire de la surface d'un corps dans l'espace à trois dimensions. L'inégalité isépiphanique

$$\frac{1}{6\sqrt{\pi}} F^{\frac{3}{2}} - V \geq 0$$

exprime alors que parmi tous les corps isépiphaniques, c.-à-d. ceux qui ont la surface F , c'est la sphère qui a le plus grand volume.

2. Il est bien connu que le problème isopérimétrique peut être résolu par la méthode du multiplicateur d'Euler-Lagrange, c'est-à-dire qu'il existe, étant supposée l'existence de la courbe C_0 , un nombre λ tel que C_0 soit une extrémale du problème d'extremum libre, qui consiste à déterminer dans (C) une courbe rendant minimum la fonctionnelle $I_C + \lambda K_C$. (Un cas singulier apparaît, quand C_0 est une extrémale de K_C .) En d'autres termes, pour résoudre le problème isopérimétrique (de l'extremum lié) on peut commencer par envisager le problème de l'extremum libre, savoir de minimiser la fonctionnelle $I_C + \lambda K_C$ pour une valeur arbitraire de λ . Ce problème conduit à une équation différentielle dont l'intégrale définit un système de courbes, les extrémales, parmi lesquelles la courbe C_0 est à déterminer. Les constantes arbitraires de l'intégrale sont à déterminer par la condition que la courbe appartienne à l'ensemble (C) . Enfin il faut donner à λ une valeur $\lambda = \lambda_0$ telle que $K_{C_0} = K$.

Si la courbe C_0 trouvée fournit pour $\lambda=\lambda_0$ un minimum de la fonctionnelle $I_C + \lambda_0 K_C$ par rapport à l'ensemble (C) ou au moins par rapport à un sous-ensemble de (C) , un voisinage de C_0 p. ex., elle est aussi une courbe minimante pour le problème isopérimétrique, c'est-à-dire par rapport à l'ensemble (C') . C'est évident, car par hypothèse l'inégalité

$$I_C + \lambda_0 K_C \geq I_{C_0} + \lambda_0 K_{C_0}$$

est vraie pour toute courbe C de l'ensemble (C) , de sorte que si C appartient aussi à (C') on a $K_C = K_{C_0}$, d'où il suit que

$$I_C \geq I_{C_0}.$$

Mais la proposition inverse n'est pas exacte. C_0 peut bien être la solution du problème isopérimétrique sans représenter le minimum de $I_C + \lambda_0 K_C$. C'est pourquoi il est nécessaire dans le calcul des variations de développer pour le problème isopérimétrique une théorie particulière. Néanmoins nous pouvons nous borner, pour les problèmes qui seront traités dans ce que suit, à considérer l'extremum libre, ce qui simplifiera la recherche.

3. Soit $E(\lambda)$ l'extrémale correspondant au problème d'extremum libre $I_C + \lambda K_C$, et continue dans l'ensemble (C) . Nous supposons que $E(\lambda)$ fournit, dans (C) , le minimum de $I_C + \lambda K_C$ pour toutes les valeurs de λ comprises dans un certain intervalle (λ_1, λ_2) , $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, c'est-à-dire que

$$I_C + \lambda K_C \geq I_{E(\lambda)} + \lambda K_{E(\lambda)}, \quad (1)$$

ou bien

$$I_C \geq I_{E(\lambda)} + \lambda (K_{E(\lambda)} - K_C). \quad (2)$$

Les valeurs de $K_{E(\lambda)}$ dans l'intervalle (λ_1, λ_2) constituent un ensemble (K) . A une valeur K_0 de (K) correspond donc une valeur $\lambda = \lambda_0$ au moins dans (λ_1, λ_2) telle que $K_{E(\lambda_0)} = K_0$. λ_0 est une fonction de K_0 dans (K) . Par substitution de cette fonction à λ_0 dans $I_{E(\lambda_0)}$, cette fonctionnelle sera exprimée en fonction de K_0 , $I_{E(\lambda_0)} = \Phi(K_0)$. La courbe C étant choisie de manière que $K_C = K_0$, l'inégalité (2) prend la forme isopérimétrique

$$I_C \geq \Phi(K_C). \quad (3)$$

Posons pour abrégier $I_{E(\lambda)} = I(\lambda)$ et $K_{E(\lambda)} = K(\lambda)$. Pour que l'extrémale $E(\lambda_0)$

soit minimante de la fonctionnelle $I_C + \lambda_0 K_C$ par rapport à toutes les courbes de l'ensemble (C) il faut qu'elle soit minimante par rapport aux autres extrémales $E(\lambda)$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, ce qui s'exprime par la condition

$$I(\lambda) - I(\lambda_0) + \lambda_0 \{K(\lambda) - K(\lambda_0)\} \geq 0$$

ou bien

$$(\lambda - \lambda_0) \{I'(\lambda_0) + \lambda_0 K'(\lambda_0)\} + \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 \{I''(\lambda_0) + \lambda_0 K''(\lambda_0)\} + (\lambda - \lambda_0)^3 \alpha \geq 0,$$

en supposant l'existence des dérivées I' , I'' , I''' , K' , K'' , K''' . On a par conséquent les conditions nécessaires suivantes

$$I'(\lambda_0) + \lambda_0 K'(\lambda_0) = 0,$$

$$I''(\lambda_0) + \lambda_0 K''(\lambda_0) \geq 0.$$

Si l'on suppose que l'extrémale $E(\lambda_0)$ est minimante pour toute valeur de λ_0 dans l'intervalle $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, il faut que cette extrémale vérifie l'identité

$$I'(\lambda) + \lambda K'(\lambda) = 0 \tag{4}$$

et que l'on ait de plus

$$I''(\lambda) + \lambda K''(\lambda) \geq 0 \tag{5}$$

dans l'intervalle (λ_1, λ_2) . Mais la différentiation de (4) par rapport à λ donne l'identité

$$I''(\lambda) + \lambda K''(\lambda) + K'(\lambda) = 0, \tag{6}$$

et la condition (5) peut donc s'écrire

$$K'(\lambda) \leq 0. \tag{5'}$$

En introduisant la fonction $I(\lambda) = \Phi(K(\lambda))$, l'identité (4) prend la forme

$$\lambda = -\Phi'(K(\lambda)). \tag{4'}$$

L'identité (4) conduit à l'équation différentielle des extrémales (la condition d'EULER) et l'inégalité (5) conduit à la condition de LEGENDEE.

4. Revenons à la condition de minimum (2)

$$I_C \geq I(\lambda) + \lambda(K(\lambda) - K_C)$$

où I_C et K_C sont constantes, c.-à.-d. qu'elles sont les valeurs des fonctionnelles sur une courbe fixe C . Posons

$$\psi(\lambda) = I(\lambda) + \lambda(K(\lambda) - K_C)$$

et cherchons la plus grande valeur de $\psi(\lambda)$ dans l'intervalle (λ_1, λ_2) . On a

$$\begin{aligned} \psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) = & (\lambda - \lambda_0) \{I'(\lambda_0) + \lambda_0 K'(\lambda_0) + K(\lambda_0) - K_C\} \\ & + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 \{I''(\lambda_0) + \lambda_0 K''(\lambda_0) + 2K'(\lambda_0)\} + (\lambda - \lambda_0)^3 \alpha, \end{aligned}$$

ou, par suite de (4) et (6),

$$\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) \{K(\lambda_0) - K_C\} + \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 K'(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^3 \alpha.$$

Soit maintenant λ_0 la valeur de λ pour laquelle $K(\lambda_0) = K_C$ et supposons que $K'(\lambda_0) < 0$, (5'). On a

$$\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda_0)^2 K'(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^3 \alpha$$

et l'on voit que $\psi(\lambda_0)$ est la valeur maximale de $\psi(\lambda)$ dans l'intervalle (λ_1, λ_2) . En résumé nous avons le résultat suivant:

Soit $E(\lambda)$ l'extrémale minimante correspondant au problème de l'extremum libre de la fonctionnelle $I_C + \lambda K_C$, ce qui est exprimé par l'inégalité

$$I_C \geq I_{E(\lambda)} + \lambda(K_{E(\lambda)} - K_C), \quad (2)$$

où λ peut prendre les valeurs d'un certain intervalle $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Si on considère comme courbes de comparaison les seules courbes C , pour lesquelles il existe dans (λ_1, λ_2) une valeur de λ telle que $K_{E(\lambda_0)} = K_C$, l'inégalité (2) fournit pour cette valeur de λ l'inégalité isopérimétrique $I_C \geq I_{E(\lambda_0)}$ ou bien

$$I_C \geq \Phi(K_C), \quad (3)$$

et $I_{E(\lambda_0)}$ est précisément la valeur maximale du second membre de (2) dans l'intervalle (λ_1, λ_2) .

5. Considérons maintenant le cas où l'extrémale $E(\lambda)$ n'est pas une courbe minimante. C'est dire que nous supposons qu'il est possible de trouver une

valeur $\lambda = \lambda_0$ telle que la fonctionnelle K_C ait sur $E(\lambda_0)$ (qui vérifie la condition (4)) la valeur donnée de K_C , mais que la fonctionnelle $I_C + \lambda K_C$ n'est pas minimisée par $E(\lambda_0)$. Dans ces circonstances l'inégalité (2) n'est pas exacte pour toute courbe de comparaison; avant tout elle n'est pas valable par rapport aux courbes d'un voisinage de $E(\lambda_0)$. Néanmoins on sait, dans certains cas, déterminer un ensemble C de courbes par rapport auxquelles $E(\lambda_0)$ est minimante. Divisons la courbe C par une série de points en des arcs partiels C_1, C_2, \dots, C_n , et supposons que $I_C = I_{C_1} + I_{C_2} + \dots + I_{C_n}$ et $K_C = K_{C_1} + K_{C_2} + \dots + K_{C_n}$. Supposons en outre qu'il soit possible de subdiviser l'arc d'extrémale de manière que chacun des arcs partiels soit minimant par rapport aux arcs correspondants des courbes de comparaison. Pour tous les arcs subsiste alors une inégalité analogue à (2) et par addition de toutes ces inégalités on voit que l'inégalité (2) sera valable pour toute courbe formée par les arcs susdits.

Cela posé nous envisageons une courbe de comparaison C et l'extrémale isopérimétrique $E(\lambda_0)$, $K_{E(\lambda_0)} = K_C$. Supposons qu'il soit possible de construire un faisceau d'extrémales $E(\lambda)$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ de sorte que chacune de ces extrémales soit divisée comme C en des arcs partiels de la nature susdite. L'inégalité (2) subsiste alors par rapport à C pour toutes les valeurs λ de l'intervalle (λ_1, λ_2) . Puisque les extrémales vérifient la condition (4) nous avons comme dans le paragraphe précédent

$$\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) = \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0)^2 K'(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^3 \alpha,$$

en désignant toujours par $\psi(\lambda)$ le second membre de (2). Dans le cas en question $K'(\lambda_0)$ n'est pas négatif (5'). Supposons $K'(\lambda_0) > 0$. La fonction $\psi(\lambda)$ a alors un minimum relatif pour $\lambda = \lambda_0$, et le développement précédente nous a montré qu'il n'existe des maxima et minima relatifs que pour des valeurs de λ satisfaisant à l'équation $K_{E(\lambda)} = K_C$. La valeur λ_0 peut être ou non située à l'intérieur de (λ_1, λ_2) . Dans les deux cas les valeurs $\psi(\lambda_1)$ et $\psi(\lambda_2)$ de $\psi(\lambda)$ sont plus grandes que $\psi(\lambda_0) = I_{E(\lambda_0)} = \Phi(K_C)$. Ainsi nous trouvons également dans ce cas l'inégalité isopérimétrique. $\Phi(K_C)$ indique une limite inférieure de la fonctionnelle I_C , mais $\psi(\lambda_1)$ et $\psi(\lambda_2)$ sont des limites inférieures plus grandes; en d'autres termes l'inégalité isopérimétrique a été améliorée dans le cas actuel par l'inégalité (2), valable par rapport à toutes les courbes C , pour lesquelles la construction exposée ci-dessus est possible. Les limites (λ_1, λ_2) de l'intervalle de construction dépendent de la courbe C en question. Dans la 3^e section, sur le

problème isopérimétrique proprement dit, nous verrons comment la construction peut être faite et comment elle conduit à une inégalité améliorée concernant toute courbe fermée.

L'inégalité (2) peut être mise sous la forme suivante,

$$I_C - \Phi(K_C) \geq - \{ (\Phi(K_C) - \Phi(K_{E(\lambda)})) - (K_C - K_{E(\lambda)}) \Phi'_K(K_{E(\lambda)}) \},$$

en posant $I_{E(\lambda)} = \Phi(K_{E(\lambda)})$, $\lambda = -\Phi'(K_{E(\lambda)})$ (4') et retranchant aux deux membres de (2) la quantité $\Phi(K_C)$. C'est-à-dire que

$$I_C - \Phi(K_C) \geq - \frac{1}{2} (K_C - K_{E(\lambda)})^2 \Phi''_K(K), \quad (6)$$

où K représente un nombre compris entre K_C et $K_{E(\lambda)}$. De $\lambda = -\Phi'_K(K_{E(\lambda)})$ on tire

$$\frac{1}{K'}(\lambda) = -\Phi''_K(K_{E(\lambda)}),$$

de sorte que

$$I_C - \Phi(K_C) \geq \frac{(K_C - K_{E(\lambda)})^2}{2 K'(\mu)}, \quad (6')$$

où μ est un certain nombre compris entre λ et λ_0 . Si $K'(\lambda)$ est négatif dans l'intervalle (λ_1, λ_2) le second membre de (6') est négatif pour toute valeur de λ , excepté pour la valeur λ_0 pour laquelle il s'annule, et l'inégalité devient l'inégalité isopérimétrique. Au contraire si $K'(\lambda)$ est positif, nous obtenons une inégalité isopérimétrique améliorée.

II. Sur les figures convexes.

6. Par figure convexe du plan ou de l'espace on entend un ensemble de points qui contient avec deux points P et Q tout le segment de droite PQ . La frontière d'une figure convexe et bornée dans le plan est une courbe simple convexe fermée C . Cette courbe peut être composée, ou bien en partie, ou bien dans sa totalité, de segments de droite. En tout point de C existe, comme conséquence de la définition, deux demi-tangentes formant un angle φ tel que $0 < \varphi \leq \pi$. Par dualité les points anguleux d'une courbe (où $\varphi < \pi$) correspondent à des segments de droite. On entend par droite d'appui de C une droite qui a en

commun avec C ou bien un point unique ou bien tout un segment. Les points communs sont dits points d'appui de la droite. Par point caractéristique d'une droite variable on entend le point limite de l'intersection de la droite avec une droite voisine. Une droite d'appui qui a un segment en commun avec C a donc deux points caractéristiques: les extrémités du segment. Quand la courbe est parcourue par un point P , la demi-tangente de P orientée conformément au sens de parcours varie en général d'une manière continue. Cependant, en un point anguleux la demi-tangente fait un saut. D'une manière analogue, le point caractéristique d'une droite d'appui qui parcourt la corbe varie de manière continue sauf au passage par un segment de C , où le point caractéristique fait un saut de l'une des extrémités du segment à l'autre.

Pour les surfaces convexes, frontières des corps convexes, on a aussi les mêmes résultats pour les notions analogues, à savoir celles de plan d'appui et de point d'appui.

7. Pour les recherches analytiques relatives à une courbe convexe C il sera commode de faire usage de coordonnées tangentielles polaires. Soient O l'origine, α et β les axes d'un système de coordonnées rectangulaires. Soient t une droite d'appui de C , T son point d'appui ou bien le point caractéristique de t pour une variation de sens bien déterminé. Soit de plus N le pied de la normale n abaissée de O sur t . Nous supposons que la courbe C est orientée conformément au sens positif du système de coordonnées $(\alpha\beta = +\frac{\pi}{2})$, et que le sens positif de t est conforme à l'orientation de C . Choisissons enfin le sens positif de n de manière que $\angle(n, t) = +\frac{\pi}{2}$. Posons $\angle(\alpha, t) = x$, $ON = y$. Alors (x, y) sont les coordonnées polaires de la droite t . y est sur C une fonction continue et périodique de x de période 2π . Si O est choisi à l'intérieur de C , y est positive pour toute valeur de x . Le lieu du point N est la podaire (N) de C par rapport à l'origine O . L'équation de C en coordonnées tangentielles est en même temps l'équation de (N) en coordonnées ponctuelles polaires.

8. La géométrie infinitésimale de la droite variable prend une forme extrêmement simple par la méthode des représentants (différentiels) de M. HJELMSLEV¹, dont nous donnerons ici un résumé.

¹ J. HJELMSLEV, Lærebog i Geometri til Brug ved den polytekniske Læreanstalt, Copenhague 1918 (2. éd. 1923). — Les principes infinitésimaux sont exposés par M. HJELMSLEV dans sa

Soit t' une droite variable tendant vers une droite t , et soient P, Q, R, \dots , des points fixes sur t . Des droites invariables passant par P sont coupées en P_1, P_2, P_3, \dots par t' . Les segments PP_1, PP_2, \dots tendent vers zéro, mais les rapports $PP_1:PP_2, \dots$ ont évidemment des limites déterminées, puisqu'il en est ainsi pour les angles des triangles PP_1P_2, \dots . Représentons les segments infiniment petits PP_1, PP_2, \dots par des segments finis PP', PP'', \dots dont l'un, PP' p. ex., est choisi arbitrairement, les autres étant déterminés de manière que $PP'' : PP' = \lim (PP_2 : PP_1), \dots$. Cela posé, les points P', P'', \dots seront évidemment situés sur une droite p parallèle à t , appelée la directrice de P . Pour bien définir la variation de t' il suffit de connaître la limite du rapport $QQ_1 : PP_1$, où Q_1 est le point d'intersection de t' avec une droite donnée passant par Q . On construit le représentant QQ' de QQ_1 de sorte que $QQ' : PP' = \lim (QQ_1 : PP_1)$, et la directrice q de Q est déterminée. Il n'est pas difficile de montrer alors qu'à tout point R de t correspond une directrice r bien déterminée. Si qr est la distance mutuelle de q et r on a en effet $qr : pq = QR : PQ$. Sur t il existe un point T , dont la directrice est la droite t elle-même. T est le point caractéristique de t . Lorsque deux des directrices se confondent, il en est de même de toutes les directrices, et le point T est alors à l'infini. Si t et t' sont coupées en P et P_1 par une courbe donnée, la droite PP_1 tendra vers la tangente en P et le représentant du segment PP_1 sera découpé sur la tangente par t et p .

Considérons maintenant deux droites t et s qui varient simultanément de manière qu'à toute position de s corresponde une position déterminée de t , et supposons que les systèmes des directrices de s et t soient donnés. Soit P le point d'intersection de s et t , (P) le lieu de P . En général on peut alors construire la tangente de la courbe (P). Soit en effet P_1 un point de (P) voisin de P . Le représentant du segment PP_1 aura son extrémité P' sur les deux directrices de s et de t correspondant au point P . PP' est par conséquent tangente à (P). Il n'y a que dans le cas où P est le point caractéristique tant de s que de t , que la tangente reste indéterminée.

Soient enfin PQ un segment d'une droite variable, P_1Q_1 un segment voisin et supposons que PP_1 et QQ_1 aient des représentants déterminés PP' et QQ' . L'accroissement $P_1Q_1 - PQ$ aura alors un représentant égal à la différence entre les projections sur t des représentants QQ' et PP' .

10. Soit A un point fixe sur la courbe C , et posons

$$s(x) = \cup AT + TN.$$

On a

$$s'(x) = y(x), \quad (8)$$

pour une variation où T est le point caractéristique. Pour démontrer cette formule il suffit de trouver le représentant de l'accroissement infiniment petit $s(x + \mathcal{A}x) - s(x)$. Soient T_1 et N_1 les points voisins de T et N correspondant à l'amplitude $x + \mathcal{A}x$. On a alors

$$\begin{aligned} s(x + \mathcal{A}x) - s(x) &= \cup AT_1 + T_1N_1 - (\cup AT + TN) \\ &= \cup TT_1 + (T_1N_1 - TN). \end{aligned}$$

Le représentant de NN_1 est NM , dont la projection sur t est $NN' = ON$. TT_1 a le même représentant que sa projection sur t et ce représentant est égal au représentant de l'arc TT_1 . Le représentant de $s(x + \mathcal{A}x) - s(x)$ est par conséquent égal à $ON = y(x)$. Ce qui démontre la formule (8).

Soient t_1 et t_2 deux droites d'appui de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , T_1 et T_2 leurs points d'appui et N_1 et N_2 les pieds des perpendiculaires abaissées de O . Il résulte de la formule $s'(x) = y(x)$ que

$$N_1T_1 + \cup T_1T_2 + T_2N_2 = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx. \quad (9)$$

Posant $x_2 = x_1 + 2\pi$, on trouve pour la longueur P de C l'expression bien connue

$$P = \int_0^{2\pi} y(x) dx. \quad (10)$$

Par largeur de la courbe C dans la direction n on entend la distance numérique des deux droites d'appui perpendiculaires à n . La largeur \mathcal{A} est une fonction périodique $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ de l'angle $x = \alpha n$, de période π . De (10) on déduit alors la formule

$$P = \int_0^{\pi} \mathcal{A}(x) dx, \quad (11)$$

qui peut être aussi déduite d'un théorème plus général de CAUCHY.¹ La largeur moyenne de C est égale d'après (11) à $\frac{1}{\pi}P$, d'où il suit que $\mathcal{A}(x)$ prend la valeur $\frac{1}{\pi}P$ pour deux valeurs de x au moins, $\mathcal{A}(x)$ étant une fonction continue.

Remarquons encore qu'on peut démontrer la formule (10) directement quand C est un polygone. Soient (α, β) les coordonnées rectangulaires d'un sommet du polygone et, par conséquent, $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$ l'équation du sommet en coordonnées tangentielles. Pour démontrer la formule (9), il suffit de déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} y dx$, où x_1 et x_2 sont les amplitudes des côtés adjacents; dans ce cas $\cup T_1 T_2$ est égal à zéro. La formule (10), démontrée pour un polygone, s'étend à toute courbe convexe, celle-ci étant la limite d'une série de polygones.

11. L'aire F limitée par C est exprimée par la formule

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y^2 - y'^2) dx. \quad (12)$$

En effet $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y^2 dx$ est l'aire limitée par la podaire de C par rapport à O , et $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} y'^2 dx$ est l'aire engendrée par le segment $TN = y'$, quand t parcourt la courbe, c'est-à-dire l'aire limitée par C et la podaire.

Avec les mêmes notations que ci-dessus on a de plus

$$\triangle ON_1 T_1 + \text{secteur } OT_1 T_2 + \triangle OT_2 N_2 = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (y^2 - y'^2) dx, \quad (13)$$

où les signes des aires des triangles et du secteur sont conformes aux sens de parcours indiqués.

¹ Paris, comptes rendus, XIII (1841), p. 1060—65.

12. Par le raisonnement qui nous a conduits à la formule (12), nous pouvons calculer le volume d'un corps de révolution, dont la courbe méridienne est une courbe convexe C symétrique par rapport à l'axe α . Tout d'abord le volume limité par la surface podaire engendrée par la rotation de la courbe podaire (N)

de C autour de l'axe α est égal à $\frac{2}{3}\pi \int_0^\pi y^3 \sin x dx$. Il reste à calculer le vo-

lume limité par les deux surfaces de révolution. Les coordonnées rectangulaires des points N et T sont ($\alpha_1=y \cos x$, $\beta_1=y \sin x$) et ($\alpha_2=y \cos x - y' \sin x$, $\beta_2=y \sin x + y' \cos x$). Par un accroissement infiniment petit dx de x le segment $NT=y'$ engendre un secteur infinitésimal, dont l'aire est égale à $\frac{1}{2}y'^2 dx$. Le

centre de gravité de ce secteur a les coordonnées $\left(\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2\right)$. Le volume engendré par la rotation de ce secteur autour de α a donc la valeur $\pi y'^2(y \sin x + \frac{1}{3}y' \cos x) dx$, et la mesure du volume du corps de révolution en question est

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\frac{2}{3}y^3 \sin x - y y'^2 \sin x - \frac{1}{3}y'^3 \cos x \right) dx. \quad (14)$$

13. Donnons enfin une expression de l'aire F de la surface engendrée par la rotation de C :

$$F = 2\pi \int_0^\pi \left(y^2 - \frac{1}{2}y'^2 \right) \sin x dx. \quad (15)$$

Cette expression n'est qu'un cas particulier d'une formule valable pour toute surface convexe, que nous nous proposons maintenant d'établir.

Soient t un plan d'appui d'une surface convexe S , T son point d'appui et N le pied de la perpendiculaire à t abaissée d'un point fixe O situé à l'intérieur de S . Décrivons de O comme centre une sphère de rayon égal à l'unité, et soit enfin n le point d'intersection de cette sphère avec la demi-droite \vec{ON} . La surface de S peut être exprimée par l'intégrale

$$F = \int \left(ON^2 - \frac{1}{2}NT^2 \right) d\omega \quad (16)$$

$d\omega$ désignant l'élément de surface sphérique au point n , et l'intégration étant étendue à toute la sphère. Pour une surface de révolution on a $NT=y'$, d'où résulte la formule (15).

La formule (16) peut être déduite d'un théorème de CAUCHY¹ concernant l'aire d'une surface quelconque S . Soient p un point sur la sphère de centre O et de rayon 1, $d\omega$ l'élément de surface sphérique au point p et soit π un plan perpendiculaire à Op , le plan tangent en p p. ex. Soit Q la somme des valeurs numériques des projections sur π de tous les éléments de la surface S . L'aire F de S peut alors être exprimée par l'intégrale sphérique

$$F = \frac{1}{2\pi} \int Q d\omega. \tag{17}$$

Cette formule de Cauchy peut être vérifiée par un calcul direct dans le cas où

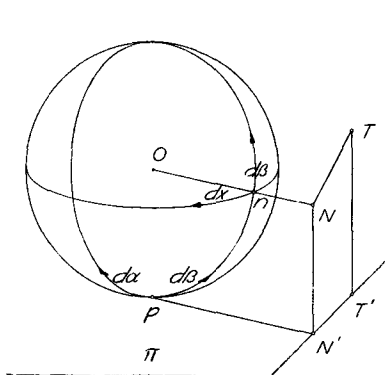


Fig. 2.

S est une portion de plan. Par conséquent elle est également valable pour toute surface, l'aire d'une surface quelconque étant la limite d'une certaine série de surfaces polyédriques.

Prenons maintenant pour S une surface convexe. Le contour de la projection de S sur le plan π est une courbe convexe C dont les droites d'appui sont les traces de ceux des plans d'appui de S qui sont perpendiculaires à π . Soient N' et T' les projections sur π de N et T . La somme Q des valeurs numériques des projections des éléments de S est égale au double de l'aire limitée par C . On a donc, par la formule (12),

¹ Paris, Comptes rendus, XIII (1841), p. 1060—66.

$$Q = \int_0^{2\pi} (pN'^2 - N'T'^2) dx,$$

où $pN' = ON$ et $N'T' = NT \cos \alpha$, α étant l'angle que fait TN avec le plan π .

$$Q = \int_0^{2\pi} (ON^2 - NT^2 \cos^2 \alpha) dx,$$

$$F = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int_0^{2\pi} (ON^2 - NT^2 \cos^2 \alpha) dx. \quad (18)$$

L'angle x que fait pN' avec un axe fixe du plan π peut être mesuré sur le grand cercle polaire de p , tandis que α peut être mesuré sur le grand cercle polaire de n . L'élément de surface sphérique $d\omega$ au point p peut être regardé comme le produit de deux éléments linéaires $d\alpha$ et $d\beta$, le premier mesuré sur le grand cercle polaire de n , le second sur le grand cercle pn . Envisageons dans l'intégrale triple (18) les éléments qui correspondent au même plan d'appui t , le point n étant fixe, tandis que p varie sur le grand cercle polaire de n . La somme de ces éléments est égale à

$$dx d\beta \int_0^{2\pi} (ON^2 - NT^2 \cos^2 \alpha) d\alpha = 2\pi dx d\beta \left(ON^2 - \frac{1}{2} NT^2 \right).$$

L'élément linéaire $d\beta$ sur le grand cercle pn peut être transporté du point p au point n , et le produit $dx d\beta$ constitue alors un élément de surface $d\omega$ correspondant au point n . L'intégrale (18) peut ainsi être mise sous la forme

$$F = \int \left(ON^2 - \frac{1}{2} NT^2 \right) d\omega. \quad (16)$$

Dans son mémoire «Volumen und Oberfläche»¹ MINKOWSKI a donné une expression de l'aire d'une surface convexe à courbure continue, d'où (16) peut être déduite par une intégration par parties. M. BLASCHKE² a donné à la formule de Minkowski la forme suivante

¹ HERMANN MINKOWSKI, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, p. 235-41.

² W. BLASCHKE, Kreis und Kugel p. 110 (Leipzig 1916).

$$F' = \int \left(H^2 - \frac{1}{2} \mathcal{A}H \right) d\omega,$$

où $H=ON$ est une fonction du point n de la sphère, et où $\mathcal{A}H$ représente le paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami. Un calcul direct permet de vérifier que $\mathcal{A}H = NT^2$.

III. Le problème des isopérimètres.

14. Le problème isopérimétrique proprement dit consiste à déterminer parmi toutes les courbes planes fermées de périmètre donné, celle qui renferme la plus grande aire.

Il est bien connu que c'est le cercle qui fournit la solution du problème. Soient P le périmètre, F' l'aire d'une courbe fermée. L'aire du cercle isopérimétrique est égale à $\frac{1}{4\pi} P^2$, et la propriété maximante du cercle peut donc être exprimée par l'inégalité isopérimétrique classique

$$\frac{1}{4\pi} P^2 - F' \geq 0, \tag{19}$$

dans laquelle le signe d'égalité ne vaut que pour le cercle. La quantité $\frac{1}{4\pi} P^2 - F'$ sera appelée dans ce qui suit le déficit isopérimétrique de la figure, et nous nous proposons de démontrer que le déficit est effectivement positif, c'est-à-dire qu'il est plus grand qu'une quantité positive, géométriquement déterminée par la figure même. Seulement dans le cas du cercle cette quantité s'annule. En d'autres termes, nous nous proposons d'établir une inégalité isopérimétrique améliorée.

Il suffit de considérer les figures convexes. En effet, le déficit d'une figure nonconvexe A est plus grand que celui de la figure convexe la plus petite qui renferme A en son intérieur. Faisons donc usage des formules (10) et (12) pour le périmètre et pour l'aire d'une courbe convexe:

$$P = \int_0^{2\pi} y dx, \tag{10}$$

$$I' = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y^2 - y'^2) dx. \quad (12)$$

Il faut se rappeler que les coordonnées (x, y) représentent une droite, tandis qu'un point est représenté par une équation de la forme $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$, où (α, β) désignent les coordonnées rectangulaires du point. Un cercle de rayon r , dont le centre a les coordonnées (α, β) a pour équation $y = r + \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Le problème isopérimétrique de trouver le maximum de l'intégrale I' (ou bien le minimum de $-I'$) pour une valeur donnée de P conduit au problème libre de minimiser l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left(ry - \frac{1}{2} (y^2 - y'^2) \right) dx.$$

Mais ce problème n'a aucune solution, car la valeur de cette intégrale prise sur un cercle de rayon R est égale à $2\pi rR - \pi R^2$, quantité qui ne présente pas de minimum. Par conséquent il est nécessaire de restreindre la nature des courbes pour lesquelles se pose le problème. Nous nous proposons alors le problème suivant.

Étant données deux droites $t_1, (x_1, y_1)$ et $t_2, (x_2, y_2)$, mener un arc convexe dont les extrémités soient situées sur t_1 et t_2 de manière que l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(ry - \frac{1}{2} (y^2 - y'^2) \right) dx \quad (20)$$

prise sur cette courbe soit minimum.

Supposons $x_2 > x_1$ et y_1 et y_2 positifs. Le sens de la convexité de l'arc est défini par la condition que $x_1 < x < x_2$ pour toute droite d'appui de l'arc. Nous n'exigeons pas que t_1 et t_2 soient des tangentes de la courbe, mais seulement qu'elles soient des droites d'appui. L'arc est engendré par la droite d'appui de sorte que ses points limites en forment des prolongements tangentiels de l'arc, dont l'équation est $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Rappelons aussi la signification géométrique des intégrales

$$P_{12} = \int_{x_1}^{x_2} y dx - N_1 T_1 + \cup T_1 T_2 + T_2 N_2 \quad (9)$$

$$F_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (y^2 - y'^2) dx = \triangle ON_1T_1 + \text{secteur } OT_1T_2 + \triangle OT_2N_2. \quad (13)$$

15. Les extrémales du problème sont déterminées par l'équation d'Euler-Lagrange

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = r - y - y'' = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$y = r + \alpha \cos x + \beta \sin x. \quad (21)$$

Les extrémales sont donc des cercles de rayon r .

1°. Si $x_2 - x_1 < \pi$ il existe un cercle de rayon r et un seul tangent à t_1 et t_2 conformément aux conditions aux limites. Ce cercle est divisé par les points de contact en deux arcs, dont l'un a une courbure totale égale à $x_2 - x_1$. C'est cet arc qui fournit la solution du problème, comme nous le verrons ci-dessous.

2°. Si $x_2 - x_1 = \pi$, de sorte que t_1 est parallèle à t_2 , il n'existe aucun cercle tangent à t_1 et t_2 à moins que $y_1 + y_2 = 2r$, et dans ce cas il en existe une infinité. Si, dans ce cas, le système de coordonnées est choisi de manière que $x_1 = 0$, $y_1 = r$ et $x_2 = \pi$, $y_2 = r$, l'équation de l'extrémale a la forme $y = r + \beta \sin x$, où β est un paramètre arbitraire. Ce sont les demi-cercles correspondant à $0 \leq x \leq \pi$ que l'on doit considérer comme les arcs d'extrémale du problème.

3°. Si $\pi < x_2 - x_1 < 2\pi$ il existe comme dans le premier cas un seul cercle du rayon r tangent à t_1 et t_2 . Mais l'arc d'extrémale en question, dont la courbure totale est $x_2 - x_1 > \pi$, ne peut pas minimiser l'intégrale (20). En effet, tous les cercles de rayon r tangents à t_1 , (x_1, y_1) sont aussi tangents à la droite t'_1 , $(x_1 + \pi, 2r - y_1)$ qui est parallèle à t_1 à la distance $2r$. t'_1 est la tangente conjuguée de t_1 ; elle est située entre t_1 et t_2 ($x_1 < x_1 + \pi < x_2$), et l'arc d'extrémale ne satisfait pas à la condition de Jacobi. A l'aide de la signification géométrique des intégrales (9) et (13) on voit aussi immédiatement que la valeur de l'intégrale (20) sur un cercle de rayon R_1 tangent à t_1 et t_2 , tend vers $-\infty$, quand $R \rightarrow \infty$.

16. Pour vérifier que les arcs de cercle de rayon r tangents à t_1 et t_2 constituent le minimum demandé dans les cas 1° et 2°, utilisons la méthode de Weierstrass en construisant un champ d'extrémales. Ce champ sera formé

par les demi-cercles de rayon r ($x_1 \leq x \leq x_1 + \pi$) qui sont tangents à t_1 et à la droite t'_1 parallèle à t_1 à la distance $2r$. Ces demi-cercles constituent évidemment un champ de Weierstrass, puisqu'il existe un seul de ces arcs qui soit tangent à une droite (x, y) donnée, où $x_1 < x < x_1 + \pi$.

Posons pour abrégier $x_1 = 0$. L'équation d'une extrémale du champ est alors

$$y = r + (y_1 - r) \cos x + \beta \sin x, \quad (22)$$

d'où

$$y' = -(y_1 - r) \sin x + \beta \cos x.$$

L'extrémale tangente à une droite $t, (x, y)$ donnée est déterminée par

$$\beta = \frac{y - r - (y_1 - r) \cos x}{\sin x}.$$

En substituant cette valeur à β dans l'expression de y' , on trouve la »pente» $p(x, y)$ de cette extrémale en fonction de (x, y) :

$$p(x, y) = \frac{(y - r) \cos x - (y_1 - r)}{\sin x}. \quad (23)$$

D'après (7) $p(x, y)$ représente la distance du pied de la perpendiculaire à t abaissée de l'origine O au point de contact de t et de l'extrémale.

Considérons maintenant un arc de comparaison $C, y = f(x)$ ($0 \leq x \leq x_2$) entre t_1 et t_2 . Toute droite d'appui t de C est tangente à un seul arc d'extrémale

du champ construit. La différence entre l'intégrale $\int_0^{x_2} H(x, y, y') dx$ étendue à C et la même intégrale étendue à l'extrémale E tangente à t_1 et t_2 , c'est-à-dire la variation totale, peut donc être exprimée par l'intégrale de Weierstrass

$$\int E(x, y, p, y') dx,$$

où

$$E(x, y, p, y') = H(x, y, y') - H(x, y, p) - (y' - p) H_{y'}(x, y, p)$$

$$E(x, y, p, y') = \frac{1}{2} (y' - p)^2. \quad (24)$$

Ici y' désigne la dérivée de $y=f(x)$ et p la pente (23) de l'extrémale tangente à t_1 et t , (x, y) . La variation totale

$$\int_{x_1^C}^{x_2} H(x, y, y') - \int_{x_1^E}^{x_2} H(x, y, y') = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (y' - p)^2 dx \quad (25)$$

est évidemment positive, pour toute courbe de comparaison, sauf lorsque $y'(x)$ est identique à $p(x, y)$, c'est-à-dire quand la courbe coïncide avec l'extrémale E , ou bien, dans le 2° cas, avec l'une des extrémales (en nombre infini) du problème. Ces extrémales fournissent donc le minimum de l'intégrale (20), et on voit que dans le 2° cas la valeur de l'intégrale est la même sur toutes les extrémales, savoir $\frac{1}{2} \pi r^2$.

17. Il est remarquable que l'intégrale de Weierstrass $\int E(x, y, p, y') dx$ a, grâce aux coordonnées tangentielles utilisées ici, une signification géométrique très simple. Soient en effet T le point d'appui de la droite d'appui génératrice t de C et S le point de contact de t avec l'extrémale du champ tangente à t ; on a alors $y' - p = ST$. L'aire infinitésimale engendrée par ST pour un accroissement infiniment petit dx de x est égale à $\frac{1}{2} ST^2 dx = \frac{1}{2} (y' - p)^2 dx$. Quand t parcourt l'arc C de t_1 à t_2 le point S décrit une courbe (S) aboutissant aux droites t_1 et t_2 . L'intégrale $\int E(x, y, p, y') dx$ est par conséquent égale à l'aire limitée par $C, (S), t_1$ et t_2 .

18. Evaluons maintenant la valeur de l'intégrale minimale. En posant $x_1=0$ et $x_2=u$ l'équation d'une extrémale tangente à $(0, y_1)$ s'écrit

$$y = r + (y_1 - r) \cos x + \beta \sin x. \quad (26)$$

Pour que le cercle soit aussi tangent à (u, y_2) il faut que

$$y_2 = r + (y_1 - r) \cos u + \beta \sin u. \quad (27)$$

Si $u \neq \pi$ la valeur de β est déterminée par cette équation. En substituant à β la valeur trouvée l'équation (26) devient

$$y = r + \frac{(y_2 - r) \sin x + (y_1 - r) \sin (u - x)}{\sin u},$$

d'où

$$y' = \frac{(y_2 - r) \cos x - (y_1 - r) \cos (u - x)}{\sin u}.$$

Sur ce cercle les intégrales P_{12} et F_{12} prennent les valeurs P_0 et F_0 suivantes

$$P_0 = -2r \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) + (y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2}, \quad (28)$$

$$F_0 = -r^2 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) - \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2 \cot u + y_1 y_2 \cot \frac{u}{2}, \quad (29)$$

d'où

$$rP_0 - F_0 = -r^2 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) + r(y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2 \cot u - y_1 y_2 \cot \frac{u}{2}. \quad (30)$$

1°. $u < \pi$. $rP_0 - F_0$ est le minimum de l'intégrale $rP_{12} - F_{12}$, de sorte que l'inégalité

$$rP_{12} - F_{12} \geq rP_0 - F_0 \quad (31)$$

est vraie pour toute courbe de comparaison.

2°. $u = \pi$. Dans ce cas l'équation (27) entraîne la condition aux limites

$$y_1 + y_2 = 2r$$

indiquée ci-dessus. A cette condition la valeur de β reste indéterminée, et on trouve pour P_0 et F_0 les valeurs

$$P_0 = \pi r + 2\beta,$$

$$F_0 = \frac{1}{2} \pi r^2 + 2r\beta,$$

$$rP_0 - F_0 = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

D'où il résulte l'inégalité

$$rP_{12} - F_{12} \geq \frac{1}{2} \pi r^2. \quad (32)$$

3°. $\pi < u \leq 2\pi$. Dans ce cas la quantité $rP_0 - F_0$ ne représente ni le minimum absolu ni un minimum relatif de $rP_{12} - F_{12}$ dans le sens ordinaire. Prenons p. ex. pour courbe de comparaison un arc de cercle de rayon R tangent à t_1 et t_2 . Les valeurs de P_{12} et F_{12} sur ce cercle s'obtiennent en substituant R à r dans (28) et (29). On trouve alors $rP_{12} - F_{12} - (rP_0 - F_0) = (R - r)^2 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right)$.

Mais comme dans ce cas $\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} < 0$, on voit que par rapport aux cercles considérés, tangents à t_1 et t_2 , l'extrémale fournit le maximum de $rP_{12} - F_{12}$.

Néanmoins on peut indiquer une classe de courbes relativement auxquelles l'extrémale E fournit un minimum. Menons à E une série de tangentes $t', t'', \dots, t^{(n)}$ correspondant aux valeurs $x', x'', \dots, x^{(n)}$ de x de manière que $x' < x'' < \dots < x^{(n)} < u$ et que $x' \leq \pi, x'' - x' \leq \pi, \dots, u - x^{(n)} \leq \pi$. Nous considérons des courbes C pour lesquelles $t_1, t', t'', \dots, t^{(n)}, t_2$ sont des droites d'appui. Les arcs de cercles compris entre deux tangentes consécutives sont minimants relativement aux arcs correspondants des courbes C ; c'est une conséquence des résultats trouvés dans les cas 1° et 2°. Pour chacun de ces arcs subsiste une inégalité de la forme (31) ou (32), et par addition de toutes ces inégalités on voit que l'inégalité (31) subsiste pour l'arc total C en question. Les intégrales P_{12} et F_{12} prises sur cet arc sont en effet les sommes algébriques des quantités analogues correspondant aux arcs partiels.

Considérons maintenant en particulier le cas où $u = 2\pi$. Dans ce cas, $P_0 = 2\pi r$, $F_0 = \pi r^2$ et $rP_0 - F_0 = \pi r^2$. Quelles sont les courbes convexes fermées de périmètre P et de superficie F par rapport auxquelles le cercle E de rayon r rend minimum la quantité $rP - F$? Pour bien le voir menons à E soit deux tangentes parallèles soit trois tangentes formant un triangle circonscrit à E . Soit C une courbe inscrite dans ce triangle ou dans la bande limitée par les tangentes parallèles. Dans le dernier cas la courbe a dans une certaine direction la largeur $2r$. Les résultats trouvés dans les cas 1° et 2° sont alors applicables aux arcs partiels de cette courbe, de sorte qu'on a l'inégalité

$$rP - F \geq \pi r^2. \tag{33}$$

L'ensemble des triangles circonscrits à E n'est pas complet, mais en ajoutant les bandes parallèles circonscrites qui sont des figures limites de ces triangles, nous obtenons un ensemble complet.

Nous avons donc le théorème:

Soient E un cercle de rayon r , (T) l'ensemble complet des triangles et des bandes parallèles T circonscrites à E . Soit enfin (C) l'ensemble des courbes convexes fermées qui peuvent être inscrites dans une des figures T . Entre le périmètre P et l'aire F d'une telle courbe C on a l'inégalité:

$$rP - F \geq \pi r^2. \quad (33)$$

Le signe d'égalité est applicable au cercle E lui-même ainsi qu'à une figure composée de deux demi-cercles de rayon r et d'un rectangle, dont deux côtés opposés ont la longueur $2r$ tandis que la longueur des deux autres est arbitraire.

19. Revenons maintenant au problème isopérimétrique.

Etant données deux droites t_1 et t_2 , on se propose de mener un arc convexe dont les extrémités soient situées sur t_1 et t_2 de manière que l'intégrale

$$P_{12} = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx \quad (9)$$

ait une valeur donnée et que l'intégrale

$$F_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (y^2 - y'^2) \, dx \quad (13)$$

ait sa plus grande valeur.

1°. $x_2 - x_1 = u < \pi$. Le rayon r du cercle extrémal du problème d'extrémum libre, savoir le problème de minimiser l'intégrale $rP_{12} - F_{12}$, doit être tel que P_{12} ait sur le cercle la valeur donnée. De la formule (28) on tire, en posant $P_0 = P$,

$$r_0 = \frac{(y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2} - P}{2 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right)}, \quad (34)$$

où $\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} > 0$. C'est-à-dire, qu'il existe une extrémale correspondant à la valeur $P_{12} = P$ à condition que $P < (y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2}$.

Si M est le point d'intersection de t_1 et t_2 , on a

$$N_1M + MN_2 = (y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad (35)$$

ce qu'on voit facilement par un raisonnement directe sur la figure, ou en posant $r=0$ dans la formule (28). Le cercle est alors réduit au point M lui-même. De (29) on déduit de la même manière

$$\triangle ON_1M + \triangle OMN_2 = y_1y_2 \cot \frac{u}{2} - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 \cot u. \quad (36)$$

En posant

$$P' = N_1M + MN_2,$$

$$F' = \triangle ON_1M + \triangle OMN_2,$$

la condition trouvée pour l'existence de l'extrémale est que

$$P < P'.$$

En substituant la valeur trouvée de r_0 (34) dans l'inégalité (31) on obtient l'inégalité isopérimétrique du problème, qui peut être mise sous la forme

$$\frac{(P' - P)^2}{4 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right)} \leq F' - F. \quad (37)$$

Soient T_1 et T_2 les extrémités de l'arc C de comparaison. Alors $P' - P = T_1M + MT_2 - \cup T_1T_2$, et $F' - F$ est égal à l'aire de la figure non-convexe $T_1MT_2T_1$ limitée par t_1 , t_2 et l'arc C . Le résultat peut donc être exprimé par le théorème suivant.

Soient LMN un angle convexe de mesure $\pi - u$ et $C = \cup LN$ un arc convexe mené de l'un des côtés de l'angle à l'autre et tournant sa convexité vers le sommet M . En désignant par p la quantité $p = LM + MN - \cup LN$ et par f l'aire de la figure non-convexe $LMNL$, on a l'inégalité

$$\frac{p^2}{4 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right)} \leq f. \quad (38)$$

Le signe d'égalité n'est valable que pour les arcs de cercle tangents aux côtés de l'angle.

Une conséquence du résultat trouvé au § 4 est que l'inégalité isopérimétrique (37) ou (38) ne peut pas être améliorée. En effet, l'intégrale $P_{12} = P_0$ (28) prise sur le cercle minimant de l'extrémum libre

$$P_0 = -2r \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) + (y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2} \quad (28)$$

est une fonction décroissante du multiplicateur r d'Euler-Lagrange. On voit aussi que la fonction $\psi(r)$ du § 4, qui a ici la valeur

$$\psi(r) = -r^2 \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \right) + r \left((y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2} - P \right) + \frac{1}{2} \left((y_1 + y_2)^2 \cot u - y_1 y_2 \cot \frac{u}{2} \right),$$

a sa plus grande valeur pour la valeur (34) de r .

2°. $u = \pi$. $t_1 \neq t_2$. $y_1 + y_2 = 2r$. Le problème libre a une infinité d'extrémales, qui sont des demi-cercles d'équation $y = r + \beta \sin x$, β étant arbitraire. β peut être déterminée de façon que l'intégrale P_{12} ait une valeur quelconque donnée P ,

$$P = \pi r + 2\beta.$$

L'inégalité (32)

$$rP - F \geq \frac{\pi}{2} r^2$$

est l'inégalité isopérimétrique de ce problème. Elle ne peut pas être améliorée puisque r ne peut avoir qu'une seule valeur, savoir la moitié de la distance des deux droites parallèles données, t_1 et t_2 .

3°. $\pi < u < 2\pi$. $\operatorname{tg} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} < 0$. Supposons, comme auparavant, que y_1 et y_2 soient positifs. Soit M le point d'intersection de t_1 et t_2 . Dans ces conditions, des quantités

$$N_1 M + M N_2 = (y_1 + y_2) \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

$$\triangle O N_1 M + \triangle O M N_2 = y_1 y_2 \cot \frac{u}{2} - \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2 \cot u,$$

qui peuvent être déduites des formules (28) et (29) pour $r=0$, la première est

négative. Désignons leurs valeurs respectivement par $-P'$ et $-F'$. (28), (29) et (30) peuvent alors être écrites sous la forme:

$$P_0 = 2r \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - P'$$

$$F_0 = r^2 \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - F'$$

$$rP_0 - F_0 = r^2 \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - rP' + F'.$$

Le rayon r_0 de l'extrémale du problème libre peut être déterminé de façon que P_0 ait une valeur P donnée d'avance; pourvu que $P + P' > 0$, on a

$$r_0 = \frac{P + P'}{2 \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right)}. \tag{39}$$

Pour cette valeur de r ,

$$r_0 P_0 - F_0 = \frac{(P + P')^2}{4 \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right)} - \frac{(P + P')P'}{2 \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right)} + F'.$$

Menons maintenant un arc convexe C de t_1 à t_2 , sur lequel l'intégrale P_{12} ait la valeur donnée P , et désignons par F la valeur de F_{12} . Soit $t'_1 \neq t_1$, $t'_2 \neq t_2$ deux droites d'appui de C , correspondant respectivement aux valeurs π et $u - \pi$ de x . Soit t une droite d'appui entre t'_2 et t'_1 correspondant à une valeur de x telle que $u - \pi \leq x \leq \pi$. Il existe un cercle tangent à t_1 , t_2 et t ; soit r le rayon de ce cercle. Sur celui des deux arcs de ce cercle, dont la courbure totale est égale à u , l'intégrale $rP_{12} - F_{12}$ aura une valeur plus petite que la valeur de l'intégrale prise sur C , comme nous l'avons vu ci-dessus § 18, 3°. On a par conséquent l'inégalité

$$rP - F \geq rP_0 - F_0 = r^2 \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) - rP' + F',$$

que l'on peut écrire de la manière suivante:

$$\frac{(P+P')^2}{4\left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)} - (F+F') \geq \frac{\left\{ (P+P') - r \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \right\}^2}{4\left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)}. \quad (40)$$

Cette inégalité est valable tout au moins pour toutes les valeurs de r , qui correspondent aux droites d'appui t entre t'_2 et t'_1 , celles-ci incluses. C'est bien l'inégalité isopérimétrique améliorée du problème. On voit que le second membre s'annule pour la valeur $r=r_0$ (39), qui est bien ainsi le rayon du cercle «isopérimétrique». Mais ce cercle ne se trouve pas nécessairement parmi les cercles susdits.

$P+P'$ est le périmètre et $F+F'$ est l'aire de la figure convexe limitée par t_1 , t_2 et l'arc C . Le résultat trouvé peut donc être exprimé par le théorème suivant.

Soient LMN un angle convexe de mesure $u-\pi$ et $C=\cup LN$ un arc convexe reliant l'un des côtés de l'angle à l'autre et tournant sa concavité vers le sommet M . Si l'on désigne par p le périmètre et par f l'aire de la figure convexe $LMNL$, on a l'inégalité

$$\frac{p^2}{4\left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)} - f \geq 0. \quad (41)$$

Le signe d'égalité n'est valable que pour les arcs de cercle tangents aux côtés de l'angle. Pour un arc donné C on peut écrire l'inégalité améliorée

$$\frac{p^2}{4\left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)} - f \geq \frac{\left\{ p - r \left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \right\}^2}{4\left(\frac{u}{2} - \operatorname{tg} \frac{u}{2}\right)},$$

où r est le rayon du cercle inscrit dans un triangle limité par les côtés LM et MN de l'angle et par une droite d'appui arbitraire de l'arc donné C .

20. Envisageons maintenant le problème isopérimétrique dans le cas où $u=2\pi$.

Le problème consiste à déterminer, parmi toutes les courbes convexes fermées de périmètre donné, celle qui a la plus grande superficie.

Soit C une courbe convexe fermée quelconque ayant le périmètre P et l'aire F . Désignons par T soit un triangle, soit une bande, circonscrit à C , et

soit r le rayon du cercle S inscrit dans T . Par suite du théorème p. 146 on a l'inégalité

$$rP - F \geq \pi r^2,$$

ou encore,

$$\frac{1}{4\pi} P^2 - F \geq \frac{1}{4\pi} (P - 2\pi r)^2. \quad (42)$$

L'ensemble des triangles et des bandes circonscrites à C est fermé. On peut démontrer sans difficulté que le plus grand des cercles S est identique au plus petit cercle qui renferme C , et que le plus petit des cercles S est identique au plus grand cercle contenu à l'intérieur de C . Par conséquent il existe parmi les cercles S des cercles isopérimétriques à C . Soient R et r les valeurs extrêmes du rayon du cercle S . On a alors

$$\frac{1}{4\pi} P^2 - F \geq \frac{\pi}{4} (R - r)^2. \quad (43)$$

En effet, le déficit $\frac{1}{4\pi} P^2 - F$ est plus grand que les deux quantités $\frac{1}{4\pi} (2\pi R - P)^2$, et $\frac{1}{4\pi} (P - 2\pi r)^2$ et, par conséquent, que $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\pi R - P + P - 2\pi r}{2} \right)^2$.

De l'inégalité (43) on déduit ainsi que le déficit $\frac{1}{4\pi} P^2 - F$ ne peut s'annuler que dans le cas où $R = r$, c'est-à-dire lorsque C est un cercle. Le problème isopérimétrique est donc complètement résolu par l'inégalité (43), et cette inégalité isopérimétrique a été obtenue en considérant seulement l'extrémum libre, sans avoir recours aux méthodes spécialement établies pour résoudre les problèmes isopérimétriques.

Ce qui est le plus important dans cette recherche, c'est la démonstration de l'existence d'une courbe minimante dans les cas 1° et 2° de l'extrémum libre, démonstration faite à l'aide du théorème fondamental de Weierstrass. Mais l'intégrale de Weierstrass a, nous l'avons vu, une signification géométrique très simple, ce qui nous permet de nous libérer tout à fait du calcul des variations et de donner une démonstration purement géométrique de l'inégalité (42).

21. La figure $T_1 T_2 T_3 T_4 T_1$ représente une courbe convexe fermée C avec un triangle circonscrit \mathcal{A} . O est le centre du cercle inscrit dans le triangle \mathcal{A} ,

N_1 et N_2 sont ses points de contact avec les côtés t_1 et t_2 du triangle. Soient O l'origine et ON l'axe polaire d'un système de coordonnées tangentiellles polaires, et posons comme auparavant

$$P_{12} = N_1 T_1 + \cup T_1 T T_2 + T_2 N_2 = \int_0^u y dx$$

$$F_{12} = \triangle ON_1 T_1 + \text{secteur } OT_1 T_2 + \triangle OT_2 N_2.$$

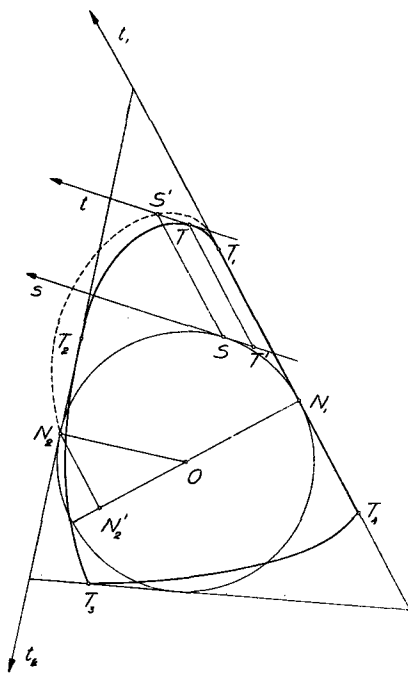


Fig. 3.

Soient $t, (x, y)$ une droite d'appui de C et $s, (x, r)$ la tangente au cercle parallèle à t , T et S leurs points d'appui respectifs. Par S menons la droite SS' parallèle à t_1 coupant t en S' . Entre les ordonnées β et β' de S et S' on a la relation

$$(\beta' - \beta) \sin x = y - r. \tag{44}$$

Quand la droite t se déplace de t_1 à t_2 le point S' décrit un arc (S') dont T_1 et N_2 sont les extrémités.

Pour les aires des secteurs $ON_1T_1S'N_2O$ et ON_1SN_2O on a les expressions

$$\text{sect. } ON_1T_1S'N_2O + \triangle ON_2N'_2 = \int_0^u \beta' d\sigma \sin x,$$

$$\text{sect. } ON_1SN_2O + \triangle ON_2N'_2 = \int_0^u \beta d\sigma \sin x,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément linéaire du cercle, et où N'_2 est la projection de N_2 sur ON_1 . La soustraction de ces expressions donne, d'après (44),

$$\begin{aligned} \text{sect. } ON_1T_1S'N_2O &= \text{sect. } ON_1SN_2O + \int (y-r) d\sigma \\ &= \frac{1}{2}r^2u + rP_{12} - r^2u \\ &= rP_{12} - \frac{1}{2}r^2u. \end{aligned}$$

L'arc (S') est situé à l'extérieur de la courbe C . On voit par conséquent que

$$rP_{12} - \frac{1}{2}r^2u \geq F_{12}.$$

Par addition de cette inégalité et des inégalités analogues correspondant aux autres arcs de C on obtient l'inégalité isopérimétrique

$$rP - \pi r^2 \geq F.$$

Pour une bande circonscrite, les constructions seraient les mêmes que pour un triangle.

L'aire limitée par (S') et C est égale à $rP - F - \pi r^2$, qui prend pour $r = \frac{P}{2\pi}$ sa valeur maximum $\frac{1}{4\pi}P^2 - F$, et cette valeur de r peut être obtenue pour une infinité des figures en question. D'où le théorème:

C étant une courbe convexe fermée arbitraire, on peut construire une autre

courbe S renfermant C de sorte que l'aire limitée par C et S soit égale au déficit isopérimétrique de C .

Ajoutons que la construction susdite peut être renversée pour ainsi dire. Menons en effet TT' parallèle à t_1 , T' étant situé sur S . Le point T' décrira un arc (T') situé en dehors du cercle. L'aire limitée par le cercle et la courbe fermée composée des arcs (T') aura la même valeur $rP - F - \pi r^2$ que l'aire ci-dessus.

L'inégalité (43) a été démontrée pour la première fois par des considérations tout élémentaires (A). Une autre démonstration élémentaire (B) à l'aide des triangles circonscrits est fondée sur la considération de la série linéaire de courbes convexes déterminée par la courbe C et le cercle inscrit au triangle.¹ L'aire de C est considérée ici comme la différence entre le triangle et les trois secteurs non convexes, limités par C et les côtés du triangle. C'est au géomètre danois M. C. CRONE² et à FROBENIUS³ que cette idée est due. La représentation géométrique du déficit isopérimétrique est aussi donnée par l'auteur (B). Ces démonstrations sont d'ailleurs conformes à la construction appliquée ici.

IV. L'aire mixte de deux ovales.

22. Pour l'étude géométrique du problème des isopérimètres M. HERMAN BRUNN a introduit la notion de série linéaire d'ovales.⁴ Soient C et C_1 deux ovales, c.-à-d. deux courbes convexes fermées, et soient $y = y(x)$ et $y = z(x)$ les équations respectives de C et de C_1 dans un système de coordonnées tangentielles polaires. Nous construisons une nouvelle courbe d'équation $y = \alpha y(x) + \alpha_1 z(x)$, où α et α_1 sont des nombres positifs, avec $\alpha + \alpha_1 = 1$. Cette courbe est engendrée par une droite d'appui qui est parallèle aux droites d'appui (x, y) et (x, z) de C et C_1 et qui divise la distance entre ces droites dans le rapport $\alpha_1 : \alpha$. On peut démontrer que la nouvelle courbe est également convexe. Lorsque α varie ($0 \leq \alpha \leq 1$), la courbe engendre «une série linéaire». L'aire de la courbe, donnée par la formule (12), a pour valeur

¹ Une démonstration de la même nature a été donnée par W. BLASCHKE: Abh. aus dem Math. Seminar, Hamburg t. 1, p. 206—09.

² C. CRONE. Om Prismaloidens Volumer. Nyt. Tidsskr. f. Math. (Copenhague) B. 1904, p. 73—75.

³ C. FROBENIUS, Sitzungsberichte, Berlin 1915, p. 387—404.

⁴ HERMAN BRUNN, Ovale und Eiflächen. Thèse. Münschen 1887.

$$\alpha^2 F + 2 \alpha \alpha_1 M + \alpha_1^2 F_1 \tag{45}$$

où F et F_1 sont les aires de C et C_1 , tandis que M est exprimée par l'intégrale

$$M = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (yz - y'z') dx, \tag{46}$$

qui a été nommée par Minkowski «l'aire mixte» de C et C_1 . La valeur de M n'est pas altérée par une translation de C ou de C_1 . On doit à M. Brunn et à Minkowski¹ l'inégalité

$$M^2 \geq FF_1, \tag{47}$$

où le signe d'égalité ne s'applique que lorsque C et C_1 sont homothétiques.

Lorsque C_1 est un cercle de rayon 1, on a $F_1 = \pi$ et $2M = P$, où P désigne le périmètre de C . L'inégalité (47) est, dans ce cas, identique à l'inégalité isopérimétrique du cercle.

On peut donner une démonstration de l'inégalité (47) par la résolution du problème isopérimétrique suivant:

Etant donnée une courbe convexe fermée C_1 d'équation $y = z(x)$. Déterminer une courbe convexe C , $y = y(x)$ de sorte que l'aire de C

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (y^2 - y'^2) dx$$

soit maximum, tandis que l'intégrale

$$M = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (yz - y'z') dx$$

a une valeur donnée.

Ce problème isopérimétrique conduit à un problème d'extrémum libre:

Etant données la courbe convexe fermée C_1 , $y = z(x)$ et deux droites t_1 , $(0, y_1)$ et t_2 , (u, y_2) , et posant

¹ HERMANN MINKOWSKI, Ges. Werke, t. II.

$$M(u) = \frac{1}{2} \int_0^u (yz - y'z') dx,$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_0^u (y^2 - y'^2) dx,$$

mener un arc de courbe convexe de t_1 à t_2 de manière que l'intégrale

$$2\lambda M(u) - F(u) = \int_0^u \left(\lambda(yz - y'z') - \frac{1}{2}(y^2 - y'^2) \right) dx, \quad (48)$$

étendue à cet arc, ait sa valeur minimale.

L'équation différentielle d'Euler correspondante à l'intégrale (48) est

$$y'' + y = \lambda(z'' + z), \quad (49)$$

dont l'intégrale complète est

$$y = \lambda z + \alpha \cos x + \beta \sin x. \quad (50)$$

On voit que les extrémales du problème sont des courbes homothétiques à la courbe donnée C_1 , $y = z(x)$ dans le rapport $\lambda : 1$.

C_1 est divisée par les deux droites d'appui parallèles à t_1 et t_2 en deux arcs. Envisageons celui de ces arcs qui correspond aux valeurs $0 \leq x \leq u$ de x , et construisons un arc E homothétique à cet arc dans le rapport $\lambda : 1$.

Si $u \neq \pi$ on peut déplacer E par translation de façon que les extrémités de l'arc soient situées sur t_1 et t_2 . Si au contraire $u = \pi$, cette construction n'est pas possible, à moins que le rapport de la distance entre t_1 et t_2 à la distance des droites d'appui parallèles de C_1 ne soit égal à $\lambda : 1$. A cette condition la construction a une infinité de solutions.

Les extrémales pour lesquelles t_1 est une droite d'appui ont pour équation

$$y = \lambda z + (y_1 - \lambda z_1) \cos x + \beta \sin x,$$

où $z_1 = z(0)$. Ces arcs constituent un champ de Weierstrass. Outre t_1 , ces extrémales ont encore en commun une droite d'appui parallèle à t_1 , c'est-à-dire que dans le 1^{er} cas où $u < \pi$, et aussi à la condition sus-dite, dans le 2^o cas où $u = \pi$,

on peut construire, pour toute droite d'appui d'une courbe de comparaison quelconque, un arc d'extrémale du champ qui s'appuie sur cette droite. L'intégrale

de Weierstrass $\int_0^u E(x, y, p, y') dx$ a pour valeur

$$\frac{1}{2} \int_0^u (y' - p)^2 dx,$$

d'où résulte que l'extrémale E construite est vraiment la courbe minimante.

L'intégrale $2\lambda M - F$ a sur E la valeur $\frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^u (z^2 - z'^2) dx = \lambda^2 F_1(u)$. On a par

conséquent l'inégalité

$$2\lambda M(u) - F(u) - \lambda^2 F_1(u) \geq 0, \tag{51}$$

pour toute courbe de comparaison, avec $u \leq \pi$.

On voit que tout se passe comme dans le problème des isopérimètres. L'intégrale de Weierstrass peut être interprétée de la même manière en substituant au cercles minimants les courbes homothétiques à C_1 dans le rapport λ .

Soient maintenant C et C_1 deux ovales quelconques et \mathcal{A} et \mathcal{A}_1 deux triangles, ou deux bandes parallèles, homothétiques, circonscrits à C et C_1 respectivement. Soit λ le rapport de similitude de \mathcal{A} et \mathcal{A}_1 . Pour chacune des paires d'arcs homologues de C et C_1 limités par les points de contact avec \mathcal{A} et \mathcal{A}_1 on aura donc une inégalité de la forme (51). Par addition de ces inégalités on trouve l'inégalité

$$2\lambda M - F - \lambda^2 F_1 \geq 0. \tag{52}$$

Le signe d'égalité n'est valable pour tous les \mathcal{A} et \mathcal{A}_1 que dans le cas où C et C_1 sont homothétiques, et alors λ ne peut avoir qu'une seule valeur, savoir le rapport de similitude de C et C_1 .

L'inégalité (52) peut être mise sous la forme

$$M > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} F + \lambda F_1 \right)$$

ou encore

$$M - V\sqrt{FF_1} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \sqrt{\lambda F_1} \right)^2. \quad (53)$$

C'est l'inégalité de Brunn-Minkowski amélioré.¹

Dans la série linéaire formée par C et C_1 on trouve pour $\alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ la courbe moyenne de C et C_1 , dont l'aire S est égale à

$$S = \frac{1}{4}(F + 2M + F_1).$$

(53) entraîne alors pour S l'inégalité:

$$S \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{FF_1} + \frac{F + F_1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{F}{\lambda}} - \sqrt{\lambda F_1} \right)^2. \quad (54)$$

La construction qui, à la fin de la section précédente, conduisait à la démonstration de l'inégalité isopérimétrique s'applique aussi, mutatis mutandis, à l'inégalité (53). Il n'est pas nécessaire d'en donner les détails.

V. Le problème des isépiphanes.

23. Déterminer parmi tous les corps de superficie donnée celui qui a le plus grand volume, voici en quoi consiste le problème classique des isépiphanes, dont la solution est la sphère. V étant le volume et F l'aire de la surface d'un corps quelconque, la propriété extrémante de la sphère peut être exprimée par l'inégalité

$$\frac{1}{6V\pi} F^{\frac{3}{2}} - V \geq 0. \quad (55)$$

En effet le volume de la sphère de superficie F est égal à $\frac{1}{6V\pi} F^{\frac{3}{2}}$. La quantité $\frac{1}{6V\pi} F^{\frac{3}{2}} - V$ sera appelée le déficit isépiphanique du corps. Nous nous proposons de démontrer et d'améliorer l'inégalité isépiphanique (55).

¹ Voir W. BLASCHKE, loc. cit.

Pour commencer nous limiterons la recherche aux corps de révolution et nous supposerons de plus que ces corps sont convexes; nous pourrons donc utiliser les formules

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{3} y^3 \sin x - y y'^2 \sin x - \frac{1}{3} y'^3 \cos x \right) dx \quad (14)$$

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} \left(y^2 - \frac{1}{2} y'^2 \right) \sin x dx. \quad (15)$$

Dans ces formules l'axe de rotation est choisi pour axe polaire α des coordonnées tangentielles polaires, et l'origine O est prise à l'intérieur du corps. $y=y(x)$ est l'équation de la courbe méridienne C du corps. Puisque C est symétrique par rapport à α on a $y(x)=y(2\pi-x)$.

Pour résoudre le problème isopérimétrique de déterminer le maximum de V (ou bien le minimum de $-V$) pour une valeur donnée de F_1 nous nous proposons d'abord le problème de l'extremum libre, savoir de minimiser l'intégrale

$$rF_1 - 2V_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(x, y, y') dx, \quad (56)$$

où

$$H(x, y, y') = 2r \left(y^2 - \frac{1}{2} y'^2 \right) \sin x - \left(\frac{4}{3} y^3 \sin x - 2y y'^2 \sin x - \frac{2}{3} y'^3 \cos x \right). \quad (57)$$

r est le multiplicateur d'Euler-Lagrange, et nous avons affecté à r le coefficient 2, ce qui sera commode dans la suite. Il est nécessaire de diviser l'intégration en deux parties, de $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$, et de $x=\frac{\pi}{2}$ à $x=\pi$.

L'équation différentielle d'Euler, $H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0$, est

$$(2(y+y'')-r)(2y \sin x + 2y' \cos x - r \sin x) = r^2 \sin x, \quad (58)$$

ou

$$\frac{d}{dx} (2y \sin x + 2y' \cos x - r \sin x)^2 = 2r^2 \sin x \cos x.$$

De cette équation on tire

$$\left(y \sin x + y' \cos x - \frac{1}{2} r \sin x \right)^2 = \frac{1}{4} r^2 \sin^2 x + y_0'^2, \quad (59)$$

y'_0 désignant la valeur de $y'(x)$ pour $x=0$.

On peut déduire de l'équation (58) une propriété bien connue des extrémales E . En effet (§ 9) $y + y'' = R_1$ est la valeur du rayon de courbure de la courbe méridienne au point de contact de la droite (x, y) et $\beta = y \sin x + y' \cos x$ est l'ordonnée de ce point. Le second rayon de courbure principal R_2 de la surface de révolution engendrée par la courbe E est donc

$$R_2 = \frac{y \sin x + y' \cos x}{\sin x}.$$

L'équation (58) peut alors être écrite sous la forme

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{r},$$

c.-à.-d. que la courbure moyenne des surfaces de révolution extrémales est constante.

24. Nous n'avons pas encore indiqué les valeurs limites de y correspondant aux valeurs $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$. Nous ne voulons pas, en effet, fixer d'avance la droite d'appui correspondant à $x=0$, mais laisser, au contraire cette droite limite arbitraire, ce qui impose à l'extrémale la condition $H_{y'}(x, y, y')=0$ pour $x=0$. Puisque $H_{y'}=2y'(-r \sin x + 2y \sin x + y' \cos x)$, la condition à la limite est en effet $y'_0=0$. A cette condition, l'équation (59) se divise en

$$y \sin x + y' \cos x = 0$$

et

$$y \sin x + y' \cos x = r \sin x.$$

L'intégrale de la première de ces équations est $y = \alpha \cos x$, qui représente le point $(\alpha, 0)$ situé sur l'axe α . Cette solution qui exige que y prenne, pour $x = \frac{\pi}{2}$, la valeur limite $y = 0$, n'offre aucun intérêt. L'intégrale de la deuxième équation est

$$y = r + \alpha \cos x, \tag{60}$$

qui représente un cercle de rayon r dont le centre $(\alpha, 0)$ est situé sur l'axe α . Pour que le problème posé (56) admette une solution il faut donc donner à y pour $x = \frac{\pi}{2}$ la valeur limite $y = r$. En d'autres termes les corps de révolution pour lesquels peut se poser le problème d'extrémum libre (56) sont tels que le rayon de leur plus grand parallèle soit égal à r .

L'arc d'extrémale du problème est le quart d'un cercle (60) correspondant à $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Il y en a une infinité vérifiant les conditions aux limites et tous tangents à la droite $(\frac{\pi}{2}, r)$. C'est pour cette raison qu'il a été nécessaire de distinguer les deux intervalles

$$x = 0 \text{ à } x = \frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{\pi}{2} \text{ à } x = \pi.$$

Les arcs d'extrémales constituent un champ de Weierstrass. En effet (x, y) étant une droite quelconque $(0 \leq x < \frac{\pi}{2})$, il existe un arc d'extrémale et un seul tangent à (x, y) , déterminé par

$$\alpha = \frac{y - r}{\cos x}.$$

Puisque $y' = -\alpha \sin x$, la « pente » $p(x, y)$ de cette extrémale est

$$p(x, y) = -(y - r) \operatorname{tg} x. \tag{61}$$

Evaluons maintenant la fonction $E(x, y, p, y')$ de Weierstrass.

$$E(x, y, p, y') = H(x, y, y') - H(x, y, p) - (y' - p) H_{y'}(x, y, p)$$

$$E(x, y, p, y') = (y' - p)^2 \left\{ -r \sin x + 2y \sin x + \frac{2}{3} (y' + 2p) \cos x \right\}.$$

En substituant dans le second facteur la valeur (61) de p , il vient

$$E(x, y, p, y') = (y' - p)^2 \left\{ \frac{2}{3} (y \sin x + y' \cos x) + \frac{1}{3} r \sin x \right\},$$

$$E(x, y, p, y') = (y' - p)^2 \left\{ \frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 \right\},$$

où $\beta = y \sin x + y' \cos x$ est l'ordonnée du point d'appui de la droite d'appui (x, y) , et $\beta_1 = r \sin x$ celle du point de contact de l'extrémale tangente à (x, y) .

La différence entre les valeurs de l'intégrale $rV - 2F$ pour un arc quelconque et pour l'arc d'extrémale est exprimée par l'intégrale de Weierstrass. La valeur de l'intégrale sur l'extrémale étant $\frac{2}{3} \pi r^3$, on a

$$rF_1 - 2V_1 - \frac{2}{3} \pi r^3 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 \right) dx.$$

L'intervalle de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$ nous fournit une équation analogue, et par addition de ces deux égalités, il vient

$$rF - 2V - \frac{4}{3} \pi r^3 = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 \right) dx. \quad (62)$$

La valeur de l'intégrale de Weierstrass est positive à moins que y' ne soit identique à p dans tout l'intervalle, ce qui ne peut se produire que sur l'extrémale. Celle-ci est pour chacune des intégrales un quart de cercle c'est-à-dire que la courbe méridienne C peut être un cercle de rayon r , ou bien composée de deux demicercles de rayon r , et de deux segments de droite parallèles à l'axe de rotation et situés à la distance r de cet axe. Il résulte de là que l'inégalité

$$rF - 2V - \frac{4}{3} \pi r^3 \geq 0 \quad (63)$$

est valable pour tout corps de révolution convexe, dont le plus grand parallèle a le rayon r . En posant $\pi r^3 = S$, cette inégalité peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{6V\pi} F^{\frac{3}{2}} - V \geq \frac{1}{6V\pi} (V\bar{F} - 2V\bar{S})^2 (V\bar{F} + V\bar{S}). \quad (64)$$

Le second membre est positif à moins que $F = 4S$. Le signe d'égalité est valable pour les deux corps de révolution ci-dessus indiqués, mais la sphère est le seul d'entre eux à vérifier la condition $F = 4S$. Le premier membre, savoir le déficit isépiphannique, est par conséquent positif pour tout corps de révolution convexe autre que la sphère.

Remarquons encore que le déficit $\frac{1}{6\pi} F^{\frac{3}{2}} - V$ est égal au maximum relatif du polynôme du 3^o degré en r : $\frac{1}{2} r F - V - \frac{2}{3} \pi r^3$.

25. L'intégrale de Weierstrass,

$$\pi \int_0^\pi E(x, y, p, y') dx = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 \right) dx,$$

c.-à-d. le second membre de l'équation (62), a une signification géométrique importante. Soient $t, (x, y)$ une droite d'appui de la courbe méridienne C , T son point d'appui. Construisons un cercle fixe E de rayon r dont le centre soit situé sur l'axe α de rotation, p. ex. à l'origine O des coordonnées. Soient s , de coordonnées (x, r) , la tangente du cercle parallèle à t , S' son point de contact. Les ordonnées de T et S sont β et β_1 . Menons par T la droite TT' parallèle à l'axe α , rencontrant s en T' . Alors $ST' = y' - p$, et $\frac{1}{2} (y' - p)^2 dx$ est l'aire infinitésimale du secteur décrit par ST' , dont S est le point caractéristique, pour un accroissement infiniment petit dx de x . $\frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1$ étant l'ordonnée du centre de gravité de ce secteur, le volume engendré par la rotation de celui-ci autour de α a donc pour mesure $2\pi \cdot \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 \right) dx$. Lorsque S parcourt le cercle E le point T' décrit une courbe renfermant E , et cette courbe est la méridienne d'une certaine surface (T') de révolution autour de α . L'intégrale $\pi \int_0^\pi E(x, y, p, y')$ mesure le volume limité par cette surface (T') et la sphère de rayon r , c.-à-d. que ce volume a la valeur de $rF - 2V - \frac{4}{3} \pi r^3$.

26. En d'autres termes le volume W limité par la surface (T') est égal à $rF - 2V$, ce qu'on peut vérifier, cela va sans dire, sans faire usage de la théorie de Weierstrass. Supposons en effet que l'origine O des coordonnées soit le centre d'un des plus grands parallèles du corps donné, et soient α et α_1 les abscisses de T et T' . Soit dF l'élément de surface commun à la surface de

révolution et à un plan d'appui, dont la distance au point O soit égale à y . Quand le plan d'appui n'est pas tangent, dF est nul. Le volume du corps peut être exprimé par les deux intégrales

$$V = \int \alpha dF \cos x = \frac{1}{3} \int y dF,$$

où x désigne l'angle aigu formé par t et le plan normal à α , et où l'intégration est étendue à toute la surface. La première de ces intégrales s'obtient en divisant le volume en couronnes cylindriques parallèles à α , et la deuxième, en le divisant en éléments coniques de sommet O . Le volume W peut être exprimé par l'intégrale

$$W = \int \alpha_1 dF \cos x.$$

Or on a

$$(\alpha_1 - \alpha) \cos x = r - y,$$

et par conséquent

$$W = \int \alpha dF \cos x + r \int dF - \int y dF = rF - 2V.$$

Les points T' étant extérieurs à la sphère E ou sur la surface même de cette sphère, on obtient enfin l'inégalité

$$rF - 2V - \frac{4}{3} \pi r^3 \geq 0.$$

27. La validité de l'inégalité (64) peut être étendue à un corps quelconque et la quantité S peut avoir la valeur de tout travers du corps tant intérieur qu'extérieur. Par travers extérieur nous entendons l'aire de la projection orthogonale du corps sur un plan. Pour définir le travers intérieur, considérons les figures d'intersection du corps par une série de plans parallèles; l'aire maximale d'une telle section est appelée un travers intérieur du corps.

La démonstration qui suit¹ est fondée sur les constructions célèbres de JACOB STEINER et de H. A. SCHWARZ que nous pouvons appeler respectivement »la symétrisation» et »l'arrondissement». Etant donné un corps L de volume V et

¹ Voir: *C*.

de surface F , STEINER en déduit la construction d'un corps symétrique L_1 de même volume V et dont la surface F_1 n'est pas plus grande que F , $F_1 \leq F$. Pour cela le corps est coupé par des droites perpendiculaires à un plan fixe P . Chacune de ces droites a un ou plusieurs segments intérieurs à L . Soit s la somme de ces segments pour une quelconque de ces droites. A partir du plan P deux segments de longueur $\frac{1}{2}s$ sont découpés sur la droite considérée. En faisant varier la droite ces segments engendrent un corps symétrique L_1 , dont le volume est évidemment égal à V . Si L est un polyèdre il est facile de démontrer que $F_1 < F$ en général. Dans le cas seul où les deux corps L et L_1 sont égaux on a $F_1 = F$. Par conséquent on a $F_1 \leq F$ pour un corps quelconque, puisque la surface d'un corps est toujours la limite de la surface d'une certaine série de polyèdres. La condition nécessaire pour l'égalité $F_1 = F$ est toujours que $L_1 \cong L$, mais la démonstration est un peu compliquée pour les corps non polyédriques.¹ Pour notre but il suffit de savoir que $F_1 \leq F$. Remarquons que la section de L_1 par le plan de symétrie est identique à la projection orthogonale du corps L sur ce plan. L'aire de cette projection est un travers extérieur de L .

A partir d'un corps donné L SCHWARZ construit un corps de révolution L_1 de la manière suivante. L est coupé par des plans perpendiculaires à un axe fixe A . Dans chacun de ces plans on construit un cercle dont le centre est situé sur A et dont l'aire est égale à la somme des aires découpées sur le plan par la surface de L . Les circonférences des cercles ainsi obtenus constituent la surface d'un corps de révolution L_1 qui a évidemment le même volume que L . Dans son mémoire «Sulle proprietà di minima della sfera»², où M. LEONIDA TONELLI a donné le premier une démonstration complète de la propriété minimale de la sphère, M. Tonelli commence par démontrer que $F_1 < F$ dans le cas où L est un polyèdre. Pour un corps quelconque on a par conséquent $F_1 \leq F$, et ce résultat suffit pour notre recherche. Mais on peut ajouter que $F_1 = F$ dans le cas seul où $L_1 \cong L$. Remarquons que l'aire du plus grand parallèle de L_1 est égal à la somme maximale des aires découpées à l'intérieur de L sur des plans perpendiculaires à A , c'est-à-dire le travers intérieur de L perpendiculaire à A . Ajoutons que si la surface de L contient des aires situées dans un plan perpendiculaire à A , on retrouve sur L_1 une aire équivalente ayant la forme d'un cercle ou d'un anneau circulaire.

¹ W. BLASCHKE: Kreis und Kugel. Leipzig 1916.

² Rendiconti di Palermo. t. 39 (1915).

28. Maintenant nous allons faire usage des constructions précédentes de l'un ou l'autre des procédés suivants. Nous pouvons commencer par arrondir le corps donné L par rapport à un axe arbitraire A , puis symétriser le corps nouveau par rapport à un plan perpendiculaire à A pour finir ainsi par un corps symétrique de révolution, L' . Ce corps est coupé en deux points au plus par des droites parallèles à A ou perpendiculaires à A , abstraction faite des droites situées dans les parties planes ou cylindriques de la surface de L' . Si S est le travers intérieur de L perpendiculaire à A , le rayon r du plus grand cercle de L' est donc déterminé par $\pi r^2 = S$. Nous pouvons, au contraire, commencer par la symétrisation du corps L par rapport à un plan perpendiculaire à A , puis arrondir par rapport à A le corps symétrique ainsi obtenu. Nous obtenons ainsi un corps L' de la même nature qu'auparavant; seulement, l'aire $\pi r^2 = S$ du plus grand parallèle de L' est maintenant égale au travers extérieur de L .

Le corps de révolution et symétrique L' n'est pas convexe en général. Néanmoins on peut construire la surface (T') décrite ci-dessus de la même manière qu'auparavant. Soit de nouveau (α, β) un système de coordonnées rectangulaires tel que l'axe α coïncide avec l'axe de rotation et que l'axe β soit situé dans le plan de symétrie de L' . Si la courbe méridienne C' contient des segments parallèles à α , correspondant à des parties cylindriques de L' , on peut s'en défaire en rapprochant les autres parties de L' comme celles d'un télescope. On voit facilement que la quantité $rF' - 2V'$ sera diminuée par ce procédé. Ce n'est que dans le cas où la partie cylindrique est située sur le cylindre circonscrit à L' que la quantité $rF' - 2V'$ ne sera pas altérée. Ces segments enlevés, l'ordonnée β sera sur C' une fonction univoque et non croissante de α , de sorte que les volumes de L' et de (T') peuvent être calculés de la même manière qu'auparavant. Quant à la surface de L' elle est toujours la limite de la surface engendrée par une certaine ligne polygonale tendant vers la courbe méridienne C' , et la méthode est encore applicable à ces surfaces, composées de parties coniques. Ajoutons encore que lorsque C' a une tangente de rebroussement parallèle à l'axe de rotation, la surface (T') s'étend à l'infini en se rapprochant asymptotiquement d'un cylindre de révolution, mais le calcul n'en subsiste pas moins dans ce cas. Par conséquent, l'inégalité

$$rF' - 2V - \frac{4}{3}\pi r^3 \geq 0$$

est valable pour le corps de révolution L' et puisque $F \geq F'$ on a pour le corps donné L :

$$rF - 2V - \frac{4}{3}\pi r^3 \geq 0.$$

Dans cette inégalité la quantité $\pi r^2 = S$ peut avoir la valeur de tout travers tant intérieur qu'extérieur de L , d'où l'inégalité is-épifanique améliorée:

$$\frac{1}{6V\pi} F^{\frac{3}{2}} - V \geq \frac{1}{6V\pi} (VF - 2V\sqrt{S})^2 (VF + V\sqrt{S}). \quad (64)$$

29. Il nous reste à démontrer que c'est pour la sphère seule que le déficit s'annule. Pour que le déficit s'annule il est nécessaire que le second membre s'annule aussi pour toutes les valeurs de S en question, c.-à-d. que tous les travers tant extérieurs qu'intérieurs aient la valeur $\frac{1}{4}F$. La surface F peut être exprimée par l'intégrale de Cauchy (17)

$$F = \frac{1}{2\pi} \int Q d\omega,$$

où Q désigne la somme des valeurs numériques des projections de tous les éléments de la surface sur un plan quelconque. Soit S_1 l'aire de la projection du corps sur le même plan, savoir un travers extérieur. On a évidemment $Q \geq 2S_1$. Et le signe d'égalité n'est valable pour tout plan de projection que lorsque le corps est convexe. Si l'on suppose que $S_1 = \frac{1}{4}F$ pour toute projection on a

$$F = \frac{1}{2\pi} \int Q d\omega \geq \frac{1}{\pi} \int S_1 d\omega = F,$$

d'où suit que dans ces circonstances le corps est nécessairement convexe. Par la condition que les travers intérieurs soient égaux aux travers extérieurs on voit que la courbe de contact de la surface avec un cylindre circonscrit quelconque doit être une courbe plane. Or il résulte, d'un théorème de M. Blaschke¹ que les ellipsoïdes sont les seuls corps convexes qui satisfont à cette condition,

¹ W. BLASCHKE, Kreis und Kugel, p. 157.

et comme, en outre, le plan de contact est dans notre cas perpendiculaire aux génératrices du cylindre circonscrit, le corps est nécessairement une sphère.

30. Voici quelques remarques sur l'histoire du problème des isépiphanes. Avant tout il faut rappeler les belles recherches géométriques de Steiner. La méthode de la symétrisation dont nous avons fait usage ici permet à Steiner d'en tirer la conséquence que parmi tous les corps de volume donné la sphère est le seul qui puisse avoir la plus petite surface possible. Mais Steiner a tacitement supposé que dans l'ensemble infini des corps de volume donné, il doit y en avoir un dont la surface constitue effectivement le minimum. En d'autres termes Steiner avait, par des procédés géométriques trouvé l'extrémale du problème, ou encore, dans le langage du calcul des variations, la sphère satisfait à la première condition nécessaire c.-à-d. à l'équation différentielle d'Euler. C'est Weierstrass qui a donné le premier, dans ses leçons sur le calcul des variations, des conditions suffisantes, et cela à l'aide de sa théorie du champ d'extrémales, dont la construction est différente dans les deux cas de l'extrémum libre et du problème isopérimétrique.

Schwarz reprit alors le problème isépiphanique du point de vue du calcul des variations. Mais les problèmes de variation dans l'espace à trois dimensions sont bien compliqués, et c'est pour cela que Schwarz réduit le problème isépiphanique à un problème isopérimétrique du plan à l'aide de la construction dite arrondissement. Schwarz construit alors le champ de Weierstrass correspondant au problème isopérimétrique en faisant usage de coordonnées ponctuelles polaires et réussit ainsi à démontrer que la sphère constitue effectivement le minimum demandé.

La méthode de Weierstrass a été appliquée plus tard par M. I. O. MÜLLER¹ sans faire usage de l'arrondissement de Schwarz. La démonstration analytique est fondée sur la représentation de la surface par des coordonnées ponctuelles polaires et M. Müller suppose que le rayon vecteur n'a qu'un seul point commun avec la surface.

La démonstration la plus complète du théorème isépiphanique est due à M. LEONIDA TONELLI.² Tandis que Schwarz suppose que la surface est composée de portions de surface analytiques en nombre fini ou bien de portions de sur-

¹ Über die Minimaleigenschaft der Kugel. (Thèse. Göttingen 1903).

² loc. cit.

faces qui aient des plans tangents à variation continue, M. Tonelli envisage le corps le plus général considéré au point de vue de la théorie des ensembles. La définition de l'aire d'une surface est celle introduite par M. Lebesgue. La démonstration de M. Tonelli est essentiellement géométrique et fondée, pour commencer, sur la construction de Schwarz appliquée à un polyèdre. Le corps de révolution ainsi obtenu est alors arrondi par rapport à un axe de révolution B coupant à angles droits l'axe A du premier corps de révolution. Puis, le second corps de révolution est arrondi par rapport à A , le troisième par rapport à B et ainsi de suite. M. Tonelli montre que la surface du corps est effectivement diminuée par chacun de ces constructions, et que la série des corps construits converge vers la sphère ayant même volume que le polyèdre de départ. Le théorème est ainsi démontré pour un polyèdre, et M. Tonelli étend enfin la démonstration à un corps tout à fait arbitraire.

La démonstration que nous avons donnée ici de l'inégalité isépiphannique est fondée comme celle de Schwarz sur la théorie de Weierstrass. Seulement il a suffi de considérer un problème d'extrémum libre et le champ plus simple y correspondant, et de plus, l'inégalité isépiphannique a pris par cette méthode une forme améliorée. L'application des coordonnées tangentielles a permis de donner de l'intégrale de Weierstrass un support géométrique favorisant l'interprétation de la démonstration analytique, ce qui est plus conforme à l'allure géométrique du problème.

En résumé, pour résoudre ce problème de géométrie il a été nécessaire aux géomètres de demander le secours de l'analyse, mais d'abord il fallait accommoder convenablement le problème aux instruments que l'analyse mettait à leur disposition. L'analyse a alors généreusement prêté son assistance puissante et même elle a permis de recouvrir le travail du masque de la géométrie.

Les recherches purement géométriques de Steiner ont été reprises par M. Herman Brunn pour les corps convexes et à ce point de vue Minkowski a démontré l'inégalité isépiphannique classique. Le célèbre géomètre allemand a même découvert deux inégalités nouvelles concernant les corps convexes. Dans ce qui suit nous démontrerons ces inégalités pour les corps convexes de révolution.

VI. Sur les inégalités de Minkowski.

31. Soit S une surface convexe fermée, S' la surface parallèle extérieure à S à la distance r . La formule (16) permet d'établir facilement une relation

entré les aires F et F' de S et S' . Dans le passage de S à S' le vecteur ON est augmenté du segment r tandis que le vecteur NT ne change pas de valeur. On a donc, en posant $ON = H$,

$$F' = F + 2rM + 4\pi r^2, \quad (65)$$

où

$$M = \int H d\omega, \quad (66)$$

l'intégration étant étendue à la surface de la sphère de rayon 1. La valeur moyenne du vecteur H est donc égale à $\frac{1}{4\pi}M$, ou bien la largeur moyenne du corps est égale à $\frac{1}{2\pi}M$, ce qui donne une signification géométrique de M indépendante du système des coordonnées.

Si S est la surface d'un polyèdre, S' est composée 1) de polygones plans égaux aux faces de S , la somme de ces polygones étant alors égale à F ; 2) de polygones sphériques; les centres de ces sphères sont les sommets de S , et la somme de ces polygones est égale à $4\pi r^2$; 3) par des portions d'aires cylindriques de révolution autour des arêtes de S . La somme de ces aires est par conséquent égale à $2rM$. Si a est la longueur d'une arête et u l'angle extérieur formé par les faces adjacentes, l'aire cylindrique correspondante est égale à rau , c.-à-d. que $2M = \Sigma au$.

Pour une surface à courbure continue Steiner a aussi indiqué une signification de M , savoir que M est égal à l'intégrale de la courbure moyenne de S étendue à toute la surface. Soient R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux au point T de S' et dF l'élément de surface correspondant. Alors

$$M = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dF \quad (67)$$

ou

$$M = \int \frac{1}{2} (R_1 + R_2) d\omega; \quad (68)$$

où $d\omega$ est la représentation sphérique de dF . L'intégrale (67) a été introduite par Steiner lui même. Pour une surface de révolution, en particulier, il est assez facile de vérifier la formule (68). Soit $y = y(x)$, l'équation de la courbe méridienne en coordonnées tangentielles. On a alors

$$R_1 = y + y'', R_2 = \frac{y \sin x + y' \cos x}{\sin x},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} (R_1 + R_2) d\omega &= 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} \{ (y + y'') \sin x + (y \sin x + y' \cos x) \} dx \\ &= 2\pi \int_0^\pi y \sin x dx = \int y d\omega = M. \end{aligned}$$

32. Les trois quantités V , F et M donnent lieu, pour un corps convexe quelconque, aux inégalités de Minkowski

$$M^2 \geq 4\pi F, \tag{69}$$

$$F^2 \geq 3MV, \tag{70}$$

d'où l'on déduit, par substitution, les inégalités

$$M^3 \geq 48\pi^2 V, \tag{71}$$

$$F^3 \geq 6V\sqrt{\pi} V. \tag{80}$$

Nous nous proposons ici de démontrer ces inégalités pour les seuls corps convexes de révolution, en nous servant des formules:

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\frac{2}{3} y^3 \sin x - y y'^2 \sin x - \frac{1}{3} y'^3 \cos x \right) dx \tag{14}$$

$$F = 2\pi \int_0^\pi \left(y^2 - \frac{1}{2} y'^2 \right) \sin x dx \tag{15}$$

$$M = 2\pi \int_0^\pi y \sin x dx. \tag{66}$$

Pour démontrer l'inégalité (71) nous cherchons le maximum de V (ou bien le minimum de $-V$) pour une valeur donnée de M . Comme dans le cas du

problème is-épifanique il est nécessaire de diviser les intégrales en deux parties

$$\int_0^\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi. \text{ Quant aux valeurs de } y \text{ aux limites } x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi, \text{ supposons}$$

que $y(0)$ et $y(\pi)$ restent arbitraires, tandis que $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y_1 > 0$ est donnée d'avance.

Ceci posé, nous nous proposons le problème d'extrémum libre de minimiser l'intégrale

$$r^2 M_1 - V_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(x, y, y') dx, \quad (67)$$

où

$$H(x, y, y') = 2r^2 y \sin x - \left(\frac{2}{3} y^3 \sin x - y y'^2 \sin x - \frac{1}{3} y'^3 \cos x \right).$$

Il est commode dans ce qui suit de désigner par r^2 le multiplicateur d'Euler-Lagrange, où r est un nombre positif.

L'équation d'Euler peut être écrite sous la forme

$$(y \sin x + y' \cos x)(y'' + y) = r^2 \sin x, \quad (68)$$

qui exprime que la courbure de Gauss des surfaces extrémales est constante et égale à $\frac{1}{r^2}$. (68) s'écrit

$$\frac{d}{dx}(y \sin x + y' \cos x)^2 = 2r^2 \sin x \cos x,$$

d'où l'on déduit

$$(y \sin x + y' \cos x)^2 = r^2 \sin^2 x + y'^2_0,$$

y'_0 étant la valeur de $y'(x)$ pour $x=0$. Le fait que la valeur limite $y(0)$ reste arbitraire entraîne la condition, $H_{y'}(x, y, y')=0$ pour $x=0$, c.-à-d. que $y'_0=0$. A cette condition on trouve les extrémales

$$y = \pm r + a \cos x,$$

où il faut choisir

$$y = r + a \cos x,$$

qui représente des cercles de rayon r , dont le centre $(a, 0)$ est situé sur l'axe

de rotation. Pour que le problème ait une solution il est donc nécessaire de choisir la valeur $y_1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ égale à r , c.-à-d. que les corps de révolution admissibles ont le rayon de leur plus grand parallèle égal à r . Il existe alors une infinité d'extrémales $y = r + \alpha \cos x$ vérifiant les conditions aux limites. L'arc d'extrémale en question et le quart d'un tel cercle correspondant aux valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Ces arcs constituent un champ de Weierstrass.

La pente de l'extrémale tangente à la droite (x, y) est (61)

$$p(x, y) = -(y-r) \operatorname{tg} x,$$

et on trouve pour la fonction $E(x, y, p, y')$ l'expression

$$\begin{aligned} E(x, y, p, y') &= (y' - p)^2 \left(\frac{1}{3} (y' + 2p) \cos x + y \sin x \right) \\ &= (y' - p)^2 \left(\frac{1}{3} (y \sin x + y' \cos x) + \frac{2}{3} r \sin x \right) \\ &= (y' - p)^2 \left(\frac{1}{3} \beta + \frac{2}{3} \beta_1 \right). \end{aligned}$$

β est l'ordonnée du point d'appui de la droite d'appui (x, y) de la courbe de comparaison, β_1 est l'ordonnée du point de contact de l'extrémale tangente à (x, y) .

La valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} H(x, y, y') dx$ étendue à l'extrémale est égale à $\frac{4}{3} r^3$. La différence entre les valeurs de l'intégrale $r^2 M_1 - V_1$ prises sur la courbe de comparaison et sur l'extrémale est par conséquent

$$r^2 M_1 - V_1 - \frac{4}{3} \pi r^3 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{1}{3} \beta + \frac{2}{3} \beta_1 \right) dx.$$

Pour l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ on obtient une équation analogue, et l'addition de ces équations donne

$$r^2 M - V - \frac{8}{3} \pi r^3 = 2 \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{1}{3} \beta + \frac{2}{3} \beta_1 \right). \quad (69)$$

On voit que l'intégrale est positive à moins que $y' \equiv p$, c.-à-d. que les extrémales fournissent effectivement le minimum demandé. Les corps minimants sont composés d'un cylindre de révolution de rayon r et de deux demi-sphères de même rayon.

33. L'interprétation de l'intégrale de Weierstrass est évidente. Soient de nouveau (fig. 3) t , (x, y) une droite d'appui de la courbe méridienne C de comparaison, T son point d'appui. Soient encore R un cercle fixe de rayon r , ayant pour centre l'origine, et S le point de contact de ce cercle avec la droite $s(x, r)$. Par S nous menons la droite SS' parallèle à l'axe de rotation jusqu'à son intersection S' avec t . Lorsque t varie, le point S' décrit une courbe (S') . Le second membre de (69) représente le volume limité par les deux surfaces de révolution engendrées par C et (S') . Remarquons que cette construction est pour ainsi dire la construction inverse de celle que nous avons employée pour le problème isépiphanique (§ 25). Dans les deux cas, la figure de départ est la même. A partir des droites d'appui variables t et s et des droites SS' et TT' sont construites les deux surfaces (S') et (T') , la première entourant la surface de révolution en question, la seconde entourant la sphère. Les volumes limités par (S') et la surface de révolution, dans le cas présent, et, par (T') et la sphère dans le cas des isépiphanes, représentent les variations totales des intégrales respectives; ces volumes ne sont pas égaux. On se rappelle que dans le cas des isopérimètres au contraire les deux constructions inverses ont conduit à des aires égales entre elles et égales à la variation totale.

34. La formule (69) entraîne l'inégalité

$$r^2 M - V - \frac{8}{3} \pi r^3 \geq 0,$$

qui peut se mettre sous la forme:

$$\frac{1}{48 \pi^2} M^3 - V \geq \frac{1}{48 \pi^2} (M - 4 \pi r)^2 (M + 8 \pi r). \quad (70)$$

Le signe d'égalité est valable pour le corps ci-dessus indiqué, composé d'un cylindre de révolution de rayon r et de deux demi-sphères de même rayon. Si h est la hauteur du cylindre, les valeurs de M et V sont

$$M = \pi h + 4 \pi r$$

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Pour une valeur donnée de M , $M \geq 4 \pi r$, on peut par conséquent construire un corps minimant, relativement au problème d'extrémum libre, de la quantité $r^2 M - V$, et ce corps constitue en même temps la solution du problème isopérimétrique posé, savoir de trouver le maximum de V pour une valeur donnée de M . Les corps admissibles sont les corps de révolution pour lesquels le rayon des plus grands parallèles a la valeur r . (70) est l'inégalité isopérimétrique du problème. On voit de plus que le second membre de (70) s'annule dans le seul cas où $M = 4 \pi r$. D'autre part les deux membres de (70) ne sont égaux que pour le corps minimant et pour ce corps la condition $M = 4 \pi r$ exige que $h = 0$. Par conséquent, dans la relation de Minkowski

$$\frac{1}{48 \pi^2} M^3 - V \geq 0,$$

le signe d'égalité n'est valable que pour la sphère.

35. Posons maintenant

$$A = rF - 2V - \frac{4}{3} \pi r^3 = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{2}{3} \beta + \frac{1}{3} \beta_1 \right) dx, \quad (62)$$

$$B = r^2 M - V - \frac{8}{3} \pi r^3 = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} (y' - p)^2 \left(\frac{1}{3} \beta + \frac{2}{3} \beta_1 \right) dx, \quad (69)$$

où A et B sont les deux volumes construits ci-dessus. De ces formules on déduit

$$2A - B = 2rF - r^2 M - 3V = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} (y' - p)^2 \beta dx, \quad (71)$$

$$2B - A = 2r^2M - rF - 4\pi r^3 = 2\pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(y' - y)^2 \beta_1 dx. \quad (72)$$

Ces deux intégrales ne sont pas négatives, et l'on a par conséquent les inégalités

$$2rF - r^2M - 3V \geq 0,$$

$$2rM - F - 4\pi r^2 \geq 0,$$

ou encore

$$F^2 - 3MV \geq (F - rM)^2, \quad (73)$$

$$\frac{1}{4\pi} M^2 - F \geq \frac{1}{4\pi} (M - 4\pi r)^2. \quad (74)$$

Ce sont les inégalités (69) et (70) de Minkowski améliorées, mais seulement pour les corps de révolution. Nous avons donné (A) de l'inégalité (74) une démonstration valable pour tout corps convexe, démonstration fondée sur l'inégalité isopérimétrique. L'inégalité (74) est beaucoup plus simple que (73) en raison de la circonstance que le volume V n'y figure pas.

Dans la relation (74) le signe d'égalité n'est valable que pour le corps composé du cylindre et des deux hémisphères. L'intégrale (72) ne s'annule en effet que si $y' = y$, car le facteur β_1 ne s'annule que pour les valeurs $x = 0$ et $x = \pi$. De plus le second membre de (74) s'annule pour $M = 4\pi r$, c'est à-dire que la sphère est l'unique surface de révolution pour laquelle $M^2 = 4\pi F$.

L'intégrale (71) s'annule si l'on a sur la courbe méridienne soit $y' = y$, soit $\beta = y \sin x + y' \cos x = 0$. Cette dernière condition est vérifiée pour $y = a \cos x$, équation d'un point P situé sur l'axe de rotation. La courbe méridienne peut donc être composée d'un tel point P et d'arcs de cercle. Le corps de révolution correspondant peut être construit de la manière suivante. Au corps » CS » composé du cylindre et des demi-sphères circonscrivons un cône de révolution de sommet P . De la surface de CS on supprime la partie visible du point P , et on substitue à la partie supprimée la partie du cône s'étendant de P au cercle de contact.

Pour un tel corps, appelé par Minkowski un corps à capuchon du corps CS , le signe d'égalité est valable dans la relation (73). Pour que $F^2 - 3MV = 0$ il est en outre nécessaire que $F = rM$, ce qui exige que le corps CS se réduise à une sphère. Ce résultat est conforme au théorème de Minkowski, savoir que l'équation $F^2 - 3MV = 0$ est valable pour les corps à capuchon de la sphère et

pour celle-ci seulement. Nous n'avons considéré ici que les corps de révolution. Dans le cas général la sphère peut être garnie d'une infinité de capuchons. Et on voit sans difficulté que pour un tel corps à capuchons on a $3V = rF$, $F = rM$ et par conséquent $F^2 = 3MV$.

36. Les équations (71) et (72) sont déduites des équations (62) et (69). Mais on peut aussi les obtenir directement en résolvant les deux problèmes de variation de minimiser les intégrales $2rF - r^2M - 3V$ et $2rM - F$. On voit alors que $2A - B \geq 0$ et $2B - A \geq 0$, puisque les fonctions sous les signes de (71) et (72) ne sont jamais négatives. Les inégalités $A \geq 0$ et $B \geq 0$ sont maintenant une conséquence immédiate des inégalités $2A - B \geq 0$ et $2B - A \geq 0$. Mais il faut se rappeler ici que nous n'avons traité que le cas particulièrement simple des corps de révolution. Dans le cas général il semble difficile de démontrer l'inégalité (70) tandis que l'inégalité isépiphannique a été démontrée dans toute sa généralité. En effet nous ne savons pas donner aux intégrales (71) et (72) une interprétation géométrique directe. Ces intégrales représentent les différences $2A - B$ et $2B - A$, où A et B sont des volumes que nous avons obtenus par une construction simple. Et cette construction peut être étendue à un cas plus général.

Chez Minkowski les inégalités citées sont des cas particuliers de quelques inégalités plus générales relatives aux corps convexes. Partant de deux corps convexes K_1 et K_2 on construit une série linéaire de corps convexes $x_1K_1 + x_2K_2$. La construction est analogue à celle indiquée pour la série linéaire de courbes convexes dans le plan. Le volume d'un corps de la série linéaire peut être exprimé par

$$x_1^3 V_{11} + 3x_1^2 x_2 V_{12} + 3x_1 x_2^2 V_{21} + x_2^3 V_{22},$$

où $x_1 + x_2 = 1$. V_{11} et V_{22} sont les volumes des corps donnés K_1 et K_2 , V_{12} et V_{21} sont deux quantités indépendantes de x_1 et x_2 , appelées par Minkowski les volumes mixtes des deux corps. Minkowski a démontré les inégalités

$$V_{12}^3 \geq V_{11}^2 V_{22}, \quad V_{21}^3 \geq V_{22}^2 V_{11}, \tag{75}$$

$$V_{12}^2 \geq V_{11} V_{21}, \quad V_{21}^2 \geq V_{22} V_{12}. \tag{76}$$

Minkowski commence par démontrer les inégalités (75). Il arrive ensuite aux inégalités (76) en appliquant les inégalités démontrées (75) à une nouvelle série linéaire constituée par K_1 et $(1-s)K_1 + sK_2$. Les inégalités (75) sont d'ailleurs

une conséquence immédiate des inégalités (76) par l'élimination de V_{12} ou V_{21} . Des inégalités (76) M. HILBERT a donné une démonstration directe à l'aide de sa théorie des équations intégrales¹, mais on ne connaît pas de démonstration élémentaire directe de ces inégalités.

Considérons en particulier deux corps convexes inscrits dans la même surface cylindrique. (Pour le problème des is-épifanes nous avons considéré un corps de révolution et une sphère inscrite dans le même cylindre de révolution.) Dans ce cas les inégalités (75) et (76) peuvent être remplacées par les inégalités plus avantageuses

$$3 V_{12} - 2 V_{11} - V_{22} \geq 0, \quad 3 V_{21} - 2 V_{22} - V_{11} \geq 0, \quad (77)$$

$$2 V_{12} - V_{11} - V_{21} \geq 0, \quad 2 V_{21} - V_{22} - V_{12} \geq 0. \quad (78)$$

Nous avons donné² une démonstration des inégalités (77) basée sur une généralisation de la construction introduite pour les corps de révolution. La méthode de Minkowski conduit alors à (78). Quant à la démonstration directe des inégalités (78) nous y reviendrons dans un mémoire prochain.³

¹ Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Sechste Mitteilung, XIX. (Göttingen, Nachr. 1910.)

² Math. Ann. t. 95.

³ Mat. Tidsskrift, Copenhagen 1926 B.