ÜBER DIE THEORIE DER RELATIV-ABEL'SCHEN ZAHLKÖRPER[1]

VON

DAVID HILBERT

in GÖTTINGEN.

§ 1.

In der Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper nehmen zunächst die Körper vom *zweiten* Relativgrade unser Interesse in Anspruch.

Es sei ein beliebiger Zahlkörper k vom Grade n als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt; unsere Aufgabe ist es dann, die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{\mu})$, d. h. derjenigen Körper zu begründen, die durch die Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl μ des Körpers k bestimmt sind. Die »disquisitiones arithmeticae» von GAUSS sind als der einfachste Fall in jenem Problem enthalten. Wir können unsern Gegenstand auch als die Theorie der quadratischen Gleichungen oder Formen bezeichnen, deren Coefficienten Zahlen des vorgelegten Rationalitätsbereiches k sind.

Die Theorie des relativquadratischen Körpers führte mich zur Entdeckung eines allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste,

---

[1] Mit geringen Änderungen abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1898.

Inzwischen sind folgende auf diesen Gegenstand bezügliche Inaugural-Dissertationen in Göttingen erschienen: *Das quadratische Reciprocitätsgesetz im quadratischen Zahlkörper mit der Classenzahl* 1. von H. DÖRRIE 1898, *Tafel der Klassenanzahlen für kubische Zahlkörper* von L. W. REID 1899, *Das allgemeine quadratische Reciprocitätsgesetz in ausgewählten Kreiskörpern der* $2^{h\text{ten}}$ *Einheitswurzeln* von K. S. HILBERT 1900, *Quadratische Reciprocitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern* von G. RÜCKLE 1901. Insbesondere die letzte Dissertation enthält zahlreiche und interessante Beispiele zu der hier entwickelten Theorie.

welches das gewöhnliche Reciprocitätsgesetz zwischen rationalen Primzahlen nur als ein vereinzeltes Glied in einer Kette sehr interessanter und mannigfaltiger Zahlenbeziehungen erscheinen lässt.

In meiner Abhandlung *Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers* [1] habe ich die Theorie der quadratischen Relativkörper innerhalb eines algebraischen Grundkörpers k vollständig für den Fall entwickelt, dass der Grundkörper k nebst seinen sämmtlichen conjugirten Körpern imaginär ist und überdies eine ungerade Klassenanzahl besitzt. Die wichtigsten der in der genannten Abhandlung aufgestellten Sätze sind das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste in k und der Satz, demzufolge in einem relativquadratischen Körper in Bezug auf k stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten sind. Ich habe in jener Abhandlung zu zeigen versucht, welch ein Reichthum an arithmetischen Wahrheiten in diesen Sätzen enthalten ist; dennoch offenbart sich die volle Bedeutung der genannten Sätze erst, wenn wir ihre Gültigkeit auf *beliebige* algebraische Grundkörper k ausdehnen. In einem auf der Mathematiker-Vereinigung zu Braunschweig gehaltenen Vortrage [2] habe ich einige kurze Bemerkungen über den Fall gemacht, dass der Grundkörper k reell ist, bez. reelle conjugirte Körper aufweist oder die Klassenanzahl 2 besitzt. In der gegenwärtigen Arbeit beabsichtige ich, die wichtigsten Sätze aus der Theorie der quadratischen Relativkörper innerhalb eines beliebigen Grundkörpers k aufstellen und zugleich die Abänderungen anzugeben, welche die Beweise in meiner zu Anfang genannten Abhandlung erfahren müssen, wenn man für den Grundkörper k die dort gemachten beschränkenden Annahmen beseitigen will.

Endlich habe ich im letzten Paragraph (§ 16) der gegenwärtigen Arbeit für relativ-Abel'sche Zahlkörper von beliebigem Relativgrade und mit der Relativdiscriminante 1 eine Reihe von allgemeinen Sätzen vermutungsweise aufgestellt; es sind dies Sätze von wunderbarer Einfachheit und krystallener Schönheit, deren vollständiger Beweis und gehörige Verallgemeinerung auf den Fall einer beliebigen Relativdiscriminante mir als das Endziel der rein arithmetischen Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper erscheint.

---

[1] Mathematische Annalen Bd. 51, S. 1—127.

[2] Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung VI, 1897, S. 88—94.

§ 2.

Es sei k ein beliebiger Zahlkörper; der Grad dieses Körpers k heisse m und die $m-1$ zu k conjugirten Zahlkörper mögen mit $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ bezeichnet werden. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k werde h genannt. Wir übertragen das bekannte Symbol aus der Theorie der rationalen Zahlen auf den hier zu behandelnden Fall, wie folgt: [1]

Es sei $\mathfrak{p}$ ein in 2 nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k: dann bedeute das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem α dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{p}$ congruent ist oder nicht. Ist ferner $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu 2 primes Ideal in k und hat man $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}\ldots\mathfrak{w}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{w}$ Primideale in k sind und ist α eine zu $\mathfrak{a}$ prime ganze Zahl in k, so möge das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ durch die folgende Gleichung definirt werden:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right)\cdots\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right).$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beliebige zu 2 prime Ideale in k und α eine zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ prime ganze Zahl in k, so gilt offenbar die Gleichung

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right).$$

Bezeichnet μ irgend eine ganze Zahl in k, die nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ist, so bestimmt $\sqrt{\mu}$ zusammen mit den Zahlen des Körpers k einen Körper vom Grade $2m$, welcher relativquadratisch in Bezug auf den Körper k ist und mit $K(\sqrt{\mu})$ oder auch kurz mit K bezeichnet werde. Sind in Bezug auf k mehrere relativquadratische Körper vorgelegt, so heissen dieselben *von einander unabhängig*, sobald keiner derselben als Unterkörper in demjenigen Körper enthalten ist, der aus den übrigen durch Zusammensetzung entsteht.

---

[1] Vergl. meine Abhandlung *Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers*, Definition 1 und 5.

Ein relativquadratischer Körper K heisse *unverzweigt* in Bezug auf k, wenn die Relativdiscriminante von K in Bezug auf k gleich 1 ausfällt oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das gleich dem Quadrat eines Primideals in K wird.

§ 3.

Wir machen zunächst über den zu Grunde gelegten Körper k solche zwei Annahmen, unter denen die Theorie des relativquadratischen Körpers bereits in meiner Abhandlung ausführlich entwickelt worden ist; es sind dies folgende Annahmen:

1. Der Körper k vom m^{ten} Grade sei nebst allen conjugirten Körpern $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ imaginär.
2. Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei gleich 1.

Wegen der späteren Ausführungen wiederholen wir hier die hauptsächlichsten in Frage kommenden Definitionen und Resultate in einer Fassung, die von der in meiner Abhandlung gegebenen Darstellung ein wenig abweicht.

Definition 1. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k, in Bezug auf das für jede Einheit ξ in k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt, heise ein *primäres Ideal*.

Definition 2. Eine solche zu 2 prime ganze Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt, heisse eine *primäre Zahl* des Körpers k.

Wir können dann den wesentlichen Inhalt des *ersten* Ergänzungssatzes zum Reciprocitätsgesetz wie folgt aussprechen:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine primäre Zahl α, so dass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine primäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein primäres Ideal.

Wir zerlegen nun die Zahl 2 im Körper k in Primideale wie folgt:

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1}\,\mathfrak{l}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z},$$

wo $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \dots, \mathfrak{l}_z$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl 2 in k und $l_1, l_2, \dots, l_z$ die Potenzexponenten bedeuten, zu denen bez. jene Primideale in der Zahl 2 aufgehen.

Definition 3. Ein solches zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers k, in Bezug auf das nicht nur für jede Einheit ξ in k, sondern auch für jede in 2 aufgehende ganze Zahl λ des Körpers k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \qquad \left(\frac{\lambda}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt, heisse ein *hyperprimäres Ideal.*

Definition 4. Eine solche zu 2 prime Zahl α des Körpers k, welche congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul $\mathfrak{l}_1^{2l_1+1}\mathfrak{l}_2^{2l_2+1}\dots\mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$ ausfällt, heisse eine *hyperprimäre Zahl* des Körpers k.

Wir können dann den wesentlichen Inhalt des *zweiten* Ergänzungssatzes zum Reciprocitätsgesetz wie folgt aussprechen:

Satz 2. Wenn $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine hyperprimäre Zahl α, so dass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine hyperprimäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein hyperprimäres Ideal.

Der wesentliche Inhalt des allgemeinen Reciprocitätsgesetzes für quadratische Reste im Körper k lautet wie folgt:

Satz 3. Wenn ν, μ, ν', μ' irgend welche zu zwei prime ganze Zahlen in k sind derart, dass die beiden Producte $\nu\nu'$ und $\mu\mu'$ primär ausfallen und ν zu μ, ν' zu μ' prim ist, so ist stets

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right).$$

Wenn die Klassenanzahl h des Körpers k nicht gleich 1, sondern eine beliebige ungerade Zahl ist, so wird nur eine geringfügige und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmende Abänderung im Ausdrucke der Sätze 1—3 nothwendig.

Satz 4. Jede Einheit in k, welche primär (eine primäre Zahl) ist, ist das Quadrat einer Einheit in k.

Satz 5. Es giebt in Bezug auf k keinen relativquadratischen unverzweigten Körper.

Die beiden letzten Sätze gelten unverändert für den Fall, dass die Klassenanzahl h des Körpers k eine beliebige ungerade Zahl ist.

§ 4.

Wir legen nunmehr für den Körper k folgende Annahmen zu Grunde:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s (>0) reeller Körper; seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.
2. Die Anzahl h der Idealklassen im Körper k sei gleich 1.

Bei diesen Annahmen wird die Definition 1 des primären Ideals unverändert beibehalten, dagegen wird es nöthig, den Begriff einer primären Zahl enger zu fassen.

Definition 5. Eine Zahl α des Körpers k heisst *total positiv in* k, falls die s zu α conjugirten bez. in $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Zahlen sämtlich positiv sind. Wenn eine zu 2 prime Zahl α des Körpers k congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 ausfällt und wenn ausserdem α total positiv in k ist, so heisse α eine *primäre Zahl* des Körpers k.

Bei Anwendung der so festgesetzten Bezeichnungsweise gilt der erste Ergänzungssatz 1 und das allgemeine Reciprocitätsgesetz 3 wiederum genau in der früheren Fassung und, wenn man in entsprechender Weise den Begriff der hyperprimären Zahl enger fasst, so bleibt auch der zweite Ergänzungssatz 2 in der früheren Fassung gültig.

§ 5.

Wir erörtern ferner die Frage, ob es unter den in § 4 für den Körper k zu Grunde gelegten Annahmen relativquadratische unverzweigte Körper in Bezug auf k giebt. Zu dem Zwecke setzen wir zunächst allgemein fest, dass, wenn ε irgend eine Einheit in k bedeutet, stets $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(s-1)}$ die zu ε conjugirten bez. in $k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$ gelegenen Einheiten bezeichnen sollen.

Nunmehr nehmen wir $\varepsilon_1 = -1$: wie die Einheit ε_1 fallen offenbar alle zu ε_1 conjugirten Einheiten negativ aus. Ferner möge es in k eine Einheit ε_2 geben, welche in k positiv ist, während mindestens eine der conjugirten Einheiten ε_2', ..., $\varepsilon_2^{(s-1)}$ negativ ausfällt; es sei etwa die in k' gelegene Einheit ε_2' negativ. Sodann möge es in k eine Einheit ε_3 geben, welche positiv ist und für welche auch ε_3' positiv wird, während mindestens eine der conjugirten Einheiten ε_3'', ε_3''', ..., $\varepsilon_3^{(s-1)}$ negativ ausfällt; es sei etwa die in k'' gelegene Einheit ε_3'' negativ. In dieser Weise fahren wir fort; wir mögen schliesslich eine Einheit ε_p ($p \leqq s$) erhalten von der Beschaffenheit, dass ε_p, ε_p', ε_p'', ..., $\varepsilon_p^{(p-2)}$ sämmtlich positiv sind, dagegen $\varepsilon_p^{(p-1)}$ negativ ausfällt und nun soll das eingeschlagene Verfahren sein Ende erreicht haben, d. h. wenn irgend eine Einheit ε in k nebst ihren $p-1$ conjugirten Einheit ε', ε'', ..., $\varepsilon^{(p-1)}$ positiv ausfällt, so sei nunmehr auch stets jede der übrigen $s-p$ conjugirten Einheiten $\varepsilon^{(p)}$, ..., $\varepsilon^{(s-1)}$ positiv.

Die Zahl $s-p$ erhält eine besonders einfache Bedeutung, wenn wir dem Äquivalenz- und Klassenbegriff eine engere Fassung ertheilen, als bisher geschehen ist. Wir wollen nämlich fortan zwei Ideale $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ des Körpers k nur dann als äquivalent bezeichnen, wenn $\frac{\mathfrak{j}}{\mathfrak{k}} = \alpha$ gesetzt werden kann, so dass α eine ganze oder gebrochene Zahl in k ist, die selbst nebst den sämmtlichen bez. in k', k'', ..., $k^{(s-1)}$ gelegenen zu α conjugirten Zahlen α', α'', ..., $\alpha^{(s-1)}$ positiv ausfällt, d. h., die total positiv in k ist. Rechnen wir alle solchen Ideale des Körpers k, die in diesem engeren Sinne untereinander äquivalent sind, zu einer Klasse, so besitzt der Körper k, wie leicht ersichtlich ist, genau $\bar{h} = 2^{s-p}$ Idealklassen.

Nach diesen Vorbereitungen findet die oben aufgeworfene Frage nach den unverzweigten Körpern in Bezug auf k in folgender Weise ihre Beantwortung:

Satz 6. Für den Körper k giebt es ein System von $s-p$ unabhängigen relativquadratischen unverzweigten Körpern in Bezug auf k. Durch Zusammensetzung dieser $s-p$ Körper entsteht ein Körper Kk vom Relativgrade $\bar{h} = 2^{s-p}$ in Bezug auf k, der sämmtliche unverzweigten Körper in Bezug auf k als Unterkörper enthält und der *Klassenkörper* von k heissen möge. Die Anzahl $\bar{H}$ der Idealklassen dieses Körpers Kk ist, auch wenn wir den Klassenbegriff in der vorhin (für k) angegebenen engeren Fassung nehmen, stets eine ungerade Zahl.

Eine der merkwürdigsten Eigenschaften des Klassenkörpers Kk besteht darin, dass die Primideale des Körpers k, welche einer und der nämlichen Idealklasse von k im engeren Sinne angehören, im Klassenkörper Kk stets die nämliche Zerlegung in Primideale dieses Körpers Kk erfahren d. h. so dass die Anzahl der verschiedenen Primideale und ihre Grade die gleichen sind; die Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper Kk hängt somit nur von der Klasse ab, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

§ 6.

Um die genannten Thatsachen zu beweisen und unter den in § 4 gemachten Annahmen die Theorie des relativquadratischen Körpers in Bezug auf k vollständig aufzubauen, bedürfen wir eines Symbols, welches ich bereits in meinem in Braunschweig gehaltenen Vortrage erklärt habe.

Definition 6. Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, und es seien ν, μ beliebige ganze Zahlen in k, nur dass μ nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ausfällt; wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ congruent ist und wenn ausserdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ stets eine solche ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, dass $\nu \equiv N(A)$ nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ ausfällt, so setze ich

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1;$$

in jedem anderen Falle dagegen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = -1.$$

Fällt μ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ($\neq 0$) in k aus, so werde stets

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

gesetzt. Ferner definiren wir noch die s Symbole

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1}\right), \left(\frac{\nu, \mu}{1'}\right), \ldots, \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(s-1)}}\right);$$

wir setzen stets

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1}\right) = +1,$$

wenn wenigstens eine der beiden Zahlen ν, μ positiv ausfällt; dagegen setzen wir

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1}\right) = -1,$$

wenn jede der beiden Zahlen ν, μ negativ ausfällt. Ferner bezeichnen wir allgemein die in $k^{(i)}$ gelegenen zu ν, μ conjugirten Zahlen bez. mit $\nu^{(i)}, \mu^{(i)}$ und setzen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{1'}\right) = \left(\frac{\nu', \mu'}{1}\right), \quad \left(\frac{\nu, \mu}{1''}\right) = \left(\frac{\nu'', \mu''}{1}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{\nu, \mu}{1^{(s-1)}}\right) = \left(\frac{\nu^{(s-1)}, \mu^{(s-1)}}{1}\right).$$

Ist nun ein bestimmter relativquadratischer Körper $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k vorgelegt, so wird eine naturgemässe Definition des Geschlechtsbegriffes aus der Definition 12 meiner Abhandlung gewonnen, wenn man sich des verallgemeinerten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$ bedient, wo ω die in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ aufgehenden Primideale und überdies diejenigen Zeichen $1^{(i)}$ durchläuft, wofür die in $k^{(i)}$ gelegene zu μ conjugirte Zahl $\mu^{(i)}$ negativ ausfällt. Es gelingt dann ohne erhebliche Schwierigkeit die ganze in meiner Abhandlung entwickelte Theorie der relativquadratischen Körper auf den hier in Rede stehenden Fall, dass der Körper k die in § 4 gemachten Annahmen erfüllt, auszudehnen.

Das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste im Körper k erhält mit Benutzung des erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$ die folgende einfache Fassung:

Satz 7. Wenn ν, μ beliebige ganze Zahlen $\neq 0$ in k sind, so ist stets

$$\prod_{(\omega)} \left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right) = +1,$$

wo das Product über sämmtliche Primideale $\omega = \mathfrak{w}$ in k und über die s Zeichen $\omega = 1, 1', 1'', \ldots, 1^{(s-1)}$ erstreckt werden soll.

Auch die Sätze 41, 64, 65, 67 in meiner Abhandlung lassen sich mit Hülfe des erweiterten Symbols $\left(\frac{\nu, \mu}{\omega}\right)$ unmittelbar auf den Fall des hier betrachteten Grundkörpers k übertragen.

Wenn die in ursprünglichem Sinne verstandene Klassenzahl h des Körpers k nicht 1, sondern irgend eine ungerade Zahl ist, so bedürfen die Sätze in § 4—§ 6 nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 7.

Wenn für den Körper k insbesondere $s-p=0$ ausfällt, so wird $\bar{h}=1$ und Satz 6 lehrt dann, dass es keinen unverzweigten Körper in Bezug auf k giebt. Wir wollen den nächst einfachen Fall $s-p=1$, $\bar{h}=2$ betrachten und vor Allem die am Schluss von § 5 angedeuteten Gesetze der Zerlegung der Primideale in k näher erörtern. Es mögen daher fortan für den Grundkörper k folgende speziellere Annahmen gelten:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s (>0) reelle Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen des Körpers k, im ursprünglichen weiteren Sinne verstanden, sei gleich 1; die Anzahl $\bar{h}$ der Idealklassen des Körpers k, im engeren Sinne verstanden, sei gleich 2.

Unter diesen Annahmen ist der in § 5 erwähnte Klassenkörper Kk relativquadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 8a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf h die Relativdiskriminante 1; d. h. er ist unverzweigt in Bezug auf h.

Satz 8b. Die Klassenanzahl $\bar{H}$ des Klassenkörpers Kk, in engerem Sinne verstanden, ist ungerade.

Satz 8c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale im engeren Sinne sind, zerfallen in Kk in das Product zweier Primideale. Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale im engeren Sinne sind, bleiben in Kk Primideale.

Von diesen drei Eigenschaften 8a, 8b, 8c charakterisirt jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk.

Zum Beweise der Existenz des Klassenkörpers Kk ist es erforderlich zu zeigen, dass es unter den hier gemachten Annahmen stets eine Einheit ε in k giebt, die congruent dem Quadrat einer ganzen Zahl nach dem Modul 2^2 ausfällt, ohne dass sie das Quadrat einer Einheit in k wird. Der verlangte Klassenkörper Kk ist dann der Körper $K(\sqrt{\varepsilon})$. Der Beweis für die Existenz einer solchen Einheit ε lässt sich durch eine ähnliche Schlussweise führen, wie sie im § 9 beim Beweise der Sätze 9a, 9b, 9c angewandt werden wird.

§ 8.

Im weiteren Verlaufe dieser Untersuchung wollen wir für einige andere Fälle die Gesetze der Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im Klassenkörper Kk genau erörtern und die Beweise der aufgestellten Behauptungen erbringen. Es mögen in diesem Paragraphen für den Grundkörper k folgende specielle Annahmen gelten:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.

2. Die Anzahl h der Idealklassen des Körpers k, im ursprünglichen weiteren Sinne, stimme mit der im engeren Sinne verstandenen Klassenanzahl $\bar{h}$ überein und sei gleich 2.

Unter diesen Annahmen ist der Klassenkörper Kk relativquadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Satz 9a. Der Klassenkörper Kk ist unverzweigt in Bezug auf k, d. h. er hat die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k.

Satz 9b. Die Klassenanzahl H und $\overline{H}$ des Klassenkörpers Kk, im weiteren sowie im engeren Sinne verstanden, sind ungerade ($H = \overline{H}$).

Satz 9c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in Kk in das Product zweier Primideale. Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in Kk Primideale; sie werden jedoch in Kk Hauptideale.

Von diesen drei Eigenschaften 9a, 9b, 9c charakterisirt jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk; wir haben somit die Sätze:

Satz 10a. Es giebt ausser Kk keinen anderen relativquadratischen Körper, der in Bezug auf k unverzweigt ist.

Satz 10b. Wenn ein zu k relativquadratischer Körper eine ungerade Klassenanzahl hat, so stimmt derselbe mit dem Klassenkörper Kk überein.

Satz 10c. Wenn alle Primideale in k, die in k Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper zerfallen, oder wenn alle Primideale in k, die in k nicht Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper Primideale bleiben, so folgt jedesmal, dass dieser relativquadratische Körper kein anderer als der Klassenkörper Kk ist.

§ 9.

Um die Existenz des Klassenkörpers Kk und sodann die Sätze 9a, 9b, 9c zu beweisen, machen wir der Kürze halber die Annahme, dass der Grundkörper k und seine sämmtlichen conjugirten Körper imaginär sind und nennen dann wie in § 3 eine ganze Zahl in k primär, wenn sie zu 2 prim ist und dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 2^2 congruent ausfällt.

Wir bestimmen jetzt ein System von Grundeinheiten in k und bezeichnen dieselben mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}$; ferner sei $\mathfrak{r}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers k, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, und es werde $\mathfrak{r}^2 = (\rho)$ gesetzt, wo ρ eine gewisse ganze Zahl in k bedeutet. Fügen wir sodann den obigen $\frac{m}{2} - 1$ Einheiten noch folgende Zahlen hinzu

$$\varepsilon_{\frac{m}{2}} = -1, \qquad \varepsilon_{\frac{m}{2}+1} = \rho,$$

so bilden die $\frac{m}{2} + 1$ Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ ein System von Zahlen dieser Beschaffenheit: jede ganze Zahl ξ in k, welche das Quadrat eines Ideals in k ist, lässt sich in der Gestalt

$$\xi = \varepsilon_1^{x_1} \varepsilon_2^{x_2} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{x_{\frac{m}{2}+1}} \alpha^2$$

darstellen, wo die Exponenten $x_1, x_2, \ldots, x_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe $0, 1$ haben und α eine ganze oder gebrochene Zahl in k bedeutet.

Endlich bestimmen wir mit Hinblick auf Satz 18 meiner Abhandlung ein System von Primidealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in k, die zu 2 prim sind, so dass

$$(1) \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = +1, \qquad (i \neq j) \qquad \left(i, j = 1, 2, \ldots, \tfrac{m}{2}+1\right)$$

ausfällt und zu diesen solche Exponenten $w_1, \ldots, w_{\frac{m}{2}+1}$ mit Werthen $0, 1$, dass die Producte

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1}, \mathfrak{q}_2 \mathfrak{r}^{w_2}, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}}$$

Hauptideale in k werden; es sei etwa

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1} = (\varkappa_1), \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1} \mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}} = \left(\varkappa_{\frac{m}{2}+1}\right),$$

wo $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse ganze Zahlen in k sind.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir den Ausdruck

$$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}}; \tag{2}$$

derselbe stellt, wenn man rechter Hand für die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$ beliebige Werthe $0, 1$ und für die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ irgend welche der Congruenzbedingung

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_{\frac{m}{2}+1} w_{\frac{m}{2}+1} \equiv 0, \quad (2) \tag{3}$$

genügende Werthe $0, 1$ nimmt, im Ganzen 2^{m+1} Zahlen dar. Rechnet man jetzt allgemein zwei ganze zu 2 prime Zahlen ω_1, ω_2 in k zu derselben Art, wenn ihr Product $\omega_1 \omega_2$ eine primäre Zahl ist, so lehrt die Betrachtung am Schlusse von § 21 meiner Abhandlung, dass es im Körper k genau 2^m verschiedene Arten von Zahlen giebt und es müssen also unter den Zahlen von der Gestalt (2) nothwendig wenigstens zwei Zahlen vorhanden sein, die derselben Art angehören. Das Product zweier solcher Zahlen ist eine primäre Zahl von der Gestalt

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}} \alpha^2, \tag{4}$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$, $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe $0, 1$ haben aber nicht sämmtlich gleich 0 sind und α eine ganze Zahl in k bedeutet.

Wenn in dem Ausdrucke (4) für die Zahl ω die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ sämmtlich sich gleich 0 herausstellten, so wäre nach Satz 4 und 5 meiner Abhandlung der Körper $K(\sqrt{\omega})$ ein in Bezug auf k unverzweigter relativquadratischer Körper und somit der verlangte Beweis für die Existenz des Klassenkörpers mit der Eigenschaft 9a erbracht.

Wir nehmen nun im Gegentheil an, es habe wenigstens einer der Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ den Werth 1 und zwar sei t deren genaue Anzahl; es sei etwa $v_{i_1} = 1$, $v_{i_2} = 1, \ldots, v_{i_t} = 1$, wo die Indices $i_1, i_2, \ldots, i_t$ gewisse t Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{m}{2} + 1$ bedeuten. Bei dieser Annahme müssen die t Primideale $\mathfrak{q}_{i_1}, \mathfrak{q}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i_t}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ aufgehen; wegen der Bedingung (3) und da ω primär ist, folgt ferner, dass es ausser diesen t Primidealen kein weiteres giebt, welches in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\omega})$ enthalten wäre. Die genannten t Primideale des Körpers k werden bez. die Quadrate gewisser t ambiger Primideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$, und die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers $K\sqrt{\omega})$ fällt daher genau gleich 2^t aus. Auch die weiteren Bezeichnungen des Satzes 22 in § 15 meiner Abhandlung benutzen wir: es möge der Körper k genau 2^{v^*} Einheitenverbände besitzen, die aus Relativnormen von Einheiten in $K\sqrt{\omega})$ entspringen, und es sei 2^{a^*} die Anzahl der ambigen Klassen, in denen ambige Ideale des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ enthalten sind.

Was das Verhalten der Ideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt{\omega})$ betrifft, so sind hier die folgenden zwei Fälle möglich:

I. Die Ideale des Körpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, werden in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale.

II. Die Ideale des Körpers k, welche in k nicht Hauptideale sind, werden auch in $K(\sqrt{\omega})$ nicht Hauptideale.

Indem wir das Verfahren, welches ich in meiner Abhandlung beim Beweise des Satzes 22 angewendet habe, auf der Körper $K(\sqrt{\omega})$ übertragen, finden wir leicht im Falle I die Gleichung

(5) $$a^* = t + v^* - \frac{m}{2}$$

und im Falle II die Gleichung

(6) $$a^* = t + v^* - \frac{m}{2} - 1.$$

§ 10.

Wir wollen ferner für die Zahl v^* eine obere von t und m abhängige Grenze ableiten. Zu dem Zweck mögen $x_1, \ldots, x_{\frac{m}{2}}$ irgend welche Exponenten $0, 1$ bedeuten; soll dann die Einheit

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{x_{\frac{m}{2}}}$$

die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ sein, so müssen nothwendig die t Bedingungen

$$\left(\frac{\varepsilon}{q_{i_1}}\right) = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon}{q_{i_t}}\right) = +1 \tag{8}$$

erfüllt sein.

Wir stellen nun der Reihe nach folgende Hülfssätze auf, welche für beide Fälle I, II gelten:

Hülfssatz 1. Jede Einheit ε des Körpers k, die den Bedingungen (7) genügt, ist nothwendig die Relativnorm einer Einheit des Relativkörpers $K(\sqrt{\omega})$.

Zum Beweise dieses Hülfssatzes unterscheiden wir, ob unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ vorkommt oder nicht. Im ersteren Falle sei $i_t = \frac{m}{2}+1$. Wir schliessen dann aus (7) mit Rücksicht auf (1), dass gewiss die Gleichungen

$$x_{i_1} = 0, \ldots, x_{i_{t-1}} = 0$$

bestehen müssen, und hieraus entnehmen wir, dass die Anzahl v^* der voneinander unabhängigen Einheitenverbände, welche aus den Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, höchstens gleich $\frac{m}{2} - t + 1$ ist.

Kommt andererseits unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2}+1$ nicht vor, so schliessen wir auf die nämliche Weise

$$x_{i_1} = 0, \ldots, x_{i_t} = 0$$

und mithin ist die Anzahl v^* der von einander unabhängigen Einheitenverbände, welche aus den Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ entspringen, in diesem Falle höchstens gleich $\frac{m}{2} - t$.

Wir erkennen leicht, dass im Falle I unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ die Zahl $\frac{m}{2} + 1$ nicht vorkommen kann. Wäre nämlich im Gegentheil das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ enthalten und bezeichnet P die ganze Zahl in $K(\sqrt{\omega})$, welche das Ideal $\mathfrak{r}$ darstellt, so muss die Relativnorm dieser Zahl P gleich einer Zahl in k von der Gestalt $\varepsilon\rho$ werden, wo ε eine Einheit in k bezeichnet und $\rho = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ die früher festgesetzte Bedeutung hat. Die hieraus folgende Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\rho}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right) = \left(\frac{\varepsilon\,\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right)$$

steht im Widerspruch mit der in (1) getroffenen Festsetzung für das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$.

Die bisherigen Überlegungen führen im Falle I zu der Ungleichung

$$v^* \leqq \frac{m}{2} - t \tag{8}$$

und im Falle II zu der Ungleichung

$$v^* \leqq \frac{m}{2} - t + 1 \tag{9}$$

Die Gleichungen (5), (6) und die Ungleichungen (8), (9) zeigen, dass in beiden Fällen I und II die Ungleichung $a^* \leqq 0$ gilt und da gewiss auch $a^* \geqq 0$ sein muss, so folgt nothwendig $a^* = 0$, d. h. es ist im Falle I

$$v^* = \frac{m}{2} - t \tag{10}$$

und im Falle II

$$v^* = \frac{m}{2} - t + 1. \tag{11}$$

Nunmehr können wir auch einsehen, dass im Falle II das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ in der Relativdiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ vorkommen muss. Wäre nämlich im Gegentheil die Zahl $\frac{m}{2}+1$ unter den Indices $i_1, \ldots, i_t$ nicht enthalten, so müsste, wie die vorhin angestellte Überlegung zeigt, die Ungleichung (8) gelten, was der Gleichung (11) widerspricht.

Wir sehen mit Rücksicht hierauf, dass die Einheiten ε in k, welche den Bedingungen (7) genügen, im Falle I genau $\frac{m}{2}-t$ und im Falle II genau $\frac{m}{2}-t+1$ von einander unabhängige Einheitenverbände ausmachen. Da diese Zahl wegen (10), (11) in beiden Fällen I, II gleich v^* ausfällt, so liefern jene Einheiten ε im ganzen 2^{v^*} Einheitenverbände; dieselben müssen daher mit denjenigen Einheitenverbänden übereinstimmen, deren Einheiten Relativnormen von Einheiten in $K(\sqrt{\omega})$ sind, d. h. in beiden Fällen I, II ist jede Einheit ε in k, die den Bedingungen (7) genügt, nothwendig die Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ und damit ist Hülfssatz 1 bewiesen.

Hülfssatz 2. Wenn $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $K(\sqrt{\omega})$ ist, dessen Quadrat einem Ideal in k äquivalent ausfällt, so ist auch $\mathfrak{J}$ stets einem Ideal in k äquivalent.

Beim Beweise verstehen wir unter S die Relativsubstitution $(\sqrt{\omega}:-\sqrt{\omega})$ und unter N die Relativnorm einer Zahl oder eines Ideals in $K(\sqrt{\omega})$. Da die Relativnorm des Ideals $\mathfrak{J}$

$$N(\mathfrak{J})=\mathfrak{J}\,.\,S\mathfrak{J}$$

jedenfalls ein Ideal in k ist und nach Voraussetzung $\mathfrak{J}^2$ einem Ideal in k äquivalent sein soll, so folgt, dass auch der Idealquotient $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k äquivalent sein muss.

Im Falle I ist $\mathfrak{j}$ gewiss in $K(\sqrt{\omega})$ ein Hauptideal. Wir beweisen andererseits, dass im Falle II das Ideal $\mathfrak{j}$ im Körper k Hauptideal ist. Wäre nämlich $\mathfrak{j}$ in k nicht Hauptideal, so wäre $\mathfrak{j}\mathfrak{r}\sim 1$, wo $\mathfrak{r}$ die früher festgesetzte Bedeutung hat; setzen wir dann

$$\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}\mathfrak{r}=A,$$

wo A eine gebrochene Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ ist, so folgt offenbar, indem wir auf beiden Seiten die Relativnorm bilden,

$$\varepsilon\rho = N(A), \tag{12}$$

wo ε eine Einheit und $\rho = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ die früher bestimmte Zahl in k bezeichnet. Da das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ im Falle II in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\omega})$ vorkommt, so erhalten wir wegen (12) die Gleichung

$$\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}}\right) = +1,$$

und diese widerspricht der in (1) getroffenen Festsetzung für das Primideal $\mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$.

Wir haben somit erkannt, dass in beiden Fällen I, II der Idealquotient $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ in $K(\sqrt{\omega})$ äquivalent 1 ausfällt; wir setzen demgemäss

$$\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}} = A, \tag{13}$$

wo A eine ganze oder gebrochene Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ ist. Bilden wir dann die Relativnorm

$$\varepsilon = N(A), \tag{14}$$

so ist ε eine Einheit in k, die den Bedingungen (7) genügen muss und diese Einheit ε wird daher nach dem oben bewiesenen Hülfssatz 1 gleich der Relativnorm einer Einheit in $K(\sqrt{\omega})$; wir setzen

$$\varepsilon = N(E^{-1}), \tag{15}$$

wo E eine Einheit in $K(\sqrt{\omega})$ ist. Aus (14) und (15) folgt

$$N(AE) = 1. \tag{16}$$

Setzen wir

$$B = 1 + S(AE),$$

(bez. $B = 1$, wenn etwa $AE = -1$ ist), so wird wegen (16)

$$\frac{SB}{B} = EA \quad (\text{bez.} = 1),$$

und hieraus entnehmen wir mit Rücksicht auf (13) die Gleichung für Ideale

$$\frac{S(B\mathfrak{J})}{B\mathfrak{J}} = 1,$$

d. h. $B\mathfrak{J}$ ist das Product eines ambigen Ideals des Körpers $K(\sqrt{\omega})$ in ein Ideal des Körpers k. Da nun für beide Fälle I, II früher die Gleichung $a^* = 0$ bewiesen worden ist und folglich alle ambigen Ideale in $K(\sqrt{\omega})$ Hauptideale sind, so folgt, dass auch das Ideal $\mathfrak{J}$ einem Ideal des Körpers k äquivalent sein muss. Hiermit ist der Beweis für den Hülfssatz 2 erbracht.

Hülfssatz 3. Wenn $\mathfrak{J}$ irgend ein Ideal in $K(\sqrt{\omega})$ ist, so giebt es stets einen ungeraden Exponenten u, so dass $\mathfrak{J}^u$ einem Ideal in k äquivalent ist.

In der That, ist H die Klassenanzahl des Körpers $K\sqrt{\omega})$ und setzen wir $H = 2^a u$, wo a einen gewissen Exponenten und u eine ungerade Zahl bedeutet, so folgt, dass $\mathfrak{J}^{2^a u} \sim 1$ sein muss und hieraus schliessen wir mit Rücksicht auf Hülfssatz 2 der Reihe nach, dass die Ideale $\mathfrak{J}^{2^{a-1}u}$, $\mathfrak{J}^{2^{a-2}u}, \ldots,$ $\mathfrak{J}^{2u}$, $\mathfrak{J}^u$ gewissen Idealen in k äquivalent ausfallen.

Hülfssatz 4. Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Körpers k bedeutet, für welches

$$(17) \qquad \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

ausfällt, so ist $\mathfrak{p}$ stets im Körper k ein Hauptideal.

Zum Beweise bedenken wir, dass wegen der Voraussetzung (17) das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ zerlegbar sein muss; wir setzen

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\,.\,S\mathfrak{P},$$

wo $\mathfrak{P}$, $S\mathfrak{P}$ zu einander relativconjugirte Ideale in $K(\sqrt{\omega})$ sind und verstehen dann mit Rücksicht auf Hülfssatz 3 unter u einen solchen ungeraden Potenzexponenten, dass $\mathfrak{P}^u$ einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k äquivalent wird. Hieraus folgt offenbar

$$\mathfrak{p}^u \sim \mathfrak{j}^2 \sim 1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{p} \sim 1.$$

§ 11.

Der gewünschte Nachweis für die Existenz der Klassenkörper mit den Eigenschaften 9a, 9b, 9c gelingt mittelst der folgenden Schlüsse. Wir wählen an Stelle der in § 9 bestimmten den Bedingungen (1) genügenden Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}$ irgend $\frac{m}{2}+1$ andere zu 2 prime Primideale $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}'$ mit den entsprechenden Eigenschaften

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i'}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i'}\right) = +1, \qquad (i \neq j)$$

$$\left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}+1\right)$$

und wählen wiederum die Exponenten $w_1', \ldots, w_{\frac{m}{2}+1}'$ in geeigneter Weise so, dass

$$\mathfrak{q}_1'\mathfrak{r}^{w_1'} = (\varkappa_1'), \ \ldots, \ \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}'\mathfrak{r}^{w_{\frac{m}{2}+1}'} = \left(\varkappa_{\frac{m}{2}+1}'\right)$$

und darin $\varkappa_1', \ldots, \varkappa_{\frac{m}{2}+1}'$ ganze Zahlen in k sind; sodann denken wir uns die sämmtlichen Schlussfolgerungen in § 9—§ 10 für das neue System von Primidealen $\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}'$ wiederholt. Auf diese Weise gelangen wir zu einem Ausdruck

$$\omega' = \varepsilon'\varkappa_1'^{v_1'} \ldots \varkappa_{\frac{m}{2}+1}'^{v_{\frac{m}{2}+1}'}, \tag{18}$$

in dem ε' eine gewisse Einheit in k und $v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}'$ gewisse Exponenten 0, 1 bedeuten; falls wir wie vorhin annehmen, dass die Exponenten $v_1', \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}'$ nicht sämmtlich gleich 0 ausfallen, folgern wir wiederum für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ die Gültigkeit der Hülfssätze 1—4, und entsprechend dem Hülfssatz 4 ist mithin jedes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k, für welches

$$\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

ausfällt, stets nothwendig ein Hauptideal des Körpers k.

Wir bezeichnen nun kurz mit $\mathfrak{w}_\omega$ alle diejenigen Primideale in k, für welche

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{w}_\omega}\right) = +1$$

ist, und mit $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ diejenigen Primideale in k für welche zugleich

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{w}_{\omega\omega'}}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{w}_{\omega\omega'}}\right) = +1$$

ausfällt, ferner mit $\mathfrak{w}^{(+)}$ diejenigen Primideale des Körpers k, welche Hauptideale in k sind, dagegen mit $\mathfrak{w}^{(-)}$ diejenigen Primideale des Körpers k, welche nicht Hauptideale in k sind.

Da die Zahlen ω, ω' sicher nicht Quadrate von ganzen Zahlen in k sind und bei unseren Annahmen wegen der Verschiedenheit der Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{\frac{m}{2}+1}, \mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}$ das Nämliche auch für das Produkt $\omega\omega'$ gilt, so folgen aus Satz 17 meiner Abhandlung die Gleichungen

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{(\mathfrak{w}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_\omega)^s} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{s-1} + f_\omega(s), && (s>1)\\ &\sum_{(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})^s} = \frac{1}{4}\log\frac{1}{s-1} + f_{\omega\omega'}(s); && (s>1)\end{aligned}\right.$$

hier sind die unendlichen Summen über alle Primideale $\mathfrak{w}_\omega$ bes. $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ zu erstrecken und $f_\omega(s)$, $f_{\omega\omega'}(s)$ bedeuten Functionen der reellen Veränderlichen s, welche stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn s sich dem Werthe 1 nähert; n bezeichnet stets die Norm im Körper k.

Die Primideale $\mathfrak{w}_\omega$ sind offenbar sämmtlich von den Primidealen $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ verschieden und da nach dem vorhin Bewiesenen die Primideale $\mathfrak{w}_\omega$, $\mathfrak{w}_{\omega\omega'}$ sämmtlich unter den Primidealen $\mathfrak{w}^{(+)}$ vorkommen, so haben wir

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \geqq \sum_{(\mathfrak{w}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_\omega)^s} + \sum_{(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}_{\omega\omega'})^s} \qquad (s>1)$$

und folglich wegen (19)

$$(20) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \geqq \frac{3}{4}\log\frac{1}{s-1} + f_\omega(s) + f_{\omega\omega'}(s);$$

hier sind die unendlichen Summen wiederum über alle Primideale mit den betreffenden Eigenschaften zu erstrecken.

Die Primideale $\mathfrak{w}^{(+)}$, $\mathfrak{w}^{(-)}$ erschöpfen offenbar die sämmtlichen Primideale $\mathfrak{w}$ in k, und es ist daher

$$(21) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} = \log\frac{1}{s-1} + f(s),$$

wo die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{w})}$ über sämmtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in k erstreckt werden soll und $f(s)$ wiederum eine für Werte $s > 1$, die sich dem Werte 1 nähern, zwischen endlichen Grenzen bleibende Grösse bezeichnet. Aus (20) und (21) zusammen folgt die Ungleichung

$$(22) \quad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \geqq \frac{1}{2} \log \frac{1}{s-1} + 2f_\omega(s) + 2f_{\omega\omega'}(s) - f(s).$$

Nunmehr stellen wir folgenden Hülfssatz über die Ideale des Körpers k auf:

Hülfssatz 5. Wenn in dem Ausdrucke

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s}, \qquad (s>1)$$

die erste Summe über alle Primideale $\mathfrak{w}^{(+)}$ und die zweite Summe über alle Primideale $\mathfrak{w}^{(-)}$ erstreckt wird, so stellt dieselbe eine solche Function der reellen Veränderlichen s dar, welche stets unterhalb einer *positiven* endlichen Grenze bleibt, wenn die reelle Veränderliche s sich der Grenze 1 nähert.

Der Beweis dieses Satzes wird durch die nämliche Schlussweise geführt, wie sie beim Beweise des Satzes 31 in meiner Abhandlung angewandt worden ist.

Wir erkennen, dass die Ungleichung (22) unmittelbar einen Widerspruch gegen den Hülfssatz 5 enthält, und mithin ist unsere ursprüngliche Annahme zu verwerfen, d. h. es müssen in der Gleichung (4) die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+1}$ oder das zweite Mal in der entsprechenden Gleichung (18) die Exponenten $v'_1, \ldots, v'_{\frac{m}{2}+1}$ sämmtlich 0 sein; in der Zahl ω bez. ω' haben wir also eine Zahl des Körpers k, welche als Ideal das Quadrat eines Ideals in k darstellt, die überdies congruent dem Quadrat einer Zahl in k nach dem Modul 2^2 wird und doch nicht das Quadrat einer Zahl in k ist.

Der Körper $K(\sqrt{\omega})$ bez. $K(\sqrt{\omega'})$ ist der gesuchte Klassenkörper Kk zum Grundkörper k, da er die in Satz 9a ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Damit ist die schwierigste Aufgabe in der hier erörterten Theorie gelöst.

§ 12.

Der Beweis für den Satz 9 b sowie für die zweite Aussage des Satzes 9 c ist aus den bisherigen Entwickelungen leicht zu entnehmen. Nicht so einfach gelingt der Nachweis für die erste Aussage des Satzes 9 c, wonach jedes Primideal des Körpers k, das in k der Hauptklasse angehört, im Klassenkörper Kk, der jetzt $K(\sqrt{\omega})$ ist, weiter zerlegbar sein muss. Wir führen diesen Nachweis in folgender Weise:

Nach dem in § 11 Bewiesenen ist die Zahl ω von der Gestalt (4):

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \varepsilon_2^{u_2} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}^{u_{\frac{m}{2}+1}},$$

wo die Exponenten $u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+1}$ gewisse Werthe 0, 1 haben, aber nicht sämmtlich gleich 0 sind: es sei etwa $u_i = 1$; dann bezeichnen wir die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}, \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}$ bez. mit $\overset{*}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{*}{\varepsilon}_{\frac{m}{2}}$ und bestimmen $\frac{m}{2}$ von $\mathfrak{r}$ verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}}$ in k derart, dass

$$\left(\frac{\overset{*}{\varepsilon}_h}{\mathfrak{p}_h}\right) = -1, \qquad \left(\frac{\overset{*}{\varepsilon}_h}{\mathfrak{p}_k}\right) = +1, \qquad (h \neq k)$$

$$\left(h, k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

$$(23) \qquad \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_h}\right) = +1, \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}\right)$$

wird. Wegen (23) sind nach der zweiten Aussage des Satzes 9 c diese Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich Hauptideale in k; wir setzen

$$\mathfrak{p}_1 = (\pi_1), \ldots, \mathfrak{p}_{\frac{m}{2}} = \left(\pi_{\frac{m}{2}}\right),$$

wo $\pi_1, \ldots, \pi_{\frac{m}{2}}$ ganze Zahlen in k bedeuten. Nunmehr wollen wir zeigen, dass ein Ausdruck von der Gestalt

$$(24) \qquad \overset{*}{\omega} = \overset{*}{\varepsilon}_1^{\overset{*}{u}_1} \ldots \overset{*}{\varepsilon}_{\frac{m}{2}}^{\overset{*}{u}_{\frac{m}{2}}} \pi_1^{v_1} \ldots \pi_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}},$$

$$\left(\overset{*}{u}_1, \ldots, \overset{*}{u}_{\frac{m}{2}}, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}} = 0, 1\right)$$

nur dann eine primäre Zahl in k darstellen kann, wenn die Exponenten $u_1^*, \ldots, u_{\frac{m}{2}}^*, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ sämmtlich den Werth 0 haben. In der That, wäre ω^* primär und wenigstens einer dieser Exponenten gleich 1, so beweisen wir wie oben durch Hülfssatz 4, dass alle Primideale in k, welche in $K(\sqrt{\omega^*})$ zerlegbar werden, in k Hauptideale sind, d. h. es müssten dann alle Primideale $\mathfrak{w}$, nach welchen $\mathfrak{w}^*$ quadratischer Rest ist, Hauptideale in k sein. Die Thatsache, dass zugleich auch alle Primideale $\mathfrak{w}$, nach denen ω quadratischer Rest ist, Hauptideale in k sind, führt uns wie früher in § 11 auf einen Widerspruch.

Aus der soeben erkannten Thatsache, dass der Ausdruck (24) ausser der Zahl 1 niemals eine primäre Zahl darstellen kann, ziehen wir leicht durch ein ähnliches Schlussverfahren, wie wir es früher angewandt haben, diese Folgerung: wenn $\varkappa$ eine beliebige zu 2 prime ganze Zahl in k ist, so lässt sich stets ein System von Exponenten $u_1^*, \ldots, u_{\frac{m}{2}}^*, v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}}$ finden derart dass der Ausdruck

$$(25) \qquad \varkappa \varepsilon_1^{*u_1^*} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{*u_{\frac{m}{2}}^*} \pi_1^{v_1} \ldots \pi_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}$$

eine primäre Zahl in k darstellt.

Es sei nun $\mathfrak{q}$ irgend ein Primideal der Hauptklasse in k; wir setzen $\mathfrak{q} = (\varkappa)$, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl in k bedeutet und nehmen entgegen der zu beweisenden Behauptung an, es sei $\mathfrak{q}$ in $K(\sqrt{\omega})$ unzerlegbar. Wir bilden für die Zahl $\varkappa$ den Ausdruck (25) und bezeichnen denselben mit α. Endlich bestimmen wir in k ein von $\mathfrak{r}$ verschiedenes Primideal $\bar{\mathfrak{r}}$, welches in k nicht Hauptideal ist, und eine Zahl σ in k, so dass $\sigma = \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}$ wird; wir setzen $\bar{\omega} = \frac{\omega\sigma^2}{\rho^2}$ oder $\bar{\omega} = \omega$, jenachdem ω den Faktor $\mathfrak{r}^2$ enthält oder nicht.

Da nach Satz 9 b der Körper $K(\sqrt{\omega})$ eine ungerade Klassenanzahl besitzt, so gilt mit Rücksicht darauf, dass α primär ist, nach dem in meiner Abhandlung für diesen Fall bewiesenen quadratischen Reciprocitätsgesetz die Formel

$$(26) \qquad \left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\omega}}}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{\alpha}\right\};$$

hierbei habe die geschwungene Klammer für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ die entsprechende Bedeutung des quadratischen Restcharakters, wie die gewöhnliche

Klammer für den Körper k. Das Hauptideal $\sqrt{\varpi}$ im Körper $K(\sqrt{\omega})$ ist entweder gleich 1 oder gleich dem Primideal $\mathfrak{r}$. Fällt nun $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ aus, so ist gewiss auch $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right) = -1$, so wird wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) = -1$ nothwendig $\left(\frac{\alpha\omega}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ und umsomehr $\left\{\frac{\alpha\omega}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Andererseits ist wegen $\omega = (\sqrt{\omega})^2$ nothwendig $\left\{\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$ und folglich auch $\left\{\frac{\alpha}{\mathfrak{r}}\right\} = +1$. Wir haben also in jedem Falle gewiss $\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\varpi}}\right\} = +1$ und wegen (26) folgt hieraus

$$\left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{\alpha}\right\} = +1. \tag{27}$$

Wenn A irgend eine ganze zu $\mathfrak{q}$ prime Zahl in $K(\sqrt{\omega})$ bedeutet, so gelten nach dem Primideal $\mathfrak{q}$ des Körpers k, das auch in $K(\sqrt{\omega})$ Primideal bleiben sollte, folgende Congruenzen

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{q}}\right\} \equiv A^{\frac{n(\mathfrak{q})^2-1}{2}}, \qquad (\mathfrak{q})$$

$$\left(\frac{NA}{\mathfrak{q}}\right) \equiv (NA)^{\frac{n(\mathfrak{q})-1}{2}}, \qquad (\mathfrak{q})$$

und da

$$SA \equiv A^{n(\mathfrak{q})}, \qquad NA \equiv A^{n(\mathfrak{q})+1}, \qquad (\mathfrak{q})$$

ausfällt, so wird mithin

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{q}}\right\} = \left(\frac{NA}{\mathfrak{q}}\right).$$

Nehmen wir insbesondere $A = \sqrt{\varpi}$, so erhalten wir

$$\left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{x}\right\} = \left(\frac{-\varpi}{x}\right). \tag{28}$$

Andererseits ist wegen (23) allgemein das Primideal $\mathfrak{p}_h$ in $K(\sqrt{\varpi})$ zerlegbar; wir setzen

$$\mathfrak{p}_h = \mathfrak{P}_h \cdot S\mathfrak{P}_h, \qquad \left(h=1,2,\ldots,\frac{m}{2}\right)$$

wo $\mathfrak{P}_h$ ein Primideal in $K(\sqrt{\omega})$ bedeutet. Da

$$\left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{\mathfrak{p}_h}\right\} = \left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{\mathfrak{P}_h}\right\}\left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{S\mathfrak{P}_h}\right\}, \qquad \left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{\mathfrak{P}_h}\right\} = \left\{\frac{-\sqrt{\varpi}}{S\mathfrak{P}_h}\right\}$$

wird, so haben wir

$$(29)\qquad \left\{\frac{\sqrt{\varpi}}{\mathfrak{p}_h}\right\} = \left\{\frac{-1}{\mathfrak{P}_h}\right\} = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}_h}\right).$$

Wegen (27), (28), (29) ist mit Rücksicht auf die Bedeutung von α

$$\left(\frac{-\varpi}{x}\right)\left(\frac{-1}{\pi_1}\right)^{v_1}\cdots\left(\frac{-1}{\pi_{\frac{m}{2}}}\right)^{v_{\frac{m}{2}}} = +1$$

und folglich

$$(30)\qquad \left(\frac{-1}{\alpha}\right)\left(\frac{\varpi}{x}\right) = +1.$$

Da die Zahl α primär ist, d. h. dem Quadrat einer ganzen Zahl in k congruent nach 2^2 ausfällt, so folgt leicht, dass $n(\alpha)\equiv 1$ nach 2^2 und mithin

$$\left(\frac{-1}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{n(\alpha)-1}{2}} = +1$$

sein muss; wir erhalten mithin aus (30) die Gleichung

$$\left(\frac{\varpi}{x}\right) = +1 \quad \text{und somit auch} \quad \left(\frac{\omega}{x}\right) = +1,$$

welche der Annahme widerspricht, wonach $\mathfrak{q}$ in k unzerlegbar sein sollte; diese Annahme ist somit als unzutreffend erkannt, d. h. jedes Primideal des Körpers k, welches der Hauptklasse in k angehört, zerfällt in $K(\sqrt{\omega})$ in das Product zweier Primideale, wie Satz 9c in seinem ersten Theile aussagt.

§ 13.

Wir erörtern jetzt die Reciprocitätsgesetze für quadratische Reste im Körper k unter den besonderen Annahmen $h = \bar{h} = 2$, wie sie in § 8 über den Körper k gemacht worden sind. Der erste Ergänzungssatz lässt sich wieder genau wie früher in der Form des Satzes 1 aussprechen, sobald wir dem Begriff »primäres Ideal« die folgende engere Fassung geben: wir nennen in dem zu Grunde gelegten Körper k ein zu 2 primes Ideal $\mathfrak{a}$ dann *primär*, wenn für dasselbe

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

ausfällt — nicht nur für alle Einheiten ξ, sondern auch für diejenigen ganzen Zahlen ξ in k, die Quadrate von Idealen sind, d. h. wenn

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{a}}\right) = +1, \qquad \left(\frac{\varepsilon_2}{\mathfrak{a}}\right) = +1\,, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_{\frac{m}{2}+1}}{\mathfrak{a}}\right) = +1$$

wird. Indem wir in entsprechender Weise den Begriff eines hyperprimären Ideals in dem zu Grunde liegenden Körper k enger fassen, gilt auch der zweite Ergänzungssatz in der früher aufgestellten Form des Satzes 2 und ebenso auch das allgemeine Reciprocitätsgesetz in der Fassung des Satzes 3.

Um den Beweis für diese Reciprocitätsgesetze zu führen, bedenken wir, dass der Klassenkörper $K(\sqrt{\omega})$ eine ungerade Klassenanzahl hat. Für einen solchen Körper habe ich das Reciprocitätsgesetz in meiner Abhandlung bereits bewiesen. Aus diesem Reciprocitätsgesetz für den Körper $K(\sqrt{\omega})$ gewinnen wir sodann ohne Schwierigkeit durch ein geeignetes Schlussverfahren die eben genannten Reciprocitätsgesetze für den Körper k.

In meiner Abhandlung habe ich unter den in § 3 der vorliegenden Arbeit gemachten Annahmen gezeigt, wie die Idealklassen eines beliebigen in Bezug auf k relativquadratischen Körpers in Geschlechter einzutheilen sind. Unter der gegenwärtigen Annahme $h = \bar{h} = 2$, die wir im § 8 für den Körper k gemacht haben, theilen wir die Idealklassen eines beliebigen relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ in Bezug auf k auf folgende Weise in Geschlechter ein. Es sei $\mathfrak{J}$ ein beliebiges Ideal des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Wir definiren zunächst wie in dem Falle, den meine Abhandlung betrifft, das Charakterensystem einer Zahl des Körpers k. Sodann verstehen wir unter $\mathfrak{r}$ ein bestimmtes zu 2 primes Ideal, welches nicht der Hauptklasse in k angehört, und wählen dann den Exponenten $u = 0, 1$ derart, dass im Körper k das Product der Relativnorm von $\mathfrak{J}$ dem Ideal $\mathfrak{r}^u$ äquivalent wird: es sei etwa

$$N(\mathfrak{J})\mathfrak{r}^u = (\iota),$$

wo ι eine geeignete ganze Zahl in k bedeutet. Endlich bilden wir das Charakterensystem für die Zahl ι und fügen diesem noch die Einheit $(-1)^u$ hinzu. Das so erhaltene System von Einheiten ± 1 heisse das Charakterensystem des Ideals $\mathfrak{J}$. Alle Ideale, die dasselbe Charakterensystem besitzen, bilden ein Geschlecht. *Es gilt wiederum der Fundamen-*

talsatz, dass stets genau die Hälfte aller möglichen Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter in $K(\sqrt{\mu})$ vertreten sind.

Wenn für einen Körper k der Werth der Klassenanzahl h im ursprünglichen Sinne und der Klassenanzahl $\bar{h}$ im engeren Sinne zusammenfallen und nicht gleich 2, sondern das Doppelte irgend einer ungeraden Zahl sind, so bedürfen die in § 8—§ 13 ausgesprochenen Sätze nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 14.

Es möge endlich kurz die Annahme behandelt werden, dass der Grundkörper k die Klassenanzahl $h = \bar{h} = 4$ besitzt; wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Es giebt eine Klasse C in k derart, dass C, C^2, C^3, $C^4 = 1$ die 4 Klassen des Körpers k darstellen.

B. Es giebt zwei Klassen C_1, C_2 in k derart, dass C_1, C_2, $C_1C_2 = C_3$, $C_1^2 = C_2^2 = 1$ die 4 Klassen des Körpers k darstellen.

Im Falle A. ist der Klassenkörper Kk des Körpers k relativcyklisch vom Relativgrade 4 in Bezug auf k und weist folgende fundamentale Eigenschaften auf:

Satz 11a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1.

Satz 11b. Die Klassenanzahl $H, \bar{H}$ des Klassenkörpers Kk im ursprünglichen bez. im engeren Sinne ist eine ungerade Zahl. Der Klassenkörper Kk besitzt einen und nur einen relativquadratischen Unterkörper UKk. Die Klassenanzahl von UKk ist das Doppelte einer ungeraden Zahl.

Satz 11c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, d. h. der Klasse 1 angehören, zerfallen in Kk in das Product von 4 Primidealen. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C^2 angehören, zerfallen in UKk in das Product zweier solcher Primideale, die im Körper Kk unzerlegbar bleiben. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C oder C^3 angehören, bleiben in Kk unzerlegbar; sämtliche Ideale in k werden in Kk Hauptideale.

Von diesen 3 Eigenschaften 11a, 11b, 11c charakterisirt jede für sich allein bei unserer Annahme über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk; wir haben somit insbesondere folgende Sätze:

Satz 12a. Wenn ein relativquadratischer Körper die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k besitzt, so stimmt derselbe mit UKk überein. Wenn ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade 4 in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1 besitzt, so stimmt er mit Kk überein.

Satz 12b. Wenn ein relativquadratischer Körper in Bezug auf k eine Klassenanzahl besitzt, die das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, so stimmt dieser Körper mit UKk überein.

Satz 12c. Wenn ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade 4 in Bezug auf k eine ungerade Klassenanzahl besitzt, so stimmt er mit Kk überein.

Im Falle B. ist der Klassenkörper Kk des Körpers k relativ-Abel'sch vom Relativgrade 4 und weist folgende fundamentale Eigenschaften auf:

Satz 13a. Der Klassenkörper Kk hat in Bezug auf k die Relativdiskriminante 1.

Satz 13b. Die Klassenanzahl des Körpers Kk ist ungerade. Der Klassenkörper Kk besitzt drei relativquadratische Unterkörper UKk_1, UKk_2, UKk_3 in Bezug auf k. Die Klassenanzahl eines jeden dieser drei Unterkörper ist gleich dem Doppelten einer ungeraden Zahl.

Satz 13c. Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, d. h. der Klasse 1 angehören, zerfallen in Kk in das Product von vier Primidealen. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C_1 angehören, zerfallen in einem jener drei Unterkörper, etwa in UKk_1, in das Product von zwei Primidealen und sind in jedem der beiden anderen Unterkörper, also in UKk_2, UKk_3 unzerlegbar. Diejenigen Primideale in k, welche der Klasse C_2 bez. C_3 angehören, zerfallen etwa in UKk_2 bez. UKk_3 in das Product von zwei Primidealen und sind in UKk_1, UKk_3 bez. in UKk_1, UKk_2 unzerlegbar. *Sämtliche Ideale des Körpers k werden in jedem der drei relativquadratischen Körper UKk_1, UKk_2, UKk_3 Hauptideale.*

Von diesen Eigenschaften charakterisirt wiederum jede für sich vollständig den Klassenkörper Kk und die drei Unterkörper UKk_1, UKk_2, UKk_3.

Die eben aufgestellten Sätze 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 12c, 13a, 13b, 13c bestätigen, wie wir leicht erkennen, unter der gegenwärtigen Annahme $h = \bar{h} = 4$ sowohl im Falle A. wie im Falle B. die Gültigkeit der weiter unten in § 16 aufgestellten allgemeinen Sätze 14 und 15.

Zum Beweise der Sätze 11, 12, 13 ist vor Allem nöthig, zu zeigen, dass für den Grundkörper k bei der gemachten Annahme stets wenigstens ein relativquadratischer Körper mit der Relativdiskriminante 1 existirt. Sodann hat man in Bezug auf diesen noch einen weiteren relativquadratischen Körper mit der Relativdiskriminante 1 zu construiren, was auf Grund des schon bewiesenen Satzes 9a stets möglich ist.

Wenn für einen Körper k der gemeinsame Werth der Klassenanzahl h im ursprünglichen Sinne und der Klassenanzahl $\bar{h}$ im engeren Sinne nicht gleich 4, sondern das Vierfache irgend einer ungeraden Zahl ist, so bedürfen die hier ausgesprochenen Sätze nur einer geringen und aus meiner Abhandlung leicht zu entnehmenden Abänderung.

§ 15.

Die im Vorstehenden bewiesenen und im folgenden Paragraph (§ 16) allgemein ausgesprochenen Sätze zeigen, dass für die vollständige Untersuchung der arithmetischen Eigenschaften eines beliebig vorgelegten Grundkörpers k vor Allem die Kenntniss des zu k gehörigen Klassenkörpers Kk erforderlich ist. Unsere Entwickelungen setzen uns in den Stand, in jedem besonderen Falle auf arithmetischem Wege den Klassenkörper Kk wirklich zu finden. Im Folgenden wollen wir auf eine transcendente Bestimmungsweise des Klassenkörpers hinweisen, die der bekannten von Dirichlet ersonnenen Methode der transcendenten Bestimmung der Klassenanzahl entspricht.

Wir machen für den Grundkörper k die besondere Annahme $h=\bar{h}=2$ und bezeichnen mit $\varkappa$ die in meinem Berichte *Über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*[1] im § 24 definirte, dem Körper k eigenthümliche Zahl; ferner mögen H die Klassenanzahl des Klassenkörpers Kk und K die entsprechend definirte Zahl für den Klassenkörper Kk bezeichnen: dann gilt die folgende Formel

$$(31)\qquad \underset{s=1}{\mathrm{L}}\left\{\sum_{(\mathfrak{j}^{(+)})}\frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(+)})^s}-\sum_{(\mathfrak{j}^{(-)})}\frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(-)})^s}\right\}=\frac{H\mathsf{K}}{h\varkappa},\qquad (s>1)$$

worin die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{j}^{(+)})}$ über alle Hauptideale $\mathfrak{j}^{(+)}$ in k und die Summe $\sum\limits_{(\mathfrak{j}^{(-)})}$

[1] Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV, 1894—95, S. 229.

über alle diejenigen Ideale $\mathfrak{j}^{(-)}$ erstreckt werden soll, die nicht Hauptideale in k sind. Der Ausdruck K enthält in gewisser Weise die Logarithmen der Einheiten des Klassenkörpers Kk, so dass durch denselben die erwünschte Bestimmung des Klassenkörpers ermöglicht ist.

Zum Beweise der Formel (31) betrachten wir das Product

$$(32) \qquad \zeta(s) = \prod_{(\mathfrak{w})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w})^{-s}},$$

in welchem $\mathfrak{w}$ alle Primideale des Körpers k durchläuft; dasselbe convergirt für reelle Werthe von $s > 1$ und es ist

$$(33) \qquad \underset{s=1}{\mathrm{L}} \{(s-1)\zeta(s)\} = h\varkappa.$$

Das entsprechende Product für den Körper Kk lautet

$$Z(s) = \prod_{(\mathfrak{W})} \frac{1}{1 - nN(\mathfrak{W})^{-s}}, \qquad (s>1)$$

wo rechter Hand $\mathfrak{W}$ alle Primideale von Kk durchläuft und nN die Norm der Relativnorm von $\mathfrak{W}$ in k, d. h. die Norm in Kk bedeutet. Es ist dann

$$(34) \qquad \underset{s=1}{\mathrm{L}} \{(s-1)Z(s)\} = H\mathsf{K}.$$

Wir unterscheiden nun unter den Primidealen $\mathfrak{W}$ diejenigen die durch Zerlegung irgend eines Primideals in k entstehen, und diejenigen, die Primideale in k sind. Wegen Satz 9c fällt für die ersteren $N(\mathfrak{W})$ gleich einem Primideal $\mathfrak{w}^{(+)}$ der Hauptklasse in k aus; für die letzteren dagegen ist $N(\mathfrak{W})$ gleich dem Quadrat eines Primideals $\mathfrak{w}^{(-)}$ in k, welches nicht der Hauptklasse in k angehört. Mit Rücksicht hierauf wird

$$Z(s) = \prod_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{(1 - n(\mathfrak{w}^{(+)})^{-s})^2} \prod_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w}^{(-)})^{-2s}}$$

und hieraus folgt wegen (32)

$$\frac{Z(s)}{\zeta(s)} = \prod_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{w}^{(+)})^{-s}} \prod_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{1 + n(\mathfrak{w}^{(-)})^{-s}} = \sum_{(\mathfrak{j}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{j}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{j}^{(-)})^s};$$

diese Gleichung liefert, wenn wir zur Grenze $s = 1$ übergehen, mit Rücksicht auf (33), (34) den verlangten Beweis der Formel (31).

§ 16.

Es sei endlich k ein völlig beliebiger Zahlkörper. Wir treffen folgende Festsetzungen, in denen gar keine beschränkende Annahme für k liegt:

1. Unter den m conjugirten Körpern $k, k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ gebe es eine beliebige Anzahl s reeller Körper; es seien dies die Körper $k, k', k'', \ldots, k^{(s-1)}$.
2. Die Anzahl der Idealklassen des Körpers k, im engeren Sinne verstanden, sei eine beliebige Zahl $\bar{h}$.

Ein in Bezug auf k relativ-Abel'scher Körper K heisse *unverzweigt*, wenn die Relativdiskriminante von K in Bezug auf k gleich 1 ausfällt, oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das durch das Quadrat eines Primideals in K theilbar wird. Wir stellen dann folgende Theoreme auf, die im Vorstehenden für gewisse besondere Fälle bewiesen worden sind, deren vollständiger Beweis jedoch, wie ich überzeugt bin, auf Grund der von mir angegebenen Methoden gelingen muss:

Satz 14. *Es giebt in Bezug auf k stets einen völlig bestimmten relativ-Abel'schen unverzweigten Körper Kk vom Relativgrade $\bar{h}$; dieser Körper Kk heisse der Klassenkörper von k. Der Klassenkörper Kk enthält sämmtliche in Bezug auf k relativ-Abel'schen unverzweigten Körper als Unterkörper.*

Die Relativgruppe des Klassenkörpers Kk ist mit derjenigen Abel'schen Gruppe holoedrisch isomorph, die durch die Zusammensetzung der Idealklassen in k bestimmt wird. [1]

Diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k, welche der nämlichen Idealklasse von k, im engeren Sinne verstanden, angehören, erfahren im Klassenkörper Kk eine Zerlegung in Primideale der nämlichen Anzahl und der nämlichen Grade, so dass die weitere Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper K nur von der Klasse abhängt, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

[1] Man vergleiche hierzu die Untersuchungen von H. Weber, *Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern*, Mathematische Annalen, Bd. 48, S. 433 und Bd. 49, S. 83.

Definition 7. Eine ganze Zahl A des Klassenkörpers Kk heisse eine *Ambige* dieses Körpers Kk, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Die ganze Zahl A sei total positiv (Vgl. Definition 5); d. h. das durch A dargestellte Ideal gehöre auch im engeren Sinne der Hauptklasse in k an.

b) Jede zu A relativconjugirte Zahl soll sich von A nur um einen Factor unterscheiden, welcher eine Einheit in Kk ist.

Eine Ambige heisse eine *Primambige*, wenn sie nicht eine Einheit ist und sich nicht als ein Product von zwei Ambigen darstellen lässt, von denen keine eine Einheit ist.

Satz 15. *Jede Ambige des Klassenkörpers Kk stellt ein Ideal des Grundkörpers k dar und umgekehrt jedes Ideal des Grundkörpers k lässt sich durch eine Ambige des Klassenkörpers Kk darstellen; diese ist abgesehen von einem Einheitsfactor durch jenes Ideal bestimmt.*

Jede Ambige des Klassenkörpers Kk ist mithin auf eine und nur auf eine Weise in ein Product von Primambigen zerlegbar, wenn man dabei von der Willkür der auftretenden Einheitsfactoren absieht.

Die in diesem Satze aufgestellte Eigenschaft kommt unter allen relativ-Abel'schen Körpern in Bezug auf k allein dem Klassenkörper Kk zu.

Das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste drückt sich auch in dem beliebigen Körper k durch die Formel des Satzes 7 aus. Auch das Reciprocitätsgesetz für höhere Potenzreste gestattet eine ebenso einfache und allgemeingültige Fassung.[1]

Endlich sei noch bemerkt, dass die gehörige Verallgemeinerung dieser Entwickelungen zur Begründung einer Theorie der »Ringklassenkörper« führt, d. h. solcher relativ-Abel'scher Körper in Bezug auf k, die zu den Idealklassen eines Ringes in k in einem entsprechenden engen Zusammenhange stehen, wie der hier behandelte Klassenkörper Kk zu den gewöhnlichen Idealklassen des Körpers k.

---

[1] Vgl. die Preisaufgabe der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen für das Jahr 1901. Mathematische Annalen, Bd. 51, S. 159. Die preisgekrönte Arbeit von FURTWÄNGLER erscheint demnächst in den Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen.