SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES

PAR

C. GUICHARD

à RENNES.

Soit:

$$\frac{d^n z}{dx^n} + R_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + R_n z = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire et homogène, où les R_i sont des fonctions rationnelles de deux variables x, y liées par une équation algébrique:

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Soit $x = a, y = b$, un point de ramification d'ordre m de la courbe (2). Supposons que pour $x = a, y = b$, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ restent finis. Je vais démontrer le théorème suivant:

Si la variable x tourne m fois autour du point a, les n intégrales de l'équation (1) *reprennent leur valeur initiale.*

Je démontrerai ce théorème en supposant $n = 4$. On verra facilement que la démonstration s'étend au cas général. J'écris l'équation (1) sous la forme suivante:

$$(x-a)^4 \frac{d^4 z}{dx^4} + (x-a)^3 . P_1 . \frac{d^3 z}{dx^3} + (x-a)^2 P_2 . \frac{d^2 z}{dx^2} \tag{3}$$

$$+ (x-a) P_3 . \frac{dz}{dx} + P_4 = 0.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur les coefficients, P_1, P_2, P_3, P_4 contiennent respectivement en facteur, $x - a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, $(x-a)^4$.

Cela posé, je ramène les m portions de plan qui se raccordent au point a à la forme élémentaire par le changement de variable:

$$x - a = \xi^m.$$

L'équation (3) se transforme alors en la suivante:

$$\xi^4 \frac{d^4 z}{d\xi^4} + Q_1 \xi^3 \frac{d^3 z}{d\xi^3} + Q_2 \xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + Q_3 \xi \frac{dz}{d\xi} + Q_4 z = 0. \tag{4}$$

Pour calculer les coefficients Q je remarque que l'on a:

$$(x-a)\cdot\frac{dF}{dx} = \frac{1}{m}\cdot\xi\frac{dF}{d\xi}. \tag{5}$$

En prenant pour F successivement, z, $(x-a)\frac{dz}{dx}$, ... on aura:

$$(x-a)\frac{dz}{dx} = \frac{1}{m}\cdot\xi\frac{dz}{d\xi},$$

$$(x-a)\frac{d}{dx}\left[(x-a)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{1}{m^2}\cdot\xi\cdot\frac{d}{d\xi}\left[\xi\frac{dz}{d\xi}\right],$$

d'où:

$$(x-a)^2\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{m^2}\left[\xi^2\frac{d^2 z}{d\xi^2} - (m-1)\xi\frac{dz}{d\xi}\right].$$

Je dis que d'une manière générale on a:

$$(x-a)^q\frac{d^q z}{dx^q} = \frac{1}{m^q}\left[\xi^q\frac{d^q z}{d\xi^q} + a_{q1}\xi^{q-1}\frac{d^{q-1} z}{d\xi^{q-1}} + a_{q2}\xi^{q-2}\frac{d^{q-2} z}{d\xi^{q-2}} + \dots\right]. \tag{6}$$

Il suffit pour cela de démontrer que si cette formule est exacte pour une valeur de q, elle l'est encore pour la valeur suivante.

Appliquons la formule (5) aux deux membres de la relation (6). On aura:

$$(x-a)^{q+1}\frac{d^{q+1} z}{dx^{q+1}} + q(x-a)^q\frac{d^q z}{dx^q} = \frac{1}{m^{q+1}}\left[\xi^{q+1}\frac{d^{q+1} z}{d\xi^{q+1}} + a_{q1}\xi^q\frac{d^q z}{d\xi^q} + \dots\right]$$

$$+ \frac{1}{m^{q+1}}\left[q\cdot\xi^q\frac{d^q z}{d\xi^q} + (q-1)a_{q1}\xi^{q-1}\frac{d^{q-1} z}{d\xi^{q-1}} + \dots\right].$$

Cette dernière formule établit l'exactitude de la propriété énoncée. Elle donne pour le calcul des coefficients a les formules de récurrence:

$$a_{q+1,1} = a_{q,1} - (m-1)q,$$
$$a_{q+1,2} = a_{q,2} + [-mq + q - 1]a_{q,1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Je n'insiste pas davantage sur ce calcul, car il n'est pas nécessaire pour arriver à notre but de connaître la valeur de ces coefficients.

En portant les valeurs de $(x-a)^q \dfrac{d^q z}{dx^q}$ dans l'équation (3) on aura:

$$Q_1 = a_{41} + mP_1,$$
$$Q_2 = a_{42} + a_{31}mP_1 + m^2P_2,$$
$$Q_3 = a_{43} + a_{32}mP_1 + a_{21}m^2P_2 + m^3P_3,$$
$$Q_4 = m^4P_4.$$

P_1, P_2, P_3, P_4 deviennent des fonctions de ξ qui contiennent respectivement en facteur, ξ^m, ξ^{2m}, ξ^{3m}, ξ^{4m}.

Les fonctions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont des fonctions holomorphes de ξ dans le voisinage de $\xi = 0$. Nous poserons:

$$Q_i = \sum_0^\infty A^i_\mu \xi^\mu.$$

Formons maintenant la fonction caractéristique de l'équation (4), qu'on obtient, comme on le sait, en remplaçant dans le premier membre de cette équation z par ξ^r. Nous obtenons:

$$\xi^r F(r) + \xi^{r+1}\varphi_1(r) + \xi^{r+2}\varphi_2(r) + \ldots$$

où:

$$F(r) = r(r-1)(r-1)(r-3) + A^1_0 r(r-1)(r-2)$$
$$+ A^2_0 r(r-1) + A^3_0 r + A^4_0,$$
$$\varphi_k(r) = A^1_k r(r-1)(r-2) + A^2_k r(r-1) + A^3_k r + A^4_k.$$

Je ferai sur les polynômes F et φ les remarques suivantes:

Remarque 1. Les coefficients $A_0^1, A_0^2, A_0^3, A_0^4$ ont respectivement pour valeur: a_{41}, a_{42}, a_{43}, o; ils ne dépendent pas des coefficients des fonctions P. Il en résulte qu'on ne change pas la valeur de $F(r)$ si l'on suppose que dans l'équation (3) on remplace P_1, P_2, P_3, P_4 respectivement par $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, $(x-a)^4$. Dans ces conditions, l'équation caractéristique de (3) aurait pour racines $0, 1, 2, 3$. Dans l'équation transformée (4) les racines de l'équation caractéristique seront alors $0, m, 2m, 3m$. Ce sont aussi les racines de $F(r)$. D'une manière générale, l'équation:

$$(7)\qquad r(r-1)\dots(r-q+1)+a_{q1}r(r-1)\dots(r-q+2)$$
$$+a_{q2}r(r-1)\dots(r-q+3)+\dots=0$$

admet pour racines:

$$0, m, 2m, \dots, (q-1)m,$$

ce qui donnerait une nouvelle méthode pour calculer les coefficients a.

Remarque 2. Les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$ sont identiquement nuls. En effet les fonctions Q ne renferment pas de termes dont le degré est $1, 2, \dots, m-1$.

Remarque 3. Les polynômes $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{2m-1}$ ont pour racines communes:

$$0, m, 2m.$$

En effet si k_i est le coefficient de ξ^{m+i} dans P_1 on a:

$$\varphi_{m+i}=m.k_i[r(r-1)(r-2)+a_{31}r(r-1)+a_{32}r].$$

Remarque 4. On voit de même:

1[e] que les polynômes $\varphi_{2m}, \varphi_{2m+1}, \dots, \varphi_{3m-1}$ ont pour racines communes

$$0, m;$$

2[e] que les polynômes $\varphi_{3m}, \varphi_{3m+1}, \dots, \varphi_{4m-1}$ ont pour racine commune

$$0.$$

Cela posé, cherchons à intégrer l'équation (4) en prenant pour z une série de la forme:

$$z = \sum_0^\infty c_i \xi^i.$$

On aura pour déterminer c_i l'équation:

$$c_i F(i) + c_{i-1}\varphi_1(i-1) + c_{i-2}\varphi_2(i-2) + \ldots + c_0\varphi_i(0) = 0. \tag{8}$$

Donnons-nous arbitrairement c_0. L'équation (8) donne pour $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ la valeur 0. L'équation qui détermine c_m:

$$c_m F(m) + c_{m-1}\varphi_1(m-1) + \ldots + c_0\varphi_m(0) = 0$$

se réduit à une identité. On pourra prendre c_m arbitrairement. On aura ensuite 0 pour valeur de $c_{m+1}, \ldots, c_{2m-1}$. Puis l'équation qui détermine c_{2m}, se réduit à une identité; c_{2m} pourra être pris arbitrairement. Ensuite on trouvera 0 pour les coefficients $c_{2m+1}, c_{2m+2}, \ldots, c_{3m-1}$. On pourra prendre arbitrairement c_{3m}. A partir de là les équations ne deviendront jamais identiques. Les coefficients $c_{3m+1}, \ldots, c_{4m-1}$ seront encore nuls. Mais après le terme c_{4m}, il pourra y avoir des coefficients dont l'indice n'est pas divisible par m.

On démontre dans la théorie des équations différentielles que la série obtenue est convergente et donne l'intégrale générale. C'est une fonction uniforme de ξ et par suite de x, y près du point de ramification.