

VI. Abschnitt.

Flächen zweiter Ordnung in Tetraederkoordinaten.

I. Kapitel.

Allgemeine Koordinatentetraeder.

§ 138. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung und ihre Transformation.

1. Allgemeine Form der Gleichung. In bezug auf ein Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ (I § 57, (1); (4)) ist die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 : eine Fläche zweiter Klasse in laufenden Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 :

$$(1) \quad f = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0. \quad \left| \quad (1') \quad F = F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{ki} u_k u_i = 0. \right.$$

Die linke Seite der Gleichung, für die:

$$(2) \quad a_{ki} = a_{ik} \quad \left| \quad (2') \quad e_{ki} = e_{ik} \right.$$

sein soll, ist eine *quadratische Form* der vier Koordinaten.⁴⁰⁾

2. Die partiellen Ableitungen der Form. Wir bezeichnen den *halben partiellen Differentialquotienten* von f nach x_k und von F nach u_k mit (§ 66, (5); § 75, (3)):

$$(3) \quad f_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4 a_{ki} x_i. \quad \left| \quad (3') \quad F_k = F_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_1^4 e_{ki} u_i. \right.$$

Alsdann gelten die *Identitäten* (§ 66, (6)):

$$(4) \quad \sum_1^4 f_k x_k = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_i x_k = f. \quad \left| \quad (4') \quad \sum_1^4 F_k u_k = F. \right.$$

Ist die Ableitung f_k für einen *bestimmten* Punkt $x_k^{(n)}$ oder F_k für eine

bestimmte Ebene $u_k^{(n)}$ gebildet, so gebrauchen wir die Bezeichnungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} f_k^{(n)} &= f_k(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, x_4^{(n)}) \\ &= \sum_1^4 a_{ki} x_i^{(n)}. \end{aligned} \quad \left| \quad (5') \quad \begin{aligned} F_k^{(n)} &= F_k(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}) \\ &= \sum_1^4 e_{ki} u_i^{(n)}. \end{aligned} \right.$$

3. Die bilinearen Formen. In bezug auf *zwei* bestimmte Punkte $x_k^{(m)}, x_i^{(n)}$ oder Ebenen $u_k^{(m)}, u_i^{(n)}$ setzen wir zur Abkürzung (§ 67, (9)):

$$(6) \quad \begin{aligned} f_{mn} &= f_{nm} = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k^{(m)} x_i^{(n)} \\ &= \sum_1^4 f_k^{(n)} x_k^{(m)} = \sum_1^4 f_i^{(m)} x_i^{(n)}. \end{aligned} \quad \left| \quad (6') \quad \begin{aligned} F_{mn} &= F_{nm} = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{ki} u_k^{(m)} u_i^{(n)} \\ &= \sum_1^4 F_k^{(n)} u_k^{(m)} = \sum_1^4 F_i^{(m)} u_i^{(n)}. \end{aligned} \right.$$

Diese *bilinearen Formen* gehen mit $m=n$ wieder in die quadratischen Formen über:

$$(7) \quad f_{mm} = f(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, x_4^{(m)}). \quad (7') \quad F_{mm} = F(u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)}, u_4^{(m)}).$$

4. Die Determinante der quadratischen Form. Die Determinanten⁴¹⁾ der quadratischen Formen (1) und (1') (§ 66, (15)):

$$(8) \quad A = |a_{ki}| \quad (8') \quad E = |e_{ki}|$$

sind infolge von (2), (2') *symmetrische* Determinanten vierten Grades. Infolge dessen ist für die Unterdeterminanten dritten Grades A_{ki} und zweiten Grades α_{ki} von A ebenfalls:

$$(9) \quad A_{ki} = A_{ik}, \quad \alpha_{ki} = \alpha_{ik};$$

und entsprechend für die Unterdeterminanten von E .

5. Ausführung der Transformation. Zum Übergang von dem alten Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ zu einem neuen $J_1 J_2 J_3 J_4$, dessen Ecken J_m die Koordinaten $x_k^{(m)}$ haben, dienen die Formeln (I § 63, (25)):

$$(10) \quad x_k = \sum_1^4 x_k^{(m)} y_m.$$

Durch die Substitution (10) geht die *quadratische Form der alten Koordinaten* x_k :

$$(11) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i$$

über in:

$$f = \sum_k \sum_i a_{ki} \sum_m x_k^{(m)} y_m \sum_n x_i^{(n)} y_n = \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_i a_{ki} x_k^{(m)} x_i^{(n)} \right\} y_m y_n,$$

also in eine *quadratische Form der neuen Koordinaten* y_m :

$$(12) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{mn} y_m y_n,$$

deren *Koeffizienten* nach (6) die Werte haben:

$$(13) \quad b_{mn} = f_{mn} = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k^{(m)} x_i^{(n)}.$$

Sie sind *bilineare Formen der Koordinaten je zweier Ecken* J_m und J_n des neuen Koordinatentetraeders, bezüglich (für $m = n$) quadratische Formen der Koordinaten einer Ecke J_m (§ 41, 5).

6. Invarianteneigenschaft der Determinante. Nach (6) und (5) kann man den Wert (13) auch in der Form darstellen:

$$(14) \quad b_{mn} = f_{mn} = \sum_1^4 x_k^{(m)} f_k^{(n)} \quad \text{mit} \quad (15) \quad f_k^{(n)} = \sum_1^4 a_{ki} x_i^{(n)}.$$

Daher ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 3, (2)) einerseits:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} \\ f_1^{(4)} & f_2^{(4)} & f_3^{(4)} & f_4^{(4)} \end{vmatrix},$$

und andererseits:

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} \\ f_1^{(4)} & f_2^{(4)} & f_3^{(4)} & f_4^{(4)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & x_4^{(3)} \\ x_1^{(4)} & x_2^{(4)} & x_3^{(4)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Formeln ergibt sich zwischen den drei Determinanten:

$$(16) \quad A = |a_{ki}|, \quad B = |b_{ki}|, \quad S = |x_k^{(i)}|$$

die Beziehung:

$$(17) \quad B = S^2 A.$$

Die Determinante der transformierten Form ist das Produkt der Determinante der ursprünglichen Form und des Quadrats der Substitutionsdeterminante, oder:

Die Determinante der quadratischen Form ist eine *Invariante*⁹⁰⁾ bei jeder Koordinatentransformation (§ 91, (7)).

7. Beziehung der Unterdeterminanten dritten Grades. Infolge der Beziehungen (14) und (15) ist ferner (I Anm. 1, V, 3, (3)):

$$\begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} & b_{m_1 n_3} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} & b_{m_2 n_3} \\ b_{m_3 n_1} & b_{m_3 n_2} & b_{m_3 n_3} \end{vmatrix} = \sum_1^4 \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(m_1)} & x_{k_2}^{(m_1)} & x_{k_3}^{(m_1)} \\ x_{k_1}^{(m_2)} & x_{k_2}^{(m_2)} & x_{k_3}^{(m_2)} \\ x_{k_1}^{(m_3)} & x_{k_2}^{(m_3)} & x_{k_3}^{(m_3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} & f_{k_3}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} & f_{k_3}^{(n_2)} \\ f_{k_1}^{(n_3)} & f_{k_2}^{(n_3)} & f_{k_3}^{(n_3)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} & f_{k_3}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} & f_{k_3}^{(n_2)} \\ f_{k_1}^{(n_3)} & f_{k_2}^{(n_3)} & f_{k_3}^{(n_3)} \end{vmatrix} = \sum_1^4 \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(n_1)} & x_{l_2}^{(n_1)} & x_{l_3}^{(n_1)} \\ x_{l_1}^{(n_2)} & x_{l_2}^{(n_2)} & x_{l_3}^{(n_2)} \\ x_{l_1}^{(n_3)} & x_{l_2}^{(n_3)} & x_{l_3}^{(n_3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & a_{k_1 l_3} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & a_{k_2 l_3} \\ a_{k_3 l_1} & a_{k_3 l_2} & a_{k_3 l_3} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Gleichungen folgt, wenn $m_1 m_2 m_3, n_1 n_2 n_3, k_1 k_2 k_3, l_1 l_2 l_3$ je die Permutationen (I Anm. 1, III, 2):

$$(18) \quad 1.234, \quad 2.314, \quad 3.124 \quad \text{oder} \quad 4.321$$

bedeuten:

$$(19) \quad B_{mn} = \sum_k^4 \sum_l^4 A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)}.$$

Hier sind $B_{mn}, A_{kl}, u_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten dritten Grades der neuen und alten Determinante B und A , sowie der Substitutionsdeterminante S in (16). * Die $u_k^{(m)}$ sind zugleich die Koordinaten der Seitenflächen l_m des neuen Koordinatentetraeders (I § 63, (30)).

8. Beziehung der Unterdeterminanten zweiten Grades. Infolge von (14) und (15) ist endlich (I Anm. 1, V, 3, (4)):

$$\begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} \end{vmatrix} = \sum_1^6 \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(m_1)} & x_{k_2}^{(m_1)} \\ x_{k_1}^{(m_2)} & x_{k_2}^{(m_2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} \end{vmatrix} = \sum_1^6 \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(n_1)} & x_{l_2}^{(n_1)} \\ x_{l_1}^{(n_2)} & x_{l_2}^{(n_2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Gleichungen folgt, wenn $m_1 m_2$ die m^{te} , $n_1 n_2$ die n^{te} , $k_1 k_2$ die k^{te} und $l_1 l_2$ die l^{te} Variation der Reihe:

$$(20) \quad 23, \quad 31, \quad 12, \quad 14, \quad 24, \quad 34$$

bedeutet:

$$(21) \quad \beta_{mn} = \sum_k^6 \sum_l^6 \alpha_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)}.$$

Hier sind $\beta_{mn}, \alpha_{kl}, p_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten zweiten Grades der neuen und alten Determinante B und A und der Determinante S .

Die $p_k^{(m)}$ sind zugleich die Strahlenkoordinaten der Kante i_m des neuen Koordinatentetraeders (I § 63, (31)).

Die Formeln (21) kann man (I § 63, (32); I Anm. 1, III, (11)) auch schreiben:

$$\frac{B_{\bar{m}\bar{n}}}{B} = \sum_k^6 \sum_i^6 \frac{A_{k\bar{i}}}{A} \frac{q_k^{(\bar{m})}}{S} \frac{q_i^{(\bar{n})}}{S}$$

oder nach (17) und mit Weglassung der Querstriche:

$$(22) \quad B_{mn} = \sum_k^6 \sum_i^6 A_{ki} q_k^{(m)} q_i^{(n)}.$$

Hier sind B_{mn} , A_{ki} , $q_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten zweiten Grades aus den B_{mn} , A_{ki} , $u_k^{(m)}$, die $q_k^{(m)}$ aber zugleich die Achsenkoordinaten der Kante i_m des neuen Tetraeders (I § 63, 8).

9. Darstellung der neuen Koeffizienten und ihrer Determinanten durch die alten. Die Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse gibt den Satz:

Die Koeffizienten b_{mn} der transformierten Form (12) und die aus ihnen gebildeten Determinanten zweiten, dritten und vierten Grades β_{mn} (B_{mn}), B_{mn} , B drücken sich durch die Koeffizienten a_{ki} der ursprünglichen Form (11) und die aus ihnen gebildeten Determinanten α_{ki} (A_{ki}), A_{ki} , A mittels der Formeln aus.¹¹³⁾

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{mn} = \sum_k^4 \sum_i^4 a_{ki} x_k^{(m)} x_i^{(n)}, \\ \beta_{mn} = \sum_k^6 \sum_i^6 \alpha_{ki} p_k^{(m)} p_i^{(n)}, \\ B_{mn} = \sum_k^6 \sum_i^6 A_{ki} q_k^{(m)} q_i^{(n)}, \\ B_{mn} = \sum_k^4 \sum_i^4 A_{ki} u_k^{(m)} u_i^{(n)}, \\ B = AS^2, \end{array} \right.$$

wo S die Determinante der Substitution (10), $x_k^{(m)}$ die Koordinaten der Ecken J_m , $p_k^{(m)}$ die Strahlenkoordinaten der Kanten i_m , $q_k^{(m)}$ die Achsenkoordinaten der Kanten i_m und $u_k^{(m)}$ die Koordinaten der Seitenflächen i_m des neuen Koordinatentetraeders sind (I § 63, 8).

10. Kovariante Funktionen. Gleichzeitig mit der Form (11) der Koordinaten eines *Punktes* sollen die folgenden Formen der Koordinaten einer *Ebene*, eines *Strahles* und einer *Achse*:¹¹⁷⁾

$$(24) \quad F = \sum_k^4 \sum_l^4 A_{kl} u_k u_l,$$

$$(25) \quad \varphi = \sum_k^6 \sum_l^6 \alpha_{kl} p_k p_l, \quad \Phi = \sum_k^6 \sum_l^6 A_{kl} q_k q_l$$

auf das neue Koordinatentetraeder transformiert werden. Die Koeffizienten dieser Formen sind Unterdeterminanten aus den Koeffizienten a_{kl} der gegebenen Form (11). Zwischen den beiden Formen (25) besteht, wenn mit einem Proportionalitätsfaktor σ gesetzt wird (I § 59, (8)):¹¹⁸⁾

$$(26) \quad q_k = \sigma p_{\bar{k}},$$

die Beziehung (I Anm. 1, III, (11)):

$$(27) \quad \Phi = A \sigma^2 \varphi.$$

Zur Transformation dienen die Formeln (I § 63, (26); (27); (28)):

$$(28) \quad S u_k = \sum_m^4 u_k^{(m)} v_m,$$

$$(29) \quad p_k = \sum_m^6 p_k^{(m)} r_m, \quad S^2 q_k = \sum_m^6 q_k^{(m)} s_m,$$

wo v_m , r_m , s_m die neuen Koordinaten von Ebene, Strahl und Achse sind. Danach wird:

$$\begin{aligned} S^2 F &= \sum_k \sum_l A_{kl} \sum_m u_k^{(m)} v_m \sum_n u_l^{(n)} v_n \\ &= \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m v_n, \\ \varphi &= \sum_k \sum_l \alpha_{kl} \sum_m p_k^{(m)} r_m \sum_n p_l^{(n)} r_n \\ &= \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_l \alpha_{kl} p_k^{(m)} p_l^{(n)} \right\} r_m r_n, \\ S^4 \Phi &= \sum_k \sum_l A_{kl} \sum_m q_k^{(m)} s_m \sum_n q_l^{(n)} s_n \\ &= \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_l A_{kl} q_k^{(m)} q_l^{(n)} \right\} s_m s_n \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (23) und mit Wiederholung von (12):

Beim Übergang von dem alten zu dem neuen Koordinatentetraeder gelten nebeneinander die folgenden Transformationsformeln:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = \sum_1^m \sum_1^n b_{mn} y_m y_n, \\ S^2 F = S^2 \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k u_i = \sum_1^m \sum_1^n B_{mn} v_m v_n, \\ \varphi = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k p_i = \sum_1^m \sum_1^n \beta_{mn} r_m r_n, \\ S^4 \Phi = S^4 \sum_1^6 \sum_1^6 A_{ki} q_k q_i = \sum_1^m \sum_1^n B_{mn} s_m s_n. \end{array} \right.$$

Die Funktionen f, F, φ, Φ sind *Kovarianten*, die sich je aus den neuen Koeffizienten und Variablen ebenso zusammensetzen wie aus den alten.

11. Darstellung der alten Koeffizienten und ihrer Determinanten durch die neuen. Die Auflösungen der Gleichungen (10), (28) und (29) sind (I § 63, (25')—(28')):

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} S y_m = \sum_1^4 u_k^{(m)} x_k, \quad v_m = \sum_1^4 x_k^{(m)} u_k, \\ S^2 r_m = \sum_1^6 q_k^{(m)} p_k, \quad s_m = \sum_1^6 p_k^{(m)} q_k. \end{array} \right.$$

Setzt man diese Werte in die transformierten Formen auf den rechten Seiten von (30) ein, so müssen sich rückwärts wieder die ursprünglichen Formen ergeben. Man erhält damit:

$$\begin{aligned} S^2 \sum_k \sum_i a_{ki} x_k x_i &= \sum_m \sum_n b_{mn} \sum_k u_k^{(m)} x_k \sum_i u_i^{(n)} x_i \\ &= \sum_k \sum_i \left\{ \sum_m \sum_n b_{mn} u_k^{(m)} u_i^{(n)} \right\} x_k x_i, \\ S^2 \sum_k \sum_i A_{ki} u_k u_i &= \sum_m \sum_n B_{mn} \sum_k x_k^{(m)} u_k \sum_i x_i^{(n)} u_i \\ &= \sum_k \sum_i \left\{ \sum_m \sum_n B_{mn} x_k^{(m)} x_i^{(n)} \right\} u_k u_i, \\ S^4 \sum_k \sum_i \alpha_{ki} p_k p_i &= \sum_m \sum_n \beta_{mn} \sum_k q_k^{(m)} p_k \sum_i q_i^{(n)} p_i \\ &= \sum_k \sum_i \left\{ \sum_m \sum_n \beta_{mn} q_k^{(m)} q_i^{(n)} \right\} p_k p_i, \\ S^4 \sum_k \sum_i A_{ki} q_k q_i &= \sum_m \sum_n B_{mn} \sum_k p_k^{(m)} q_k \sum_i p_i^{(n)} q_i \\ &= \sum_k \sum_i \left\{ \sum_m \sum_n B_{mn} p_k^{(m)} p_i^{(n)} \right\} q_k q_i. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen folgt daher:

Die Koeffizienten der ursprünglichen Form und die aus ihnen gebildeten Determinanten drücken sich durch die Koeffizienten der transformierten Form und ihre Determinanten mittels der Formeln aus:¹¹³⁾

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} S^2 \alpha_{kl} = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{mn} u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\ S^4 \alpha_{kl} = \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn} q_k^{(m)} q_l^{(n)}, \\ S^4 A_{kl} = \sum_1^6 \sum_1^6 B_{mn} p_k^{(m)} p_l^{(n)}, \\ S^2 A_{kl} = \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)}, \\ S^2 A = B \end{array} \right.$$

mit derselben Bedeutung von $x_k^{(m)}$, $u_k^{(m)}$, $p_k^{(m)}$, $q_k^{(m)}$ wie in (23).

12. Transformation der Fläche zweiter Klasse. Die Form:

$$(33) \quad F = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{kl} u_k u_l$$

geht mittels der Substitution (28) über in:

$$\begin{aligned} S^2 F &= \sum_k \sum_l e_{kl} \sum_m u_k^{(m)} v_m \sum_n u_l^{(n)} v_n \\ &= \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_l e_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m v_n \end{aligned}$$

oder nach (6'):

$$(34) \quad S^2 F = \sum_1^4 \sum_1^4 F_{mn} v_m v_n.$$

13. Übergang auf gemeine Koordinaten. Für die Beziehung zwischen einem rechtwinkligen System $Oxyz$ und einem schiefwinkligen $O'x'y'z'$ gelten die Formeln § 91, (2); (3) und § 75, (6); (7). Daher ist dann in (10) und (28) zu setzen:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \alpha_1, \quad x_1^{(2)} = \alpha_2, \quad x_1^{(3)} = \alpha_3, \quad x_1^{(4)} = x_0, \\ x_2^{(1)} = \beta_1, \quad x_2^{(2)} = \beta_2, \quad x_2^{(3)} = \beta_3, \quad x_2^{(4)} = y_0, \\ x_3^{(1)} = \gamma_1, \quad x_3^{(2)} = \gamma_2, \quad x_3^{(3)} = \gamma_3, \quad x_3^{(4)} = z_0, \\ x_4^{(1)} = 0, \quad x_4^{(2)} = 0, \quad x_4^{(3)} = 0, \quad x_4^{(4)} = 1; \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1^{(1)} = A_1, \quad u_1^{(2)} = A_2, \quad u_1^{(3)} = A_3, \quad u_1^{(4)} = 0, \\ u_2^{(1)} = B_1, \quad u_2^{(2)} = B_2, \quad u_2^{(3)} = B_3, \quad u_2^{(4)} = 0, \\ u_3^{(1)} = \Gamma_1, \quad u_3^{(2)} = \Gamma_2, \quad u_3^{(3)} = \Gamma_3, \quad u_3^{(4)} = 0, \\ u_4^{(1)} = Sx_0', \quad u_4^{(2)} = Sy_0', \quad u_4^{(3)} = Sz_0', \quad u_4^{(4)} = S. \end{array} \right.$$

Danach ergeben sich aber mit a'_{ki} für b_{ki} aus (12) die Formeln § 66, (19)—(21) und mit b_{ki} für e_{ki} aus (34) die Formeln § 75, (13)—(16).

§ 139. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach dem Rang.

1. Begriff des Ranges. Nach § 138, (23) und (32) ist jede der neuen Determinanten vierten, dritten, zweiten und ersten Grades B , B_{mn} , β_{mn} , b_{mn} eine *lineare homogene* Funktion der bezüglich gleichgradigen alten Determinanten A , A_{ki} , α_{ki} , a_{ki} und umgekehrt. Verschwinden daher alle alten Determinanten eines bestimmten Grades, so verschwinden auch alle neuen desselben Grades und umgekehrt. Das Verschwinden *aller* Determinanten eines *bestimmten* Grades, welches überdies das aller Determinanten *höheren* Grades nach sich zieht (I Anm. 1, III, (17); II, (6); I, (4)), ist daher eine vom Koordinatentetraeder unabhängige Eigenschaft der Fläche, die wir als ihren *Rang* bezeichnen. Wir nennen nämlich die *Fläche zweiter Ordnung* § 138, (1) oder *zweiter Klasse* § 138, (1') vom *Range 4*, wenn die Determinante $A \neq 0$ ist; vom *Range 3*, wenn $A = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten dritten Grades A_{ki} verschwinden; vom *Range 2*, wenn alle A_{ki} , aber nicht alle Unterdeterminanten zweiten Grades α_{ki} verschwinden; vom *Range 1*, wenn alle α_{ki} , aber nicht alle Elemente a_{ki} verschwinden.

*Der Rang der Fläche zweiter Ordnung (oder zweiter Klasse) ist vom Koordinatensystem unabhängig.*⁷⁶⁾

2. Bedingung für das Fehlen einer Koordinate in der Gleichung der Fläche. Die Fläche:

$$(1) \quad f = \sum_k^4 \sum_l^4 a_{kl} x_k x_l = 0$$

hat nach § 138, (12) in bezug auf irgendein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ die Gleichung:

$$(2) \quad f = \sum_m^4 \sum_n^4 b_{mn} y_m y_n = 0, \quad b_{mn} = f_{mn} = f_{nm}.$$

Wir nehmen an, daß in dieser Gleichung die Koeffizienten der vier Glieder, die y_4 enthalten, verschwinden, also (§ 138, (6)):

$$(3) \quad f_{m4} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_k^4 f_k^{(4)} x_k^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

Aus diesen in den vier Größen $f_k^{(4)}$ linearen homogenen Gleichungen

mit der nicht verschwindenden Determinante S (§ 138, (16)) folgt aber (I Anm. 2, III, 3):

$$(4) \quad f_k^{(4)} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^4 a_{ki} x_i^{(4)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Wenn umgekehrt die Ecke $J_4 = x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}, x_4^{(4)}$ den vier Gleichungen (4) genügt, so bestehen die vier Gleichungen (3). So folgt allgemein:

I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen der Koordinate y_m ($m = 1, 2, 3$ oder 4) in der Gleichung (2) ist, daß die Koordinaten $x_i^{(m)}$ der Ecke J_m des neuen Koordinatentetraeders den vier Gleichungen genügen:*

$$(5) \quad f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Ausgeschrieben lauten diese:

$$(6) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0. \end{cases}$$

Ebenso fehlt die Koordinate v_m in der transformierten Gleichung der Fläche zweiter Klasse (§ 138, (34)), wenn die Koordinaten $u_i^{(m)}$ der Seitenfläche l_m des neuen Koordinatentetraeders den vier Gleichungen genügen:

$$(5') \quad F_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

3. Eigentliche und uneigentliche Flächen. Im allgemeinen gibt es keinen Punkt, der den Gleichungen (6) oder (5) genügt. Falls es aber einen solchen Punkt gibt, so ist er ein Punkt der Fläche selbst, da nach § 138, (4) identisch:

$$(7) \quad \sum_1^4 f_k x_k = f.$$

Wir nennen daher⁴⁹⁾

jeden den Gleichungen (5) genügenden Punkt einen singulären (Doppel-) Punkt der Fläche $f = 0$.	jede den Gleichungen (5') genügende Ebene eine singuläre (Doppel-) Ebene der Fläche $F = 0$.
--	---

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Gleichungen (6) keine Lösung haben, ist aber: $A \neq 0$; also:

Die Flächen zweiter Ordnung vom Range 4 haben keinen singulären Punkt (§ 78, 2).	Die Flächen zweiter Klasse vom Range 4 haben keine singuläre Ebene.
--	---

Sie heißen *eigentliche* Flächen zweiter Ordnung, bezüglich Klasse.

Ihre Gleichung enthält, auf welches Koordinatentetraeder sie auch bezogen ist, stets alle vier Koordinaten.

Flächen geringeren Ranges haben stets einen oder mehr *singuläre* Punkte. Ihre Gleichungen können in *weniger als vier Koordinaten* dargestellt werden. Sie selbst gehören also niedrigeren Mannigfaltigkeiten als dem Raume an und heißen daher *uneigentliche Flächen zweiter Ordnung*, bezüglich Klasse.

4. Flächen mit einem singulären Punkt. Ist die Fläche (1) vom Range 3, so daß $A = 0$, aber nicht alle A_{ki} verschwinden, so gibt es (I Anm. 2, III, (12)) *einen singulären Punkt*, für dessen Koordinaten x_k^0 aus (6) hervorgeht:⁷⁹⁾

$$(8) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4},$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4.

Wählt man diesen Punkt als Ecke J_4 des neuen Koordinatentetraeders, also:

$$(9) \quad x_k^{(4)} = x_k^0,$$

so verschwindet aus (2) nach 2, I die Koordinate y_4 und die Gleichung der Fläche wird:

$$(10) \quad \sum_1^3 \sum_1^3 b_{mn} y_m y_n = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt (I § 72, (18)):

<i>Die Fläche zweiter Ordnung vom Range 3 ist ein Kegel zweiter Ordnung; ihr singulärer Punkt ist die Spitze des Kegels (§ 79, 3).</i>	<i>Die Fläche zweiter Klasse vom Range 3 ist ein Kegelschnitt; ihre singuläre Ebene ist die Ebene des Kegelschnittes.</i>
---	--

5. Determinante und Unterdeterminante des Kegels. Die Determinante der Gleichung (10), insofern sie als Gleichung zwischen den vier Variablen y_1, y_2, y_3, y_4 betrachtet wird, ist (§ 138, (17)):

$$(11) \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^2 A = 0.$$

Daher verschwinden alle Unterdeterminanten B_{mn} bis auf die eine:

$$(12) \quad B_{44} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

die nicht verschwindet, da die Fläche vom Range 3 sein soll (vgl. 1). Infolgedessen verkürzt sich die vierte Gleichung § 138, (32) auf:¹²¹⁾

$$(13) \quad S^2 A_{ki} = B_{44} x_k^{(4)} x_i^{(4)} = B_{44} x_k^{(0)} x_i^{(0)}.$$

Ist die Fläche (1) ein Kegel, so zerfallen die Unterdeterminanten A_{ki} je in zwei Faktoren in dem Sinne (13), wo x_k^0 die Koordinaten der Spitze sind.

Indem man diese Werte in die Form § 138, (24) einführt, ergibt sich:¹¹⁸⁾

$$(14) \quad S^2 F = B_{44} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_k^0 x_i^0 u_k u_i = B_{44} \left(\sum_{k=1}^4 x_k^0 u_k \right)^2.$$

Für den Kegel ist die Kovariante F , bis auf einen konstanten Faktor, das vollständige Quadrat einer linearen Form (§ 42, (14)).

Dasselbe folgt aus der zweiten Gleichung § 138, (30) in der Form:

$$(15) \quad S^2 F = B_{44} v_4^2,$$

wo der Wert von v_4 aus § 138, (31) mit Rücksicht auf (9) zu entnehmen ist.

6. Flächen mit singulärer Linie. Ist die Fläche (1) vom Range 2, so daß alle A_{ki} , aber nicht alle α_{ki} verschwinden, so gibt es ∞^1 Punkte, die Punkte einer geraden Linie, die den Gleichungen (6) genügen. Wir nennen diese Linie die *singuläre Linie* der Fläche und finden aus (6) für ihre *Achsenkoordinaten* (I § 61, (13)):

$$(16) \quad q_1^0 : q_2^0 : q_3^0 : q_4^0 : q_5^0 : q_6^0 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6},$$

wo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 ist.

Wählt man auf dieser Linie die beiden Ecken J_3 und J_4 des neuen Tetraeders, also (§ 138, 9; I § 63, Fig. 320):

$$(17) \quad q_k^{(3)} = q_k^0,$$

so verschwindet aus (2) nach 2, I sowohl die Koordinate y_3 als y_4 , und die Gleichung der Fläche wird:

$$(18) \quad \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 b_{mn} y_m y_n = 0.$$

Die Fläche zweiter Ordnung vom Range 2 ist ein Ebenenpaar. Ihre singuläre Linie ist die Schnittachse des Paares.

Die Fläche zweiter Klasse vom Range 2 ist ein Punktepaar. Ihre singuläre Linie ist der Verbindungsstrahl des Paares.

7. Determinante und Unterdeterminanten des Ebenenpaares. Die Determinante der Gleichung (18), insofern sie als Gleichung mit vier Variablen betrachtet wird, ist (§ 138, (17)):

$$(19) \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^2 A = 0.$$

Daher verschwinden alle Unterdeterminanten β_{mn} bis auf die eine:

$$(20) \quad \beta_{33} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

die nicht verschwindet, da die Fläche vom Range 2 sein soll (vgl. 1). Infolgedessen verkürzt sich die zweite Gleichung § 138, (32) auf:

$$(21) \quad S^4 \alpha_{ki} = \beta_{33} q_k^{(3)} q_i^{(3)} = \beta_{33} q_k^0 q_i^0.$$

Ist die Fläche (1) ein Ebenenpaar, so zerfallen die Unterdeterminanten α_{ki} je in zwei Faktoren im Sinne (21), wo q_k^0 die Koordinaten der Doppellinie sind.¹²¹⁾

Indem man die Werte (21) in die Form § 138, (25) einführt, ergibt sich:¹¹⁸⁾

$$(22) \quad S^4 \varphi = \beta_{33} \sum_1^6 \sum_1^6 q_k^0 q_i^0 p_k p_i = \beta_{33} \left(\sum_1^6 q_k^0 p_k \right)^2.$$

Für das Ebenenpaar ist die kovariante Form φ , bis auf einen konstanten Faktor, das vollständige Quadrat einer linearen Form.

Dasselbe folgt aus der dritten Gleichung § 138, (30) in der Gestalt:

$$\varphi = \beta_{33} r_3^2,$$

wo der Wert von r_3 aus § 138, (31) mit Rücksicht auf (17) zu entnehmen ist.

8. Koeffizienten und Koordinaten der beiden Ebenen des Ebenenpaares. Sind u'_k und u''_k die Koordinaten der beiden Ebenen des Paares, so ist bis auf einen Faktor:

$$f = \left\{ \sum_1^4 u'_k x_k \right\} \left\{ \sum_1^4 u''_i x_i \right\} = \sum_1^4 \sum_1^4 u'_k u''_i x_k x_i$$

und dementsprechend ergibt sich⁶⁹⁾:

Zwischen den Koeffizienten der Gleichung (1) eines Ebenenpaares und den Koordinaten der beiden Ebenen des Paares bestehen die Beziehungen:

$$(23) \quad a_{ki} = \frac{1}{2} (u'_k u''_i + u'_i u''_k).$$

Die Bestimmung von u'_k , u''_k durch a_{ki} wird sich § 143, 7 ergeben.

9. Flächen mit einer singulären Ebene. Ist die Fläche (1) vom Range 1, so daß alle α_{ki} , aber nicht alle a_{ki} verschwinden, so

gibt es ∞^2 Punkte, die Punkte einer Ebene, die den Gleichungen (6) genügen. Wir nennen diese Ebene die *singuläre Ebene* der Fläche und haben aus (6) für ihre Koordinaten:

$$(24) \quad u_1^0 : u_2^0 : u_3^0 : u_4^0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3} : a_{k4},$$

wo $k = 1, 2, 3$ oder 4 ist.

Wählt man auf dieser Ebene die drei Ecken J_2, J_3, J_4 des neuen Tetraeders, also:

$$(25) \quad u_k^{(1)} = u_k^0,$$

so verschwinden aus (2) nach 2, I y_2, y_3 und y_4 , und die Gleichung der Fläche wird:

$$(26) \quad b_{11} y_1^2 = 0.$$

<i>Die Fläche zweiter Ordnung vom Range 1 ist eine Doppelebene, ihre singuläre Ebene.</i>	<i>Die Fläche zweiter Klasse vom Range 1 ist ein Doppelpunkt, ihr singulärer Punkt.</i>
--	--

10. Determinante und Koeffizienten der Doppelebene. Von der Determinante B verschwinden alle Elemente außer b_{11} . Zugleich ist nach der ersten Gleichung § 138, (32):

$$(27) \quad S^2 a_{ki} = b_{11} u_k^{(1)} u_i^{(1)} = b_{11} u_k^0 u_i^0.$$

Ist die Fläche (1) eine Doppelebene, so zerfallen die Koeffizienten a_{ki} je in zwei Faktoren im Sinne (27), wo u_k^0 die Koordinaten der Doppelebene sind.¹²¹⁾

Mit diesen Werten wird aus (1):¹¹⁸⁾

$$(28) \quad S^2 f = b_{11} \sum_1^4 \sum_1^4 u_k^0 u_i^0 x_k x_i = b_{11} \left(\sum_1^4 u_k^0 x_k \right)^2.$$

Für die Doppelebene ist die Form f selbst ein vollständiges Quadrat.

11. Allgemeinheit der Bedingungen des Ranges. Der Rang einer Fläche (1) wurde unter 1 als eine *Eigenschaft ihrer Determinante A* definiert. Die Entwicklungen 2—10 haben aber die *geometrische Bedeutung* des Ranges ergeben. Sie zeigen, daß die § 81, (27) für *gemeine Koordinaten* aufgestellte Tabelle auch für *Tetraederkoordinaten* dieselbe bleibt.

Die Gleichung (1) stellt nämlich je nach dem Rang ihrer Determinante folgende Flächen dar⁷⁶⁾:

$$(29) \quad \begin{cases} A \neq 0: \text{Eigentliche Flächen zweiter Ordnung;} \\ A = 0, A_{ki} \neq 0!: \text{Kegel zweiter Ordnung;} \\ A = 0, A_{ki} = 0!, \alpha_{ki} \neq 0!: \text{Getrennte Ebenenpaare;} \\ A = 0, A_{ki} = 0!, \alpha_{ki} = 0!, a_{ki} \neq 0!: \text{Doppelebenen.} \end{cases}$$

Dabei soll unter $A_{ki} = 0!$ oder $A_{ki} \neq 0!$ usw. verstanden werden, daß „alle $A_{ki} = 0$ “ oder „nicht alle $A_{ki} = 0$ “ usw. Infolge der Identitäten § 79, (10); § 81, (17); (24) können aber bei reellen a_{ki} die drei letzten Zeilen (29) auch in der Form gegeben werden:

$$(30) \quad \begin{cases} A = 0, A' \neq 0: \text{Kegel zweiter Ordnung;} \\ A = 0, A' = 0, A'' \neq 0; \text{Getrennte Ebenenpaare;} \\ A = 0, A' = 0, A'' = 0, A''' \neq 0: \text{Doppelebene,} \end{cases}$$

wo A', A'', A''' die *Summen der Hauptunterdeterminanten* dritten, zweiten und ersten Grades der Determinante A bedeuten (§ 79, (5); (6); (7)).

§ 140. Gleichzeitige Transformation der Fläche zweiter Ordnung und der Ebene.

1. Gleichungen von Fläche und Ebene. Die beiden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (1) & f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \\ (2) & u = \sum_1^4 u_k x_k = 0 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{ll} (1') & F' = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{ki} u_k u_i = 0, \\ (2') & x = \sum_1^4 x_k u_k = 0 \end{array} \right.$$

stellen zusammen den Ort der Punkte dar, die gleichzeitig einer Fläche zweiter Ordnung und einer Ebene angehören. Es sind *die Gleichungen der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene in laufenden Punktkoordinaten.*

stellen zusammen den Ort der Ebenen dar, die gleichzeitig einer Fläche zweiter Klasse und einem Punkte angehören. Es sind *die Gleichungen des Berührungskegels von dem Punkte an die Fläche in laufenden Ebenenkoordinaten.*

2. Gleichzeitige Transformation von Fläche und Ebene. Beim Übergang zu einem neuen Koordinatentetraeder ändert sich die Gleichung (1) nach § 138, (12) in:

$$(3) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{mn} y_m y_n = 0$$

und die Gleichung (2) in der Weise (I § 63, (36)):

$$(4) \quad u = \sum_1^4 v_m y_m = 0,$$

wo v_m den Wert § 138, (31) hat.

Dies sind die Gleichungen der Schnittlinie in bezug auf das neue Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$.

3. Invarianteigenschaft der geränderten Determinante. Die mit den Koordinaten der Ebene (2) geränderte Determinante der Fläche (1):¹¹⁹⁾

$$(5) \quad A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung von Fläche und Ebene, beziehungsweise der Schnittlinie $f \times u$ beider eigentümliche Konstante. In gleicher Weise sei:

$$(6) \quad B^v = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & v_1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung der Determinanten (5) und (6) nach den Elementen der letzten Zeilen und Kolonnen ergibt sich:

$$(7) \quad A^u = - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k u_i; \quad B^v = - \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn} v_m v_n.$$

Die negative geränderte Determinante ist daher die Form F in § 138, (24):

$$(8) \quad A^u = -F.$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ist wie in § 138, 6 mit Rücksicht auf § 138, (31):

$$\begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{14} & v_1 \\ . & . \\ b_{41} \dots b_{44} & v_4 \\ v_1 \dots v_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} \dots x_4^{(1)} & 0 \\ . & . \\ x_1^{(4)} \dots x_4^{(4)} & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^{(1)} \dots f_4^{(1)} & v_1 \\ . & . \\ f_1^{(4)} \dots f_4^{(4)} & v_4 \\ u_1 \dots u_4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} \dots f_4^{(1)} & v_1 \\ . & . \\ f_1^{(4)} \dots f_4^{(4)} & v_4 \\ u_1 \dots u_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} \dots x_4^{(1)} & 0 \\ . & . \\ x_1^{(4)} \dots x_4^{(4)} & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{14} & u_1 \\ . & . \\ a_{41} \dots a_{44} & u_4 \\ u_1 \dots u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

und danach, in Übereinstimmung mit der zweiten Gleichung § 138, (30):

$$(9) \quad B^v = S^2 A^u.$$

Die geränderte Determinante ist Simultaninvariante von Fläche und Ebene (§ 43, 2).

4. Gleichungen von Fläche und zwei Ebenen. Kommt zu (1) und (2) noch eine Ebene, bezüglich zu (1') und (2') noch ein Punkt:

$$(10) \quad u' = \sum_1^4 u'_k x_k = 0 \quad \left| \quad (10') \quad x' = \sum_1^4 x'_k u_k = 0 \right.$$

hinzu, so stellen die drei Gleichungen

(1), (2), (10) das *Paar der Schnittpunkte* dar, welche die Fläche zweiter Ordnung mit der Geraden $q = u \times u'$ gemein hat. (1'), (2'), (10') das *Paar der Tangentialebenen* dar, welche die Fläche zweiter Klasse durch die Gerade $p = x \times x'$ sendet.

Bei der Transformation wird wie in (4):

$$(11) \quad u' = \sum_1^4 v'_m y_m = 0.$$

5. Die zweifach geränderte Determinante als Invariante. Die mit den Koordinaten der beiden Ebenen (2) und (10) geränderte Determinante der Fläche (1)¹¹⁹:

$$(12) \quad A^{uu'} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung der Fläche und der Schnittlinie der beiden Ebenen (vgl. (16)) eigentümliche Konstante. In gleicher Weise sei:

$$(13) \quad B^{vv'} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & v_1 & v_1' \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Wie unter 3 ergibt sich, wenn S als Determinante fünften Grades dargestellt wird:

$$(14) \quad B^{vv'} = S^2 A^{uu'}.$$

Die zweifach geränderte Determinante ist Simultaninvariante von Fläche und Gerader.

6. Entwicklung der zweifach geränderten Determinante nach Linienkoordinaten. Die Achsenkoordinaten der Schnittlinie $q = u \times u' = v \times v'$ sind (I § 63, (13); (14)):

$$(15) \quad q_k = \begin{vmatrix} u_{k_1} & u'_{k_1} \\ u_{k_2} & u'_{k_2} \end{vmatrix}, \quad s_m = \begin{vmatrix} v_{m_1} & v'_{m_1} \\ v_{m_2} & v'_{m_2} \end{vmatrix},$$

wo k und m die Nummern der Variationen $k_1 k_2$ und $m_1 m_2$ in § 138, (20) bedeuten. Nach diesen Koordinaten entwickelt, werden die Determinanten (12) und (13):¹⁹³⁾

$$(16) \quad A^{uu'} = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{\bar{k}\bar{l}} q_k q_l, \quad B^{vv'} = \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{\bar{m}\bar{n}} s_m s_n,$$

wo $\bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ die zu k, l, m, n komplementären Variationen sind, oder auch (I Anm. 1, III, (11)):

$$(17) \quad A A^{uu'} = \sum_1^6 \sum_1^6 A_{kl} q_k q_l, \quad B B^{vv'} = \sum_1^6 \sum_1^6 B_{mn} s_m s_n.$$

Setzt man jedoch wie § 138, (26) mit einem Proportionalitätsfaktor σ :

$$(18) \quad q_k = \sigma p_{\bar{k}},$$

so wird (I § 63, (28'); (32); (27')):

$$S s_i = S \sigma \sum_k p_k^{(i)} p_{\bar{k}} = \sigma \sum_k q_k^{(i)} p_{\bar{k}} = \sigma \sum_k q_k^{(i)} p_k = \sigma S^2 r_{\bar{i}}$$

und damit:

$$(18') \quad s_i = \sigma S r_{\bar{i}}.$$

Danach kann man für (16) auch schreiben:

$$(19) \quad A^{uu'} = \sigma^2 \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{kl} p_k p_l, \quad B^{vv'} = \sigma^2 S^2 \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn} r_m r_n.$$

Die Invarianteneigenschaft (14) folgt daher auch aus der dritten Formel § 138, (30).

Die zweifach geränderte Determinante deckt sich in der Tat mit den Formen § 138, (25) derart, daß nach (17) und (19):

$$(20) \quad A A^{uu'} = \Phi, \quad A^{uu'} = \sigma^2 \varphi \text{ (vgl. § 138, (27)).}$$

7. Entwicklung der zweifach geränderten Determinante nach Ebenenkoordinaten. Statt nach den Elementen der *beiden* letzten Zeilen und Kolonnen entwickeln wir jetzt die Determinante (12) nur nach *einer* letzten Zeile und Kolonne und bezeichnen zu dem Zwecke diejenigen sechzehn Unterdeterminanten vierten Grades der geränderten Determinante A^u in (5), die zugleich die geränderten Unterdeterminanten A_{k_i} der Determinante A sind (§ 138, (9)), mit:

$$(21) \quad A_{k_i}^u = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & a_{k_1 l_3} & u_{k_1} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & a_{k_2 l_3} & u_{k_2} \\ a_{k_3 l_1} & a_{k_3 l_2} & a_{k_3 l_3} & u_{k_3} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & u_{l_3} & 0 \end{vmatrix},$$

wo k und l die Nummern der Variationen $k_1 k_2 k_3$ und $l_1 l_2 l_3$ in der Reihe 2 3 4, 3 1 4, 1 2 4, 3 2 1 sind (§ 138, (18)). Entsprechend bezeichnen wir die Unterdeterminanten von B^v in (6).

Die Entwicklung der Determinanten (12) und (13) gibt dann:¹⁹³⁾

$$(22) \quad A^{uu'} = - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^u u_k' u_i'; \quad B^{vv'} = - \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn}^v v_m' v_n'.$$

Vermöge der Transformation von dem einen Koordinatentetraeder auf das andere ist aber nach (14):

$$(23) \quad S^2 \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^u u_k' u_i' = \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn}^v v_m' v_n',$$

identisch in bezug auf die beiden Ebenen u, v und u', v' .

8. Beziehung der geränderten Unterdeterminanten zueinander.

Setzt man in der Identität (23) mit Rücksicht auf § 138, (28) und (31) entweder links:

$$(24) \quad S u_k' = \sum_m u_k^{(m)} v_m', \quad S u_i' = \sum_n u_i^{(n)} v_n'$$

oder rechts:

$$(25) \quad v_m' = \sum_k x_k^{(m)} u_k', \quad v_n' = \sum_l x_l^{(n)} u_l',$$

so folgt identisch in v_m', v_n' , bezüglich u_k', u_i' :

$$\begin{aligned} & \sum_k \sum_l A_{ki}^u \sum_m \sum_n u_k^{(m)} v_m' u_i^{(n)} v_n' \\ &= \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_l A_{ki}^u u_k^{(m)} u_i^{(n)} \right\} v_m' v_n' = \sum_m \sum_n B_{mn}^v v_m' v_n' \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} S^2 \sum_k \sum_l A_{ki}^u u_k' u_i' &= \sum_m \sum_n B_{mn}^v \sum_k \sum_l x_k^{(m)} u_k' x_l^{(n)} u_l' \\ &= \sum_k \sum_l \left\{ \sum_m \sum_n B_{mn}^v x_k^{(m)} x_l^{(n)} \right\} u_k' u_l'. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der beiderseitigen Koeffizienten von $v_m' v_n'$ und $u_k' u_l'$ ergibt sich daher:¹¹³⁾

Zwischen den geränderten Unterdeterminanten dritten Grades A_{ki} und B_{mn} der ursprünglichen Determinante A und der transformierten B bestehen die Beziehungen:

$$(26) \quad \begin{cases} B_{mn}^v = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^u u_k^{(m)} u_i^{(n)}, \\ S^2 A_{ki}^u = \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn}^v x_k^{(m)} x_l^{(n)}. \end{cases}$$

9. Gleichungen von Fläche und drei Ebenen. Nimmt man zu (1), (2), (10) noch eine dritte Ebene:

$$(27) \quad u'' = \sum_1^4 u_k'' x_k = 0$$

hinzu, so bedeutet das gleichzeitige Bestehen der vier Gleichungen (1), (2), (10) und (27), daß der Schnittpunkt $u \times u' \times u''$ der drei Ebenen auf der Fläche f liegt.

Bei der Transformation wird wie in (4):

$$(28) \quad u'' = \sum_1^4 v_m'' y_m = 0.$$

10. Die dreifach geränderte Determinante als Invariante. Die mit den Koordinaten der drei Ebenen (2), (10), (27) geränderte Determinante der Fläche (1):

$$(29) \quad A^{uu'u''} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' & u_1'' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' & u_2'' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u_3' & u_3'' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u_4' & u_4'' \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 & 0 \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung der Fläche und des Schnittpunktes der drei Ebenen eigentümliche Konstante, die sich nicht ändert, wenn für u, u', u'' drei andere durch den Schnittpunkt gehende Ebenen gesetzt werden (I § 58, (29); Anm. 1, IV, 4). In gleicher Weise sei:

$$(30) \quad B^{vv'v''} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & v_1 & v_1' & v_1'' \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Wie unter 3 ergibt sich, wenn S als Determinante sechsten Grades dargestellt wird:

$$(31) \quad B^{vv'v''} = S^2 A^{uu'u''}.$$

Die dreifach geränderte Determinante ist Simultaninvariante von Fläche und Punkt.

11. Entwicklung der dreifach geränderten Determinante nach Punktkoordinaten. Die Koordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen (2), (10), (27) sind im alten und neuen System:¹¹³⁾

$$(32) \quad x_k = \begin{vmatrix} u_{k_1} & u'_{k_1} & u''_{k_1} \\ u_{k_2} & u'_{k_2} & u''_{k_2} \\ u_{k_3} & u'_{k_3} & u''_{k_3} \end{vmatrix}, \quad Sy_m = \begin{vmatrix} v_{m_1} & v'_{m_1} & v''_{m_1} \\ v_{m_2} & v'_{m_2} & v''_{m_2} \\ v_{m_3} & v'_{m_3} & v''_{m_3} \end{vmatrix},$$

$k.k_1k_2k_3, m.m_1m_2m_3 = 1.234, 2.314, 3.124, 4.321$, wo der an sich unwesentliche Faktor S hinzugefügt ist, um den Formeln § 138, (31) zu entsprechen, wie § 43, 4. Damit gibt die *Entwicklung der Determinanten* (29) und (30) *nach den Unterdeterminanten der drei letzten Zeilen und Kolonnen*:¹⁹³⁾

$$(33) \quad A^{uu'u''} = - \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = -f; \quad B^{vv'v''} = -S^2 \sum_1^4 \sum_1^4 b_{mn} y_m y_n.$$

Die Invarianteneigenschaft (31) folgt daher auch aus der ersten Gleichung § 138, (30).

12. Entwicklung der dreifach geränderten Determinante nach Linienkoordinaten. Die Achsenkoordinaten der Schnittlinie der beiden Ebenen u' und u'' oder v' und v'' sind wie in (15):

$$(34) \quad q_k' = \begin{vmatrix} u'_{k_1} & u''_{k_1} \\ u'_{k_2} & u''_{k_2} \end{vmatrix}, \quad s_m' = \begin{vmatrix} v'_{m_1} & v''_{m_1} \\ v'_{m_2} & v''_{m_2} \end{vmatrix}.$$

Diejenigen 36 Unterdeterminanten dritten Grades der geränderten Determinante A^u in (5), die zugleich die geränderten Unterdeterminanten α_{ki} der Determinante A sind (§ 138, (9)), bezeichnen wir mit (vgl. (21)):

$$(35) \quad \alpha_{kl}^u = \begin{vmatrix} a_{k_1l_1} & a_{k_1l_2} & u_{k_1} \\ a_{k_2l_1} & a_{k_2l_2} & u_{k_2} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & 0 \end{vmatrix},$$

wo k und l die Nummern der Variationen k_1k_2 und l_1l_2 in § 138, (20) bedeuten. Entsprechend bezeichnen wir die Unterdeterminanten von B^v in (6).

Die *Entwicklung der Determinanten* (29) und (30) *nach den Unterdeterminanten der zwei letzten Zeilen und Kolonnen* gibt alsdann:

$$(36) \quad A^{uu'u''} = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki}^u q_k' q_l'; \quad B^{vv'v''} = \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn}^v s_m' s_n'$$

oder nach (18) und (18'):

$$(37) \quad A^{uu'u''} = \sigma^2 \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki}^u p_k' p_l'; \quad B^{vv'v''} = \sigma^2 S^2 \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn}^v r_m' r_n'.$$

Danach ist vermöge der Transformation von dem einen Koordinatentetraeder auf das andere nach (31):

$$(38) \quad \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki}^u p_k' p_i' = \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn}^v r_m' r_n'.$$

13. Beziehung der geränderten Unterdeterminanten zueinander.

Setzt man in der vermöge der Transformation identischen Gleichung (38) links, bezüglich rechts nach § 138, (29); (31):

$$(39) \quad p_k' = \sum_m p_k^{(m)} r_m', \quad S^2 r_m' = \sum_k q_k^{(m)} p_k',$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_l \alpha_{ki}^u p_k^{(m)} p_l^{(n)} \right\} r_m' r_n' &= \sum_m \sum_n \beta_{mn}^v r_m' r_n', \\ S^4 \sum_k \sum_l \alpha_{ki}^u p_k' p_l' &= \sum_k \sum_l \left\{ \sum_m \sum_n \beta_{mn}^v q_k^{(m)} q_l^{(n)} \right\} p_k' p_l'. \end{aligned}$$

Zwischen den geränderten Unterdeterminanten zweiten Grades α_{ki} und β_{mn} der ursprünglichen Determinante A und der transformierten B bestehen die Beziehungen:

$$(40) \quad \begin{cases} \beta_{mn}^v = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki}^u p_k^{(m)} p_i^{(n)}, \\ S^4 \alpha_{ki}^u = \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn}^v q_k^{(m)} q_i^{(n)}. \end{cases}$$

14. Entwicklung der dreifach geränderten Determinante nach Ebenenkoordinaten. Wir bezeichnen diejenigen sechzehn Unterdeterminanten fünften Grades der zweifach geränderten Determinante $A^{uu'}$ in (12), die zugleich die zweifach geränderten Unterdeterminanten A_{ki} der Determinante A sind (vgl. (21)), mit:

$$(41) \quad A_{ki}^{uu'} = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & a_{k_1 l_3} & u_{k_1} & u'_{k_1} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & a_{k_2 l_3} & u_{k_2} & u'_{k_2} \\ a_{k_3 l_1} & a_{k_3 l_2} & a_{k_3 l_3} & u_{k_3} & u'_{k_3} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & u_{l_3} & 0 & 0 \\ u'_{l_1} & u'_{l_2} & u'_{l_3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und entsprechend die aus b_{mn} , v_m , v_m' gebildeten.

Die Entwicklung der Determinanten (29) und (30) nach den Elementen der letzten Zeile und Kolonne gibt alsdann:

$$(42) \quad A^{uu'u''} = - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k'' u_i''; \quad B^{v'v''} = - \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn}^{v'} v_m'' v_n''.$$

Danach folgt aus (31):

$$(43) \quad S^2 \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k'' u_i'' = \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn}^{vv'} v_m'' v_n''.$$

15. Beziehung der geränderten Unterdeterminanten zueinander. Setzt man hier links, bezüglich rechts nach (24) und (25):

$$(44) \quad Su_k'' = \sum_m u_k^{(m)} v_m'', \quad v_m'' = \sum_k x_k^{(m)} u_k'',$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \sum_m \sum_n \left\{ \sum_k \sum_i A_{ki}^{uu'} u_k^{(m)} u_i^{(n)} \right\} v_m'' v_n'' &= \sum_m \sum_n B_{mn}^{vv'} v_m'' v_n'', \\ S^2 \sum_k \sum_i A_{ki}^{uu'} u_k'' u_i'' &= \sum_k \sum_i \left\{ \sum_m \sum_n B_{mn}^{vv'} x_k^{(m)} x_i^{(n)} \right\} u_k'' u_i''. \end{aligned}$$

Zwischen den zweifach geränderten Unterdeterminanten dritten Grades A_{ki} und B_{mn} der Determinanten A und B bestehen daher die Beziehungen:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{mn}^{vv'} &= \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k^{(m)} u_i^{(n)}; \\ S^2 A_{ki}^{uu'} &= \sum_1^4 \sum_1^4 B_{mn}^{vv'} x_k^{(m)} x_i^{(n)}. \end{aligned} \right.$$

§ 141. Einteilung der ebenen Schnitte nach dem Range.

1. Einführung der schneidenden Ebene als Koordinatenebene.

Die auf ein Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezogenen Gleichungen:

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \quad (2) \quad u = \sum_1^4 u_k x_k = 0$$

der Schnittkurve einer Fläche zweiter Ordnung f und einer Ebene u erhalten in einem beliebigen neuen Tetraeder mit den Ecken $J_1 J_2 J_3 J_4$ die Form § 140, (3) und (4).

Nimmt man dabei die Ebene u selbst als Seitenfläche l_4 des neuen Tetraeders (I § 63, 8), so werden:

$$(3) \quad u_1^{(4)} = u_1, \quad u_2^{(4)} = u_2, \quad u_3^{(4)} = u_3, \quad u_4^{(4)} = u_4$$

die alten und mit Rücksicht auf § 138, (31) und die Definition der $u_k^{(m)}$ in § 138, 7:

$$(4) \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = \sum_1^4 x_k^{(4)} u_k^{(4)} = S$$

die neuen Koordinaten der schneidenden Ebene.

Die Gleichungen der Schnittkurve im neuen Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ lauten daher:

$$(5) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{mn} y_m y_n = 0, \quad (6) \quad u = S y_4 = 0.$$

2. Gleichung der Schnittkurve in ihrer Ebene. Für alle Punkte der Seitenfläche l_4 , für die $y_4 = 0$ ist, sind aber y_1, y_2, y_3 zugleich Dreieckskoordinaten in bezug auf das Dreieck $J_1 J_2 J_3$ (I § 57, 16).

Die Gleichung der Schnittkurve der Fläche f mit der Ebene u lautet daher in Dreieckskoordinaten in bezug auf das Dreieck $J_1 J_2 J_3$:

$$(7) \quad \sum_1^3 \sum_1^3 b_{mn} y_m y_n = 0.$$

Die Ebene u kann dabei, statt durch die Gleichung (2), auch durch die drei Punkte $J_1 = x_k^{(1)}, J_2 = x_k^{(2)}, J_3 = x_k^{(3)}$ gegeben sein, da die Koeffizienten b_{mn} direkt von $a_{ki}, x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ abhängen (§ 138, (13)).⁴⁵⁾

3. Der Rang der Schnittkurve nach ihrer Determinante in der Ebene. Die Determinante des Kegelschnittes (7), sofern er für sich in der Ebene $J_1 J_2 J_3$ betrachtet wird, ist:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{44},$$

und ihre Unterdeterminanten sind:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \beta_{11}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \beta_{22}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \beta_{33}, \dots,$$

wo die Benennungen rechts die bereits für die Unterdeterminanten von B eingeführten sind (§ 138, 7; 8). Daher folgt mit Rücksicht auf § 42, 3; 4; 7:

Die Kurve, in der die Fläche (1) von der Ebene der drei Punkte $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ geschnitten wird, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, wenn:

$$(10) \quad B_{44} \neq 0;$$

ein getrenntes Linienpaar, wenn:

$$(11) \quad B_{44} = 0; \quad \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12} \text{ nicht alle } 0;$$

eine Doppellinie, wenn:

$$(12) \quad \beta_{11} = 0, \beta_{22} = 0, \beta_{33} = 0, \beta_{23} = 0, \beta_{31} = 0, \beta_{12} = 0;$$

$$b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{23}, b_{31}, b_{12} \text{ nicht alle } 0;$$

unbestimmt, wenn:

$$(13) \quad b_{11} = 0, b_{22} = 0, b_{33} = 0, b_{23} = 0, b_{31} = 0, b_{12} = 0.$$

4. Der Rang der Schnittkurve nach ihrer Determinante im Raume. Die mit den Koordinaten der Ebene (6) geränderte Determinante der Fläche (5) ist nach § 140, (6):

$$(14) \quad B^v = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & S \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \end{vmatrix} = -S^2 B_{44}.$$

Ferner wird, wenn $m \cdot m_1 m_2 m_3$, $n \cdot n_1 n_2 n_3$ die Permutationen § 138, (18) durchlaufen:

$$(15) \quad B_{mn}^v = \begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} & b_{m_1 n_3} & v_{m_1} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} & b_{m_2 n_3} & v_{m_2} \\ b_{m_3 n_1} & b_{m_3 n_2} & b_{m_3 n_3} & v_{m_3} \\ v_{n_1} & v_{n_2} & v_{n_3} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -S^2 \beta_{mn}, & \text{wenn } m, n \text{ beide } = 1, 2, 3; \\ 0, & \text{wenn } m, n \text{ nicht beide } = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Weiter wird, wenn m und n die Nummern der Variationen $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ in § 138, (20) bedeuten:

$$(16) \quad \beta_{mn}^v = \begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} & v_{m_1} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} & v_{m_2} \\ v_{n_1} & v_{n_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -S^2 b_{mn}^-, & \text{wenn } m, n \text{ beide } = 4, 5, 6; \\ 0, & \text{wenn } m, n \text{ nicht beide } = 4, 5, 6. \end{cases}$$

Nach § 140, (9); (26); (40) wird demgemäß:

$$(17) \quad A^u = -B_{44},$$

$$(18) \quad -S^2 \beta_{mn} = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 A_{kl}^u u_k^{(m)} u_l^{(n)} \quad (m, n = 1, 2, 3),$$

$$-S^2 b_{mn}^- = \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 \alpha_{kl}^u p_k^{(m)} p_l^{(n)} \quad (\bar{m}, \bar{n} = 1, 2, 3);$$

$$(19) \quad -A_{kl}^u = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \beta_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)} \quad (k, l = 1, 2, 3, 4),$$

$$-S^2 \alpha_{kl}^u = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 b_{mn}^- q_k^{(m)} q_l^{(n)} \quad (k, l = 1, 2, \dots, 6).$$

Daher verschwindet A^u stets und nur mit B_{44} ; verschwinden alle

$\beta_{m\bar{n}}$ ($m = 1, 2, 3$), wenn alle A_{ki}^u ($k, l = 1, 2, 3, 4$) verschwinden, und umgekehrt; verschwinden alle $b_{\bar{m}\bar{n}}$ ($\bar{m}, \bar{n} = 1, 2, 3$), wenn alle α_{ki}^u ($k, l = 1, 2, \dots, 6$) verschwinden, und umgekehrt. Daher folgt aus 3:

Die Kurve, in der die Fläche (1) von der Ebene (2) geschnitten wird, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, wenn:

$$(20) \quad A^u \neq 0;$$

ein getrenntes Linienpaar, wenn:

$$(21) \quad A^u = 0, \text{ aber nicht alle } A_{ki}^u \quad (k, l = 1, 2, 3, 4) \text{ verschwinden;}$$

eine Doppellinie, wenn:

$$(22) \quad A^u = 0, \text{ alle } A_{ki}^u = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4), \text{ aber}$$

$$\text{nicht alle } \alpha_{ki}^u \quad (k, l = 1, 2, \dots, 6) \text{ verschwinden;}$$

unbestimmt, wenn:

$$(23) \quad A^u = 0, \text{ alle } A_{ki}^u = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4), \text{ alle } \alpha_{ki}^u = 0 \quad (k, l = 1, 2, \dots, 6).$$

In (22) folgt überdies die Bedingung $A^u = 0$ nach (18), (9), (8), (17) aus $A_{ki}^u = 0$ und in (23) die Bedingungen $A^u = 0, A_{ki}^u = 0$ nach (18), (9), (8), (19), (17) aus $\alpha_{ki}^u = 0$.

Damit sind die *Bedingungen des Ranges* der Schnittkurve von dem neueingeführten speziell gewählten Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ wieder auf das ursprüngliche $E_1 E_2 E_3 E_4$ übertragen.¹²⁰⁾

Nach § 140, (9); (26); (40) sind diese Bedingungen sämtlich *invariant* im Sinne von § 139, 1.

5. Die Summen der Hauptunterdeterminanten. Infolge der mit u_1, u_2, u_3, u_4 für u, v, w, s geschriebenen *Identitäten* § 107, (25); (43) können bei *reellen* a_{ki}, u_k in die Bedingungen (21)—(23) auch die Summen der *Hauptunterdeterminanten* § 107, (22); (23) eingeführt werden, worauf die Merkmale des Ranges der Schnittkurve lauten:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^u \neq 0: \text{ eigentlicher Kegelschnitt;} \\ A^u = 0, A'^u \neq 0: \text{ getr. Linienpaar;} \\ A^u = 0, A'^u = 0, A''^u \neq 0: \text{ Doppellinie;} \\ A^u = 0, A'^u = 0, A''^u = 0: \text{ unbestimmt.} \end{array} \right.$$

6. Bedingungen für die Koordinaten des Doppelpunktes. Nach Herstellung der *Merkmale* für das Vorhandensein von Doppелеlementen, handelt es sich um die *wirkliche Bestimmung* der letzteren.

In der Gleichung (7) fehlt immer dann und nur dann die Koordinate y_3 , wenn:

$$(25) \quad b_{13} = f_{13} = 0, \quad b_{23} = f_{23} = 0, \quad b_{33} = f_{33} = 0$$

oder nach § 138, (6):

$$(26) \quad \sum_1^4 f_k^{(3)} x_k^{(m)} = 0 \quad \text{für } m = 1, 2, 3.$$

Diese Gleichungen bedeuten aber, daß $f_k^{(3)}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) die Koordinaten einer Ebene sind, die mit jedem der Punkte $x_k^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, vereinigt liegt und daher die schneidende Ebene (3) selbst ist, so daß mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ :

$$(27) \quad f_k^{(3)} + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Zu diesen für $x_k^{(3)}$ notwendigen Bedingungen tritt noch die der vereinigten Lage von $x_k^{(3)}$ und u_k :

$$(28) \quad \sum_1^4 u_k x_k^{(3)} = 0.$$

I. In der Gleichung (7) der Schnittkurve fehlt immer dann und nur dann die Koordinate y_m ($m = 1, 2$ oder 3), wenn die Ecke $J_m = x_k^{(m)}$ des neuen Tetraeders unter Elimination von ϱ den fünf Gleichungen genügt:

$$(29) \quad f_k + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (30) \quad \sum_1^4 u_k x_k = 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(31) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \varrho u_4 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Jeder Punkt, der diesen Gleichungen genügt, heißt, wie in § 42, 3 ein *singulärer* oder *Doppelpunkt* der Schnittkurve (§ 107, 1).⁴⁹⁾

7. Eigentliche Kegelschnitte. Im Falle (20) gibt es, da A^u die Determinante der linearen homogenen Gleichungen (31) ist, *keinen* Doppelpunkt. Die Gleichung (7) enthält stets *alle* drei Koordinaten y_1, y_2, y_3 .

Wenn für die Fläche (1) selbst alle A_k verschwinden (§ 139, (29)), so kann nach § 140, (7) die Bedingung (20) niemals erfüllt sein; also:

I. *Eigentliche Kegelschnitte als Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche (1) ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene ist.*

8. **Getrennte Linienpaare und ihr Doppelpunkt.** Unter den Voraussetzungen (21) ist ein bestimmter Doppelpunkt vorhanden, für dessen Koordinaten die Auflösung der Gleichungen (31) ergibt:⁷⁹⁾

$$(32) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 : \varrho = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u : A_{k5}^u,$$

$k = 1, 2, 3, 4$ oder 5 , wo die A_{ki}^u allgemein die Unterdeterminanten vierten Grades der Determinanten § 140, (5) sind, die zum Teil schon § 140, (21) eingeführt wurden. Der Punkt x_k^0 ist schon durch die vier ersten Glieder der Proportion (32) bestimmt. Führt man ihn als Ecke $J_3 = x_k^{(3)}$ ein, so wird nach 6, I die Gleichung (7):

$$(33) \quad b_{11} y_1^2 + 2b_{12} y_1 y_2 + b_{22} y_2^2 = 0.$$

Aus (32) folgt, wie § 44, (28) mit einem Proportionalitätsfaktor τ und mit $k, l = 1, 2, 3, 4$ ¹²¹⁾:

$$(34) \quad \tau x_k^0 x_l^0 = A_{kl}^u, \quad (35) \quad \tau x_k^0 \varrho = A_{k5}^u, \quad (36) \quad \tau \varrho^2 = A_{55}^u = A.$$

Da nun $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{33} = 0$, so sind neben (8) auch alle Unterdeterminanten (9) gleich Null mit Ausnahme der einen:

$$(37) \quad \beta_{33} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

die im vorliegenden Falle (11); (21) nicht verschwinden kann. Damit wird aus (19):

$$-A_{kl}^u = \beta_{33} x_k^{(3)} x_l^{(3)} = \beta_{33} x_k^0 x_l^0.$$

Der Faktor τ in (34) ist daher gleich $-\beta_{33}$.

Schneidet die Ebene (2) unter der Voraussetzung (21) die Fläche (1) in einem getrennten Linienpaar mit dem Doppelpunkt x_k^0 , so gelten für die Unterdeterminanten der geränderten Determinante die Gleichungen:

$$(38) \quad A_{ki}^u = -\beta_{33} x_k^0 x_i^0, \quad (39) \quad A_{k5}^u = -\varrho \beta_{33} x_k^0, \quad (40) \quad A = -\varrho^2 \beta_{33},$$

wo k und l je $= 1, 2, 3, 4$.

Daher haben auch A , A_{11}^u , A_{22}^u , A_{33}^u , A_{44}^u , soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen und zwar das entgegengesetzte der Determinante (37).

Infolge von (38) wird die zweifach geränderte Determinante § 140, (22):

$$(41) \quad A^{uu'} = - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^u u_k' u_i' = \beta_{33} \left(\sum_1^4 x_k^0 u_k' \right)^2.$$

ein vollständiges Quadrat.¹¹⁸⁾

Da alle A_{ki}^u ($k, l = 1, 2, 3, 4$) nach § 140, (21) lineare homogene Funktionen der α_{ki} sind, so kann die Bedingung (21) nicht erfüllt sein, wenn alle α_{ki} verschwinden (§ 139, (29)); also:

II. *Getrennte Linienpaare als Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche (1) eine Doppelebene ist.*

9. Doppelpunkt der Schnittkurve und Doppelpunkt der Fläche.

Wenn $A = 0$ ist, wird den fünf Gleichungen (31), mit Hinblick auf (40) bei $\varrho = 0$, durch:

$$(42) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4},$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4 , genügt, und zwar den vier ersten nach § 139, (8), der fünften, weil für $A'' = 0$ und $A''_{55} = A = 0$ wegen $A''_{k5} A''_{5k} = A''_{55} A''_{kk}$ (nach (32)):

$$(43) \quad -A''_{k5} = A_{k1} u_1 + A_{k2} u_2 + A_{k3} u_3 + A_{k4} u_4 = 0.$$

Da es aber nur eine Auflösung geben soll, muß alsdann für k (beiderseits unabhängig) $= 1, 2, 3, 4$ gelten:

$$(44) \quad A''_{k1} : A''_{k2} : A''_{k3} : A''_{k4} = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4}.$$

Ist die Schnittkurve eines Kegels mit einer Ebene ein getrenntes Linienpaar, so fällt der Doppelpunkt der Kurve stets in die Spitze des Kegels.

Sind alle $A_{ki} = 0$, so wird den Gleichungen (31) bei $\varrho = 0$ genügt durch den Schnittpunkt der Achse q^0 des Ebenenpaares mit der Ebene (2) (§ 139, (16); I § 59, (14)):

$$(45) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = \alpha_{k6} u_2 - \alpha_{k5} u_3 + \alpha_{k1} u_4 : \alpha_{k4} u_3 - \alpha_{k6} u_1 + \alpha_{k2} u_4 : \dots : \dots$$

Da es aber nur einen singulären Punkt geben soll, folgt:

Ist die Schnittkurve eines Ebenenpaares mit einer Ebene ein getrenntes Linienpaar, so fällt der Doppelpunkt der Kurve auf die Achse des Linienpaares.

10. Doppellinien als Schnittkurven. Unter den Voraussetzungen (22) ist die Schnittkurve eine Doppellinie, alle ihre Punkte genügen den Gleichungen (31). Durch Elimination von x_1 und ϱ aus der zweiten, dritten und fünften Gleichung (31) ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 & u_2 \\ a_{31} & a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 & u_3 \\ u_1 & u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\alpha''_{13} x_2 - \alpha''_{12} x_3 + \alpha''_{14} x_4 = 0.$$

Ebenso folgt:

$$\alpha''_{11} x_3 - \alpha''_{13} x_1 + \alpha''_{15} x_4 = 0, \dots, \dots$$

Daher ist für die Achsenkoordinaten der Doppellinie (I § 59, (9)):

$$(46) \quad q_1^0 : q_2^0 : q_3^0 : q_4^0 : q_5^0 : q_6^0 = \alpha''_{k1} : \alpha''_{k2} : \alpha''_{k3} : \alpha''_{k4} : \alpha''_{k5} : \alpha''_{k6},$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 .

Führt man zwei beliebige getrennte Punkte dieser Linie als Ecken $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(3)}$ ein, $q_k^{(4)} = q_k^0$, so wird die Gleichung (7) nach 6, I:

$$(47) \quad b_{11} y_1^2 = 0.$$

Da alle b_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) außer b_{11} verschwinden, wird aus (19)¹²¹:

$$(48) \quad -S^2 \alpha_{ki}^u = b_{11} q_k^{(4)} q_i^{(4)} = b_{11} q_k^0 q_i^0.$$

Danach haben $\alpha_{11}^u, \alpha_{22}^u, \dots, \alpha_{66}^u$, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen.

Ferner wird die dreifach geränderte Determinante § 140, (37):

$$(49) \quad -S^2 A^{uu'u''} = \sigma^2 b_{11} \sum_1^6 k \sum_1^6 l q_k^0 q_l^0 p_k' p_l' = \sigma^2 b_{11} \left(\sum_1^6 k q_k^0 p_k' \right)^2$$

ein vollständiges Quadrat¹¹⁸).

Da mit den Bedingungen (22) nach § 107, 4, I auch $A = 0$ ist, so folgt:

III. *Doppellinien als Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche (1) eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung ist.*

11. Unbestimmte Schnittkurven. Unter den Voraussetzungen (23) ist die Schnittkurve unbestimmt. Die Ebene (2) ist dann selbst ein Teil der Fläche (1), die somit ein Ebenenpaar oder eine Doppelsebene sein muß (§ 139, (29)).

IV. *Unbestimmte Schnittkurven kommen nicht vor, wenn die Fläche (1) eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung oder ein Kegel ist.*

Man erhält die Bedingungen für die unbestimmte Schnittkurve direkt, wenn man unter der Voraussetzung:

$$(50) \quad u_4 \neq 0$$

den aus (2) folgenden Wert von x_4 in (1) einsetzt:

$$\begin{aligned} u_4^2 (a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2) + a_{44} (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)^2 \\ + 2u_4^2 (a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{12} x_1 x_2) \\ - 2u_4 (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) (a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3) = 0, \end{aligned}$$

und nun die Koeffizienten von $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2$ einzeln gleich Null setzt. Man erhält:

$$(51) \quad \begin{cases} a_{11} u_4^2 + a_{44} u_1^2 - 2a_{14} u_4 u_1 = 0, & a_{33} u_4^2 + a_{44} u_3^2 - a_{24} u_3 u_4 - a_{34} u_2 u_4 = 0, \\ a_{22} u_4^2 + a_{44} u_2^2 - 2a_{24} u_4 u_2 = 0, & a_{31} u_4^2 + a_{44} u_3 u_1 - a_{34} u_1 u_4 - a_{14} u_3 u_4 = 0, \\ a_{33} u_4^2 + a_{44} u_3^2 - 2a_{34} u_4 u_3 = 0, & a_{12} u_4^2 + a_{44} u_1 u_2 - a_{14} u_2 u_4 - a_{24} u_1 u_4 = 0 \end{cases}$$

oder:

$$(52) \quad \alpha_{44}^u = 0, \quad \alpha_{55}^u = 0, \quad \alpha_{66}^u = 0, \quad \alpha_{56}^u = 0, \quad \alpha_{64}^u = 0, \quad \alpha_{45}^u = 0$$

als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zugehörigkeit der Ebene (2) zur Fläche (1) im Falle (50).

Die Bedingungen (23) sind also überzählige.

§ 142. Einteilung der Schnittpunktpaare nach dem Range.

1. Einführung der schneidenden Geraden als Koordinatenkante.

Die auf ein Koordinatentetraeder $E_1E_2E_3E_4$ bezogenen Gleichungen:

$$(1) \quad f = \sum_k^4 \sum_i^4 a_{ki} x_k x_i = 0,$$

$$(2) \quad u = \sum_k^4 u_k x_k = 0, \quad u' = \sum_k^4 u'_k x_k = 0$$

des *Schnittpunktpaares* einer Fläche zweiter Ordnung f und der geraden Linie $u \times u'$ erhalten in einem neuen Tetraeder mit den Ecken $J_1J_2J_3J_4$ die Form § 140, (3); (4); (11).

Nimmt man dabei die Ebenen u und u' selbst als Seitenflächen l_3 und l_4 des neuen Tetraeders (I § 63, 8), so werden:

$$(3) \quad u_k^{(3)} = u_k, \quad u_k^{(4)} = u'_k$$

die alten und wie § 141, (4):

$$(4) \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = S, \quad v_4 = 0; \quad v'_1 = 0, \quad v'_2 = 0, \quad v'_3 = 0, \quad v'_4 = S$$

die neuen Koordinaten der Ebenen (2).

Die Gleichungen des *Schnittpunktpaares* im neuen Tetraeder $J_1J_2J_3J_4$ lauten daher:

$$(5) \quad f = \sum_m^4 \sum_n^4 b_{mn} y_m y_n = 0 \quad (6) \quad Sy_3 = 0, \quad Sy_4 = 0.$$

2. Gleichung des Schnittpunktpaares in der Geraden. Für alle Punkte der Kante $l_3 \times l_4$ oder J_1J_2 sind $y_3 = 0$, $y_4 = 0$ und y_1, y_2 Zweieckskoordinaten in bezug auf J_1J_2 (I § 57, 14).

Die Gleichung des *Schnittpunktpaares* der Fläche f mit der Geraden $u \times u'$ lautet daher in Zweieckskoordinaten in bezug auf das Zweieck J_1J_2 :

$$(7) \quad b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 = 0, \quad b_{ki} = f_{ki}.$$

Die Gerade (2) kann dabei, statt durch die Ebenen u und u' , auch durch die zwei Punkte $J_1 = x_k^{(1)}$ und $J_2 = x_k^{(2)}$ gegeben sein, von deren Koordinaten die Koeffizienten direkt abhängen (§ 138, (13)). Man erhält dieselbe Gleichung (7) durch Einführung der *Parameterdarstellung* des laufenden Punktes der Verbindungslinie $x_k^{(1)}x_k^{(2)}$ (§ 67, (6), (7)) in die Gleichung (1).⁴⁵⁾

3. Der Rang des Schnittpunktpaares nach seiner Determinante in der Geraden. Die Determinante des Punktpaares (7), sofern es

für sich in der Geraden $J_1 J_2$ betrachtet wird, ist:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \beta_{33},$$

wo die Benennung rechts bereits bei § 138, (21) eingeführt wurde. Daher folgt aus § 39, 8:

Das Punktepaar, in dem die Fläche (1) von der Verbindungslinie der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ geschnitten wird, ist ein getrenntes Punktepaar, wenn:

$$(9) \quad \beta_{33} \neq 0;$$

ein zusammenfallendes Punktepaar, wenn:

$$(10) \quad \beta_{33} = 0; \quad b_{11}, b_{12}, b_{22} \text{ nicht alle } 0;$$

unbestimmt, wenn:

$$(11) \quad \beta_{33} = 0; \quad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 0.$$

4. Der Rang des Schnittpunktepaares nach seiner Determinante im Raume. Die mit den Koordinaten der beiden Ebenen (6) geänderte Determinante der Fläche (5) ist nach § 140, (13):

$$(12) \quad B^{vv'} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & S & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 & S \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^4 \beta_{33}.$$

Ferner wird:

$$(13) \quad B_{11}^{vv'} = S^4 b_{22}, \quad B_{12}^{vv'} = -S^4 b_{12}, \quad B_{22}^{vv'} = S^4 b_{11}; \quad B_{mn}^{vv'} = 0,$$

falls m, n nicht beide 1 oder 2 sind.

Nach § 140, (14); (45) wird demgemäß:

$$(14) \quad A^{uu'} = S^2 \beta_{33};$$

$$(15) \quad S^4 b_{22} = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k^{(1)} u_i^{(1)}, \quad S^4 b_{12} = - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k^{(1)} u_i^{(2)},$$

$$S^4 b_{11} = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k^{(2)} u_i^{(2)};$$

$$(16) \quad A_{ki}^{uu'} = S^2 (b_{22} x_k^{(1)} x_i^{(1)} - 2b_{12} x_k^{(1)} x_i^{(2)} + b_{11} x_k^{(2)} x_i^{(2)}).$$

Daraus geht nun mit Rücksicht auf 3 sofort hervor¹²⁰⁾:

Das Punktepaar, in dem die Fläche (1) von der Schnittlinie der Ebenen (2) getroffen wird, ist ein getrenntes Punktepaar, wenn:

$$(17) \quad A^{uu'} \neq 0;$$

ein zusammenfallendes Punktepaar, wenn:

$$(18) \quad A^{uu'} = 0, \text{ nicht alle } A_{kl}^{uu'} = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4;$$

unbestimmt, wenn:

$$(19) \quad A^{uu'} = 0; \text{ alle } A_{kl}^{uu'} = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4,$$

wobei nach (15), (8) und (14), ebenso wie in (11), die erste Bedingung eine Folge der übrigen ist.

Damit sind die *Bedingungen des Ranges* des Schnittpunktpaares von dem neuen speziell gewählten Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ wieder auf das ursprüngliche übertragen.⁷⁶⁾

Nach § 140, (14); (45) sind diese Bedingungen invariant im Sinne von § 139, 1.

5. Die Summe der Hauptunterdeterminanten. Für die Determinante sechsten Grades § 140, (12) ist unbedingt:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} A_{22}^{uu'} & A_{23}^{uu'} \\ A_{32}^{uu'} & A_{33}^{uu'} \end{vmatrix} = A^{uu'} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ a_{41} & a_{44} & u_4 & u_4' \\ u_1 & u_4 & 0 & 0 \\ u_1' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix} = A^{uu'} q_4^2,$$

wenn allgemein q_k die Achsenkoordinaten der Geraden $u \times u'$ sind. Mit Hinzunahme der entsprechenden Gleichungen ist also:

$$(21) \quad \begin{cases} A_{22}^{uu'} A_{33}^{uu'} - (A_{23}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_4^2, & A_{33}^{uu'} A_{11}^{uu'} - (A_{31}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_5^2, \\ A_{11}^{uu'} A_{22}^{uu'} - (A_{12}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_6^2, & A_{11}^{uu'} A_{44}^{uu'} - (A_{14}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_1^2, \\ A_{22}^{uu'} A_{44}^{uu'} - (A_{24}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_3^2, & A_{33}^{uu'} A_{44}^{uu'} - (A_{34}^{uu'})^2 = A^{uu'} q_2^2. \end{cases}$$

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$(22) \quad A'^{uu'} = A_{11}^{uu'} + A_{22}^{uu'} + A_{33}^{uu'} + A_{44}^{uu'},$$

so wird:

$$A_{11}^{uu'} A'^{uu'} = (A_{11}^{uu'})^2 + (A_{12}^{uu'})^2 + (A_{13}^{uu'})^2 + (A_{14}^{uu'})^2 + A^{uu'} (q_5^2 + q_6^2 + q_1^2), \dots, \dots$$

und folgt durch Addition die *identische Gleichung* (§ 107, (25))⁸⁰⁾:

$$(23) \quad (A'^{uu'})^2 = (A_{11}^{uu'})^2 + (A_{22}^{uu'})^2 + (A_{33}^{uu'})^2 + (A_{44}^{uu'})^2 + 2(A_{23}^{uu'})^2 + 2(A_{31}^{uu'})^2 + 2(A_{12}^{uu'})^2 + 2(A_{14}^{uu'})^2 + 2(A_{24}^{uu'})^2 + 2(A_{34}^{uu'})^2 + 2A^{uu'} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2).$$

Wenn daher $A^{uu'} = 0$ und $A'^{uu'} = 0$, so verschwinden nach (23) alle $A_{kl}^{uu'} (k, l = 1, 2, 3, 4)$, und nach (21) und (22) auch umgekehrt.

Demnach können die *Merkmale des Ranges* (17)—(19) bei *reellen* a_{ki} , u_k , u'_k auch kürzer so angegeben werden (§ 141, (24)):

$$(24) \quad \begin{cases} A^{uu'} \neq 0: \text{Getrenntes Punktepaar;} \\ A^{uu'} = 0, A'^{uu'} \neq 0: \text{Zusammenfallendes Punktepaar;} \\ A^{uu'} = 0, A'^{uu'} = 0: \text{Unbestimmt.} \end{cases}$$

6. Bedingungen für die Koordinaten des Doppelpunktes. Nach Herstellung der Merkmale für das Vorhandensein eines Doppelpunktes, handelt es sich um die wirkliche Bestimmung des letzteren.

In der Gleichung (7) fehlt die Koordinate y_2 immer dann und nur dann, wenn:

$$(25) \quad b_{12} = f_{12} = 0, \quad b_{22} = f_{22} = 0$$

oder nach § 138, (6):

$$(26) \quad \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(m)} = 0 \quad \text{für } m = 1, 2.$$

Diese beiden Gleichungen bedeuten aber, daß $f_k^{(2)}$ die Koordinaten einer Ebene sind, die mit jedem der Punkte $x_k^{(m)}$ vereinigt liegt, die also durch die Achse der Ebenen (2) geht. Dazu muß mit zwei Proportionalitätsfaktoren ϱ und ϱ' (I § 64, (3')):

$$f_k^{(2)} + \varrho u_k + \varrho' u'_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Diesen vier Gleichungen muß also der Punkt $x_k^{(2)}$ genügen, und da er außerdem nach 2 auf den beiden Ebenen (2) liegt, so folgt:

I. In der Gleichung (7) des Schnittpunktpaares fehlt immer dann und nur dann die Koordinate y_2 , wenn die Ecke $J_2 = x_k^{(2)}$ des neuen Tetraeders unter Elimination von ϱ und ϱ' den sechs Gleichungen genügt:

$$(27) \quad f_k + \varrho u_k + \varrho' u'_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad \sum_1^4 u_k x_k = 0, \quad \sum_1^4 u'_k x_k = 0, \\ \text{oder ausführlich geschrieben}^{49):}$$

$$(28) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 + \varrho' u'_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 + \varrho' u'_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 + \varrho' u'_3 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \varrho u_4 + \varrho' u'_4 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ u'_1x_1 + u'_2x_2 + u'_3x_3 + u'_4x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Eigentliche Punktepaare. Unter der Voraussetzung (17) gibt es keinen Punkt, der den Gleichungen (28) genügt. Die Gleichung

(7) enthält stets *beide* Koordinaten y_1 und y_2 und stellt ein *getrenntes Punktepaar* dar (§ 39, 10).

Wenn die Fläche eine Doppellebene ist, also alle α_{ki} verschwinden (§ 139, (29)), kann nach § 140, (19) die Bedingung (17) niemals erfüllt sein.

Getrennte Schnittpunktepaare kommen nicht vor, wenn die Fläche (1) eine Doppellebene ist.

8. Koordinaten des Doppelpunktes. Unter den Bedingungen (18) schneidet die Gerade (2) die Kurve (1) in einem *zusammenfallenden Punktepaar* oder *Doppelpunkt* x_k^0 , für den die Auflösung der Gleichungen (28) ergibt:

$$(29) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 : \varrho : \varrho' = A_{k1}^{uu'} : A_{k2}^{uu'} : A_{k3}^{uu'} : A_{k4}^{uu'} : A_{k5}^{uu'} : A_{k6}^{uu'},$$

wo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 sein kann, aber der Punkt schon durch die vier ersten Glieder der Proportion und mit $k = 1, 2, 3, 4$ bestimmt ist. Die $A_{ki}^{uu'}$ sind allgemein die Unterdeterminanten fünften Grades der Determinante § 140, (12).

Nimmt man den Punkt (29) als Ecke $J_2 = x_k^{(2)}$, so wird die Gleichung (7) nach 6, I:

$$(30) \quad b_{11}y_1^2 = 0.$$

Aus (29) folgt mit einem Proportionalitätsfaktor τ und mit $k, l = 1, 2, 3, 4$, wie § 141, (34)¹²¹:

$$(31) \quad \tau x_k^0 x_l^0 = A_{kl}^{uu'};$$

$$(32) \quad \tau x_k^0 \varrho = A_{k5}^{uu'}, \quad \tau x_k^0 \varrho' = A_{k6}^{uu'};$$

$$(33) \quad \tau \varrho^2 = A_{55}^{uu'} = F(u_k'), \quad \tau \varrho'^2 = A_{66}^{uu'} = F(u_k), \quad \tau \varrho \varrho' = A_{56}^{uu'}.$$

Da nach (16) mit $b_{12} = 0$, $b_{22} = 0$:

$$A_{kl}^{uu'} = S^2 b_{11} x_k^0 x_l^0$$

ist, so kann man setzen:

$$(34) \quad \tau = S^2 b_{11}.$$

Gleichzeitig wird die dreifach geränderte Determinante § 140, (42):

$$(35) \quad A^{uu'u''} = - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k'' u_l'' = - S^2 b_{11} \left(\sum_1^4 x_k^0 u_k'' \right)^2$$

*ein vollständiges Quadrat.*¹¹⁸)

Ist neben (18) noch $A^u = 0$, so wird den Gleichungen (28) bei $\varrho' = 0$ auch genügt durch den Punkt (§ 141, (32)):

$$(36) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 : \varrho = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u : A_{k5}^u.$$

Schneidet also die Gerade $u \times u'$ die Fläche (1) in einem Doppel-

punkt, so ist dieser zugleich Doppelpunkt der *Schnittkurve* der Fläche mit der durch die Gerade gehenden Tangentialebene u (§ 143, (2)).

9. Unbestimmte Punktepaare. Unter der Bedingung (19) ist das Punktepaar *unbestimmt*. Die Schnittlinie der beiden Ebenen (2) liegt dann in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche (1).

Man kann die Bedingungen hierfür direkt entwickeln, indem man als Gleichungen der Schnittlinie der Ebenen (2) die folgenden benutzt (I § 59, (9)):

$$(37) \quad q_4 x_1 = -q_5 x_2 - q_6 x_3, \quad q_4 x_4 = -q_3 x_2 + q_2 x_3,$$

$q_4 \neq 0$ angenommen. Eliminiert man mittels (37) x_1 und x_4 aus (1), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & a_{11}(q_5 x_2 + q_6 x_3)^2 + a_{22} q_4^2 x_2^2 + a_{33} q_4^2 x_3^2 + a_{44}(q_3 x_2 - q_2 x_3)^2 \\ & + 2 a_{23} q_4^2 x_2 x_3 - 2(a_{31} x_3 + a_{12} x_2) q_4 (q_5 x_2 + q_6 x_3) \\ & + 2 a_{14}(q_5 x_2 + q_6 x_3)(q_3 x_2 - q_2 x_3) \\ & - 2(a_{24} x_2 + a_{34} x_3) q_4 (q_3 x_2 - q_2 x_3) = 0, \end{aligned}$$

und durch Nullsetzen der Koeffizienten von $x_2^2, x_3^2, x_2 x_3$:

$$(38) \quad \begin{cases} a_{11} q_5^2 + a_{22} q_4^2 + a_{44} q_3^2 - 2 a_{24} q_4 q_3 + 2 a_{41} q_3 q_5 - 2 a_{12} q_5 q_4 = 0, \\ a_{11} q_6^2 + a_{33} q_4^2 + a_{44} q_2^2 + 2 a_{34} q_4 q_2 - 2 a_{41} q_2 q_6 - 2 a_{13} q_6 q_4 = 0, \\ a_{11} q_5 q_6 + a_{23} q_4^2 - a_{44} q_2 q_3 + a_{24} q_2 q_4 - a_{34} q_3 q_4 - a_{12} q_4 q_6 \\ - a_{13} q_4 q_5 + a_{14} q_3 q_6 - a_{14} q_2 q_5 = 0. \end{cases}$$

Die linken Seiten sind aber die Entwicklungen der Unterdeterminanten $A_{33}^{uu'}$, $A_{22}^{uu'}$, $-A_{23}^{uu'}$, also:

Für die Zugehörigkeit der Schnittlinie q der beiden Ebenen (2) zur Fläche (1) sind, falls $q_4 = u_1 u_4' - u_4 u_1' \neq 0$ ist, die Bedingungen:

$$(39) \quad A_{22}^{uu'} = 0, \quad A_{23}^{uu'} = 0, \quad A_{33}^{uu'} = 0$$

notwendig und hinreichend.

Die zehn Bedingungen (19) sind überzählige (§ 141, 11).

10. Die Unterdeterminanten von $A^{uu'}$ bei unbestimmtem Punktepaar. Wenn $A^{uu'} = 0$ ist, gilt die Entwicklung:

$$(40) \quad a_{k1} A_{11}^{uu'} + a_{k2} A_{12}^{uu'} + a_{k3} A_{13}^{uu'} + a_{k4} A_{14}^{uu'} + u_k A_{15}^{uu'} + u_k' A_{16}^{uu'} = 0$$

für $k = 1, 2, 3, 4$ und $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sie reduziert sich unter den Bedingungen (19) für $k = 1, 2, 3, 4$ und $l = 1, 2, 3, 4$ auf:

$$(41) \quad u_k A_{15}^{uu'} + u_k' A_{16}^{uu'} = 0.$$

Da aber die Ebenen u_k und u_k' als verschieden vorauszusetzen sind, so folgt aus solchen vier Gleichungen (41), die bei festem l den vier Werten von k entsprechen (I § 51, (3)):

$$(42) \quad A_{15}^{u'u'} = A_{51}^{u'u'} = 0, \quad A_{16}^{u'u'} = A_{61}^{u'u'} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

Infolge von (42) reduziert sich aber (40) auch für $l = 5, 6$ auf (41), worauf wiederum (41) auch für $l = 5, 6$ folgt (§ 107, 4).

Sind die sechzehn Unterdeterminanten fünften Grades $A_{kl}^{u'u'}$, $k, l = 1, 2, 3, 4$, von $A^{u'u'}$ gleich Null, so verschwinden auch alle übrigen Unterdeterminanten fünften Grades (42) mit $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Unter diesen befinden sich auch (§ 140, (12); (8)):

$$(43) \quad A_{66}^{u'u'} = A^u = -F(u_1, u_2, u_3, u_4), \quad A_{55}^{u'u'} = A^{u'} = -F(u_1', u_2', u_3', u_4');$$

$$(44) \quad A_{56}^{u'u'} = A_{65}^{u'u'} = -\{F_1(u_1 u_2 u_3 u_4) u_1' + F_2(u_1 u_2 u_3 u_4) u_2' + F_3(u_1 u_2 u_3 u_4) u_3' + F_4(u_1 u_2 u_3 u_4) u_4'\}.$$

§ 143. Tangentialebenen und Gleichungen in Ebenenkoordinaten.

1. Einfache und stationäre Tangentialebenen. Eine Ebene, die die Fläche zweiter Ordnung in einem getrennten Linienpaar schneidet, heißt eine (einfache) *Tangentialebene* und der Doppelpunkt des Linienpaares ihr *Berührungspunkt*. Eine Ebene, die die Fläche in einer *Doppellinie* schneidet, heißt eine *stationäre Tangentialebene* und alle Punkte der Doppellinie sind ihre Berührungspunkte. Eine Ebene, die der Fläche ganz angehört, kann als eine *inzidente Tangentialebene* der Fläche bezeichnet werden.

Wenn dual die durch einen Punkt gehenden Ebenen einer Fläche zweiter Klasse zwei Ebenenbüschel mit getrennten Achsen bilden (statt, wie im allgemeinen, einen Kegel zweiter Klasse), so heißt der Punkt ein (einfacher) *Berührungspunkt* und die Verbindungsebene der Achsen seine *Tangentialebene*. Fallen die Achsen der beiden Ebenenbüschel zusammen, so wird der Punkt ein *stationärer Berührungspunkt* und alle Ebenen der Achse sind seine Tangentialebenen. Ein Punkt, dessen sämtliche Ebenen der Fläche angehören, kann als ein *inzidenter Berührungspunkt* der Fläche bezeichnet werden.

Der Inbegriff aller Tangentialebenen u_k der Fläche zweiter Ordnung:

$$(1) \quad f = \sum_k^4 \sum_l^4 a_{kl} x_k x_l = 0$$

ist nach § 141, (21) durch die Bedingung:

$$(2) \quad A^u = - \sum_k^4 \sum_l^4 A_{kl} u_k u_l = 0$$

gekennzeichnet.¹²²⁾

2. Beziehung zwischen Tangentialebene und Berührungspunkt.

Zwischen der Tangentialebene u_k und ihrem Berührungspunkt x_k^0 , bezüglich ihren Berührungspunkten, bestehen nach § 141, (29) die fünf Gleichungen:

$$(3) \quad f_k^0 + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad (4) \quad \sum_1^4 u_k x_k^0 = 0.$$

Ist die Ebene u_k gegeben, so bestimmt man hieraus nach § 141, (32) unter Elimination von ϱ den Berührungspunkt x_k^0 .

Ist ein Punkt x_k^0 der Fläche als Berührungspunkt gegeben, so folgt aus (3) für die Koordinaten der Tangentialebene:

$$(3') \quad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = f_1^0 : f_2^0 : f_3^0 : f_4^0; \quad -\varrho u_k = f_k^0.$$

Damit ist die Bedingung (4) nach § 138, (4) schon von selbst erfüllt, da x_k^0 ein Punkt der Fläche sein sollte.

Die Gleichung der Tangentialebene der Fläche (1) im Punkte x_k^0 ist daher (§ 67, (17))⁴⁷⁾:

$$(5) \quad f_1^0 x_1 + f_2^0 x_2 + f_3^0 x_3 + f_4^0 x_4 = 0; \quad \sum_1^4 f_k^0 x_k = 0.$$

3. Tangentialebenen der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung.

Die eigentliche Fläche zweiter Ordnung $A \neq 0$ hat nach § 141, 10, III nur einfache Tangentialebenen; sie genügen der Gleichung (2) und bilden demnach nach § 138, (1') eine Fläche zweiter Klasse, die wegen:

$$(6) \quad A_{k1} = A^3 \neq 0$$

ebenfalls eine eigentliche ist.⁷⁷⁾

I. Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung ist auch eigentliche Fläche zweiter Klasse und umgekehrt (§ 78, 7).

Da nach § 139, 3 $f_1^0, f_2^0, f_3^0, f_4^0$ niemals alle vier verschwinden können, so folgt:

II. Zu jedem Punkte x_k^0 der Fläche gehört vermöge (3') eine bestimmte Tangentialebene u_k .

Andererseits ist nach § 141, (39) mit einem Proportionalitätsfaktor σ :

$$(7) \quad \sigma x_k^0 = A_{k5}^u = - \sum_1^4 A_{ki} u_i$$

(§ 141, (43)), und damit wegen (6):

III. Zu jeder Tangentialebene u_k gehört vermöge (7) ein bestimmter Berührungspunkt x_k^0 .

4. Tangentialebenen des Kegels überhaupt. Beim *Kegel* wird aus (2) nach § 139, (14):

$$(8) \quad \left(\sum_1^4 x_k^0 u_k \right)^2 = 0,$$

wo x_k^0 die Koordinaten der Spitze sind.

I. *Beim Kegel deckt sich der Inbegriff aller Tangentialebenen mit dem Ebenenbündel an der Spitze.*

Die Fläche (2) ist als *Fläche zweiter Klasse* vom Range 1 (I Anm. 1, III, (21)).

II. *Eine der Gleichungen:*

$$(9) \quad \sum_1^4 A_{ki} u_i = 0 \quad \text{oder} \quad A_{k5}^u = 0, \quad k = 1, 2, 3 \text{ oder } 4,$$

ist (§ 141, (42)) *die Gleichung der Spitze in laufenden Ebenenkoordinaten.*

Zu jedem Punkte x_k^0 des Kegels gehört vermöge (3') eine bestimmte Tangentialebene, nur zur Spitze gehören ∞^2 solche.

.. Zu jeder *einfachen* Tangentialebene gehört als Berührungspunkt die Spitze, da für ihn nach § 141, (42); (44):

$$(10) \quad x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : x_4^0 = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4}.$$

5. Stationäre Tangentialebenen des Kegels. Unter den ∞^2 Tangentialebenen des Bündels (8) sind nach § 141, (22) diejenigen stationär, für die zugleich alle A_{kl}^u , $k, l = 1, 2, 3, 4$, verschwinden. Da aber für $A^u = 0$ nach § 107, (21):

$$(10') \quad (A_{kl}^u)^2 = A_{kk}^u A_{ll}^u,$$

so reicht dazu das Verschwinden der Diagonalunterdeterminanten A_{kk}^u aus.

Daher sind die stationären Tangentialebenen des Kegels durch eine Gleichung (9) in Verbindung mit den Gleichungen:

$$(11) \quad A_{11}^u = 0, \quad A_{22}^u = 0, \quad A_{33}^u = 0, \quad A_{44}^u = 0$$

gekennzeichnet.

Die einzelne Gleichung (11), wie:

$$(12) \quad -A_{44}^u = \sum_1^3 \sum_1^3 \alpha_{ki} u_k u_i = 0,$$

stellt eine *Fläche zweiter Klasse* dar, die vom Range 3 (§ 139, (10)), nämlich ein Kegelschnitt in der Ebene $x_4 = 0$ ist, falls (I Anm. 1, II, (4)):

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = A_{44}^2 \neq 0,$$

also nach (10') die Spitze des Kegels nicht in der Ebene $x_4 = 0$ liegt.

Da nach (10'), (10):

$$(A_{k4}^u)^2 = A_{kk}^u A_{44}^u, \quad A_{44} A_{kk}^u = A_{4k} A_{k4}^u, \quad k = 1, 2, 3,$$

so folgen, falls $A_{44} \neq 0$, aus der vierten Gleichung (11) die übrigen.

Der Inbegriff der ∞^1 stationären Tangentialebenen des Kegels ist daher durch zwei Gleichungen, eine Gleichung (9) und eine der Gleichungen (11) dargestellt.⁶⁹⁾

Jene ist die Gleichung der Spitze, diese sind die Gleichungen der Schnittkurven des Kegels mit den vier Koordinatenebenen, je in laufenden Ebenenkoordinaten (§ 71, (12')).

6. Tangentialebenen des Ebenenpaares. Beim *Ebenenpaar* ist mit $A_{ki} = 0$ (§ 139, (29)) die Gleichung (2) identisch erfüllt. Alle Ebenen des Raumes sind Tangentialebenen. Einfache Tangentialebenen haben ihren Berührungspunkt auf der Achse q_k^0 des Ebenenpaares, stationäre gehen durch die Achse q_k^0 hindurch. Für die letzteren gelten wieder die Gleichungen (11). Jedoch wird aus (12) nach § 139, (21):

$$-S^4 A_{44}^u = \beta_{33} \left(\sum_1^3 q_k^0 u_k \right)^2,$$

und entsprechend mit $-S^4 : \beta_{33} = \tau^{118}$:

$$(14) \quad \begin{cases} \tau A_{11}^u = (q_6^0 u_2 - q_5^0 u_3 + q_1^0 u_4)^2, & \tau A_{22}^u = (q_4^0 u_3 - q_6^0 u_1 + q_2^0 u_4)^2, \\ \tau A_{33}^u = (q_5^0 u_1 - q_4^0 u_2 + q_3^0 u_4)^2, & \tau A_{44}^u = (q_1^0 u_1 + q_2^0 u_2 + q_3^0 u_3)^2. \end{cases}$$

Jede der Gleichungen (11) stellt eine Fläche zweiter Klasse vom Range 1, nämlich den doppelt gezählten Punkt dar, in dem die Achse q_k^0 die Koordinatenebenen schneidet.

Die vier Gleichungen (11) zählen für zwei unabhängige und drücken aus, daß die Ebene u_k durch die Achse q_k^0 geht (I § 59, (12)). Sie sind die überzähligen Gleichungen der Achse in laufenden Ebenenkoordinaten.

7. Die Ebenen des Ebenenpaares selbst. Für die Ebenen des Ebenenpaares selbst verschwinden nach § 141, (23) alle α_{ki}^u . Die Gleichung:

$$(15) \quad -\alpha_{44}^u = a_{11} u_4^2 + a_{44} u_1^2 - 2a_{14} u_4 u_1 = 0$$

stellt nun für sich allein ein getrenntes Punktepaar auf der Kante E_1E_4 des Koordinatentetraeders dar, falls

$$(16) \quad \alpha_{44} = a_{11}a_{44} - a_{14}^2 \neq 0,$$

also die Achse § 139, (16) des Ebenenpaares die Kante E_1E_4 nicht schneidet (I § 59, (15); (21)).

Das Ebenenpaar selbst wird daher in Ebenenkoordinaten durch drei Gleichungen ausgedrückt, zwei von den vier linearen Gleichungen (11); (14), welche die Achse des Paares, und eine von den quadratischen Gleichungen:

$$(17) \quad \alpha_{11}^u = 0, \quad \alpha_{22}^u = 0, \quad \alpha_{33}^u = 0, \quad \alpha_{44}^u = 0, \quad \alpha_{55}^u = 0, \quad \alpha_{66}^u = 0,$$

*welche die Schnittpunktpaare mit den sechs Kanten des Koordinatentetraeders darstellen.*⁶⁹⁾

Man behält (11) und (17) als überzählige Gleichungen bei, um nicht an eine bestimmte Voraussetzung (16) gebunden zu sein, ebenso wie man schon bei einer geraden Linie vier Gleichungen als überzählige hat (I § 59, (12)).

8. Die Doppelebene. Bei der *Doppelebene* ist nach § 141, 8, II jede Ebene des Raumes stationäre Tangentialebene. Für die Doppelebene u_i^0 selbst sind wiederum nach § 141, (23) alle $\alpha_{ii}^u = 0$. Da aber nach § 139, (27) die Gleichung (15) die Form annimmt¹¹⁸⁾:

$$(18) \quad -S^2\alpha_{44}^u = b_{11}(u_1^0u_4 - u_4^0u_1)^2 = 0,$$

also ein vollständiges Quadrat wird und den Schnittpunkt der Doppelebene mit der Kante E_1E_4 darstellt, so wird die *Doppelebene durch drei von den Gleichungen (17) ausgedrückt*, die die Verhältnisse ihrer Ebenenkoordinaten eindeutig bestimmen. Die Gleichungen (17) sind überzählige.

§ 144. Tangenten und Gleichungen in Linienkoordinaten.

1. Begriff der Tangenten und Erzeugenden.

Eine Gerade, die die *Fläche* Eine Gerade, durch die an die *zweiter Ordnung* in zwei zusammenfallenden Punkten (einem Doppelpunkt) schneidet, ist eine *Fläche zweiter Klasse* zwei zusammenfallende Berührungsebenen (einfache) *Tangente* der Fläche und der der Fläche und die Doppelebene Doppelpunkt ihr Berührungspunkt. ihre Berührungsebene.

Eine Gerade, deren sämtliche Punkte der Fläche angehören, ist Ebenen der Fläche angehören, ist eine *stationäre Tangente* oder *Erzeugende*. eine *stationäre Tangente* oder *Erzeugende*.

Die *Bedingung* dafür, daß eine Gerade überhaupt *Tangente* (einfache oder stationäre) der Fläche zweiter Ordnung:

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

sei, kann in verschiedener Form gefaßt werden.

2. Bedingung für die Linienkoordinaten einer Tangente. Die Bedingung einer Tangente lautet nach § 142, (18) und § 140, (19) in ihren Strahlenkoordinaten p_k oder Achsenkoordinaten q_k :

$$(2) \quad \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k p_i = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{\bar{k}\bar{i}} q_k q_i.$$

Es ist die Gleichung der Fläche in laufenden Strahlenkoordinaten oder die Gleichung des Tangentenkomplexes der Fläche.¹⁷²⁾ Auf ihrer linken Seite kann der Ausdruck $\lambda(p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6)$ mit beliebigem λ hinzuaddiert werden (I § 59, (5')).

3. Bedingung für zwei Ebenen durch eine Tangente. Unmittelbar aus § 142, (18) folgt:

Die Schnittpunktlinie zweier Ebenen ist Tangente der Fläche (1), wenn die mit den Koordinaten u_k und u'_k der beiden Ebenen geränderte Determinante der Fläche verschwindet:

$$(3) \quad A^{uu'} = 0.$$

Zwischen dem Berührungspunkt x_k^0 der Tangente und zwei durch sie gehenden Ebenen u_k und u'_k bestehen alsdann die Beziehungen § 142, (27):

$$(4) \quad f_k^0 + \varrho u_k + \varrho' u'_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\sum_1^4 u_k x_k^0 = 0, \quad \sum_1^4 u'_k x_k^0 = 0.$$

4. Bedingung für zwei Punkte auf einer Tangente. Nach § 142, (14) kann die Bedingung (3) auch durch das Verschwinden der Determinante § 142, (8), wo $b_{ki} = f_{ki}$, ausgedrückt werden, woraus folgt:

Die Verbindungslinie zweier Punkte ist Tangente der Fläche (1), wenn die Koordinaten $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ der beiden Punkte die Bedingung erfüllen:

$$(6) \quad f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0.$$

Stellt man den laufenden Punkt der Verbindungslinie durch Zweieckskoordinaten y_1, y_2 in der Weise (I § 64, (12)):

$$(7) \quad x_k = x_k^{(1)} y_1 + x_k^{(2)} y_2$$

dar, so ist für die Zweieckskoordinaten des Doppelpunktes § 142, (7) nach § 39, (25):

$$(8) \quad y_1^0 : y_2^0 = -f_{12} : f_{11} = f_{22} : -f_{21}.$$

Bei festem $x_k^{(2)}$ hat man in (6) die Gleichung des *Tangentenkegels* der Fläche vom Punkte $x_k^{(1)}$, *des Ortes aller durch diesen Punkt gehenden Tangenten*. Ordnet man die Gleichung (6) nach:

$$x_k^{(1)} x_i^{(2)} - x_k^{(2)} x_i^{(1)} = p_{ki},$$

so erhält man wieder die Entwicklung (2) zurück, so daß (2), (3) und (6) *nur verschiedene Formen derselben Bedingung* sind.

5. Bedingung für die Tangente in einem Punkte der Fläche.

Ist $x_k^{(2)}$ auf der Fläche selbst gelegen, so daß $f_{22} = 0$, so folgt aus (6)

Die Verbindungslinie eines Punktes $x_k^{(1)}$ des Raumes mit einem Punkte $x_k^{(2)}$ der Fläche ist Tangente im Punkte $x_k^{(2)}$, wenn neben $f_{22} = 0$:

$$(9) \quad f_{12} = 0.$$

Bei festem $x^{(2)}$ und mit Unterdrückung des Index 1 lautet diese Gleichung:

$$(10) \quad \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k = 0$$

und stellt dann die *Tangentialebene als Ort aller Tangenten* im Punkte $x_k^{(2)}$ dar (§ 143, (5)).

6. Die Komplexgleichung der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung. Für die *eigentliche* Fläche zweiter Ordnung ist die Determinante der Komplexgleichung (2):

$$(11) \quad |\alpha_{ki}| = A^3$$

(I Anm. 1, III, (13)) von Null verschieden. Die linearen Gleichungen:

$$(12) \quad \sum_1^6 \alpha_{ki} p_i = 0$$

sind daher durch keine Gerade p_i des Raumes erfüllbar (§ 139, (6)).

7. Die Komplexgleichung des Kegels. Für den *Kegel* kann die Komplexgleichung (2) nach § 138, (30), in bezug auf ein neues Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, wo nach § 139, (11) alle Unterdeterminanten β_{mn} , für die nicht $m, n = 1, 2, 3$ ist, verschwinden, in der Form:

$$(13) \quad \sum_1^3 \sum_1^3 \beta_{mn} r_m r_n = 0$$

dargestellt werden. Die Spitze des Kegels ist dabei als Ecke J_4 des

neuen Tetraeders genommen. Die Kanten $p_k^{(4)}$, $p_k^{(5)}$, $p_k^{(6)}$ gehören dem Komplex (13) an (I § 63, Fig. 320).

Die Komplexgleichung (2) wird, wie die Form (13) zeigt (I § 72, 13), erfüllt von allen Strahlen, die in einer stationären Tangentialebene des Kegels liegen, also entweder durch die Spitze gehen oder Tangenten in einem andern Punkte des Kegels sind (§ 71, (16)).

Die durch die Spitze § 139, (8) des Kegels gehenden Geraden sind durch die Gleichungen (I § 59, (10)) dargestellt:

$$(14) \quad \begin{cases} A_{24}p_6 - A_{34}p_5 + A_{44}p_1 = 0, \\ A_{34}p_4 - A_{14}p_6 + A_{44}p_2 = 0, \\ A_{14}p_5 - A_{24}p_4 + A_{44}p_3 = 0, \\ A_{14}p_1 + A_{24}p_2 + A_{34}p_4 = 0. \end{cases}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen sind aber, falls $A_{44} \neq 0$ ist, die Auflösungen der Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 + \alpha_{13}p_3 + \alpha_{14}p_4 + \alpha_{15}p_5 + \alpha_{16}p_6 = 0, \\ \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \alpha_{23}p_3 + \alpha_{24}p_4 + \alpha_{25}p_5 + \alpha_{26}p_6 = 0, \\ \alpha_{31}p_1 + \alpha_{32}p_2 + \alpha_{33}p_3 + \alpha_{34}p_4 + \alpha_{35}p_5 + \alpha_{36}p_6 = 0 \end{cases}$$

nach p_1, p_2, p_3 und gehen aus diesen hervor, wenn man mit $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ oder $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}$ oder $\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}$ multipliziert und addiert (§ 97, (23)). So folgt allgemein:

Die sechs Gleichungen:

$$(16) \quad \sum_{i=1}^6 \alpha_{ki}p_i = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

sind die (überzähligen) Gleichungen der Kegelspitze in Strahlenkoordinaten (vgl. § 143, (9)).

Sie zählen für drei unabhängige (I § 60, 1), weil mit dem Verschwinden der Determinante sechsten Grades (11) auch alle ihre Unterdeterminanten fünften und vierten Grades verschwinden (I Anm. 1, III, (14); (15)). Sie haben, wie die Form (14) für $A_{44} \neq 0$ zeigt, die Bedingung:

$$(17) \quad P = p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

schon zur Folge.

8. Die Komplexgleichung des Ebenenpaares. Ist die Fläche (1) ein Ebenenpaar, dessen Achse die Koordinaten q_k^0 hat, so wird die Gleichung (2) nach § 139, (22):

$$(18) \quad \left(\sum_{k=1}^6 q_k^0 p_k \right)^2 = 0,$$

also das Quadrat der Gleichung der Achse in Strahlenkoordinaten (I § 60, (8)).

9. Komplexkurve und Komplexkegel. Die Gleichung (2), die sich auf ein ursprüngliches Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezieht, lautet in einem neuen Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ nach § 138, (30); § 140, (18'):

$$(19) \quad \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{mn} r_m r_n = 0 \quad \text{oder} \quad (19') \quad \sum_1^6 \sum_1^6 \beta_{\overline{mn}} s_m s_n = 0,$$

wo die Ecke J_4 als beliebiger Punkt und die Ebene $l_4 = J_1 J_2 J_3$ als beliebige Ebene gelten kann.

Liegt nun die Gerade p_k in der Ebene l_4 , so sind $r_4 = r_5 = r_6 = 0$ und $r_1 = v_1, r_2 = v_2, r_3 = v_3$ Linienkoordinaten in dieser Ebene (I § 64, 3) und die Gleichung (19) kommt zurück auf:

$$(20) \quad \sum_1^3 \sum_1^3 \beta_{mn} v_m v_n = 0.$$

Geht die Gerade q_k durch die Ecke J_4 , so sind $s_4 = s_5 = s_6 = 0$ und $s_1 = y_1, s_2 = y_2, s_3 = y_3$ Linienkoordinaten im Bündel an J_4 und die Gleichung (19') kommt zurück auf:

$$(20') \quad \sum_1^3 \sum_1^3 \beta_{\overline{mn}} y_m y_n = 0.$$

Die Koeffizienten (§ 138, (23)):

$$(21) \quad \beta_{mn} = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k^{(m)} p_i^{(n)}$$

hängen, soweit sie in (20) vorkommen, nur von den in der Ebene l_4 liegenden Kanten $p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, p_k^{(3)}$, und soweit sie in (20') vorkommen, nur von den durch die Ecke J_4 gehenden Kanten $p_k^{(4)}, p_k^{(5)}, p_k^{(6)}$ des Koordinatentetraeders $J_1 J_2 J_3 J_4$ ab (I § 63, Fig. 320). Daher folgt (I § 72, 12):

Die in der Ebene dreier Strahlen $p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, p_k^{(3)}$ liegende Komplexkurve des Tangentenkomplexes (2) hat in laufenden, auf das Dreieck der drei Strahlen bezogenen Linienkoordinaten die Gleichung (20).

Die Komplexkurve ist zugleich die Schnittkurve der Fläche (1) mit der gemeinsamen Ebene der drei Strahlen, erzeugt von ihren Tangenten.

Der am Schnittpunkt dreier Strahlen $p_k^{(4)}, p_k^{(5)}, p_k^{(6)}$ befindliche Komplexkegel des Tangentenkomplexes (2) hat in laufenden, auf das Dreieck der drei Strahlen bezogenen Strahlenkoordinaten die Gleichung (20').

Der Komplexkegel ist zugleich der Berührungskegel der Fläche (1) mit dem gemeinsamen Punkte der drei Strahlen, erzeugt von seinen Geraden.

§ 145. Umbeschriebene Vierseite.

1. Das umbeschriebene Vierseit und das Koordinatentetraeder.

Ist der Fläche zweiter Ordnung:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

ein *windschiefes Vierseit umbeschrieben*, so kann man dessen Ecken E_1, E_2, E_3, E_4 als Ecken des Koordinatentetraeders nehmen derart, daß E_2E_3 und E_1E_4 , sowie E_3E_1 und E_2E_4 (Fig. 217) die Gegenseiten des Vierseits sind. Die Schnittpunktpaare dieser vier Seiten mit der Fläche (1) sind dann:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, & x_1 = 0, & x_4 = 0, \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{14}x_1x_4 + a_{44}x_4^2 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 0; \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 = 0, & x_2 = 0, & x_4 = 0, \\ a_{22}x_2^2 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0, & x_1 = 0, & x_3 = 0. \end{cases}$$

Da aber die Seiten Tangenten sein sollen, müssen diese Punktpaare in Doppelpunkte zusammenfallen, also die vier Bedingungen bestehen:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0, & \alpha_{44} = a_{11}a_{44} - a_{14}^2 = 0; \\ \alpha_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}^2 = 0, & \alpha_{55} = a_{22}a_{44} - a_{24}^2 = 0, \end{cases}$$

oder bei willkürlicher fester Wahl der doppelt gestrichenen Quadratwurzeln und unbestimmt bleibenden Vorzeichen ε_{ki} :

$$(4) \quad \begin{aligned} a_{23} &= \varepsilon_{23} \sqrt{a_{22}} \sqrt{a_{33}}, & a_{14} &= \varepsilon_{14} \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{44}}, \\ a_{31} &= \varepsilon_{31} \sqrt{a_{33}} \sqrt{a_{11}}, & a_{24} &= \varepsilon_{24} \sqrt{a_{22}} \sqrt{a_{44}}. \end{aligned}$$

Die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ der vier *Berührungspunkte* $B_{23}, B_{14}, B_{31}, B_{24}$ des Vierseits (Fig. 217) mit der Fläche werden dann nach (2) (§ 39, (25)):

$$(5) \quad \begin{cases} 0 : -a_{23} : a_{22} : 0 = 0 : a_{33} : -a_{23} : 0, \\ -a_{14} : 0 : 0 : a_{11} = a_{44} : 0 : 0 : -a_{14}, \\ a_{33} : 0 : -a_{31} : 0 = -a_{31} : 0 : a_{11} : 0, \\ 0 : -a_{24} : 0 : a_{22} = 0 : a_{44} : 0 : -a_{24}. \end{cases}$$

2. Die Ebene dreier Berührungspunkte. Die Ebene der drei letzten Punkte (5) hat die Gleichung:

$$(6) \quad a_{11}a_{24}x_1 + a_{22}a_{14}x_2 + a_{31}a_{24}x_3 + a_{14}a_{24}x_4 = 0,$$

der ersichtlich die Koordinaten aller drei Punkte genügen.

Die Koordinaten des ersten Berührungspunktes B_{23} und des vierten harmonischen B'_{23} zu E_2, E_3 und B_{23} (§ 40, (4)) sind bezüg-

lich 0, $-a_{23}$, a_{22} , 0 und 0, a_{23} , a_{22} , 0 oder in eine gemeinsame Bezeichnung zusammengefaßt:

$$(7) \quad 0, -\delta a_{23}, a_{22}, 0 \quad \text{mit } \delta = 1 \text{ für } B_{23}, \delta = -1 \text{ für } B'_{23}.$$

Setzt man diese Koordinaten in (6) ein, so ergibt sich mit Fortfall des Faktors a_{22} :

$$-\delta a_{23} a_{14} + a_{31} a_{24} = 0,$$

oder nach (4):

$$(8) \quad -\delta \varepsilon_{23} \varepsilon_{14} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{24} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber, wie auch die Vorzeichen ε_{ki} ausfallen, stets entweder mit $\delta = +1$ oder mit $\delta = -1$ erfüllt, sodaß entweder B_{23} oder B'_{23} auf der Ebene (6) liegt. Also¹⁹¹⁾:

Wenn einer Fläche zweiter Ordnung ein windschiefes Vierseit umschrieben ist, so liegen entweder die Berührungspunkte der vier Seiten in einer Ebene oder jede Seite wird von ihrem Berührungspunkt und ihrem Schnittpunkt mit der Ebene der drei andern Berührungspunkte harmonisch geteilt.

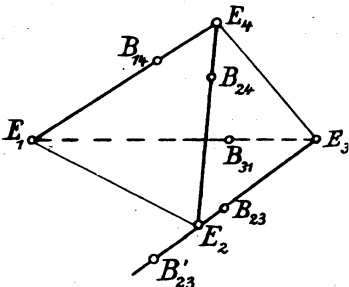


Fig. 217.

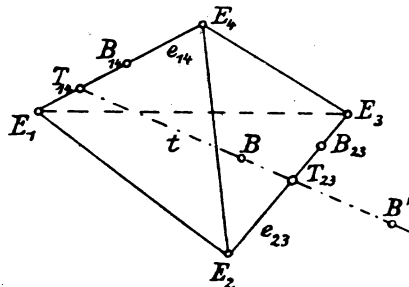


Fig. 218.

3. Zwei feste Tangenten als Gegenkanten des Koordinatentetraeders. Wenn die Fläche (1) nur von den beiden Kanten $e_{23} = E_2 E_3$ und $e_{14} = E_1 E_4$ berührt wird, ist:

$$(9) \quad \alpha_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2 = 0, \quad \alpha_{44} = a_{11} a_{44} - a_{14}^2 = 0.$$

Da nun bei gleichbleibendem Koordinatentetraeder den Koeffizienten a_{23} und a_{14} durch geeignete Wahl der Vorzeichen von x_2 und x_1 (I § 57, (12)) je ein willkürliches Vorzeichen erteilt werden kann, so liegt keine Beschränkung darin, wenn wir mit beliebig gewählten Vorzeichen der doppelt gestrichenen Wurzeln setzen:

$$(10) \quad a_{23} = \sqrt{a_{22}} \sqrt{a_{33}}, \quad a_{14} = \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{44}}.$$

Eine Fläche zweiter Ordnung, die von zwei windschiefen Geraden berührt wird, kann daher, indem diese Geraden als Gegenkanten $e_{23} = E_2 E_3$

und $e_{14} = E_1 E_4$ des Koordinatentetraeders gewählt werden, in der Form dargestellt werden (Fig. 218):

$$(11) \quad (\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)^2 + (\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4)^2 + 2(a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4) = 0.$$

Die Berührungspunkte B_{23} und B_{14} der beiden Kanten e_{23} und e_{14} haben alsdann die Koordinaten:

$$(12) \quad B_{23}: 0, -\sqrt{a_{33}}, \sqrt{a_{22}}, 0; \quad B_{14}: -\sqrt{a_{44}}, 0, 0, \sqrt{a_{11}}.$$

4. Tangente als Transversale zweier Tangenten. Sind nun die Koordinaten der Treffpunkte T_{23} und T_{14} einer Transversale t der beiden Tangenten e_{23} und e_{14} :

$$(13) \quad T_{23}: 0, x_2^0, x_3^0, 0; \quad T_{14}: x_1^0, 0, 0, x_4^0,$$

so sind die Koordinaten des laufenden Punktes P der Transversale t :

$$(14) \quad P: x_1 = \lambda \cdot 0 + \mu x_1^0, \quad x_2 = \lambda x_2^0 + \mu \cdot 0, \quad x_3 = \lambda x_3^0 + \mu \cdot 0, \\ x_4 = \lambda \cdot 0 + \mu x_4^0.$$

Der Parameter $\lambda: \mu$ eines Schnittpunktes der Transversale mit der Fläche genügt nach (11) der Gleichung:

$$(\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0)^2 \lambda^2 + (\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0)^2 \mu^2 + 2(a_{31}x_3^0x_1^0 + a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{24}x_2^0x_4^0 + a_{34}x_3^0x_4^0) \lambda \mu = 0.$$

Soll die Transversale selbst Tangente sein, muß demnach werden:

$$(a_{31}x_3^0x_1^0 + a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{24}x_2^0x_4^0 + a_{34}x_3^0x_4^0)^2 - (\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0)^2(\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0)^2 = 0,$$

oder mit:

$$(15) \quad \varepsilon = \pm 1:$$

$$(16) \quad (a_{31}x_3^0x_1^0 + a_{12}x_1^0x_2^0 + a_{24}x_2^0x_4^0 + a_{34}x_3^0x_4^0) - \varepsilon(\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0)(\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0) = 0.$$

Diese Bedingung drückt aus, daß die Transversale $t = T_{23}T_{14}$ Tangente der Fläche ist. Der laufende Punkt (14) der Transversale genügt alsdann der Gleichung:

$$(17) \quad (a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4) - \varepsilon(\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4) = 0,$$

die mit dem doppelten Werte (15) zwei Flächen zweiter Ordnung darstellt.

Der Ort einer Tangente der Fläche zweiter Ordnung (11), welche

zwei feste Tangenten e_{23} und e_{14} beständig schneidet, ist die eine oder andere der beiden Linienflächen zweiter Ordnung (17).

5. Ort der Berührungspunkte der Transversaltangente zweier Tangenten. Der Berührungspunkt B der laufenden Tangente $t = T_{23}T_{14}$ genügt gleichzeitig den Gleichungen (11) und (17), also auch der Gleichung:

$$(\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)^2 + (\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4)^2 + 2\varepsilon(\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3)(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4) = 0.$$

Er liegt also auf einer der beiden ($\varepsilon = \pm 1$) Ebenen:

$$(18) \quad (\sqrt{a_{22}}x_2 + \sqrt{a_{33}}x_3) + \varepsilon(\sqrt{a_{11}}x_1 + \sqrt{a_{44}}x_4) = 0,$$

die sich nach (10) zu dem Ebenenpaar:

$$(19) \quad a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 - 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1x_4 = 0$$

zusammensetzen. Dieses Ebenenpaar, dessen Achse nach (18) durch die Punkte (12) geht, schneidet die Fläche in zwei Kegelschnitten. Es folgt somit:

Der Ort der Berührungspunkte einer Tangente t der Fläche (11), welche zwei feste Tangenten e_{23} und e_{14} beständig schneidet, besteht aus zwei Kegelschnitten, deren jeder durch die beiden Berührungspunkte B_{23} und B_{14} der festen Tangenten geht.

6. Harmonische Teilung der Transversaltangente. Der laufende Punkt einer Tangente t , welche die beiden Tangenten e_{23} und e_{14} schneidet, hat die Koordinaten (14) mit dem Parameter $\lambda : \mu$, wobei zwischen x_2^0, x_3^0 und x_1^0, x_4^0 die Gleichung (16) besteht. Für die Schnittpunkte der Transversaltangente t mit den beiden Ebenen (18), von denen der eine nach 5 der Berührungspunkt B ist, der andere B' heiße (Fig. 218), genügt der Parameter $\lambda : \mu$ der Gleichung:

$$\lambda(\sqrt{a_{22}}x_2^0 + \sqrt{a_{33}}x_3^0) + \varepsilon\mu(\sqrt{a_{11}}x_1^0 + \sqrt{a_{44}}x_4^0) = 0,$$

die aus (18) mit Substitution der Werte (14) folgt.

Da hieraus für $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ zwei entgegengesetzte Werte von $\lambda : \mu$ folgen, so sind die beiden Schnittpunkte B und B' zu den Punkten $T_{23}(\mu = 0)$ und $T_{14}(\lambda = 0)$ der Punktreihe (14) harmonisch.

Jede Tangente t der Fläche, welche die beiden festen Tangenten e_{23} und e_{14} in T_{23} und T_{14} schneidet, wird von den beiden Ebenen (19) in zwei zu T_{23} und T_{14} harmonischen Punkten B und B' geschnitten, von denen der eine ihr Berührungspunkt mit der Fläche ist.

7. Zwei Transversaltangenten zweier Tangenten. Sind nun t und t_0 zwei Tangenten, welche die beiden festen Tangenten e_{23} und e_{14} schneiden, also mit ihnen ein umbeschriebenes Vierseit bilden, und sind B , B' und B_0 , B_0' ihre Schnittpunkte mit den beiden Ebenen (18) und B und B_0 ihre Berührungspunkte mit der Fläche, so liegt entweder B_0 oder B_0' in derselben Ebene (18), wie B . Im ersteren Falle aber liegen alle vier Berührungspunkte B_{23} , B_{14} , B , B_0 in derselben Ebene, im letzteren schneidet die Ebene der drei Berührungspunkte B_{23} , B_{14} , B die Tangente t_0 in dem vierten harmonischen B_0' zu ihrem Berührungspunkt B_0 . Damit ergibt sich also wieder der Satz unter 2.

§ 146. Die Erzeugenden der Fläche zweiter Ordnung.

1. Bedingung für zwei Ebenen einer Erzeugenden. Die Schnittlinie zweier Ebenen u und u' gehört nach § 142, (19) ganz der Fläche zweiter Ordnung:

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_k^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

an, wenn neben der Bedingung der Tangente (§ 144, (3)):

$$(2) \quad A^{uu'} = 0$$

auch noch die Bedingungen bestehen:

$$(3) \quad \bar{A}_{ki}^{uu'} = 0; \quad k, l = 1, 2, 3, 4,$$

welche nach § 142, (19) die Bedingung (2) zur Folge haben.

I. Die Schnittlinie zweier Ebenen ist also Erzeugende der Fläche (1), wenn die mit den Koordinaten u_k und u'_k der beiden Ebenen geränderten Unterdeterminanten (3) sämtlich verschwinden.

Da aus (3) nach § 142, (43) folgt:

$$(4) \quad A'' = -F(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad A' = -F(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = 0,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf § 143, (2):

II. Jede durch eine Erzeugende der Fläche (1) gehende Ebene ist Tangentialebene.

Über die Bedeutung von $A_{56}^{uu'} = 0$ in § 142, (44) s. später § 149, (13').

2. Quadratische Komplexe der Erzeugenden. Die Gleichungen (3) stellen zehn Komplexe zweiten Grades dar, denen eine Erzeugende angehören muß.¹⁹²⁾ Insbesondere sind:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} A_{11}^{uu'} = a_{22}q_6^2 + a_{33}q_5^2 + a_{44}q_1^2 - 2a_{34}q_5q_1 + 2a_{42}q_1q_6 - 2a_{23}q_6q_5 \\ \quad = A_{11}^{uu'}(q_6, -q_5, q_1) = 0, \\ A_{22}^{uu'} = a_{33}q_4^2 + a_{11}q_6^2 + a_{44}q_2^2 - 2a_{14}q_6q_2 + 2a_{43}q_2q_4 - 2a_{31}q_4q_6 \\ \quad = A_{22}^{uu'}(q_4, -q_6, q_2) = 0, \\ A_{33}^{uu'} = a_{11}q_5^2 + a_{22}q_4^2 + a_{44}q_3^2 - 2a_{24}q_4q_3 + 2a_{41}q_3q_5 - 2a_{12}q_5q_4 \\ \quad = A_{33}^{uu'}(q_5, -q_4, q_3) = 0, \\ A_{44}^{uu'} = a_{11}q_1^2 + a_{22}q_2^2 + a_{33}q_3^2 + 2a_{23}q_2q_3 + 2a_{31}q_3q_1 + 2a_{12}q_1q_2 \\ \quad = A_{44}^{uu'}(q_1, q_2, q_3) = 0 \end{array} \right.$$

die *Komplexgleichungen* (I § 72, (24')) derjenigen *Kegelschnitte*, in denen die *Fläche* (1) von den vier *Koordinatenebenen* geschnitten wird und deren Gleichungen in *Punktkoordinaten* dieser Ebenen lauten:

$$(6) \quad A_{11}^{uu'}(x_2, x_3, x_4) = 0, \quad A_{22}^{uu'}(x_3, x_1, x_4) = 0, \quad A_{33}^{uu'}(x_1, x_2, x_4) = 0 \\ A_{44}^{uu'}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(I § 59, (18'); (19')).

3. Bedingung für zwei Punkte einer Erzeugenden. Ist eine Gerade durch zwei Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ gegeben, so sind nach § 142, (11) die Bedingungen dafür, daß sie eine Erzeugende der Fläche ist:

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0.$$

Die Gleichungen sind in ihrer Gesamtheit unabhängig davon, daß für $x_k^{(1)}$ oder $x_k^{(2)}$ ein anderer Punkt $x_k^{(1)} + \lambda x_k^{(2)}$ der Geraden gesetzt wird. Die beiden äußeren bedeuten, daß die Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ auf der Fläche liegen, die Bedeutung der mittleren vgl. § 149, (6).

Die Verbindungslinie der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ ist Erzeugende der Fläche zweiter Ordnung (1), wenn:

Die Schnittlinie der Ebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ ist Erzeugende der Fläche zweiter Klasse § 138, (1'), wenn:

$$(7) \quad f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0. \quad (7') \quad F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0.$$

4. Erzeugende und Tangentialebene. Die zweite Gleichung (7) gibt nach § 143, (5) bei festem Punkte $x_k^{(1)}$ die Tangentialebene in ihm in laufenden Koordinaten $x_k^{(2)}$ und bei festem Punkte $x_k^{(2)}$ die Tangentialebene in ihm in laufenden Koordinaten $x_k^{(1)}$ (falls es sich nicht um einen singulären Punkt handelt).

Die Verbindungslinie zweier Punkte der Fläche ist Erzeugende, wenn jeder in der Tangentialebene des andern liegt.

Dabei ist also $x^{(2)}$ irgend ein Punkt der Schnittlinie der Fläche mit der Tangentialebene des Punktes $x^{(1)}$. Diese schneidet aber, wenn sie nicht ganz der Fläche angehört, in zwei getrennten oder zusammenfallenden Geraden:

Durch jeden Punkt der Fläche zweiter Ordnung gehen im allgemeinen zwei Erzeugende.

In jeder Tangentialebene der Fläche zweiter Klasse liegen im allgemeinen zwei Erzeugende.

5. Lineare Bedingungen der Erzeugenden. Die drei Gleichungen (7) können in der Form geschrieben werden (§ 138, (6)):

$$(8) \quad \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(2)} = 0$$

oder, wenn wir mit:

$$(9) \quad u_k^{(1)} = f_k^{(1)}, \quad u_k^{(2)} = f_k^{(2)}$$

die Koordinaten der Tangentialebenen der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ bezeichnen:

$$(10) \quad \sum_k u_k^{(1)} x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_k u_k^{(1)} x_k^{(2)} = 0, \quad \sum_k u_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_k u_k^{(2)} x_k^{(2)} = 0.$$

Sie sagen dann aus, daß die Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ beide in der Ebene $u^{(1)}$ und beide in der Ebene $u^{(2)}$ liegen, oder daß der Strahl $p = x^{(1)}x^{(2)}$ mit der Achse $q = u^{(1)} \times u^{(2)}$ zusammenfällt, also (I § 59, (8)) mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ :

$$(11) \quad \varrho p_{\bar{k}} = q_k.$$

Nun ist aber nach (9), wie § 68, 22:

$$\begin{aligned} q_{kl} &= u_k^{(1)} u_l^{(2)} - u_k^{(2)} u_l^{(1)} = f_k^{(1)} f_l^{(2)} - f_k^{(2)} f_l^{(1)} \\ &= \sum_1^4 a_{km} x_m^{(1)} \sum_1^4 a_{ln} x_n^{(2)} - \sum_1^4 a_{lm} x_m^{(1)} \sum_1^4 a_{kn} x_n^{(2)} \\ &= \sum_1^4 \sum_1^4 (a_{km} a_{ln} - a_{lm} a_{kn}) x_m^{(1)} x_n^{(2)} \\ &= \sum_1^6 \sum_{mn} (a_{km} a_{ln} - a_{lm} a_{kn}) (x_m^{(1)} x_n^{(2)} - x_m^{(2)} x_n^{(1)}), \end{aligned}$$

wo mn die Reihe § 138, (20) durchläuft, also mit der Bezeichnung § 138, (9) (I § 59, 1):

$$(12) \quad q_k = \sum_1^6 \alpha_{km} p_m.$$

Damit ergibt sich aus (11)¹⁷³⁾:

Die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden der Fläche genügen den sechs Bedingungen (auch aus § 149, (4) mit $q'_k = q_k = p_{\bar{k}}$):

$$(13) \quad \varrho p_{\bar{k}} = \sum_1^6 \alpha_{km} p_m,$$

wo k und $\bar{k}$ komplementäre Kombinationen der Reihe § 138, (20) bedeuten.

6. Erzeugende des Kegels. Da auch beim *Kegel* nach 1, II zwei Ebenen, die eine Erzeugende bestimmen, beide Tangentialebenen sind und daher beide durch die Spitze gehen (§ 143, 4, I), so folgt:

Jede Erzeugende des Kegels geht durch seine Spitze.

Dann kann einer der beiden Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, die die Erzeugende bestimmen, etwa $x^{(1)}$ in der Spitze angenommen werden. Für diesen ist dann mit:

$$f_1^{(1)} = 0, \quad f_2^{(1)} = 0, \quad f_3^{(1)} = 0, \quad f_4^{(1)} = 0$$

(§ 139, (5)) schon von selbst:

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0$$

(§ 138, (6)), so daß nur die dritte Bedingung (7) bleibt.

Jede Gerade, die einen Punkt des Kegels mit der Spitze verbindet, ist eine Erzeugende.

Durch jeden Punkt des Kegels, außer der Spitze, geht nur eine Erzeugende hindurch.

Die Gleichungen (13) sind beim Kegel (§ 144, (16)) mit $\varphi = 0$ erfüllt, also:

$$(14) \quad \sum_1^6 \alpha_{km} p_m = 0$$

und stellen die ∞^2 Strahlen durch die Spitze des Kegels dar.

Die Erzeugenden des Kegels sind daher in Linienkoordinaten durch die Gleichungen (14) in Verbindung mit einer der Gleichungen (5) dargestellt, für $A_{44} \neq 0$ der letzten (§ 71, (20)):

$$(15) \quad A_{44}^{uu'}(p_4, p_5, p_6) = 0.$$

7. Die Erzeugenden des Ebenenpaares. Beim *Ebenenpaar* reduzieren sich die sechs Gleichungen (14) nach § 139, (16) auf die einzige:

$$(16) \quad \sum_1^6 q_m^0 p_m = 0,$$

die Gleichung der Achse q^0 des Paares in Linienkoordinaten (I § 60, (8)). Die Gleichung (15) aber zerfällt wegen $A_{44} = 0$ in zwei lineare Faktoren, deren jeder eine Gerade darstellt. Die gemeinsamen Transversalen einer jeden solchen Geraden und der Achse des Paares geben die Erzeugenden des Paares. Zwei Gleichungen (6) sind nötig.¹⁵⁷⁾

8. Die Erzeugenden der Doppalebene. Für die *Doppalebene* werden die Gleichungen (14) nach § 139, (29) identisch, während die Gleichungen (5) nach § 139, (27) vollständige Quadrate werden¹¹⁸⁾:

$$(17) \quad S^2 A_{44}^{uu'}(p_4, p_5, p_6) = b_{11}(u_1^0 q_1 + u_2^0 q_2 + u_3^0 q_3)^2, \dots$$

Es sind also dann drei von den Gleichungen (5) als Gleichungen der Doppelebene in Strahlenkoordinaten nötig (I § 60, (1')).

§ 147. Die linearen Komplexe der Erzeugenden.

1. Die linearen Komplexe der Erzeugenden. Die Bedingungen für die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden der eigentlichen Fläche zweiter Ordnung und Klasse (§ 143, 1; 3):

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \quad (1') \quad F = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k u_i = 0$$

lauten nach § 146, (13):

$$(2) \quad \varrho p_{\bar{k}} = \sum_1^6 \alpha_{km} p_m,$$

wo k die Werte 1, 2, 3, 4, 5, 6 und $\bar{k}$ die entsprechenden 4, 5, 6, 1, 2, 3 durchläuft.

Die Gleichungen (2) stellen sechs lineare Komplexe dar, denen die Erzeugenden der Fläche angehören (§ 86, (1)).

Wenn aber unendlich viele Wertsysteme der fünf Verhältnisse der sechs Strahlenkoordinaten, die schon an die Bedingung:

$$(3) \quad P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

gebunden sind, auch noch den sechs Gleichungen (2) genügen sollen, so können diese nicht unabhängig voneinander sein. Die Art ihrer Abhängigkeit soll zunächst untersucht werden.

2. Die Determinante des Problems. Da die sechs Gleichungen (2) in den sechs Größen p_m linear und homogen sind, muß ihre Determinante:

$$(4) \quad \Theta(\varrho) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} - \varrho & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} - \varrho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} - \varrho \\ \alpha_{41} - \varrho & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} - \varrho & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} - \varrho & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix}$$

verschwinden, also der Faktor ϱ eine Wurzel der Gleichung sechsten Grades:

$$(5) \quad \Theta(\varrho) = 0$$

sein.

3. Die Reziprozität der Gleichung sechsten Grades. Die Determinante:

$$(6) \quad A = \Theta(0) = |\alpha_{ki}|$$

hat den Wert (I Anm. 1, III, (13)):

$$(7) \quad A = A^3,$$

wo A die Determinante der Fläche (1) ist.

Indem man nun die Determinante (6) in der Form:

$$(8) \quad A = \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} \\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante (4) multipliziert und dabei die Beziehungen (I Anm. 1, III, (19)):

$$(9) \quad \sum_1^6 \alpha_{km} \alpha_{i\bar{m}} \quad \text{oder} \quad \sum_1^6 \alpha_{mk} \alpha_{\bar{m}i} = \begin{cases} A & \text{für } l = \bar{k}, \\ 0 & \text{,, } l \neq \bar{k}, \end{cases}$$

benutzt, ergibt sich:

$$A\Theta(\varrho) = \begin{vmatrix} A - \alpha_{41}\varrho & -\alpha_{51}\varrho & -\alpha_{61}\varrho & -\alpha_{11}\varrho & -\alpha_{21}\varrho & -\alpha_{31}\varrho \\ -\alpha_{42}\varrho & A - \alpha_{52}\varrho & -\alpha_{62}\varrho & -\alpha_{12}\varrho & -\alpha_{22}\varrho & -\alpha_{32}\varrho \\ -\alpha_{43}\varrho & -\alpha_{53}\varrho & A - \alpha_{63}\varrho & -\alpha_{13}\varrho & -\alpha_{23}\varrho & -\alpha_{33}\varrho \\ -\alpha_{44}\varrho & -\alpha_{54}\varrho & -\alpha_{64}\varrho & A - \alpha_{14}\varrho & -\alpha_{24}\varrho & -\alpha_{34}\varrho \\ -\alpha_{45}\varrho & -\alpha_{55}\varrho & -\alpha_{65}\varrho & -\alpha_{15}\varrho & A - \alpha_{25}\varrho & -\alpha_{35}\varrho \\ -\alpha_{46}\varrho & -\alpha_{56}\varrho & -\alpha_{66}\varrho & -\alpha_{16}\varrho & -\alpha_{26}\varrho & A - \alpha_{36}\varrho \end{vmatrix}$$

oder, wenn man rechts den Faktor $(-\varrho)^6$ heraushebt, die drei letzten Kolonnen mit den drei ersten und α_{ki} mit $\alpha_{i\bar{k}}$ vertauscht:

$$(10) \quad A^3 \cdot \Theta(\varrho) = -\varrho^6 \cdot \Theta\left(\frac{A}{\varrho}\right).$$

Nimmt man nun für die Entwicklung der ganzen Funktionen (4) mit Rücksicht auf (6) und (7) die Form:¹⁹³⁾

$$\Theta(\varrho) = A^3 + b'\varrho + c'\varrho^2 + a\varrho^3 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6$$

an, so folgt aus (10) identisch in ϱ :

$$\begin{aligned} A^3(A^3 + b'\varrho + c'\varrho^2 + a\varrho^3 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6) \\ = -A^3\varrho^6 - Ab'\varrho^5 - A^2c'\varrho^4 - A^3a\varrho^3 - A^4c\varrho^2 - A^5b\varrho + A^6 \end{aligned}$$

und damit:

$$-A'b' = A^3b, \quad -A^2c' = A^3c, \quad -A^3a = A^3a, \quad -A^4c = A^3c', \quad -A^5b = A^3b'$$

oder:

$$b' = -A^2b, \quad c' = -Ac, \quad a = 0.$$

Die ganze Funktion $\Theta(\varrho)$ hat daher die Form:

$$(11) \quad \Theta(\varrho) = A^3 - A^2b\varrho - Ac\varrho^2 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6,$$

wo b und c noch zu bestimmen bleiben.

4. Bestimmung des Koeffizienten b . Da der Koeffizient von ϱ auch der Nullwert des Differentialquotienten:¹⁹³⁾

$$\Theta'(\varrho) = -\frac{\partial \Theta}{\partial(\alpha_{14} - \varrho)} - \frac{\partial \Theta}{\partial(\alpha_{25} - \varrho)} - \frac{\partial \Theta}{\partial(\alpha_{36} - \varrho)} - \frac{\partial \Theta}{\partial(\alpha_{41} - \varrho)} - \frac{\partial \Theta}{\partial(\alpha_{52} - \varrho)} - \frac{\partial \Theta}{\partial(\alpha_{63} - \varrho)}$$

ist, so folgt:

$$-A^2b = \Theta'(0) = -2 \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_{14}} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_{25}} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_{36}} \right)$$

oder (I Anm. 1, III, (14)):

$$-A^2b = -2A^2(\alpha_{14} + \alpha_{25} + \alpha_{36})$$

oder, da die Summe von α_{14} , α_{25} , α_{36} nach § 81, (13) verschwindet:

$$b = 0.$$

Die ganze Funktion $\Theta(\varrho)$ hat daher die Form:

$$(12) \quad \Theta(\varrho) = A^3 - Ac\varrho^2 + c\varrho^4 - \varrho^6.$$

5. $\Theta(\varrho)$ als vollständiger Kubus. Multipliziert man die Determinante $\Theta(\varrho)$ in (4) mit der Determinante $\Theta(-\varrho)$, für die man aber die in (8) getroffene Anordnung der Zeilen und Kolonnen wählt, so folgt nach (9):

$$\Theta(\varrho)\Theta(-\varrho) = \begin{vmatrix} A - \varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A - \varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = (A - \varrho^2)^6.$$

Da aber nach (12) $\Theta(-\varrho) = \Theta(\varrho)$, so wird auch:

$$\Theta^2(\varrho) = (A - \varrho^2)^6$$

und hiernach, da ϱ^6 in (12) den Koeffizienten -1 hat:

$$(13) \quad \Theta(\varrho) = (A - \varrho^2)^3.$$

Die Determinante (4) ist also ein vollständiger Kubus, und die Gleichung sechsten Grades (5) hat zwei dreifache Wurzeln:

$$(14) \quad \varrho = +\sqrt[3]{A} \quad \text{und} \quad \varrho = -\sqrt[3]{A}.$$

6. Die Elementarteiler von $\Theta(\varrho)$. Nach dem Multiplikationsverfahren, welches in 5 für $\Theta(\varrho)\Theta(-\varrho)$ gebraucht wurde, folgt, wenn man für die Bildung der Differentialquotienten von $\Theta(\varrho)$ vor-

übergehend α_{ki} und α_{ik} als verschieden behandelt:

$$\frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12}} \Theta(-\varrho) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} - \varrho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} - \varrho \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{41} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} + \varrho & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52} + \varrho & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} + \varrho \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{65} & \alpha_{15} & \alpha_{25} + \varrho & \alpha_{35} \\ 0 & A - \varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A - \varrho^2 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \alpha_{45} (A - \varrho^2)^5,$$

oder da nach (13):

$$\Theta(-\varrho) = \Theta(\varrho) = (A - \varrho^2)^3$$

ist:

$$(15) \quad \frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12}} = (A - \varrho^2)^2 \alpha_{45},$$

und ebenso:

$$(15) \quad \frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial (\alpha_{14} - \varrho)} = (A - \varrho^2)^2 (\alpha_{41} + \varrho),$$

und entsprechend alle übrigen Unterdeterminanten von $\Theta(\varrho)$. Auf gleiche Weise erhält man:

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12} \partial \alpha_{31}} = (A - \varrho^2) \frac{\alpha_{45} \alpha_{44}}{\alpha_{65} \alpha_{64}}, \quad \frac{\partial^2 \Theta(\varrho)}{\partial (\alpha_{14} - \varrho) \partial \alpha_{65}} = (A - \varrho^2) \frac{\alpha_{41} + \varrho}{\alpha_{31}} \frac{\alpha_{42}}{\alpha_{32}}, \dots$$

Jede der beiden dreifachen Wurzeln (14) der Determinante sechsten Grades $\Theta(\varrho)$ ist also zweifache Wurzel aller Unterdeterminanten fünften und einfache Wurzel aller Unterdeterminanten vierten Grades (§ 50, 9).

7. Die Abhängigkeit der sechs linearen Komplexe. Die sechs linearen homogenen Gleichungen (2) können nach 2 nur bestehen, wenn ϱ einen der beiden Werte (14) hat. Daher müssen die Erzeugenden der Fläche (1) dem einen oder andern der beiden Gleichungssysteme genügen ($k = 1, 2, 3, \dots, 6$):

$$(17) \quad \vee A p_{\bar{k}} = \sum_1^6 \alpha_{k\bar{m}} p_m, \quad (18) \quad -\vee A p_{\bar{k}} = \sum_1^6 \alpha_{k\bar{m}} p_m.$$

Da aber nach 5 und 6 nicht nur die Determinante eines jeden der beiden Systeme von sechs Gleichungen, sondern auch alle ihre Unterdeterminanten fünften und vierten Grades verschwinden, so enthält jedes der beiden Systeme nur drei unabhängige Gleichungen, also:

Die Erzeugenden der Fläche (1) zerfallen in zwei Scharen (17)

und (18); jede Schar besteht aus den gemeinsamen Geraden dreier unabhängiger linearer Komplexe.¹⁷³⁾

8. Beziehung der beiden Scharen zueinander. Ist p irgend eine Gerade der Schar (17) und p' eine der Schar (18), also:

$$\sqrt{A} p_k = \sum_1^6 \alpha_{km} p_m, \quad -\sqrt{A} p'_k = \sum_1^6 \alpha_{\bar{k}n} p'_n,$$

so folgt durch Multiplikation beider Gleichungen und Summation über k :

$$-A \sum_1^6 p_k p'_k = \sum_1^6 \sum_1^6 \left(\sum_1^6 \alpha_{km} \alpha_{\bar{k}n} \right) p_m p'_n,$$

oder da nach (9) der Ausdruck in runder Klammer A oder 0 ist, je nachdem $n = \bar{m}$ oder $n \neq \bar{m}$:

$$-A \sum_1^6 p_k p'_k = A \sum_1^6 p_m p'_m,$$

also, da die beiden Summen dieselben sind:

$$2A \sum_1^6 p_k p'_k = 0.$$

Dies bedeutet aber, da $A \neq 0$ (I § 59, (15)):

Jede Gerade der einen Schar (17) oder (18) schneidet jede Gerade der andern.¹⁵⁸⁾

9. Besondere Fälle. Für das einschalige Hyperboloid:

$$(19) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist:

$$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = -\frac{1}{c^2}, \quad a_{44} = -1; \quad \sqrt{A} = -\frac{1}{\varepsilon a b c}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{b^2 c^2}, \quad \alpha_{22} = -\frac{1}{c^2 a^2}, \quad \alpha_{33} = \frac{1}{a^2 b^2}, \quad \alpha_{44} = -\frac{1}{a^2}, \quad \alpha_{55} = -\frac{1}{b^2}, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{c^2},$$

alle übrigen a_{kl} und $\alpha_{kl} = 0$. Die sechs linearen Komplexe (17) oder (18) werden daher:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\varepsilon a b c} &= \frac{p_4}{a^2}, & \frac{p_2}{\varepsilon a b c} &= \frac{p_5}{b^2}, & \frac{p_3}{\varepsilon a b c} &= -\frac{p_6}{c^2}, \\ \frac{p_4}{\varepsilon a b c} &= \frac{p_1}{b^2 c^2}, & \frac{p_5}{\varepsilon a b c} &= \frac{p_2}{c^2 a^2}, & \frac{p_6}{\varepsilon a b c} &= -\frac{p_3}{a^2 b^2} \end{aligned}$$

und enthalten nur die drei unabhängigen:

$$(20) \quad \frac{p_1}{b c} = \varepsilon \frac{p_4}{a}, \quad \frac{p_2}{c a} = \varepsilon \frac{p_5}{b}, \quad \frac{p_3}{a b} = -\varepsilon \frac{p_6}{c},$$

wie sie § 82, (22) gefunden wurden.

Für das *hyperbolische Paraboloid*:

$$(21) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

sind:

$$\alpha_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad \alpha_{33} = -\frac{1}{c^2}, \quad \alpha_{14} = 1; \quad \sqrt{A} = -\frac{1}{\varepsilon b c}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{b^2 c^2}, \quad \alpha_{26} = -\frac{1}{c^2}, \quad \alpha_{35} = -\frac{1}{b^2}, \quad \alpha_{44} = -1,$$

alle übrigen α_{ki} und α_{ik} gleich 0. Die sechs linearen Komplexe (17) oder (18) werden daher:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{-\varepsilon b c} &= -p_4, & \frac{p_2}{-\varepsilon b c} &= -\frac{p_5}{b^2}, & \frac{p_3}{-\varepsilon b c} &= -\frac{p_6}{c^2}, \\ \frac{p_4}{-\varepsilon b c} &= -\frac{p_1}{b^2 c^2}, & \frac{p_5}{-\varepsilon b c} &= -\frac{p_2}{c^2}, & \frac{p_6}{-\varepsilon b c} &= -\frac{p_3}{b^2}, \end{aligned}$$

und enthalten nur die drei unabhängigen:

$$(22) \quad p_1 = \varepsilon b c p_4, \quad b p_2 = \varepsilon c p_3, \quad c p_5 = \varepsilon b p_6,$$

wie sie § 83, (19) gefunden wurden.

10. Die Linienfläche dreier Komplexe in Punktkoordinaten.

Sind jetzt irgend drei lineare Komplexe durch die Gleichungen gegeben:

$$(23) \quad \begin{cases} c_{11} p_1 + c_{12} p_2 + c_{13} p_3 + c_{14} p_4 + c_{15} p_5 + c_{16} p_6 = 0, \\ c_{21} p_1 + c_{22} p_2 + c_{23} p_3 + c_{24} p_4 + c_{25} p_5 + c_{26} p_6 = 0, \\ c_{31} p_1 + c_{32} p_2 + c_{33} p_3 + c_{34} p_4 + c_{35} p_5 + c_{36} p_6 = 0, \end{cases}$$

so fragen wir nach dem Ort derjenigen Geraden, die jedem der drei Komplexe angehören.¹⁷¹⁾

Ist p_k eine solche Gerade und x_k ein Punkt auf ihr, so bestehen die Bedingungen (I § 59, (10); § 60, (1)):

$$(24) \quad \begin{cases} p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4 = 0, \\ p_4 x_3 - p_6 x_1 + p_2 x_4 = 0, \\ p_5 x_1 - p_4 x_2 + p_3 x_4 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0, \end{cases}$$

von denen drei, für $x_4 \neq 0$ die drei ersten, in bezug auf die Koordinaten p_k unabhängig sind. Für den Ort des laufenden Punktes x einer gemeinsamen Geraden p_k der drei Komplexe erhält man daher durch Elimination der p_k aus den Gleichungen (23) und den drei ersten (24):

$$(25) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_1 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante (25) nach den Unterdeterminanten der drei ersten und der drei letzten Zeilen und setzt zur Abkürzung:¹⁹³⁾

$$(26) \quad \begin{vmatrix} c_{1k} & c_{1l} & c_{1m} \\ c_{2k} & c_{2l} & c_{2m} \\ c_{3k} & c_{3l} & c_{3m} \end{vmatrix} = (klm) = -(lkm),$$

so lautet die Gleichung (25):

$$(27) \quad x_4 g = 0,$$

wo:

$$(28) \quad g = (234)x_1^2 + (315)x_2^2 + (126)x_3^2 + (456)x_4^2 + [(125) + (316)]x_2x_3 \\ + [(245) - (364)]x_1x_4 + [(236) + (124)]x_3x_1 + [(356) - (145)]x_3x_4 \\ + [(314) + (235)]x_1x_2 + [(164) - (256)]x_3x_4.$$

Hätten wir bei vorstehendem Verfahren, statt die vierte Gleichung (24) wegzulassen, die erste, zweite oder dritte unterdrückt, so hätten wir statt (27) erhalten:

$$(29) \quad x_1 g = 0, \quad x_2 g = 0, \quad x_3 g = 0.$$

Da aber x_1, x_2, x_3, x_4 nicht alle 0 sind, folgt für den gesuchten Ort jedenfalls:

$$(30) \quad g = 0.$$

Der Ort der gemeinsamen Geraden der drei linearen Komplexe (23) ist eine Fläche zweiter Ordnung (30) mit der Bedeutung (28) von g .

11. Die Linienfläche dreier Komplexe in Ebenenkoordinaten. Benutzt man an Stelle von (24) die Bedingungen der vereinigten Lage einer Ebene u_k mit einer gemeinsamen Linie der Komplexe (23) (I § 59, (11)), so ergibt sich für die Ebene die Bedingung:

$$(31) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ 0 & -u_3 & u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & u_4 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} = u_4 G = 0,$$

wo wiederum mit der Abkürzung (26):

$$(32) \quad G = (561)u_1^2 + (642)u_2^2 + (453)u_3^2 + (123)u_4^2 + [(452) + (643)]u_2u_3 \\ + [(512) - (631)]u_1u_4 + [(563) + (451)]u_3u_1 + [(623) - (412)]u_2u_4 \\ + [(641) + (562)]u_1u_2 + [(431) - (523)]u_3u_4.$$

Die Koeffizienten in (28) und (32) unterscheiden sich nur durch die Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 bezüglich mit 4, 5, 6. Dual zu 10 ergibt sich daher:

Die Gesamtheit aller Ebenen, die durch eine gemeinsame Gerade der drei linearen Komplexe (23) gehen, umhüllt eine Fläche zweiter Klasse.

$$(33) \quad G = 0,$$

wo G die Bedeutung (32) hat.

12. Besonderer Fall. Die Komplexe (23) können auch *spezielle* Komplexe sein (§ 86, 4). Dies ist unter anderen der Fall, wenn ihre Gleichungen die Form haben:

$$(34) \quad \begin{cases} p_1 + np_5 + mp_6 = 0, \\ p_2 + lp_6 + np_4 = 0, \\ p_3 + mp_4 + lp_5 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (25) wird dann mit Einführung schiefwinkliger Koordinaten $x, y, z, 1$ für x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & 1 & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & m & l & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & n+z & m-y \\ 0 & 0 & 0 & n-z & 0 & l+x \\ 0 & 0 & 0 & m+y & l-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z & y \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & -y & x & 0 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 0 & n+z & m-y \\ n-z & 0 & l+x \\ m+y & l-x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Dies ist eine bereits § 74, (22) gefundene Gleichung.¹⁷¹⁾

§ 148. Darstellung der Schnittgebilde in Ebenen- und Linienkoordinaten.

1. Gleichung eines ebenen Schnittes in Ebenenkoordinaten. Die Bedingung dafür, daß die Schnittlinie q der beiden Ebenen u_k und u'_k Tangente der Fläche:

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

sei, ist nach § 144, (3):

$$(2) \quad A^{uu'} = 0$$

oder auch nach § 140, (22):

$$(3) \quad \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^u u'_k u'_i = 0.$$

Hält man nun die Ebene u_k fest, so ist dies die Bedingung dafür, daß die laufende Ebene u'_k durch eine in der Ebene u_k liegende Tangente der Fläche, also eine Tangente der Schnittkurve geht.

Die Gleichung (2) oder (3) stellt in laufenden Ebenenkoordinaten u'_k die Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene u_k dar.¹²²⁾

2. Der Rang der Schnittkurve als einer Fläche zweiter Klasse. Als Fläche zweiter Klasse ist das durch (3) dargestellte Gebilde zunächst vom Range 3 (§ 139, 4), da die Determinante ($k, l = 1, 2, 3, 4$):

$$(4) \quad A_{ki}^u = (A^u)^3 \cdot 0 = 0,$$

wie § 45, (19).¹⁹⁸⁾

Ist dagegen die schneidende Ebene u_k einfache Tangentialebene, so erhält nach § 141, (41) die Gleichung (3) die Form:

$$(5) \quad \left(\sum_1^4 x_k^0 u'_k \right)^2 = 0,$$

wird also vom Range 1. Sie stellt dann den doppelt zählenden Berührungspunkt als Ebenenbündel dar.

Ist die schneidende Ebene u_k stationäre Tangentialebene, so wird die Gleichung (3) nach § 141, (22) identisch erfüllt.

3. Gleichungen der in einer Tangentialebene liegenden Erzeugenden in Ebenenkoordinaten. Unter den ∞^2 Ebenen des Bündels (5) sind diejenigen ausgezeichnet, die nicht nur durch den Berührungspunkt der Tangentialebene u_k , sondern auch durch eine der beiden sich in ihm kreuzenden Erzeugenden der Fläche gehen. Die Bedingungen, daß die Schnittlinie q der Ebenen u und u' eine Erzeugende ist, sind nach § 146, (3):

$$(6) \quad A_{ki}^{uu'} = 0; \quad k, l = 1, 2, 3, 4.$$

Entwickelt, ist beispielsweise:

$$(7) \quad A_{44}^{uu'} = \sum_1^3 \sum_1^3 \alpha_{ki}^u u'_k u'_i = 0$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse in der Ebene $x_4 = 0$. Diese muß in das Punktepaar zerfallen, in dem die beiden gesuchten Erzeugenden die Ebene $x_4 = 0$ schneiden.

Ist daher u_k eine Tangentialebene, so daß $A^u = 0$, so werden die beiden in ihr liegenden Erzeugenden in laufenden Ebenenkoordinaten u'_k dargestellt durch die Gleichung (2), die das Bündel am Berührungspunkt, und durch eine der Gleichungen:

$$(8) \quad A_{11}^{uu'} = 0, A_{22}^{uu'} = 0, A_{33}^{uu'} = 0, A_{44}^{uu'} = 0,$$

die die Schnittpunktpunktpaare der beiden Erzeugenden mit den vier Koordinatenebenen ausdrücken.

Besteht aber die Schnittkurve der Fläche mit der Tangentialebene nicht aus zwei sich kreuzenden Geraden, sondern aus einer Doppellinie q_k^0 , indem neben A^u auch alle A_{ki}^u verschwinden, so wird aus (7) nach § 141, (48):

$$(9) \quad -S^2 A_{44}^{uu'} = b_{11}(q_1^0 u_1' + q_2^0 u_2' + q_3^0 u_3')^2$$

ein vollständiges Quadrat. Jede der Gleichungen (8) stellt dann einen der Schnittpunkte der Doppellinie mit einer Koordinatenebene dar; zwei von ihnen sind also die Gleichungen der Doppellinie in Ebenenkoordinaten (I § 59, (12)).

4. Gleichung der Schnittkurve in Linienkoordinaten. Die Gleichung:

$$(10) \quad A^{uu'u''} = 0$$

bedeutet nach § 140, (33), daß der Schnittpunkt der drei Ebenen u, u', u'' auf der Fläche (1) liegt.

Nach den Strahlenkoordinaten p_k' der Geraden $u' \times u''$ entwickelt, lautet die Gleichung (10) nach § 140, (37):

$$(11) \quad \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha^u_i p_k' p_i' = 0.$$

Diese Gleichung drückt daher bei festen u_k die Bedingung aus, daß die laufende Gerade p_k' die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene u trifft, oder:

Die Gleichung (11) ist die Gleichung der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene u in laufenden Strahlenkoordinaten p_k' (die Komplexgleichung der Schnittkurve).

Ist die Ebene eine stationäre Tangentialebene mit der Berührungslinie q_k^0 , so wird die linke Seite der Gleichung (11) ein vollständiges Quadrat (§ 141, (48)):

$$(12) \quad \left(\sum_1^6 q_k^0 p_k' \right)^2 = 0.$$

5. Gleichung des Schnittpunktpaares in Ebenenkoordinaten.
Nach den Ebenenkoordinaten u_k'' entwickelt, lautet die Gleichung (10) nach § 140, (42):

$$(13) \quad \sum_1^4 \sum_1^4 A_k^{u u'} u_k'' u_i'' = 0.$$

Diese Gleichung drückt daher bei festen u_k, u_k' aus, daß die laufende Ebene u_k'' durch einen Schnittpunkt der Achse $q_k = u \times u'$ mit der Fläche geht.

Die Gleichung (13) stellt das Schnittpunktpaar der Fläche (1) und der Geraden $u \times u'$ in laufenden Ebenenkoordinaten u_k'' dar.¹²³⁾

Ist jedoch mit $A^{u u'} = 0$ die Gerade $u \times u'$ Tangente der Fläche, so wird die Gleichung (13) nach § 142, (35):

$$(14) \quad \left(\sum_1^4 x_k^0 u_k'' \right)^2 = 0,$$

wo x_k^0 die Koordinaten des Berührungspunktes sind. Diesen stellt alsdann die Gleichung (13) doppelt zählend in laufenden Ebenenkoordinaten u_k'' dar.

II. Kapitel.

Polar tetraeder, Polarberührungstetraeder und Schmiegunstetraeder.

§ 149. Polar tetraeder und Quadratdarstellung.

1. Harmonische Pole. Das Schnittpunktpaar der Fläche § 142, (1) mit der Verbindungslinie der beiden Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ hat nach § 142, (7) in Zweieckskoordinaten y_1, y_2 in bezug auf diese Punkte die Gleichung:

$$(1^0) \quad f_{11} y_1^2 + 2f_{12} y_1 y_2 + f_{22} y_2^2 = 0.$$

Nach § 40, (3) ist daher:

$$(2^0) \quad f_{12} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu dem Schnittpunktpaar harmonisch, also harmonische Pole der Fläche sind (§ 68, 5).

Die Theorie der harmonischen Pole und ihre Folgerungen finden daher in *Tetraederkoordinaten* formal denselben Ausdruck, wie in *homogenen gemeinen Koordinaten*, wo ebenfalls die Bedingung § 68, (7) den Ausgangspunkt bildete. Es bedarf daher nur der Angabe der bezüglichen Formeln in Tetraederkoordinaten:

In bezug auf die Fläche zweiter Ordnung § 138, (1):

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

sind zwei Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ harmonische Pole unter der Bedingung:

$$(2) \quad f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} \\ = \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0.$$

In bezug auf die Fläche zweiter Klasse § 138, (1'):

$$(1') \quad F = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{ki} u_k u_i = 0$$

sind zwei Ebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ harmonische Polarebenen unter der Bedingung:

$$(2') \quad F_{12} = \sum_1^4 F_k^{(1)} u_k^{(2)} \\ = \sum_1^4 F_k^{(2)} u_k^{(1)} = 0.$$

2. Koordinaten der Polarelemente. In bezug auf (1), bezüglich (1') sind ferner (§ 68, (18); (22); (25); § 77, (7); (8); (9)) die Koordinaten

der Polarebene eines Punktes x_i :

$$(3) \quad \varrho u_k = f_k = \sum_1^4 a_{ki} x_i;$$

der Polare einer Geraden p_i :

$$(4) \quad \varrho q_k' = \varphi_k = \sum_1^6 \alpha_{ki} p_i;$$

des Poles einer Ebene u_i :

$$(5) \quad \varrho x_k = F_k = \sum_1^4 A_{ki} u_i.$$

des Poles einer Ebene u_i :

$$(3') \quad \sigma x_k = F_k = \sum_1^4 e_{ki} u_i;$$

der Polare einer Geraden q_i :

$$(4') \quad \sigma p_k' = \Phi_k = \sum_1^6 \varepsilon_{ki} q_i;$$

der Polarebene eines Punktes x_i :

$$(5') \quad \sigma u_k = f_k = \sum_1^4 E_{ki} x_i.$$

3. Konjugierte Elemente. Konjugiert sind (§ 68, 29; 31) zwei Elemente, wenn jedes mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt. Dabei ist (§ 68, (7); § 77, (2)):

$$(6) \quad f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} \\ = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k^{(1)} x_i^{(2)} = 0$$

die Bedingung für zwei konjugierte Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ oder die Gleichung der Polarebene (§ 68, (14))

$$(6') \quad F_{12} = \sum_1^4 F_k^{(1)} u_k^{(2)} \\ = \sum_1^4 \sum_1^4 e_{ki} u_k^{(1)} u_i^{(2)} = 0$$

die Bedingung für zwei konjugierte Ebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ oder die Gleichung des Poles (§ 77, (5)) der

des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Punktkoordinaten $x_k^{(2)}$;

$$(7) \quad \varphi_{12} = \sum_1^6 \varphi_k^{(1)} p_k^{(2)} \\ = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k^{(1)} p_i^{(2)} = 0$$

die Bedingung für zwei konjugierte Strahlen $p_k^{(1)}$ und $p_k^{(2)}$ (§ 68, (29)) oder die Gleichung der Polare (§ 68, (28)) des Strahles $p_k^{(1)}$ in laufenden Strahlenkoordinaten $p_k^{(2)}$;

$$(8) \quad F_{12} = \sum_1^4 F_k^{(1)} u_k^{(2)} \\ = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k^{(1)} u_i^{(2)} = 0$$

die Bedingung für zwei konjugierte Ebenen $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ (§ 68, (27)) oder die Gleichung des Poles (§ 68, (26)) der Ebene $u_k^{(1)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten $u_k^{(2)}$.

Ebene $u_k^{(1)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten $u_k^{(2)}$;

$$(7') \quad \Phi_{12} = \sum_1^6 \Phi_k^{(1)} q_k^{(2)} \\ = \sum_1^6 \sum_1^6 \varepsilon_{ki} q_k^{(1)} q_i^{(2)} = 0$$

die Bedingung für zwei konjugierte Achsen $q_k^{(1)}$ und $q_k^{(2)}$ (§ 77, (13)) oder die Gleichung der Polare (§ 77, (11)) der Achse $q_k^{(1)}$ in laufenden Achsenkoordinaten $q_k^{(2)}$;

$$(8') \quad f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} \\ = \sum_1^4 \sum_1^4 E_{ki} x_k^{(1)} x_i^{(2)} = 0$$

die Bedingung für zwei konjugierte Punkte (§ 77, (12)) $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ oder die Gleichung der Polarebene (§ 77, (10)) des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Punktkoordinaten $x_k^{(2)}$.

4. Eigentliche Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der eigentlichen Fläche zweiter Ordnung und Klasse lauten nach § 78, (10); (11) in Punkt- und Ebenenkoordinaten:

$$(9) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \quad (9') \quad F = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k u_i = 0;$$

ferner nach § 78, (28); (29) in Strahlen- und Achsenkoordinaten:

$$(10) \quad \varphi = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k p_i = 0, \quad (10') \quad \Phi = \sum_1^6 \sum_1^6 \varepsilon_{ki} q_k q_i = 0.$$

Von den Beziehungen zwischen den Koordinaten von Pol und Polarebene (3), (5), (3'), (5'):

$$(11) \quad \varrho u_k = f_k = \sum_1^4 a_{ki} x_i, \quad (11') \quad \sigma x_i = F_i = \sum_1^4 A_{ki} u_k$$

sind (§ 78, 9) mit $\varrho \sigma = A$ die einen die Auflösungen der andern. Dasselbe gilt mit $\varrho \sigma = A^2$ von den Beziehungen zwischen den Koordinaten reziproker Polaren (4) und (4'), wenn wir, mit Rücksicht

auf die Reziprozität, in (4') p'_k, q_i mit p_k, q'_i vertauschen (I § 63, (19); (20)):

$$(12) \quad \varrho q'_k = \varphi_k = \sum_1^6 \alpha_{ki} p_i, \quad (12') \quad \sigma p_i = \Phi_i = \sum_1^6 A_{ki} q'_k.$$

Die sechs Gleichungen (6), (6')—(8), (8') zwischen *konjugierten Punkten, Ebenen und Geraden* ziehen sich entsprechend auf folgende vier zusammen:

$$(13) \quad f_{12} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k^{(1)} x_i^{(2)} = 0,$$

$$(13') \quad F_{12} = \sum_1^4 F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k^{(1)} u_i^{(2)} = 0,$$

$$(14) \quad \varphi_{12} = \sum_1^6 \varphi_k^{(1)} p_k^{(2)} = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k^{(1)} p_i^{(2)} = 0,$$

$$(14') \quad \Phi_{12} = \sum_1^6 \Phi_k^{(1)} q_k^{(2)} = \sum_1^6 \sum_1^6 A_{ki} q_k^{(1)} q_i^{(2)} = 0.$$

5. Die uneigentlichen Flächen zweiter Ordnung und Klasse.

Die *uneigentlichen* Flächen zweiter Ordnung sind nicht zugleich Flächen zweiter Klasse. Es gelten also nur die links stehenden Formeln (1)—(8) ohne Beziehung zu den rechts stehenden. Das Umgekehrte gilt für die uneigentlichen Flächen zweiter Klasse. Charakteristisch ist für alle diese Flächen das Auftreten *unbestimmter Polarelemente*:

Punkte unbestimmter Polarebene, den Gleichungen:

$$(15) \quad \sum_1^4 a_{ki} x_i = 0$$

genügend, sind beim Kegel die Spitze, beim Ebenenpaar die ∞^1 Punkte der Achse, bei der Doppelsebene die ∞^2 Punkte der Fläche (§ 139, (6)).

Strahlen unbestimmter Polare:

$$(16) \quad \sum_1^6 \alpha_{ki} p_i = 0,$$

sind beim Kegel die ∞^2 Spitzenstrahlen, beim Ebenenpaar die ∞^3

Ebenen unbestimmten Poles, den Gleichungen:

$$(15') \quad \sum_1^4 e_{ki} u_i = 0$$

genügend, sind beim Kegelschnitt dessen Ebene, beim Punktepaar die ∞^1 Ebenen der Verbindungslinie, beim Doppelpunkt die ∞^2 Ebenen desselben.

Achsen unbestimmter Polare:

$$(16') \quad \sum_1^6 \varepsilon_{ki} q_i = 0,$$

sind beim Kegelschnitt die ∞^2 Achsen seiner Ebene, beim Punkte-

Treffgeraden der Achse, bei der Doppelebene die ∞^4 Geraden des Raumes (§ 144, (16); § 139, (16)).

Ebenen unbestimmten Poles:

$$(17) \quad \sum_1^4 A_{ki} u_i = 0,$$

sind beim Kegel die ∞^2 Ebenen der Spitze, beim Ebenenpaar die ∞^3 Ebenen des Raumes (§ 143, (9)).

paar die ∞^3 Treffgeraden der Verbindungslinie, beim Doppelpunkt die ∞^4 Geraden des Raumes.

Punkte unbestimmter Polarebene:

$$(17') \quad \sum_1^4 E_{ki} x_i = 0,$$

sind beim Kegelschnitt die ∞^2 Punkte seiner Ebene, beim Punktepaar die ∞^3 Punkte des Raumes.

6. Polzweiecke und Quadratdarstellung des Schnittpunktpaares. Zwei *getrennte* harmonische Pole bilden ein *Polzweieck der Fläche* (1), zwei *getrennte* harmonische Polarebenen ein *Polarzweiflach der Fläche* (1').

Da die Bedingung (2⁰) der harmonischen Pole gleichzeitig das Fehlen des Produktgliedes in der Gleichung (1⁰) ausdrückt, so ergibt sich (§ 40, (4)):

Die Gleichung des Schnittpunktpaares einer Geraden mit der Fläche (1) erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(18) \quad f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 = 0,$$

wenn die auf der Geraden liegenden Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, auf die sich die Zweieckskoordinaten y_1 , y_2 beziehen, ein Polzweieck der Fläche bilden.

Die Gleichung des Tangential-ebenenpaares durch eine Gerade an die Fläche (1') erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(18') \quad F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 = 0,$$

wenn die durch die Gerade gehenden Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, auf die sich die Zweiflachskoordinaten v_1 , v_2 beziehen, ein Polarzweiflach der Fläche bilden.

Nach § 66, 9 und § 40, 3 gibt es auf jeder Geraden des Raumes, die nicht ganz der Fläche angehört, ∞^1 Polzweiecke der Fläche (1). Ist das Punktepaar (18) ein getrenntes, gehört keine, ist es ein zusammenfallendes, gehört eine Ecke des Polzweiecks der Fläche an.

7. Poldreieck und Quadratdarstellung der Schnittkurven. Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, von denen jeder harmonischer Pol jedes andern ist, bilden ein *Poldreieck der Fläche* (1) und gleichzeitig der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene der drei Punkte. Ebenso bilden drei nicht durch eine Gerade gehende Ebenen, von denen jede harmonische Polarebene jeder andern ist, ein *Polardreiflach*

der Fläche (1') und gleichzeitig des Berührungskegels der vom Schnittpunkt der drei Ebenen an die Fläche geht.

Da für die Ecken $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ eines solchen Poldreiecks nach (1) $f_{23} = f_{31} = f_{12} = 0$, so folgt mit Rücksicht auf § 141, (7):

Die Gleichung der Schnittkurve einer Ebene mit der Fläche (1) erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form: Die Gleichung des Berührungskegels von einem Punkte an die Fläche (1') erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(19) \quad f_{11}y_1^2 + f_{22}y_2^2 + f_{33}y_3^2 = 0, \quad (19') \quad F_{11}v_1^2 + F_{22}v_2^2 + F_{33}v_3^2 = 0,$$

wenn die in der Ebene liegenden Punkte $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$, auf die sich die Dreieckskoordinaten y_1, y_2, y_3 beziehen, ein Poldreieck bilden. wenn die durch den Punkt gehenden Ebenen $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, u_k^{(3)}$, auf die sich die Dreiflachskoordinaten v_1, v_2, v_3 beziehen, ein Polardreiflach bilden.

Nach § 46, 10—12 gibt es, wenn die Schnittkurve ein eigentlicher Kegelschnitt oder ein getrenntes Linienpaar ist, in der schneidenden Ebene ∞^3 Poldreiecke, wenn sie eine Doppelgerade ist, deren ∞^4 .

Es ist also stets auf unendlich viele Weisen möglich, die Gleichung der Schnittkurve auf die Form (19) zu bringen.

8. Begriff des Poltetraeders.¹²³⁾

I. Ein Tetraeder ist dann ein Poltetraeder der Fläche (1), wenn jede seiner Ecken harmonischer Pol jeder der drei andern ist. I'. Ein Tetraeder ist ein Polaren-tetraeder der Fläche (1'), wenn jede seiner Seitenebenen harmonische Polarebene jeder der drei andern ist

Aus § 68, 8 und § 77, 3 ergibt sich dann die weitere charakteristische Eigenschaft:

II. Bei einem Poltetraeder ist jede Seitenfläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke. II'. Bei einem Polaren-tetraeder ist jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche.

9. Konstruktion eines Poltetraeders. Um ein Poltetraeder $J_1J_2J_3J_4$ zu konstruieren, nimmt man einen Punkt J_1 an, der nicht auf der Fläche liegt, dessen Polarebene l_1 also nach § 68, 9, I nicht durch J_1 geht. Auf dieser nimmt man wieder einen Punkt J_2 an, der nicht auf der Fläche liegt (vgl. jedoch 14), dessen Polarebene l_2 also nicht durch J_2 , aber nach § 68, 13, II durch J_1 geht. Auf der Schnittlinie $l_1 \times l_2$ nimmt man wieder einen Punkt J_3 an, der nicht auf der Fläche liegt (vgl. jedoch 13), dessen Polarebene l_3 also nicht durch J_3 , aber nach § 68, 13, II durch J_1 und J_2 geht. Der Schnitt

punkt $J_4 = l_1 \times l_2 \times l_3$, dessen Polarebene die Ebene $l_4 = J_1 J_2 J_3$ ist, bildet mit J_1, J_2 und J_3 ein Poltetraeder.

10. Gleichungen in bezug auf ein Poltetraeder. Transformiert man die Gleichung (1) auf ein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, so sind die Bedingungen, daß in der transformierten Gleichung § 138, (12) die Produktglieder fehlen, nämlich:

$$(20) \quad b_{23} = f_{23} = 0, \quad b_{31} = f_{31} = 0, \quad b_{12} = f_{12} = 0, \quad b_{14} = f_{14} = 0, \\ b_{24} = f_{24} = 0, \quad b_{34} = f_{34} = 0,$$

nach (2) gleichzeitig die Bedingungen, daß die neuen Ecken $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$, $x_k^{(4)}$ ein Poltetraeder bilden.¹¹⁴⁾

Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(21) \quad f = f_{11}y_1^2 + f_{22}y_2^2 + f_{33}y_3^2 + f_{44}y_4^2 = 0,$$

wenn das Koordinatentetraeder, auf das sich die Koordinaten y_k beziehen, ein Poltetraeder ist.

Die Gleichung der Fläche zweiter Klasse erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:

$$(21') \quad F = F_{11}v_1^2 + F_{22}v_2^2 + F_{33}v_3^2 + F_{44}v_4^2 = 0,$$

wenn das Koordinatentetraeder, auf das sich die Koordinaten v_k beziehen, ein Polarebenentetraeder ist.

Die Determinante der Form (21):

$$(22) \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}, \quad b_{kl} = f_{kl},$$

hat die Unterdeterminanten:

$$(23) \quad B_{11} = b_{22}b_{33}b_{44}, \quad B_{22} = b_{11}b_{33}b_{44}, \quad B_{33} = b_{11}b_{22}b_{44}, \quad B_{44} = b_{11}b_{22}b_{33}, \\ B_{23} = B_{31} = B_{12} = B_{14} = B_{24} = B_{34} = 0;$$

$$(24) \quad \beta_{11} = b_{22}b_{33}, \quad \beta_{22} = b_{33}b_{11}, \quad \beta_{33} = b_{11}b_{22}, \quad \beta_{44} = b_{11}b_{44}, \\ \beta_{55} = b_{22}b_{44}, \quad \beta_{66} = b_{33}b_{44}, \\ \beta_{kl} = 0, \quad k \neq l.$$

Erhält daher in bezug auf ein Poltetraeder die Form f den Ausdruck (21), so werden gleichzeitig nach § 138, (30) die kovarianten Formen:

$$(25) \quad \varphi = \sum_1^6 \sum_k^6 \alpha_{ki} p_k p_i = \sum_1^6 \beta_{kk} r_k^2;$$

$$S^4 \Phi = S^4 \sum_1^6 \sum_k^6 A_{ki} q_k q_i = \sum_1^6 B_{kk} s_k^2.$$

$$(26) \quad S^2 F = S^2 \sum_1^4 \sum_k^4 A_{ki} u_k u_i = \sum_1^4 B_{kk} v_k^2.$$

11. Polartetraeder der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Bei der eigentlichen Fläche ist jedes Poltetraeder zugleich Polarebenen-tetraeder und umgekehrt, da die Erklärungen 8, II und II' nach § 78, 9 dasselbe besagen. Wir nennen das sich selbst duale Gebilde ein *Polartetraeder* und entnehmen aus 8—10 die Eigenschaften:

I. Je zwei Ecken, je zwei Seitenflächen, je zwei Kanten eines Polartetraeders sind einander konjugiert (§ 68, 31).

II. Jede Ecke ist der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche, jede Seitenfläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke, jede Kante die reziproke Polare der gegenüberliegenden Kante (§ 68, 15, I).

III. Jede durch eine Ecke eines Polartetraeders gehende Gerade trifft die Fläche in zwei Punkten, die zu der Ecke und dem Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Seitenebene harmonisch sind.

III'. Durch jede in einer Seitenfläche des Polartetraeders liegende Gerade gehen zwei Tangentialebenen, die zu der Seitenfläche und der Verbindungsebene mit der gegenüberliegenden Ecke harmonisch sind.

IV. Auf jeder Transversale von zwei Gegenkanten eines Polartetraeders sind die Treffpunkte mit diesen und die Schnittpunkte mit der Fläche harmonisch.

IV'. An jeder Transversale von zwei Gegenkanten eines Polartetraeders sind die Verbindungsebenen mit diesen und die beiden Tangentialebenen der Fläche harmonisch.

Die Polarebene l_1 irgend einer der ∞^3 nicht auf der Fläche liegenden Punkte J_1 des Raumes schneidet nach § 68, 9; § 107, 2; 3 die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt, und zu diesem gibt es nach § 46, 10, V ∞^3 Poldreiecke $J_2 J_3 J_4$, deren Ecken nicht auf dem Kegelschnitt liegen. Aus 8 folgt daher:

V. Die eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse hat ∞^6 Polartetraeder.

VI. Keine Ecke eines Polartetraeders ist ein Punkt der Fläche, keine Kante eine Tangente, keine Seitenfläche eine Tangentialebene der Fläche (§ 68, 9; 17).

VII. Die Gleichungen (9), (9') und (10), (10') der Fläche in Punkt- und Ebenenkoordinaten, in Strahlen- und Achsenkoordinaten nehmen in bezug auf ein Polartetraeder die zusammengehörigen Formen an:

$$(27) \quad f = \sum_1^4 b_{kk} y_k^2 = 0, \quad S^2 F = \sum_1^4 B_{kk} v_k^2 = 0,$$

$$(28) \quad \varphi = \sum_1^6 \beta_{kk} r_k^2 = 0, \quad S^4 \Phi = \sum_1^6 B_{kk} s_k^2 = 0.$$

Da für die eigentliche Fläche nach (22):

$$b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} \neq 0,$$

so folgt mit Rücksicht auf (23) und (24):

VIII. In allen Gleichungen (27); (28) kann keiner der Koeffizienten verschwinden.

Dies ist zugleich der analytische Ausdruck des Satzes VI. Denn $b_{11} = f_{11} = 0$ würde bedeuten, daß die Ecke J_1 auf der Fläche liegt; $B_{11} = 0$, daß die Ebene l_1 Tangentialebene; $\beta_{11} = 0$ ($B_{44} = 0$), daß die Kante $i_1(\iota_4)$ Tangente der Fläche ist (I § 59, (21)).

12. Poltetraeder der Kegel. Da beim Kegel nach § 79, 4 die Polarebenen aller Punkte, mit Ausnahme der Spitze, durch die Spitze gehen, fällt der Punkt J_4 in der Konstruktion 9 stets in die Spitze, die ihrerseits zu jedem Punkte des Raumes konjugiert ist, also auch zu den in 9 benutzten Punkten J_1, J_2, J_3 . Die Punkte J_1, J_2, J_3 können als ein Poldreieck der Schnittkurve des Kegels mit einer beliebigen nicht durch die Spitze gehenden Ebene gelten. In jeder der ∞^3 derartigen Ebenen gibt es nach § 46, 10, V ∞^3 Poldreiecke, also folgt:

I. Der Kegel besitzt ∞^6 Poltetraeder.

I'. Der Kegelschnitt besitzt ∞^6 Polarebenen-tetraeder.

II. Die eine Ecke fällt stets in die Spitze, die drei andern bilden ein Poldreieck der Schnittkurve des Kegels mit einer nicht durch die Spitze gehenden Ebene.

II'. Die eine Seitenebene fällt in die Ebene der Kurve, die drei andern bilden ein Polarebenen-dreieck des von einem Punkte außerhalb dieser Ebene über der Kurve errichteten Berührungskegels.

Da J_4 auf dem Kegel liegt, verschwindet in (21) $b_{44} = f_{44}$, während b_{11}, b_{22}, b_{33} von 0 verschieden sind, da nicht alle Unterdeterminanten (23) verschwinden dürfen.

III. Die Gleichung des Kegels

(1) in bezug auf ein Poltetraeder lautet:

$$(29) \quad f = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0.$$

III'. Die Gleichung des Kegel-schnittes (1') in bezug auf ein Polarebenentetraeder lautet:

$$(29') \quad F = F_{11}v_1^2 + F_{22}v_2^2 + F_{33}v_3^2 = 0.$$

Gleichzeitig mit (29) nehmen die Formen (28) und (27) wegen $b_{44} = 0$ die Gestalt an:

$$(30) \quad \varphi = \beta_{11}r_1^2 + \beta_{22}r_2^2 + \beta_{33}r_3^2 = 0, \quad S^2F = B_{44}v_4^2 = 0.$$

In (29) und (30) verschwindet alsdann kein weiterer Koeffizient.

13. Poltetraeder der Ebenenpaare. Beim Ebenenpaar geht (§ 81, 3) die Polarebene eines außerhalb der Doppellinie liegenden Punktes stets durch die Doppellinie, die demnach auch die Schnittlinie der beiden Ebenen l_1 und l_2 der Konstruktion 9 ist. Die Punkte J_3 und J_4 liegen daher auf der Doppellinie und haben unbestimmte Polarebenen.

Bei dem Ebenenpaar besteht ein Poltetraeder aus irgend zwei Punkten der Achse und zwei harmonischen Polen, die auf einer nicht durch die Achse gehenden Geraden liegen.

Die Gleichung (21) der Fläche in bezug auf ein solches wird:

$$(31) \quad f = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 = 0,$$

wobei nach (28) gleichzeitig:

$$(32) \quad \varphi = \beta_{33}r_3^2 = 0.$$

14. Poltetraeder der Doppalebene. Bei der Doppalebene besteht ein Poltetraeder aus einem beliebigen, ihr nicht angehörigen Punkte J_1 und drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten J_2, J_3, J_4 der Fläche selbst. Die Gleichung (21) wird:

$$(33) \quad f = b_{11}y_1^2 = 0.$$

15. Rang und Quadratdarstellung. Mit Rücksicht auf § 139, 1 geht aus (27), (29), (31), (33) hervor:

Der Rang einer Fläche zweiter Ordnung ist die Anzahl der nicht verschwindenden Quadrate in der auf irgend ein Poltetraeder bezogenen Gleichung.⁷⁶⁾

16. Polarsystem in bezug auf ein Polartetraeder. In bezug auf die eigentliche Fläche zweiter Ordnung (27); (28) lauten die Beziehungen (11), (11') zwischen Pol y_k und Polarebene v_k :

$$(34) \quad v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = b_{11}y_1 : b_{22}y_2 : b_{33}y_3 : b_{44}y_4;$$

und (12) zwischen zwei reziproken Polaren r_k und s'_k :

$$(35) \quad s'_1 : s'_2 : s'_3 : s'_4 : s'_5 : s'_6 = \beta_{11}r_1 : \beta_{22}r_2 : \beta_{33}r_3 : \beta_{44}r_4 : \beta_{55}r_5 : \beta_{66}r_6.$$

Zwischen konjugierten Punkten, Ebenen und Geraden bestehen gleichzeitig nach (13); (14) die Bedingungen:

$$(36) \quad \sum_1^4 b_{kk} y_k^{(1)} y_k^{(2)} = 0, \quad \sum_1^4 B_{kk} v_k^{(1)} v_k^{(2)} = 0,$$

$$(37) \quad \sum_1^6 \beta_{kk} r_k^{(1)} r_k^{(2)} = 0, \quad \sum_1^6 B_{kk} s_k^{(1)} s_k^{(2)} = 0.$$

In bezug auf die imaginäre Fläche zweiter Ordnung:

$$(38) \quad \sum_1^4 y_k^2 = 0, \quad \sum_1^4 v_k^2 = 0, \quad \sum_1^6 r_k^2 = 0$$

geht das Polarsystem (34), (35) über in (§ 46, (24))⁸⁵:

$$(39) \quad v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4,$$

$$(40) \quad s_1' : s_2' : s_3' : s_4' : s_5' : s_6' = r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6.$$

§ 150. Besondere Polartetraeder.

1. Polartetraeder mit unendlich ferner Seitenebene. Von drei konjugierten Durchmessern des Ellipsoides oder Hyperboloides ist die Ebene je zweier die Polarebene des unendlich fernen Punktes des dritten (§ 72, 1, II; 7, II). Zugleich ist die unendlich ferne Ebene die Polarebene des Mittelpunktes (§ 68, 11, II). Daher ergibt sich aus § 149, 11, II:

Für das Ellipsoid und Hyperboloid bilden die Verbindungsebenen dreier konjugierten Durchmesser und die unendlich ferne Ebene ein Polartetraeder (§ 47, 1).

Dies ist der Grund dafür, daß die Gleichung § 72, (14) die Form § 149, (21) hat. Der Satz § 72, 1, III ist ein Spezialfall von § 149, 11, II.

Bei den Paraboloiden ist die unendlich ferne Ebene Tangentialebene (§ 70, 10). Sie kann somit nach § 149, 11, VI nicht Seitenebene eines Polartetraeders sein. Daher ist es *unmöglich, die Paraboloiden in gemeinen Koordinaten durch eine Gleichung mit nur Quadraten darzustellen* (§ 47, 1).

Für den imaginären Kugelkreis bilden irgend drei rechtwinklige Ebenen (§ 84, 5, I) zusammen mit der unendlich fernen Ebene ein Polarebenentetraeder im Sinne von § 149, 12, II'. Daher enthält die Gleichung § 84, (9) nur die *Quadrate* dreier Ebenenkoordinaten.

2. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polartetraeders.

Die Gleichung:

$$(1) \quad f = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

einer Fläche zweiter Ordnung bezieht sich auf ein gegebenes Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$. Wir führen ein Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein, das sich möglichst an $E_1 E_2 E_3 E_4$ anlehnt. Wir legen zu dem Ende (Fig. 219) die Ecke J_1 in die Ecke E_1 , also:

$$(2) \quad x_1^{(1)} = 1, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0,$$

wobei wir mit:

$$(3) \quad a_{11} \neq 0$$

voraussetzen, daß die Ecke E_1 nicht auf der Fläche (1) liegt. Die Polarebene l_1 des Punktes (2) hat nach § 149, (3) die Koordinaten:

$$(4) \quad u_1^{(1)} = f_1^{(1)} = a_{11}, \quad u_2^{(1)} = f_2^{(1)} = a_{21}, \quad u_3^{(1)} = f_3^{(1)} = a_{31}, \quad u_4^{(1)} = f_4^{(1)} = a_{41}$$

und die Gleichung:

$$(5) \quad a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 = 0.$$

3. Die zweite Ecke. Wir legen die Ecke J_2 in den Schnittpunkt der Ebene (5) mit der Kante $e_3 = E_1 E_2$ des alten Tetraeders, nämlich:

$$(6) \quad x_1^{(2)} = -a_{12}, \quad x_2^{(2)} = a_{11}, \quad x_3^{(2)} = 0, \quad x_4^{(2)} = 0,$$

der infolge von (3) bestimmt ist. Die Polarebene l_2 von J_2 hat die Koordinaten:

$$(7) \quad u_1^{(2)} = f_1^{(2)} = 0, \quad u_2^{(2)} = f_2^{(2)} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = \alpha_{33},$$

$$u_3^{(2)} = f_3^{(2)} = -a_{31}a_{12} + a_{32}a_{11} = -\alpha_{23}, \quad u_4^{(2)} = f_4^{(2)} = -a_{41}a_{12} + a_{42}a_{11} = \alpha_{34}$$

und die Gleichung:

$$(8) \quad \alpha_{33}x_2 - \alpha_{23}x_3 + \alpha_{34}x_4 = 0.$$

Wir setzen mit:

$$(9) \quad \alpha_{33} \neq 0$$

voraus, daß die Ecke (6) nicht auf ihrer Polarebene (8) liegt.

4. Die dritte Ecke. Wir legen die dritte Ecke J_3 in den Schnittpunkt der neuen Kante $l_1 \times l_2$ mit der Ebene $E_1 E_2 E_3$ des alten Tetraeders, für den aus (5) (vgl. $f_1^{(3)} = 0$ in (11)) und (8):

$$(10) \quad x_1^{(3)} = \alpha_{13}, \quad x_2^{(3)} = \alpha_{23}, \quad x_3^{(3)} = \alpha_{33}, \quad x_4^{(3)} = 0,$$

und der somit wegen (9) bestimmt ist.

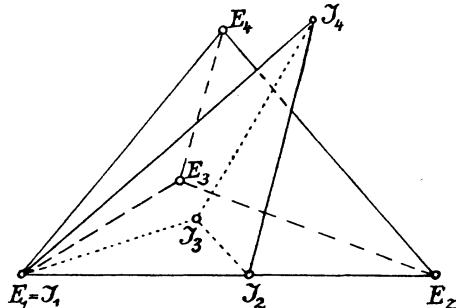


Fig. 219.

Die Polarebene l_3 dieses Punktes hat die Koordinaten:

$$u_k^{(3)} = f_k^{(3)} = a_{k1}\alpha_{31} + a_{k2}\alpha_{32} + a_{k3}\alpha_{33}.$$

Da aber $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ die Unterdeterminanten der Elemente letzter Zeile in jeder der beiden Determinanten:

$$-A_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sind, so bekommt l_3 die Koordinaten:

$$(11) \quad u_1^{(3)} = f_1^{(3)} = 0, \quad u_2^{(3)} = f_2^{(3)} = 0, \quad u_3^{(3)} = f_3^{(3)} = A_{44}, \quad u_4^{(3)} = f_4^{(3)} = -A_{34}$$

und die Gleichung:

$$(12) \quad A_{44}x_3 - A_{34}x_4 = 0.$$

Wir setzen mit:

$$(13) \quad A_{44} \neq 0$$

voraus, daß der Punkt (10) nicht auf seiner Polarebene (12) liegt.

5. Die vierte Ecke. Die vierte Ecke J_4 ist jetzt der Schnittpunkt der drei Ebenen l_1, l_2, l_3 . Für diesen folgt aus (12) zunächst:

$$x_3^{(4)} = A_{34}, \quad x_4^{(4)} = A_{44}$$

und dann aus (8):

$$x_2^{(4)} = \frac{\alpha_{23}A_{34} - \alpha_{34}A_{44}}{\alpha_{35}} = \frac{A_{56}A_{34} - A_{61}A_{44}}{A_{66}} \quad (\text{I Anm. 1, III, (11)}).$$

Da aber $A_{66}, -A_{65}, A_{61}$ die Unterdeterminanten der Elemente erster Zeile der Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

sind, sodaß:

$$A_{42}A_{66} - A_{43}A_{65} + A_{44}A_{61} = 0,$$

so wird:

$$x_2^{(4)} = A_{24}.$$

Danach ergibt sich aber aus (5):

$$-a_{11}x_1^{(4)} = a_{21}A_{24} + a_{31}A_{34} + a_{41}A_{44} = -a_{11}A_{14} \quad (\text{I Anm. 1, III, (17)}).$$

Der Punkt J_4 erhält also die Koordinaten:

$$(14) \quad x_1^{(4)} = A_{41}, \quad x_2^{(4)} = A_{42}, \quad x_3^{(4)} = A_{43}, \quad x_4^{(4)} = A_{44},$$

seine Polarebene l_4 aber die Koordinaten:

$$(15) \quad u_1^{(4)} = f_1^{(4)} = 0, \quad u_2^{(4)} = f_2^{(4)} = 0, \quad u_3^{(4)} = f_3^{(4)} = 0, \quad u_4^{(4)} = f_4^{(4)} = A.$$

Sie ist in der Tat die Ebene $J_1J_2J_3$, die mit der Ebene $E_1E_2E_3$ zusammenfällt. Sie ist bestimmt für $A \neq 0$, unbestimmt für $A = 0$,

kann aber auch im letzteren Falle, wo die Ecke J_4 in (14) die Kegelspitze ist (§ 139, (8)), in die Ebene $E_1 E_2 E_3$ gelegt werden, da jede Ebene Polarebene der Spitze ist. Nach (13) liegt der Punkt J_4 jedenfalls nicht in der Ebene $J_1 J_2 J_3$.

6. Transformation auf das eingeführte Polartetraeder. Mit den Werten (2), (4); (6), (7); (10), (11); (14), (15) wird nun:

$$(16) \quad f_{11} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(1)} = a_{11}, \quad f_{22} = \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(2)} = a_{11} \alpha_{33},$$

$$f_{33} = \sum_1^4 f_k^{(3)} x_k^{(3)} = \alpha_{33} A_{44}, \quad f_{44} = \sum_1^4 f_k^{(4)} x_k^{(4)} = A_{44} A$$

und folgt nach § 138, (10); (12):

Die auf ein ursprüngliches Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezogene Gleichung (1) geht durch die Substitution (§ 47, (13)):

$$(17) \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - a_{12} y_2 + a_{13} y_3 + A_{14} y_4, \\ x_2 = a_{11} y_2 + a_{23} y_3 + A_{24} y_4, \\ x_3 = a_{33} y_3 + A_{34} y_4, \\ x_4 = A_{44} y_4 \end{cases}$$

mit der Substitutionsdeterminante:

$$(18) \quad S = a_{11} \alpha_{33} A_{44}$$

über in:

$$(19) \quad f = a_{11} y_1^2 + a_{11} \alpha_{33} y_2^2 + \alpha_{33} A_{44} y_3^2 + A_{44} A y_4^2 = 0.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß:

$$(20) \quad a_{11} \neq 0, \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

also die Ecke E_1 kein Punkt, die Kante $E_1 E_2$ keine Tangente und die Seitenebene $E_1 E_2 E_3$ keine Tangentialebene der Fläche (1) ist (§ 149, (10); I § 59, (21)).¹¹⁴⁾

Damit ist die Fläche auf eines ihrer ∞^6 Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ transformiert, das sich tunlichst eng an das alte Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ anlehnt, indem die Ecke $E_1 = J_1$, die Kante $E_1 E_2 = J_1 J_2$ und die Ebene $E_1 E_2 E_3 = J_1 J_2 J_3$ erhalten geblieben sind (Fig. 219).

7. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polardreiecks der ebenen Schnittkurve. Für die Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene:

$$(21) \quad \sum_1^4 u_k x_k = 0$$

führen wir ein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein (Fig. 220), dessen Ecken $J_1 J_2 J_3$ ein in der Ebene (21) gelegenes Polardreieck der Schnittkurve bilden.

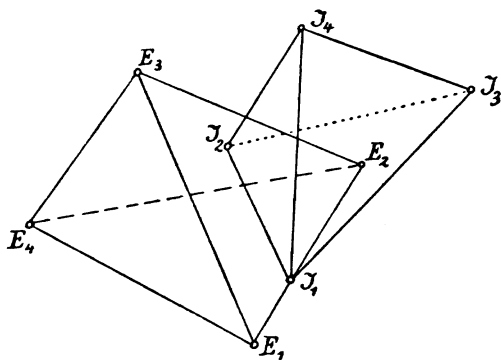


Fig. 220.

Die erste Ecke J_1 sei der Schnittpunkt der Kante $e_3 = E_1 E_2$ ($x_3 = 0, x_4 = 0$) des alten Tetraeders mit der Ebene (21) also:

$$(22) \quad \begin{aligned} x_1^{(1)} &= -u_2, & x_2^{(1)} &= u_1, \\ x_3^{(1)} &= 0, & x_4^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir voraussetzen, daß:

$$(23) \quad u_1 \text{ und } u_2 \text{ nicht beide } 0 \text{ sind, also die Ebene (21) nicht selbst durch die Kante } e_3 \text{ geht.}$$

Die Polarebene l_1 von J_1 hat die Koordinaten:

$$(24) \quad u_k^{(1)} = f_k^{(1)} = -a_{k1}u_2 + a_{k2}u_1, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und die Gleichung (§ 138, (3)):

$$(25) \quad -f_1 u_2 + f_2 u_1 = 0.$$

Zugleich wird (§ 138, (6)):

$$(26) \quad f_{11} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(1)} = -(-a_{11}u_2 + a_{12}u_1)u_2 + (-a_{21}u_2 + a_{22}u_1)u_1 = -\alpha_{33}''.$$

Wir setzen voraus, daß:

$$(27) \quad \alpha_{33}'' \neq 0,$$

also der Punkt J_1 nicht auf f liegt, die Kante e_3 somit keine Transversale der Schnittkurve ist.

Die Ebene l_1 liegt alsdann nicht mit der Ecke J_1 vereinigt. Die Voraussetzung (23) ist nach (26) in (27) mit eingeschlossen.

8. Die zweite Ecke. Die zweite Ecke J_2 sei jetzt der Schnittpunkt der Ebene $E_4 = E_1 E_2 E_3$ ($x_4 = 0$) des alten Tetraeders mit der Schnittpunktlinie der Ebenen (21) und (25). Er genügt neben $x_4 = 0$ den drei Gleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varrho u_2 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \end{cases}$$

deren beide ersten die Gleichung (25) unter Einschubung eines Proportionalitätsfaktors ϱ ersetzen.

Hieraus folgt:

$$(29) \quad x_1 : x_2 : x_3 : \varrho = \alpha_{31}'' : \alpha_{32}'' : \alpha_{33}'' : \alpha_0'',$$

wo die Ausdrücke rechts die Unterdeterminanten dritten Grades der Matrix (I Anm. 2, III, (14)):

$$(30) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

bedeuten. Man kann daher setzen:

$$(31) \quad x_1^{(2)} = \alpha_{31}^u, \quad x_2^{(2)} = \alpha_{32}^u, \quad x_3^{(2)} = \alpha_{33}^u, \quad x_4^{(2)} = 0.$$

Die Polarebene l_2 von J_2 hat die Koordinaten:

$$(32) \quad u_k^{(2)} = f_k^{(2)} = a_{k1} \alpha_{31}^u + a_{k2} \alpha_{32}^u + a_{k3} \alpha_{33}^u.$$

Nun sind aber die Unterdeterminanten der Matrix (30) zugleich die Unterdeterminanten der Elemente dritter Zeile der beiden Determinanten:

$$(33) \quad A_{44}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad -A_{34}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

sodaß:

$$(34) \quad \begin{cases} a_{k1} \alpha_{31}^u + a_{k2} \alpha_{32}^u + a_{k3} \alpha_{33}^u + u_k \alpha_0^u = 0 \text{ für } k = 1, 2; \\ \quad \quad \quad = A_{44}^u \text{ für } k = 3; = -A_{34}^u \text{ für } k = 4; \\ u_1 \alpha_{31}^u + u_2 \alpha_{32}^u + u_3 \alpha_{33}^u = 0. \end{cases}$$

Infolge dessen werden die Koordinaten (32) der Ebene l_2 :

$$(35) \quad u_1^{(2)} = f_1^{(2)} = -\alpha_0^u u_1, \quad u_2^{(2)} = f_2^{(2)} = -\alpha_0^u u_2, \\ u_3^{(2)} = f_3^{(2)} = -\alpha_0^u u_3 + A_{44}^u, \quad u_4^{(2)} = f_4^{(2)} = -\alpha_0^u u_4 - A$$

und ihre Gleichung:

$$(36) \quad -\alpha_0^u (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4) + A_{44}^u x_3 - A_{34}^u x_4 = 0.$$

Sie geht durch J_1 . Zugleich wird infolge von (31) und (35):

$$f_{22} = \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(2)} = -\alpha_0^u (u_1 \alpha_{31}^u + u_2 \alpha_{32}^u + u_3 \alpha_{33}^u) + A_{44}^u \alpha_{33}^u$$

und mit Rücksicht auf (34):

$$(37) \quad f_{22} = \alpha_{33}^u A_{44}^u.$$

Wir setzen voraus:

$$(38) \quad A_{44}^u \neq 0,$$

damit J_2 nicht auf f und dann mit l_2 vereinigt liege.

9. Die dritte Ecke. Nunmehr ist J_3 als Schnittpunkt der Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$ und $u_k^{(4)}$ bestimmt, also durch die Gleichungen (25), (36) und (21) oder mit einem Faktor q durch:

$$(39) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ A_{44}^u x_3 - A_{44}^u x_4 = 0. \end{cases}$$

Nun ist für die Determinante A^u (§ 140, (5)):

$$(40) \quad \begin{cases} a_{k1}A_{41}^u + a_{k2}A_{42}^u + a_{k3}A_{43}^u + a_{k4}A_{44}^u + u_k A_{45}^u = 0 \\ \text{für } k = 1, 2, 3; = A^u \text{ für } k = 4; \\ u_1 A_{41}^u + u_2 A_{42}^u + u_3 A_{43}^u + u_4 A_{44}^u = 0. \end{cases}$$

Daher wird den Gleichungen (39) genügt durch den Punkt:

$$(41) \quad x_1^{(3)} = A_{41}^u, \quad x_2^{(3)} = A_{42}^u, \quad x_3^{(3)} = A_{43}^u, \quad x_4^{(3)} = A_{44}^u, \quad (\varrho = A_{45}^u).$$

Die Koordinaten seiner Polarebene l_3 sind:

$$(42) \quad u_k^{(3)} = f_k^{(3)} = a_{k1}A_{41}^u + a_{k2}A_{42}^u + a_{k3}A_{43}^u + a_{k4}A_{44}^u,$$

oder nach (40):

$$(43) \quad f_1^{(3)} = -u_1 A_{45}^u, \quad f_2^{(3)} = -u_2 A_{45}^u, \quad f_3^{(3)} = -u_3 A_{45}^u, \\ f_4^{(3)} = -u_4 A_{45}^u + A^u.$$

Sie geht durch J_1 und nach (34) durch J_2 . Zugleich wird:

$$f_{33} = \sum_1^4 f_k^{(3)} x_k^{(3)} = -A_{45}^u (u_1 A_{41}^u + u_2 A_{42}^u + u_3 A_{43}^u + u_4 A_{44}^u) + A^u A_{44}^u,$$

oder nach (40):

$$(44) \quad f_{33} = A_{44}^u A^u.$$

Der Punkt J_3 kann, falls $A^u = 0$ ist, auf der Schnittkurve liegen, worauf die Ebene l_3 in (21) fällt.

10. Resultat der Transformation. Die Ecke J_4 ist nun als Schnittpunkt der drei Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, $u_k^{(3)}$ bestimmt. Da J_2 auf der Polarebene (25) von J_1 , und J_3 auf den Polarebenen (25) und (36) von J_1 und J_2 gewählt ist, bilden J_1 , J_2 , J_3 ein Polardreieck, in bezug auf das die Gleichung der Schnittkurve die Form § 149, (19) erhält; und zwar ergibt sich mit Rücksicht auf (26), (37) und (44):

Die Gleichung der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene (21) kann unter den Voraussetzungen:

$$(45) \quad \alpha_{33}^u \neq 0, \quad A_{44}^u \neq 0$$

auf die Form gebracht werden (§ 47, (15)):

$$(46) \quad -\alpha_{33}^u y_1^2 + \alpha_{33}^u A_{44}^u y_2^2 + A_{44}^u A^u y_3^2 = 0.$$

Damit ist die *Schnittkurve* auf eines ihrer ∞^3 Polardreiecke $J_1 J_2 J_3$ transformiert, welches sich *tunlichst an das alte Tetraeder*

$E_1 E_2 E_3 E_4$ *anlehnt*, indem J_1 auf der Kante $E_1 E_2$ und J_2 in der Ebene $E_1 E_2 E_3$ liegt.

Für $A^u = 0$ ist nach (46) die Ecke J_3 ($y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 1$) Doppelpunkt der Schnittkurve. Ihre alten Koordinaten (41) stimmen dann in der Tat mit § 141, (32) überein.

11. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polzweiecks des Schnittpunktpaares. Für das Schnittpunktpaar der Fläche (1) mit der Geraden q :

$$(47) \quad \sum_1^4 u_k x_k = 0, \quad \sum_1^4 u'_k x_k = 0,$$

führen wir ein neues Koordinatentetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ein (Fig. 221), dessen Ecken $J_1 J_2$ ein auf der Geraden q gelegenes Polzweieck des Schnittpunktpaares bilden.

Die erste Ecke J_1 sei der Schnittpunkt der Geraden q mit der Ebene

$$E_1 E_2 E_3 \quad (x_4 = 0),$$

also (I § 59, (13')):

$$(48) \quad \begin{aligned} x_1^{(1)} &= q_1, & x_2^{(1)} &= q_2, \\ x_3^{(1)} &= q_3, & x_4^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

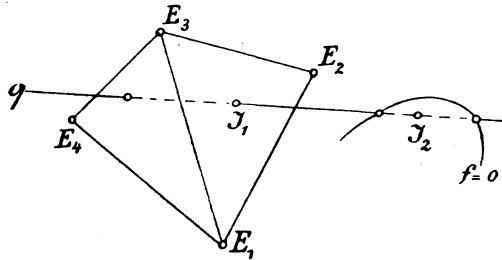


Fig. 221.

wobei q_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) die Achsenkoordinaten der Geraden q sind und vorausgesetzt wird, daß:

$$(49) \quad q_1, q_2, q_3 \text{ nicht alle } 0$$

sind, also q_k nicht in der Ebene $x_4 = 0$ liegt.

Die Polarebene des Punktes J_1 hat die Koordinaten:

$$(50) \quad u_k^{(1)} = f_k^{(1)} = a_{k1} q_1 + a_{k2} q_2 + a_{k3} q_3, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und die Gleichung:

$$(51) \quad f_1 q_1 + f_2 q_2 + f_3 q_3 = 0.$$

Zugleich wird (§ 146, (5)):

$$(52) \quad f_{11} = \sum_1^4 f_k^{(1)} x_k^{(1)} = \sum_1^3 \sum_1^3 a_{ki} q_k q_i = A_{44}^{uu'}.$$

Wir setzen voraus:

$$(53) \quad A_{44}^{uu'} \neq 0,$$

worin zugleich nach (52) die Voraussetzung (49) eingeschlossen ist. Der Punkt J_1 liegt dann nach (52) nicht auf der Fläche (1).

12. Die zweite Ecke. Die zweite Ecke J_2 des Polzweiecks ist nun der Schnittpunkt der Geraden q mit der Polarebene (51) von J_1 . Die Gleichung (51) ist das Resultat der Elimination von ϱ und ϱ' aus den drei Gleichungen (§ 140, (15)):

$$(54) \quad f_k + \varrho u_k + \varrho' u'_k = 0, \quad k=1, 2, 3.$$

Daher bestimmt sich der Punkt J_2 unter Elimination von ϱ und ϱ' aus den fünf Gleichungen:

$$(55) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 + \varrho' u'_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 + \varrho' u'_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 + \varrho' u'_3 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ u'_1x_1 + u'_2x_2 + u'_3x_3 + u'_4x_4 = 0, \end{cases}$$

denen infolge der für die Determinante $A^{uu'}$ (§ 140, (12)) geltenden Entwicklungen genügt wird durch die Werte:

$$(56) \quad x_1^{(2)} = A_{41}^{uu'}, \quad x_2^{(2)} = A_{42}^{uu'}, \quad x_3^{(2)} = A_{43}^{uu'}, \quad x_4^{(2)} = A_{44}^{uu'};$$

$$(57) \quad \varrho = A_{45}^{uu'}, \quad \varrho' = A_{46}^{uu'}.$$

Da gleichzeitig:

$$(58) \quad a_{41}A_{41}^{uu'} + a_{42}A_{42}^{uu'} + a_{43}A_{43}^{uu'} + a_{44}A_{44}^{uu'} + u_4A_{45}^{uu'} + u'_4A_{46}^{uu'} = A^{uu'},$$

so hat die Polarebene des Punktes (56) die Koordinaten:

$$(59) \quad \begin{aligned} f_k^{(2)} &= -(u_k A_{45}^{uu'} + u'_k A_{46}^{uu'}), \quad k=1, 2, 3; \\ f_4^{(2)} &= -(u_4 A_{45}^{uu'} + u'_4 A_{46}^{uu'}) + A^{uu'}. \end{aligned}$$

Danach aber wird mit Rücksicht auf (56) und die beiden letzten Gleichungen (55):

$$(60) \quad f_{22} = \sum_1^4 f_k^{(2)} x_k^{(2)} = A^{uu'} A_{44}^{uu'}.$$

13. Resultat der Transformation. Da J_2 auf der Polarebene von J_1 liegt, bilden die Punkte $J_1 J_2$ ein Polzweieck, in bezug auf welches das Schnittpunktpaar eine Gleichung von der Form § 149, (18) erhält; und zwar ergibt sich infolge von (52) und (60):

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Fläche (1) mit der Geraden (47) kann unter der Voraussetzung:

$$(61) \quad A_{44}^{uu'} \neq 0$$

auf die Form gebracht werden (§ 47, (32)):

$$(62) \quad A_{44}^{uu'} y_1^2 + A_{44}^{uu'} A^{uu'} y_2^2 = 0.$$

Damit ist das *Schnittpunktpaar* auf eines seiner ∞^2 Polzweiecke $J_1 J_2$

transformiert, *welches sich tunlichst an das alte Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ anlehnt*, indem J_1 in der Ebene $E_1 E_2 E_3$ liegt.

Für $A^{uu'} = 0$ fällt das Punktpaar in der Ecke $J_2 (y_1 = 0, y_2 = 1)$ zusammen. Ihre alten Koordinaten (56) stimmen dann in der Tat mit § 142, (29) überein.

§ 151. Verschiedene Sätze der Polarentheorie.

1. Beziehung zwischen den Ecken und Seitenebenen zweier Polartetraeder. Transformiert man die auf irgend ein Koordinatentetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ bezogene *eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse*:

$$(1) \quad f = \sum_k^4 \sum_l^4 a_{kl} x_k x_l = 0, \quad F = \sum_k^4 \sum_l^4 A_{kl} u_k u_l = 0$$

auf ein *Polartetraeder mit den Ecken $x_k^{(m)}$ und Seitenebenen $u_k^{(m)}$* , so nehmen ihre Gleichungen nach § 149, (21) die Form an:

$$(2) \quad f = \sum_m^4 b_{mm} y_m^2, \quad S^2 F = \sum_m^4 B_{mm} v_m^2$$

und bestehen nach § 138, (32) zwischen alten und neuen Koeffizienten die Beziehungen:

$$(3) \quad S^2 a_{kl} = \sum_m^4 b_{mm} u_k^{(m)} u_l^{(m)}, \quad S^2 A_{kl} = \sum_m^4 B_{mm} x_k^{(m)} x_l^{(m)}.$$

Für ein *zweites Polartetraeder mit den Ecken $x_k'^{(m)}$ und Seitenebenen $u_k'^{(m)}$* ist ebenso:

$$(4) \quad S'^2 a_{kl} = \sum_m^4 b'_{mm} u_k'^{(m)} u_l'^{(m)}, \quad S'^2 A_{kl} = \sum_m^4 B'_{mm} x_k'^{(m)} x_l'^{(m)}.$$

Zwischen den Koordinaten der Ecken und Seitenebenen der beiden Polartetraeder bestehen daher die Beziehungen (k, l je = 1, 2, 3, 4):

$$(5) \quad S'^2 \sum_m^4 b_{mm} u_k^{(m)} u_l^{(m)} = S^2 \sum_m^4 b'_{mm} u_k'^{(m)} u_l'^{(m)};$$

$$(6) \quad S'^2 \sum_m^4 B_{mm} x_k^{(m)} x_l^{(m)} = S^2 \sum_m^4 B'_{mm} x_k'^{(m)} x_l'^{(m)}.$$

2. Flächen durch die Ecken zweier Polartetraeder. Multipliziert man die Gleichungen (5) mit den Koeffizienten C_{kl} und die Gleichungen (6) mit den Koeffizienten c_{kl} *irgend einer Fläche zweiter Klasse, bezüglich zweiter Ordnung*:

$$(7) \quad G = \sum_k^4 \sum_l^4 C_{kl} u_k u_l = 0, \quad g = \sum_k^4 \sum_l^4 c_{kl} x_k x_l = 0$$

und summiert alsdann über k und l , so ergibt sich mit Benutzung der Abkürzungen (§ 138, (6)):

$$(8) \quad G_{mm} = \sum_k^4 \sum_l^4 C_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(m)}, \quad g_{mm} = \sum_k^4 \sum_l^4 c_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(m)},$$

und der entsprechenden mit Akzenten zu G_{mm} , $u_k^{(m)}$, $u_l^{(m)}$; g_{mm} , $x_k^{(m)}$, $x_l^{(m)}$ (§ 48, 2):

$$(9) \quad S'^2 \sum_m^4 b_{mm} G_{mm} = S^2 \sum_m^4 b'_{mm} G'_{mm},$$

$$(10) \quad S'^2 \sum_m^4 B_{mm} g_{mm} = S^2 \sum_m^4 B'_{mm} g'_{mm}.$$

Die Relation (10) ist linear und homogen in den acht Größen g_{mm} , g'_{mm} , und keiner der acht Koeffizienten $S'^2 B_{mm}$ und $S^2 B'_{mm}$ kann verschwinden, da f eine eigentliche Fläche sein sollte (§ 149, 11, VIII). Das Verschwinden von g_{mm} aber bedeutet nach (8), daß die Ecke $x_k^{(m)}$ auf der Fläche $g = 0$ in (7) liegt.

Es folgt daher aus (10) und dual aus (9) (§ 48, 2, I):

1. Jede Fläche zweiter Ordnung, die durch sieben von den Ecken zweier Polartetraeder einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung geht, geht auch durch die achte Ecke.	I'. Jede Fläche zweiter Klasse, die sieben von den Seitenebenen zweier Polartetraeder einer eigentlichen Fläche zweiter Klasse berührt, berührt auch die achte Seitenfläche.¹²⁴⁾
---	--

3. Einbeschriebene Polartetraeder. Eine Fläche $g = 0$ gehe durch die Ecken eines Polartetraeders $J_1 J_2 J_3 J_4$ der eigentlichen Fläche $f = 0$. Um ein zweites Polartetraeder $J_1' J_2' J_3' J_4'$ von $f = 0$ zu konstruieren, kann man nach § 149, 9 im Raume eine Ecke J_1' , alsdann in deren Polarebene l_1' eine zweite Ecke J_2' und endlich in der Schnittlinie der Polarebenen l_1' und l_2' eine dritte Ecke J_3' beliebig nehmen, worauf J_4' bestimmt ist. Wählt man nun aber J_1' auf $g = 0$, J_2' auf der Schnittkurve der Ebene l_1' mit $g = 0$ und nimmt als J_3' einen Schnittpunkt der Geraden $l_1' \times l_2'$ mit $g = 0$, so muß, da $J_1, J_2, J_3, J_4, J_1', J_2', J_3'$ auf $g = 0$ liegen, nach 2, I auch J_4' auf $g = 0$ fallen. Ebenso dual, also:

II. Gibt es ein Polartetraeder der eigentlichen Fläche zweiter Ord-

nung $f = 0$, welches der Fläche zweiter Ordnung $g = 0$ ein-(bezüglich um-)beschrieben ist, so gibt es ∞^3 solche Polartetraeder (§ 48, 3).

4. Polartetraeder mit einer gemeinsamen Ecke. Zwei Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ und $J_1' J_2' J_3' J_4'$ der Fläche (1) mögen die Ecke $J_1' = J_1$, folglich auch die gegenüberliegende Seitenebene $l_1' = l_1$ gemein haben. Der durch die fünf Kanten $J_1 J_2$, $J_1 J_3$, $J_1 J_4$, $J_1 J_2'$, $J_1 J_3'$ bestimmte Kegel zweiter Ordnung ist eine Fläche zweiter Ordnung, die durch die sieben Ecken $J_1 = J_1'$, J_2 , J_3 , J_4 , J_2' , J_3' der beiden Polartetraeder, also nach 2, I auch durch die Ecke J_4' und damit durch die Kante $J_1 J_4'$ geht: Es folgt also mit Hinzufügung des dualen Satzes:

III. Haben zwei Polartetraeder einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung und Klasse eine Ecke, bezüglich eine Seitenebene gemein, so geht jeder Kegel zweiter Ordnung, so berührt jeder Kegelschnitt, der der durch fünf von der gemeinsamen fünf in der gemeinsamen Ebene lie-Ecke ausgehende Kanten geht, auch gende Kanten berührt, auch die durch die sechste. sechste.

5. Polardreikante des Kegels. In der gemeinsamen Ebene $l_1 = l_1'$ bilden die beiden Dreiecke $J_2 J_3 J_4$ und $J_2' J_3' J_4'$ zwei Polardreiecke der Schnittkurve der Ebene mit der Fläche $f = 0$. Für diese Ebene folgt daher (§ 149, 11, VI; § 143, (2), § 141, (20)):

IV. Jeder Kegelschnitt g der durch fünf von den Ecken zweier Polardreiecke eines eigentlichen Kegelschnittes f geht, geht auch durch die sechste Ecke.

IV'. Jeder Kegel zweiter Klasse g der fünf von den Seitenebenen zweier Polardreiecke eines eigentlichen Kegels zweiter Klasse berührt, berührt auch die sechste.

Andererseits folgt aber, indem man die Figur des Satzes IV. von einem beliebigen Punkte aus projiziert oder die des Satzes IV'. mit einer beliebigen Ebene schneidet:

V. Jeder Kegel zweiter Ordnung g , der durch fünf Kanten zweier Polardreiecke eines eigentlichen Kegels zweiter Ordnung f geht, geht auch durch die sechste.

V'. Jede Kurve zweiter Klasse g , die fünf Seiten eines Polardreiecks eines eigentlichen Kegelschnittes berührt, berührt auch die sechste.

Die Sätze IV. und V'. sind schon § 48, 2 bewiesen, die Sätze IV'. und V. sind die entsprechenden für den Kegel. Zugleich folgt aus jenen für den Kegel:

VI. Gibt es ein Polardreieck des eigentlichen Kegels zweiter Ordnung und Klasse f , welches einem Kegel g ein- oder umbeschrieben ist, so gibt es unendlich viele solche.

6. Zwei Systeme konjugierter Durchmesser. Drei konjugierte Durchmesser eines Ellipsoids oder Hyperboloids sind die Kanten eines Polardreikants des zugehörigen Asymptotenkegels (§ 84, 3). Daher folgt aus V und IV':

VII. *Zwei Tripel konjugierter Durchmesser des Ellipsoids oder Hyperboloids stehen in der Beziehung, daß der durch fünf von ihnen bestimmte Kegel zweiter Ordnung auch durch den sechsten geht.*

VIII. *Ist einem Kegel ein Tripel konjugierter Durchmesser einbeschrieben, so sind ihm ∞^1 solche Tripel einbeschrieben.*

VII'. *Zwei Tripel konjugierter Diametralebenen des Ellipsoids oder Hyperboloids stehen in der Beziehung, daß der durch fünf von ihnen umhüllte Kegel zweiter Klasse auch die sechste berührt.*

VIII'. *Ist einem Kegel ein Tripel konjugierter Diametralebenen umbeschrieben, so sind ihm ∞^1 solche Tripel umbeschrieben.*

7. Rechtwinklige Systeme. Drei rechtwinklige Achsen oder Ebenen bilden ein Tripel konjugierter Durchmesser oder Diametralebenen einer Kugel (§ 72, 1, I)

IX. *Zwei konzentrische Tripel rechtwinkliger Achsen liegen stets auf einem Kegel zweiter Ordnung.*

X. *Enthält ein Kegel ein Tripel rechtwinkliger Achsen, so enthält er ∞^1 solche.*

Der Kegel ist ein gleichseitiger.

IX'. *Zwei konzentrische Tripel rechtwinkliger Ebenen umhüllen stets einen Kegel zweiter Klasse.*

X'. *Wird ein Kegel von einem Tripel rechtwinkliger Ebenen berührt, wird er von ∞^1 solchen berührt.*

Der Kegel ist ein dual gleichseitiger (§ 71, 10).

8. Polarreziproke Tetraeder. Die Pole P_k der Koordinatenebenen E_k und die Polarebenen Π_k der Koordinatenecken E_k in bezug auf die Fläche (1) haben nach § 149, (11) die Koordinaten ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$(11) \quad x_1^{(k)} : x_2^{(k)} : x_3^{(k)} : x_4^{(k)} = A_{1k} : A_{2k} : A_{3k} : A_{4k};$$

$$(12) \quad u_1^{(k)} : u_2^{(k)} : u_3^{(k)} : u_4^{(k)} = a_{1k} : a_{2k} : a_{3k} : a_{4k}.$$

Sie bilden das dem Koordinatentetraeder E_k, E_k polarreziproke Tetraeder P_k, Π_k .⁷⁸⁾

Nun lauten (I § 59, (20'); (20)) die Gleichungen der vier Geraden $E_k P_k$ und der vier Geraden $E_k \times \Pi_k$:

$$(3) \quad \begin{cases} x_2 : x_3 : x_4 = A_{21} : A_{31} : A_{41}, \\ x_3 : x_1 : x_4 = A_{32} : A_{12} : A_{42}, \\ x_1 : x_2 : x_4 = A_{13} : A_{23} : A_{43}, \\ x_1 : x_2 : x_3 = A_{14} : A_{24} : A_{34}; \end{cases}$$

$$(3') \quad \begin{cases} u_2 : u_3 : u_4 = a_{21} : a_{31} : a_{41}, \\ u_3 : u_1 : u_4 = a_{32} : a_{12} : a_{42}, \\ u_1 : u_2 : u_4 = a_{13} : a_{23} : a_{43}, \\ u_1 : u_2 : u_3 = a_{14} : a_{24} : a_{34}. \end{cases}$$

Nach der Form dieser Gleichungen, in denen $A_{ki} = A_{ik}$, $a_{ki} = a_{ik}$ ist, liegen (I § 62, (1); (7)) die vier Geraden (3), ebenso wie (3'), hyperboloidisch. Also (§ 48, 5)¹²⁵:

I. Sind zwei Tetraeder in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung polarreziprok, so liegen die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken so wie die vier Schnittpunkte entsprechender Seitenebenen jedesmal hyperboloidisch; und insbesondere (§ 68, 9, III):

II. Die Verbindungslinien der Ecken eines der Fläche zweiter Ordnung umbeschriebenen Tetraeders mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seitenebenen, sowie die Schnittpunkte der Seitenebenen eines der Fläche einbeschriebenen Tetraeders mit den Tangentialebenen in den gegenüberliegenden Eckpunkten liegen hyperboloidisch (§ 37, 10).

§ 152. Die Spezies der Flächen zweiter Ordnung und Klasse.

1. Die adjungierten Formen bei der Quadratdarstellung. Da in bezug auf ein Polartetraeder der Fläche zweiter Ordnung § 149, 10 die neuen Koeffizienten der Gleichung $f = 0$ den Bedingungen entsprechen:

$$(1) \quad b_{23} = b_{31} = b_{12} = b_{14} = b_{24} = b_{34} = 0,$$

so wird gleichzeitig für ihre Determinante und Unterdeterminanten:

$$(2) \quad B = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44};$$

$$(3) \quad \begin{cases} B_{11} = b_{22}b_{33}b_{44}, & B_{22} = b_{11}b_{33}b_{44}, & B_{33} = b_{11}b_{22}b_{44}, & B_{44} = b_{11}b_{22}b_{33}, \\ B_{23} = B_{31} = B_{12} = B_{14} = B_{24} = B_{34} = 0; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \beta_{11} = b_{22}b_{33}, \beta_{22} = b_{33}b_{11}, \beta_{33} = b_{11}b_{22}, \beta_{44} = b_{11}b_{44}, \beta_{55} = b_{22}b_{44}, \beta_{66} = b_{33}b_{44}, \\ \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{16} = \beta_{23} = \beta_{24} = \beta_{25} = \beta_{26} = \beta_{34} = \beta_{35} = \beta_{36} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0. \end{cases}$$

Bei Einführung eines Polartetraeders $J_1 J_2 J_3 J_4$ werden daher die zusammengehörigen Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\Phi = 0$, $F = 0$ (§ 138, (30)) gleichzeitig in folgender Weise transformiert:

$$(5) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = \sum_1^4 b_{kk} y_k^2 = 0,$$

$$(6) \quad \varphi = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k p_i = \sum_1^6 \beta_{kk} r_k^2 = 0,$$

$$(7) \quad S^4 \Phi = S^4 \sum_1^6 \sum_1^6 A_{ki} q_k q_i = \sum_1^6 B_{kk} s_k^2 = 0,$$

$$(8) \quad S^2 F = S^2 \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k u_i = \sum_1^4 B_{kk} v_k^2 = 0.$$

2. Beziehung zwischen alten und neuen Koeffizienten. Nach § 138, (23) ist dabei:

$$(9) \quad b_{mm} = f_{mm} = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k^{(m)} x_i^{(m)}, \quad B_{mm} = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k^{(m)} u_i^{(m)},$$

$$\beta_{mm} = \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k^{(m)} p_i^{(m)},$$

und nach § 138, (32):

$$(10) \quad S^2 a_{kk} = \sum_1^4 b_{mm} u_k^{(m)2}, \quad S^4 \alpha_{kk} = \sum_1^6 \beta_{mm} q_k^{(m)2},$$

$$S^2 A_{kk} = \sum_1^4 B_{mm} x_k^{(m)2};$$

$$(11) \quad S^2 A = B,$$

wo $u_k^{(m)2}$ das Quadrat von $u_k^{(m)}$ usw. bedeutet.

3. Unterscheidung der eigentlichen Flächen nach dem Vorzeichen von A . Wir setzen die Koeffizienten a_{ki} der Gleichung $f=0$ und die Koeffizienten $x_k^{(m)}$ der Substitution § 138, (10) reell voraus. Dann sind auch die Koeffizienten (9) reell.

Wie nun auch das Polartetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ gewählt werden mag, muß bei einer eigentlichen Fläche f nach (2) und (11) stets sein:

$$(12) \quad b_{11} b_{22} b_{33} b_{44} = S^2 A.$$

I. Bei positivem A muß daher die Anzahl der negativen unter den Koeffizienten $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}$ gerade, bei negativem A ungerade sein.

Die Vorzeichen von $b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44}$ sind also abgesehen von der Reihenfolge für:

$$(13) \quad A > 0: \text{I. } \pm \pm \pm \pm \text{ oder II. } + + - -; \quad A < 0: \text{III. } \pm \pm \pm \mp.$$

Zwei übereinanderstehende Vorzeichensysteme rechnen wir nur für eines, da die Gleichung $f=0$ mit -1 multipliziert werden kann.

4. Die drei Spezies der eigentlichen Flächen. Eine gegebene Fläche $f=0$ muß nach (13), auf welches ihrer ∞^6 Polartetraeder sie auch bezogen wird, immer entweder die Vorzeichen I., II. oder die Vorzeichen III. liefern. Aber auch für $A > 0$ kann sie immer nur entweder auf I. oder II. führen.

Nehmen wir nämlich an, daß schon das alte Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ ein Polartetraeder war, so daß die Fläche von einem bestimmten Polartetraeder auf ein beliebiges anderes $J_1 J_2 J_3 J_4$ transformiert wird, so

gelten die Formeln (9) mit $a_{23} = a_{31} = a_{12} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$ und geben:

$$b_{mm} = \sum_1^4 a_{kk} x_k^{(m)2}.$$

Waren also alle vier a_{kk} von einerlei Vorzeichen, so sind es auch alle vier b_{mm} , und nach (10) auch umgekehrt. Hat also eine Fläche auch nur für ein Polartetraeder die Vorzeichen I., so muß sie diese für alle Polartetraeder haben. Dieselbe Fläche kann also nicht von I. zu II. oder umgekehrt übergehen.

II. Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung gehört stets zu einer und nur zu einer der drei „Spezies“, die durch die Vorzeichenverbindungen I., II. und III. in (13) gekennzeichnet sind.¹¹⁵⁾

III. Auch als Fläche zweiter Klasse gehört sie nach (8) jedesmal der gleichen Spezies an.

5. Die definiten Formen. Im Falle I. heißt die Form eine *definite* Form von vier Variablen, da sie wie ihre Darstellung durch die Koordinaten y_k in (5) zeigt, für alle reellen Werte derselben entweder immer positiv oder immer negativ bleibt. Die entsprechende Fläche $f = 0$ hat keinen reellen Punkt, da für einen solchen y_1, y_2, y_3, y_4 niemals alle verschwinden (I § 57, 1) und daher f nicht Null werden kann. Sie hat nach (7) und (8) auch keine reellen Tangenten oder Tangentialebenen (§ 49, 3).

6. Notwendige und hinreichende Bedingungen der definiten Form. Wenn alle vier b_{kk} von einerlei Vorzeichen sind (f definit ist), so sind nach (3) auch alle B_{kk} von einerlei Vorzeichen (F definit) und nach (4) alle β_{kk} positiv (φ positiv definit). Da nun die sechs $q_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) als Elemente einer Reihe der Determinante $S^3 = |q_k^{(m)}|$ und ebenso die vier $u_k^{(m)}$ oder $x_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3, 4$) als Elemente einer Reihe der Determinante $S^3 = |u_k^{(m)}|$ oder $S = |x_k^{(m)}|$ nicht gleichzeitig verschwinden können (§ 138, (16) und I. Anm. 1, III. (7); (13)), so folgt aus (10):

Ist $f = 0$ eine imaginäre eigentliche Fläche, so sind notwendig alle sechs α_{kk} positiv und alle acht a_{kk} und A_{kk} von einerlei Vorzeichen, und kann keiner dieser vierzehn Hauptkoeffizienten verschwinden, in Formeln:

$$(14) \quad A > 0; \quad \alpha_{kk} > 0; \quad a_{mm} A_{nn} > 0,$$

$k = 1, \dots, 6; m, n = 1, 2, 3, 4.$

Die Bedingungen (14) sind aber auch hinreichend, da schon drei

von ihnen, wie:

$$(15) \quad A > 0, \quad \alpha_{33} > 0, \quad \alpha_{11} A_{44} > 0,$$

nach § 150, (19) zur Folge haben, daß die Form f definit ist.

7. Bedingungen der drei Spezies. Aus der Verbindung von (13) und (14) ergibt sich schließlich (§ 49, 4):

Die eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse gehört zur I. Spezies: $\pm\pm\pm\pm$, wenn:

$$(14) \quad A > 0; \quad \alpha_{kk} \text{ alle} > 0; \quad a_{mm} A_{nn} \text{ alle} > 0;$$

zur II. Spezies: $++--$, wenn:

$$(16) \quad A > 0; \quad \alpha_{kk}, \quad a_{mm} A_{nn} \text{ nicht alle} > 0;$$

zur III. Spezies: $\pm\pm\pm\mp$, wenn:

$$(17) \quad A < 0.$$

8. Verhalten gegen ein Polartetraeder. Bezeichnen wir die positiven b_{kk} mit β_k^2 , die negativen mit $-\beta_k^2$, so werden die Gleichungen der drei Spezies in bezug auf ein Polartetraeder:

$$(18) \quad \text{I. } \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 + \beta_3^2 y_3^2 + \beta_4^2 y_4^2 = 0,$$

$$(19) \quad \text{II. } \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 - \beta_3^2 y_3^2 - \beta_4^2 y_4^2 = 0,$$

$$(20) \quad \text{III. } \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 + \beta_3^2 y_3^2 - \beta_4^2 y_4^2 = 0.$$

Indem man hier eine oder zwei der Koordinaten y_k Null setzt und die übrig bleibenden Vorzeichen betrachtet, ergibt sich (§ 49, 5)¹²⁸:

I. *Die Flächen der II. Spezies schneiden stets alle vier Ebenen eines Polartetraeders in reellen Kegelschnitten, die der III. Spezies jedesmal nur drei Ebenen.*

II. *Die Flächen der II. Spezies schneiden stets vier, die der III. Spezies stets drei Kanten eines Polartetraeders in reellen Punktepaaren.*

Ebenso folgt aus den entsprechenden Gleichungen in Ebenenkoordinaten v_k in (8):

I'. *An die Flächen der II. Spezies gehen von allen vier Ecken eines Polartetraeders reelle Berührungskegel, an die Flächen der III. Spezies nur von drei Ecken.*

II'. *An die Flächen der II. Spezies gehen stets durch vier, an die der III. Spezies durch drei Kanten eines Polartetraeders reelle Tangential-ebenenpaare.*

Beispiele für diese Sätze bieten die Beziehungen der Hauptachsen und konjugierten Durchmesser, sowie der betreffenden Haupt- und Diametralebenen § 72, 11. Das Ellipsoid und das zweischalige Hyperboloid gehören (§ 150, 1) zur III., das einschalige Hyperboloid zur II. Spezies.

9. Flächen mit oder ohne reelle Gerade. Auf den Flächen der III. Spezies können keine reellen Geraden liegen, da sie in der Ebene $y_4 = 0$ nach (20) überhaupt keine reellen Punkte haben, während doch jede reelle Gerade diese Ebene auch in einem reellen Punkte schneiden müßte (§ 63, 1).

Dagegen genügen alle Punkte der durch die beiden Gleichungen:

$$(21) \quad \begin{cases} (\beta_2 y_2 + \beta_3 y_3) + \lambda (\beta_4 y_4 + \varepsilon \beta_1 y_1) = 0, \\ (\beta_4 y_4 - \varepsilon \beta_1 y_1) + \lambda (\beta_2 y_2 - \beta_3 y_3) = 0, \end{cases}$$

bei beliebigem Parameter λ und mit $\varepsilon = +1$ oder -1 , dargestellten geraden Linie der Gleichung (19) (§ 63, (22)).

III. *Der Unterschied der beiden reellen Spezies besteht also darin, daß die Flächen der Spezies II. zwei Scharen reeller gerader Linien, die der Spezies III. aber keine reellen geraden Linien enthalten.*

Das *elliptische Paraboloid* gehört daher (§ 65, 1) zur III., das *hyperbolische Paraboloid* zur II. Spezies.

10. Die Arten der Kegelflächen. Die Gleichung des *Kegels* nimmt in bezug auf ein Polartetraeder, dessen Ecke $x_k^{(4)}$ die Spitze des Kegels ist, nach § 149, (29), die Form an:

$$(22) \quad f = \sum_k^4 \sum_i^4 a_{ki} x_k x_i = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 = 0.$$

Die Gleichungen in Ebenen- und Linienkoordinaten § 143, (8); § 144, (13) werden, da $b_{44} = 0$ ist, nach (3); (8) und (4); (6):

$$(23) \quad B_{44} v_4^2 = 0,$$

$$(24) \quad \beta_{11} r_1^2 + \beta_{22} r_2^2 + \beta_{33} r_3^2 = 0.$$

Je nachdem in (22) die Vorzeichen der Koeffizienten von der Beschaffenheit:

$$(25) \quad \text{I. } \pm \pm \pm \quad \text{oder} \quad \text{II. } \pm \pm \mp$$

sind, ist der Kegel ein *imaginärer* oder *reeller*.

Der imaginäre Kegel hat nach (22) außer der Spitze $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ keinen reellen Punkt und nach (24) und (4) außer den Spitzenstrahlen $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ (I § 59, (10)) keine reellen Tangenten. Dagegen hat er, ebenso wie der reelle Kegel, nach (23) alle Spitzenebenen $v_4 = 0$ als Tangentialebenen.

11. Die Diagonalkoeffizienten beim imaginären Kegel. Die Gleichungen (10) lauten mit $b_{44} = 0$:

$$(26) \quad S^2 a_{kk} = b_{11} u_k^{(1)2} + b_{22} u_k^{(2)2} + b_{33} u_k^{(3)2},$$

$$(27) \quad S^4 \alpha_{kk} = \beta_{11} q_k^{(1)2} + \beta_{22} q_k^{(2)2} + \beta_{33} q_k^{(3)2},$$

$$(28) \quad S^2 A_{kk} = B_{44} x_k^{(4)2}.$$

Nimmt man also b_{11}, b_{22}, b_{33} von einerlei Vorzeichen an, so folgt mit Rücksicht auf (3) und (4):

I. *Ist die Fläche f ein imaginärer Kegel, so sind die sechs Koeffizienten α_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, positiv und die acht Koeffizienten a_{kk}, A_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, von einerlei Vorzeichen.*

Aus (28) folgt, daß beim Kegel (22) nicht alle vier A_{kk} verschwinden können. In der Tat würden mit $A_{kk} = 0, k = 1, 2, 3, 4$, alle $A_{kl} = 0, k, l = 1, 2, 3, 4$ (§ 139, (29)) sein ($A_{kl}^2 = A_{kk} A_{ll}$, I Anm. 1, III, (21)). Ist etwa $A_{44} \neq 0$, so ist die Ebene E_4 des ursprünglichen Koordinatentetraeders nach (8) keine Spitzenebene (Tangentialebene). Dann geht auch keine der in ihr liegenden Kanten e_1, e_2, e_3 durch die Spitze und fällt keine der in ihr liegenden Ecken E_1, E_2, E_3 in die Spitze. Daher sind beim imaginären Kegel e_1, e_2, e_3 keine Tangenten, so daß nach (6) $\alpha_{11} \neq 0, \alpha_{22} \neq 0, \alpha_{33} \neq 0$; und E_1, E_2, E_3 keine Punkte des Kegels, so daß nach (5) $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0$. Es sind aber $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ die Unterdeterminanten der Diagonalglieder a_{11}, a_{22}, a_{33} in der Determinante A_{44} . So folgt allgemein (I § 63, Fig. 319):

II. *Beim Kegel überhaupt ist wenigstens eine der vier Hauptunterdeterminanten A_{kk} von 0 verschieden. Beim imaginären Kegel sind notwendig in jeder nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante dritten Grades A_{kk} ihre drei Hauptunterdeterminanten zweiten Grades α_{kk} und ihre drei Hauptelemente a_{kk} von 0 verschieden.*

Es handelt sich hier bei A_{11} um $\alpha_{11}, \alpha_{55}, \alpha_{66}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$; bei A_{22} um $\alpha_{22}, \alpha_{66}, \alpha_{44}, a_{33}, a_{11}, a_{44}$; bei A_{33} um $\alpha_{33}, \alpha_{44}, \alpha_{55}, a_{11}, a_{22}, a_{44}$; bei A_{44} um $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, a_{11}, a_{22}, a_{33}$.

12. Die Kriterien des imaginären und reellen Kegels. Ist nun etwa die Unterdeterminante $A_{44} \neq 0$ und sind ihre Unterdeterminanten $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ positiv und ihre Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33} von gleichem Vorzeichen wie A_{44} , also unter anderen:

$$(29) \quad \alpha_{33} > 0, \quad a_{11} A_{44} > 0,$$

so kann die Gleichung:

$$(30) \quad f = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 a_{kl} x_k x_l = 0$$

des Kegels nach § 150, (19) auf die Form gebracht werden:

$$(31) \quad f = a_{11} y_1^2 + a_{11} \alpha_{33} y_2^2 + \alpha_{33} A_{44} y_3^2 = 0,$$

wo nach (29) alle Koeffizienten einerlei Vorzeichen haben. Die Bedingungen (29) sind also neben $A = 0$ für den imaginären Kegel

hinreichend. Sie haben aber wegen der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_{22} \alpha_{33} &= \alpha_{23}^2 + \alpha_{11}, & \alpha_{33} \alpha_{11} &= \alpha_{31}^2 + \alpha_{22}, & \alpha_{11} \alpha_{22} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{33}, \\ \alpha_{22} \alpha_{33} &= \alpha_{23}^2 + \alpha_{11} A_{44}, & \alpha_{33} \alpha_{11} &= \alpha_{31}^2 + \alpha_{22} A_{44}, & \alpha_{11} \alpha_{22} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{33} A_{44} \end{aligned}$$

(§ 19, (21); (5)) immer zur Folge:

$$\alpha_{22} > 0, \alpha_{22} A_{44} > 0, \alpha_{33} A_{44} > 0, \alpha_{11} > 0.$$

Wir sagen daher allgemein:

III. Die Fläche (30) ist ein Kegel, wenn $A = 0$, aber nicht alle Hauptunterdeterminanten dritten Grades A_{kk} verschwinden.

IV. Sind dann alle Unterdeterminanten α_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, positiv und haben alle Unterdeterminanten A_{kk} und alle Elemente a_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, einerlei Vorzeichen, sind ferner innerhalb jeder nicht verschwindenden Unterdeterminante A_{kk} die drei Unterdeterminanten α_{kk} und die drei Elemente a_{kk} von 0 verschieden, so ist der Kegel imaginär.

V. Sind diese Bedingungen nicht alle erfüllt, so ist der Kegel reell.

13. Die Ebenenpaare. Die Gleichung des Ebenenpaares lautet nach § 149, (31) in bezug auf ein Polartetraeder:

$$(32) \quad f = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2.$$

Mit $b_{33} = 0$, $b_{44} = 0$ verschwinden nach (3) alle B_{ki} und nach (4) alle β_{ki} bis auf:

$$(33) \quad \beta_{33} = b_{11} b_{22}.$$

Die Gleichung in Linienkoordinaten § 144, (18) wird daher:

$$(34) \quad S = b_{11} b_{22} r_3^2 = 0.$$

Je nachdem b_{11} und b_{22} gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, ist das Ebenenpaar (32) imaginär oder reell.

Das Ebenenpaar überhaupt hat nach (34) keine andern Tangenten als die Transversalen $r_3 = 0$ der Achse $i_6 = J_3 J_4$ (I § 60, (11)); das imaginäre nach (32) keine andern reellen Punkte als die Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ der Achse.

Die Formeln (10) werden:

$$(35) \quad S^2 \alpha_{kk} = b_{11} u_k^{(1)2} + b_{22} u_k^{(2)2}, \quad S^4 \alpha_{kk} = \beta_{33} q_k^{(3)2}.$$

Für das imaginäre Ebenenpaar sind daher notwendig alle α_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, von einerlei Vorzeichen und alle α_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, positiv. Für das reelle Ebenenpaar sind alle α_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, negativ. Da nicht alle sechs $q_k^{(3)}$ verschwinden, können nach (35) auch nicht alle α_{kk} Null sein oder nicht alle sechs Kanten des Koordinatentetraeders Tangenten sein.

In der Tat würden sonst überhaupt alle α_{ki} (§ 139, (29)) verschwinden ($\alpha_{ki}^2 = \alpha_{kk} \alpha_{ii}$, I Anm. 1, III, (22)).

I. *Das Ebenenpaar* (30), für das $A = 0$, alle $A_{kk} = 0$, aber nicht alle $\alpha_{kk} = 0$, ist imaginär oder reell, je nachdem die nicht verschwindenden Hauptunterdeterminanten zweiten Grades α_{kk} sämtlich positiv oder sämtlich negativ sind.

Bei der *Doppelebene* dürfen alsdann nach (10) nicht alle a_{kk} verschwinden. In der Tat würden sonst überhaupt alle a_{ki} (§ 139, (29)) verschwinden ($a_{ki}^2 = a_{kk} a_{ii}$, I Anm. 1, III, (23)).

14. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach Rang und Spezies. Unter Benutzung der § 49, (17) eingeführten Bezeichnung erhalten wir schließlich folgende Einteilung der Flächen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & \left\{ \begin{array}{ll} A > 0, \alpha_{kk} > 0!, a_{kk} A_{ii} > 0!: & \text{I. Imag. eigentl. Flächen,} \\ A \neq 0 \left\{ \begin{array}{ll} A > 0, \alpha_{kk}, a_{kk} A_{ii} \not> 0!: & \text{II. Geradlinige eigentl. Fl.,} \\ A < 0: & \text{III. Nichtgeradl. eigentl. Fl.;} \end{array} \right. \\ A = 0, \left\{ \begin{array}{ll} A_{44} \neq 0: \alpha_{mm} > 0!, a_{mm} A_{44} > 0!: & \text{IV. Imag. eigentl. Kegel,} \\ A_{kk} \neq 0! \left\{ \begin{array}{ll} A_{44} \neq 0: \alpha_{mm}, a_{mm} A_{44} \not> 0!: & \text{V. Reeller eigentl. Kegel;} \\ A = 0, A_{kk} = 0! \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{kk} \text{ (soweit } \neq 0) > 0!: & \text{VI. Imag. Ebenenpaar,} \\ \alpha_{kk} \neq 0! \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{kk} \text{ (soweit } \neq 0) < 0!: & \text{VII. Reelles Ebenenpaar;} \end{array} \right. \\ A = 0, A_{kk} = 0!, \alpha_{kk} = 0!, a_{kk} \neq 0!: & \text{VIII. Doppelebene.} \end{array} \right. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Die Indizes k gehen bei α_{kk} von 1 bis 6, die Indizes k und l bei α_{kk} , A_{ii} von 1 bis 4. Bei IV und V ist beispielsweise A_{44} als das von Null verschiedene A_{kk} genommen (12, IV) und geht m nur von 1 bis 3.

§ 153. Die Spezies der ebenen Schnitte.

1. Die zusammengehörigen Quadratdarstellungen. Bei Einführung eines *Polardreieckes* $J_1 J_2 J_3$ in der schneidenden Ebene wird für § 141, (7) infolge der Bedingungen (§ 149, 7):

$$(1) \quad b_{23} = 0, \quad b_{31} = 0, \quad b_{12} = 0$$

zunächst:

$$(2) \quad \beta_{11} = b_{22} b_{33}, \quad \beta_{22} = b_{33} b_{11}, \quad \beta_{33} = b_{11} b_{22}; \quad \beta_{23} = \beta_{31} = \beta_{12} = 0;$$

$$(3) \quad B_{44} = b_{11} b_{22} b_{33},$$

und ferner nach § 141, (17); (19):

$$(4) \quad -A^u = B_{44} = b_{11} b_{22} b_{33},$$

$$(5) \quad -A_{kk}^u = \beta_{11} x_k^{(1)2} + \beta_{22} x_k^{(2)2} + \beta_{33} x_k^{(3)2},$$

$$(6) \quad -S^2 \alpha_{kk}^u = b_{11} q_k^{(4)2} + b_{22} q_k^{(5)2} + b_{33} q_k^{(6)2}.$$

Danach wird die Gleichung der Schnittkurve § 141, (1); (2) in Punktkoordinaten:

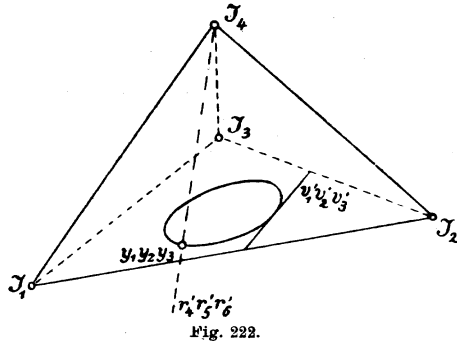
$$(7) \quad b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0, \quad y_4 = 0$$

und werden die Gleichungen in Ebenen- und Strahlenkoordinaten nach § 148, (3); (11); § 140, (23); (38) und § 141, (15); (16):

$$(8) \quad - \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 A_{ki}^u u_k' u_i' = \beta_{11}v_1'^2 + \beta_{22}v_2'^2 + \beta_{33}v_3'^2 = 0,$$

$$(9) \quad - \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 a_{ki}^u p_k' p_i' = S^2(b_{11}r_4'^2 + b_{22}r_5'^2 + b_{33}r_6'^2) = 0.$$

Die Gleichung (8) stellt in ihrer zweiten Form (nach I § 57, 16, rechts) die Schnittkurve sowohl in laufenden Tetraederkoordinaten v_1', v_2', v_3', v_4' der Ebene im Raume, als auch in laufenden Dreieckskoordinaten v_1', v_2', v_3' des Strahles in der Ebene $J_1 J_2 J_3$ dar; ebenso stellt die Gleichung (9) (I § 59, 9; 10, rechts) die Schnittkurve sowohl in laufenden Tetraederkoordinaten $r_1', r_2', r_3', r_4', r_5', r_6'$ des Strahles im Raume, als auch in laufenden Dreieckskoordinaten r_4', r_5', r_6' des Punktes in der Ebene $J_1 J_2 J_3$ übereinstimmend mit (7), zugleich aber den aus J_4 über der Schnittkurve errichteten Kegel in laufenden Dreifachskoordinaten r_4', r_5', r_6' ($= s_1', s_2', s_3'$) des Strahles im Bündel dar (Fig. 222).



2. Die Spezies der eigentlichen Schnittkurven. Ist nun zuerst $b_{11} \neq 0, b_{22} \neq 0, b_{33} \neq 0$, also nach (4):

$$(10) \quad -A^u \neq 0,$$

so ist die Kurve (7) ein *eigentlicher Kegelschnitt* (§ 141, (20)). Dieser aber ist *imaginär* oder *reell*, je nachdem die Vorzeichen der Koeffizienten b_{11}, b_{22}, b_{33} sind:¹¹⁵⁾

$$(11) \quad \text{I. } \pm \pm \pm \quad \text{oder} \quad \text{II. } \pm \pm \mp.$$

3. Notwendige Bedingungen der imaginären eigentlichen Schnittkurve. Bei gleichen Vorzeichen von b_{11}, b_{22}, b_{33} sind nach (2) $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ alle drei positiv, so daß aus (4), (5), (6) folgt:

I. Ist die Schnittkurve ein *imaginärer eigentlicher Kegelschnitt*, so

sind die Unterdeterminanten A_{kk}^u , soweit sie nicht verschwinden, negativ und haben die Unterdeterminanten α_{kk}^u , soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen wie die Determinante A^u .

Die Kurve hat nach (8) außer ihrer eigenen Ebene $E_0(v_1', v_2', v_3', v_4' = 0, 0, 0, 1)$ keine reellen Tangentialebenen und nach (9) außer den in E_0 liegenden Geraden $e_0(r_4', r_5', r_6' = 0, 0, 0)$ keine reellen Treffgeraden.

4. Das Verschwinden der Hauptunterdeterminanten bei imaginärer Schnittkurve. Wenn A_{kk}^u verschwindet, ist nach (8) die Ebene $E_k(E_1: u_1', u_2', u_3', u_4' = 1, 0, 0, 0; \dots)$ Tangentialebene der Schnittkurve; wenn α_{kk}^u verschwindet, ist nach (9) die Kante $e_k(e_1: p_1', p_2', p_3', p_4', p_5', p_6' = 1, 0, 0, 0, 0, 0; \dots)$ Treffgerade der Schnittkurve.

Da nun die imaginäre Schnittkurve nur eine reelle Tangentialebene E_0 und außer den in ihr liegenden Strahlen e_0 keine reellen Treffgeraden hat, so können für sie höchstens ein A_{kk}^u und höchstens drei α_{kk}^u verschwinden. Dies folgt auch aus (5) und (6). Denn bei positiven $\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ kann A_{kk}^u nur dadurch 0 werden, daß $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ alle drei 0 sind. Dies ist aber für zwei von den Werten $k = 1, 2, 3, 4$ nicht möglich, ohne daß $S = |x_k^{(i)}|$ in § 138, (16) verschwindet. Aus demselben Grunde können von den α_{kk}^u in (6) nicht vier verschwinden, ohne daß $S^3 = |q_k^{(i)}|$ (§ 152, 6) verschwindet.

Eine reelle Ebene, die nicht die Tangentialebene E_0 ist, enthält nur eine reelle Treffgerade, ihre Schnittlinie mit der Ebene E_0 . Verschwindet daher etwa A_{44}^u nicht, so daß die Koordinatenebene E_4 keine Tangentialebene ist, so kann von den in ihr liegenden Kanten e_1, e_2, e_3 höchstens eine in E_0 liegen, also Treffgerade sein. Daher kann auch höchstens eine von den drei Unterdeterminanten $\alpha_{11}^u, \alpha_{22}^u, \alpha_{33}^u$ verschwinden.

II. Ist die Schnittkurve ein imaginärer eigentlicher Kegelschnitt, so verschwindet von den vier Hauptunterdeterminanten A_{kk}^u höchstens eine und in jeder nicht verschwindenden Unterdeterminante A_{kk}^u von ihren Hauptunterdeterminanten α_{kk}^u höchstens eine.

5. Die Unterscheidung der Spezies. Ist nun A_{44}^u eine nicht verschwindende unter den A_{kk}^u und α_{33}^u eine darin enthaltene nicht verschwindende Unterdeterminante und ist:

$$(12) \quad A_{44}^u < 0, \quad A^u \alpha_{33}^u > 0,$$

so kann die Schnittkurve nach § 150, (46) in der Form:

$$(13) \quad -\alpha_{33}^u y_1^2 + \alpha_{33}^u A_{44}^u y_2^2 + A_{44}^u A^u y_3^2 = 0$$

dargestellt werden und ist somit imaginär. Die Bedingungen (12)

sind also für diese *hinreichend*. Die notwendigen Bedingungen 3, I und 4, II sind also auf jeden Fall hinreichend.

III. Sind neben (10) die *Unterdeterminanten* A_{kk}^u , soweit sie nicht verschwinden, negativ und haben die *Unterdeterminanten* α_{kk}^u , soweit sie nicht verschwinden, das Vorzeichen von A^u ; sind ferner wenigstens drei *Unterdeterminanten* A_{kk}^u von 0 verschieden und innerhalb jeder solchen wenigstens zwei *Unterdeterminanten* α_{kk}^u von 0 verschieden, so ist die *Schnittkurve* ein *imaginärer eigentlicher Kegelschnitt*.

IV. Sind neben (10) diese Bedingungen nicht alle erfüllt, ist die *Schnittkurve* ein *reeller eigentlicher Kegelschnitt*.

6. Spezies der Linienpaare. Ist nunmehr in der Gleichung (7) $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{33} = 0$, so daß sie auf:

$$(14) \quad b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 = 0$$

zurückkommt, so wird zugleich nach (2); (4)—(6):

$$(15) \quad \beta_{33} = b_{11}b_{22} \neq 0;$$

$$(16) \quad A^u = 0, \quad -A_{kk}^u = \beta_{33}x_k^{(3)2}, \quad -S^2\alpha_{kk}^u = b_{11}q_k^{(4)2} + b_{22}q_k^{(5)2}.$$

Die Gleichungen der Schnittkurve in Ebenen- und Strahlenkoordinaten werden dabei:

$$(17) \quad - \sum_1^4 \sum_1^4 A_{kl}^u u'_k u'_l = \beta_{33}v_3'^2 = 0;$$

$$(18) \quad - \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{kl}^u p'_k p'_l = S^2(b_{11}r_4'^2 + b_{22}r_5'^2) = 0.$$

Das Linienpaar (14) ist imaginär oder reell, je nachdem $\beta_{33} > 0$ oder < 0 . Nach (16) ist aber, da $x_k^{(3)}$ nicht für jedes $k = 1, 2, 3, 4$ verschwinden kann, wenigstens ein A_{kk}^u nicht 0 (§ 141, (21)) und sind alle nicht verschwindenden A_{kk}^u von entgegengesetztem Vorzeichen wie β_{33} . Daher folgt:

V. Die Schnittkurve ist ein Linienpaar, wenn $A^u = 0$, aber nicht alle A_{kk}^u verschwinden. Das Linienpaar ist imaginär oder reell, je nachdem die nicht verschwindenden *Unterdeterminanten* A_{kk}^u negativ oder positiv sind.

Ist auch noch $b_{22} = 0$, also die Schnittkurve (14) eine *Doppellinie*, so verschwinden nach (16) alle A_{kk}^u , aber nicht alle α_{kk}^u .

7. Ausschluß reeller Schnittkurven bei imaginären Flächen. Nach § 141, 7—11 ist der Rang der Schnittkurve in gewissem Umfange von dem der Fläche abhängig. Gleiches gilt auch in bezug auf die Spezies.

Ist eine eigentliche Fläche, ein Kegel oder ein Ebenenpaar imaginär, so können als Schnittkurven keine reellen eigentlichen Kegelschnitte und keine reellen Linienpaare vorkommen (α).

In der Tat sind für die genannten Flächen nach § 152, (10) in jedem Koordinatentetraeder alle α_{kk} , soweit sie nicht verschwinden, positiv. Es müssen also auch in dem für die Schnittkurve eingeführten Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ die alsdann mit β_{mm} bezeichneten Größen (§ 141, (9)) positiv sein, was bei reellen Kurven (7) und (14) nach (2) und (15) nicht der Fall ist.

8. **Ausschluß imaginärer Kegelschnitte und Linienpaare.** Da die eigentlichen Linienflächen und reellen Kegel unendlich viele reelle gerade Linien haben, die nicht in einer Ebene liegen, so muß jede Ebene des Raumes reelle Punkte der Fläche enthalten.

II. Daher können bei den eigentlichen Linienflächen und den reellen

(21)

		$A \neq 0$ Eigentliche Flächen 2. O.		
		$A > 0, A_{kk} a_{ll} > 0!$ $\alpha_{kk} > 0!$ I. Imag. Flächen	$A > 0, A_{kk} a_{ll},$ $\alpha_{kk} > 0!$ II. Geradlinige Fl.	$A < 0$ III. Nichtgeradl. Fl.
$A^u \neq 0$ Eigentl. Kurven 2. O.	$-A_{kk}^u, A^u \alpha_{kk}^u,$ falls $\neq 0, > 0!$ 1. Imag. eigentl. Kurven	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$ $y_4 = 0$	(β)	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_4 = 0$
	$-A_{kk}^u, A^u \alpha_{kk}^u,$ falls $\neq 0, > 0!$ 2. Reelle eigentl. Kurven	(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_4 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_5 = 0$
$A^u = 0,$ $A_{kk}^u \neq 0!$ Getrennte Linienpaare	$-A_{kk}^u,$ falls $\neq 0, > 0!$ 3. Imag. Linien- paare	(γ)	(γ)	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_2 - y_4 = 0$
	$-A_{kk}^u,$ falls $\neq 0, < 0!$ 4. Reelle Linien- paare	(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = 0$ $y_2 - y_4 = 0$	(γ)
$A^u = 0, A_{kk}^u = 0! \alpha_{kk}^u \neq 0!$ 5. Doppellinien		0	0	0
$A^u = 0, A_{kk}^u = 0! \alpha_{kk}^u = 0!$ 6. Unbestimmt		0	0	0

Kegeln keine eigentlichen imaginären Kegelschnitte als Schnittkurven vorkommen (β).

Das reelle Ebenenpaar wird von jeder Ebene entweder in einem reellen Linienpaar oder einer Doppellinie oder unbestimmt geschnitten.

III. *Daher können bei dem reellen Ebenenpaar keine imaginären Linienpaare als Schnittkurven vorkommen* (β).

In der Tat ist bei dem Ebenenpaar nach § 139, (21):

$$(19) \quad S^4 \alpha_{ki} = \beta_{33} q_k^0 q_i^0$$

und daher, wie § 143, (14):

$$(20) \quad -S^4 A_{11}^u = \beta_{33} (q_6^0 u_2 - q_5^0 u_3 + q_1^0 u_4)^2, \dots,$$

also A_{kk}^u von entgegengesetztem Vorzeichen wie β_{33} und β_{33} von gleichem wie α_{kk} . Je nachdem daher die α_{kk} positiv oder negativ sind (§ 152, 13, I), sind in 6, V die A_{kk}^u negativ oder positiv.

$A = 0, A_{kk} \neq 0!$ Kegel		$A = 0, A_{kk} = 0!, \alpha_{kk} \neq 0!$ Ebenenpaare		$A = 0,$ $A_{kk} = 0!$ $\alpha_{kk} = 0!$ $a_{kk} \neq 0!$
$A_{kk} a_{11}, \alpha_{kk},$ falls $\neq 0, > 0!$ IV. Imag. Kegel	$A_{kk} a_{11}, \alpha_{kk},$ falls $\neq 0, > 0!$ V. Reelle Kegel	$\alpha_{kk},$ falls $\neq 0, > 0!$ VI. Imag. Eb.-P.	$\alpha_{kk},$ falls $\neq 0, < 0!$ VII. Reelle Eb.-P.	VIII. Dppl.-Eb.
$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	(β)	0	0	0
(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	0	0	0
$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	(β)	0
(α)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_4 = 0$	(α)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	0
(δ)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_4 - y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	$y_1^2 = 0$ $y_2 = 0$
0	0	(δ)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_1 - y_2 = 0$	$y_1^2 = 0$ $y_1 = 0$

9. Ausschluß imaginärer oder reeller Linienpaare bei eigentlichen Flächen. Da für $A^u = 0$ die fünf Unterdeterminanten $A_{11}^u, A_{22}^u, A_{33}^u, A_{44}^u, A$ nach § 141 (38) dasselbe Vorzeichen haben, so können bei den beiden Spezies $A > 0$ der eigentlichen Flächen keine imaginären Linienpaare ($A_{kk}^u < 0$) und bei der Spezies $A < 0$ keine reellen Linienpaare ($A_{kk}^u > 0$) vorkommen (γ).

10. Ausschluß von Doppellinien. Da der imaginäre Kegel nur einen reellen Punkt und das imaginäre Ebenenpaar nur eine reelle Gerade hat, können dort keine reellen Doppellinien und hier keine unbestimmten Kurven (ganze Ebene) als Schnittkurven vorkommen (δ).

11. Übersicht der möglichen Schnittkurven. Danach bleiben für die Spezies der Schnittkurve bei gegebener Spezies der Fläche von vornherein diejenigen Kombinationen ausgeschlossen, die in der vorstehenden Tabelle¹⁸²⁾ entsprechend § 141, 7—11 mit 0 oder den vorstehenden Sätzen 7—10 entsprechend mit (α), (β), (γ), (δ) bezeichnet sind.

Daß die alsdann noch möglichen Kombinationen der Tabelle auch wirklich vorkommen, zeigen die eingetragenen Beispiele, die in der ersten Zeile die Gleichung einer Fläche von der Spezies der betreffenden Kolonne angeben, und in der zweiten Zeile die Gleichung einer Ebene, welche mit der Fläche eine Schnittkurve von der Spezies der betreffenden Zeile liefert. Die Gleichungen: $(y_1 - y_3)(y_1 + y_3) = 0$, $y_2 - y_4 = 0$ stellen dabei ersichtlich stets ein reelles, die Gleichungen $(y_1 - iy_3)(y_1 + iy_3) = 0$, $y_2 - y_4 = 0$ ein imaginäres Linienpaar, die Gleichungen $y_1^2 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$ eine Doppellinie dar.

Die Abkürzungen:

$$(22) \quad \alpha_{kk} > 0! \quad \alpha_{kk} \not> 0! \dots$$

bedeuten: „alle $\alpha_{kk} > 0$ “, „nicht alle $\alpha_{kk} > 0$ “, ...; „falls $\neq 0$ “ steht der Kürze wegen für „soweit sie nicht 0 sind“. Die Bedingungen der Kolonnen IV und V und der Zeilen 1 und 2 sind abgekürzt angegeben und im Sinne von § 152, 12, IV, V und § 153, 5, III, IV zu ergänzen.

Die Tabelle (21) gibt die Bedingungen der Spezies der Fläche und ihrer ebenen Schnitte in aufgelöster Form an, während sie in § 155, (41) und § 156, (38) noch einmal in geschlossener Form erscheinen werden.

§ 154. Die Spezies der Schnittpunktpaare.

1. Die Quadratdarstellung. Bei Einführung eines Polzweiecks $J_1 J_2$ auf der schneidenden Geraden wird infolge der Bedingung:

$$(1) \quad b_{12} = f_{12} = 0$$

die Gleichung § 142, (7) des *Schnittpunktpaares* der Fläche f mit der Geraden $u_k \propto u'_k$ in Punktkoordinaten:

$$(2) \quad b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 = 0.$$

Zugleich wird nach § 142, (8):

$$(3) \quad \beta_{33} = b_{11}b_{22}$$

und nach § 142, (14); (16):

$$(4) \quad A^{uu'} = S^2 b_{11}b_{22},$$

$$(5) \quad A_{kk}^{uu'} = S^2 (b_{22}x_k^{(1)2} + b_{11}x_k^{(2)2}), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

endlich nach § 148, (13), § 140, (43) und § 142, (13) die Gleichung des Schnittpunktpaares in laufenden Ebenenkoordinaten:

$$(6) \quad \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki}^{uu'} u_k'' u_i'' = S^2 (b_{22}v_1''^2 + b_{11}v_2''^2),$$

übereinstimmend mit (2) (I § 58, (5')).

2. Unterscheidung der Spezies. Aus (4) ergibt sich sofort:

Das Schnittpunktpaar der Fläche zweiter Ordnung:

$$(7) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

mit der Schnittlinie der beiden Ebenen u_k und u'_k ist ein imaginäres oder reelles eigentliches Punktepaar, je nachdem¹¹⁵⁾:

$$(8) \quad A^{uu'} > 0 \quad \text{oder} \quad A^{uu'} < 0.$$

Bei dem imaginären eigentlichen Punktepaar sind nach (5) die *Unterdeterminanten* $A_{kk}^{uu'}$, soweit sie nicht verschwinden, von einerlei Vorzeichen; verschwinden können dann nach (5) höchstens zwei von ihnen. Denn beständen die Gleichungen $x_k^{(1)} = 0$, $x_k^{(2)} = 0$ für drei Werte von k , so würde die Substitutionsdeterminante $S = |x_k^{(i)}|$ verschwinden. Ist etwa $A_{44}^{uu'} \neq 0$, so kann die Gleichung § 150, (62) hergestellt werden.

Das Schnittpunktpaar (2) ist ein *Doppelpunkt*, wenn $b_{11} \neq 0$, $b_{22} = 0$, also nach (4) und (5):

$$(9) \quad A^{uu'} = 0, \quad A_{kk}^{uu'} \text{ nicht alle } 0,$$

und ist *unbestimmt*, wenn mit $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$:

$$(10) \quad A^{uu'} = 0, \quad A_{kk'}^{uu'} \text{ alle } 0.$$

Im letzteren Falle gehört die Schnittlinie $u_k \times u_k'$ der Fläche ganz an, ist eine Erzeugende.

3. Ausschluß bestimmter Spezies des Schnittpunktpaares bei gegebener Spezies der Fläche. Da die imaginäre eigentliche Fläche keinen, der imaginäre Kegel nur einen reellen Punkt besitzt (§ 152, 5; 10), sind bei diesem getrennte reelle Punktpaare und reelle Erzeugende, bei jener außerdem Doppelpunkte ausgeschlossen.

Da das imaginäre Ebenenpaar nur eine reelle Gerade enthält, sind getrennte reelle Punktpaare unmöglich.

Da das reelle Ebenenpaar von jeder Geraden reell geschnitten wird, sind imaginäre Punktpaare ausgeschlossen.

Endlich haben die Flächen der III. Spezies nach § 152, 9 keine reellen Erzeugenden.

Man könnte danach eine entsprechende Tabelle wie § 153, (21) aufstellen.

4. Duale Sätze. Entsprechend dem Satze 2 gilt auch der duale Satz:

Das Tangentialebenenpaar der Fläche zweiter Klasse:

$$(7') \quad F = \sum_1^4 \sum_1^4 \alpha'_{ki} u_k u_i = 0$$

durch die Verbindungslinie der beiden Punkte x_k und x_k' ist ein imaginäres oder reelles Ebenenpaar, je nachdem:

$$(8') \quad A'^{xx'} > 0 \quad \text{oder} \quad A'^{xx'} < 0.$$

Dabei ist $A'^{xx'}$ die mit den Koordinaten der Punkte x_k , x_k' geränderte Determinante der α'_{ki} (§ 140, (12)).

5. Andere Formen der Bedingung. Sind p_k und $q_k = \sigma p_{\bar{k}}$ die Strahlen- und Achsenkoordinaten der Schnittlinie $u_k \times u_k'$ und $p'_k = \tau q'_k$ und q'_k diejenigen der Verbindungslinie $x_k x'_k$, so ist nach § 140, (20) und (17), und dual:

$$(11) \quad A^{uu'} = \sigma^2 \varphi = \sigma^2 \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k p_i,$$

$$(11') \quad A'^{xx'} = \tau^2 \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha'_{ki} q'_k q'_i,$$

$$(12) \quad AA^{uu'} = \Phi = \sum_1^6 \sum_1^6 A_{ki} q_k q_i,$$

$$(12') \quad A' A'^{xx'} = \sum_1^6 \sum_1^6 A'_{ki} p_k p_i.$$

Damit treten in die Bedingungen (8) und (8') die Strahlen- und Achsenkoordinaten der Geraden $u_k \times u'_k$ und $x_k x'_k$ ein.

6. Die eigentlichen Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Indem wir die Flächen (7) und (7') als eigentliche voraussetzen, betrachten wir gleichzeitig beide als identisch, so daß (I Anm. 1, III, (4); (12); (8); (7)).

$$(13) \quad a'_{ki} = A_{ki}; \quad \alpha'_{ki} = A_{ki}, \quad A'_{ki} = A^2 a_{ki}, \quad A'_{ki} = A^4 \alpha_{ki}, \quad A' = A^3.$$

Wir nehmen ferner auch die Geraden $u_k \times u'_k$ und $x_k x'_k$ als identisch an, so daß:

$$(14) \quad p'_k = p_k, \quad q'_k = q_k, \quad \tau = \frac{1}{\sigma}.$$

Dann wird aus (11') und (12'):

$$A'_{xx'} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^6 \sum_1^6 A_{ki} q_k q_i = \frac{\Phi}{\sigma^2}, \quad A'_{xx'} = A \sum_1^6 \sum_1^6 \alpha_{ki} p_k p_i = A \varphi$$

(§ 138, (27)) und daher nach (11) oder (12):

$$(15) \quad \sigma^2 A'_{xx'} = A A^{uu'}$$

oder ausführlicher geschrieben ¹¹⁹⁾:

$$(16) \quad \sigma^2 \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 & x'_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 & x'_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 & x'_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 & x'_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & u'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & u'_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & u'_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sind (7) und (7') die Gleichungen einer eigentlichen Fläche zweiter Ordnung in Punkt- und Ebenenkoordinaten ($a'_{ki} = A_{ki}$) und sind x_k, x'_k zwei Punkte und u_k, u'_k zwei Ebenen derselben geraden Linie p_k , $q_k = \sigma p_k$, so bestehen die Gleichungen (15); (16).

7. Folgerung über reelle Tangentialebenen. Nach (15) haben $A^{uu'}$ und $A'_{xx'}$ bei positivem A gleiches, bei negativem A verschiedenes Vorzeichen. Sehen wir daher von den imaginären Flächen, für die $A > 0$ und $\varphi > 0$ (§ 152, 6), also auch $\Phi > 0$ ist, ab, so folgt aus (8), (8') (§ 152, 9):

Bei den eigentlichen Linienflächen gehen durch jede Gerade, die in zwei reellen Punkten schneidet, stets auch zwei reelle Tangentialebenen und umgekehrt.

Bei den eigentlichen Flächen ohne gerade Linien gehen durch eine Gerade, die in zwei reellen Punkten schneidet, keine reellen Tangentialebenen, und schneidet eine Gerade, durch die zwei reelle Tangentialebenen gehen, nicht in reellen Punkten.

Eine Tangente ($\varphi = 0$) trägt in beiden Fällen zwei zusammenfallende reelle Schnittpunkte und zwei zusammenfallende reelle Tangentialebenen.

§ 155. Orthogonale Transformation der Fläche zweiter Ordnung.

1. Orthogonale lineare Substitutionen. Die lineare Substitution:

$$(1) \quad x_k = \sum_1^4 c_{km} z_m, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

heißt eine *orthogonale*, wenn durch sie identisch die Gleichung besteht:

$$(2) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2.$$

Um eine solche Substitution zu erhalten, wählt man *irgendein* (reelles) Polartetraeder $J_m = x_k^{(m)}$, $k, m = 1, 2, 3, 4$, der imaginären eigentlichen Fläche zweiter Ordnung:

$$(3) \quad g = \sum_1^4 x_k^2 = 0.$$

Durch Transformation auf dieses mittels der Substitution:

$$(4) \quad x_k = \sum_1^4 x_k^{(m)} y_m$$

erhält man nach § 149, (21):

$$(5) \quad g = \sum_1^4 g_{mm} y_m^2.$$

Hier sind die Koeffizienten:

$$(6) \quad g_{mm} = \sum_1^4 x_k^{(m)2}$$

positiv und von 0 verschieden. Setzt man daher:

$$(7) \quad \sqrt{g_{mm}} y_m = z_m,$$

so wird nach (5):

$$(8) \quad g = \sum_1^4 z_m^2.$$

Somit ist:

$$(9) \quad x_k = \sum_1^4 \frac{x_k^{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}} z_m$$

eine (reelle) orthogonale Substitution.

Entsprechend den ∞^6 (reellen) Polartetraedern der Fläche (3) (§ 149, 11, V) gibt es ∞^6 orthogonale lineare Substitutionen (§ 50, 1).

2. Quadratdarstellung durch orthogonale Substitution. Die Frage, ob eine beliebige Fläche zweiter Ordnung:

$$(10) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0$$

durch *orthogonale* Substitution auf die *Quadratdarstellung* § 149, (21) gebracht werden kann, kommt auf die Frage nach einem *gemeinsamen* (reellen) Polartetraeder der beiden Flächen (10) und (3) zurück.¹¹⁶⁾

Ist nämlich $J_m = x_k^{(m)}$ ein solches, so werden durch die Substitution (4) gleichzeitig die Darstellungen (5) und:

$$(11) \quad f = \sum_1^4 f_{mm} y_m^2$$

herbeigeführt und dann mit (7) die Darstellungen (8) und:

$$(12) \quad f = \sum_1^4 \frac{f_{mm}}{g_{mm}} z_m^2.$$

Hat also die Fläche (10) mit der Fläche (3) ein (reelles) Polartetraeder $J_m = x_k^{(m)}$ gemein, so kann sie durch die orthogonale lineare Substitution (9) auf die Quadratdarstellung (12) gebracht werden.

Es soll untersucht werden, ob ein gemeinsames (reelles) Polartetraeder der Flächen (10) und (3) vorhanden ist.

3. Punkte gleicher Polarebene. Jede Ecke eines Polartetraeders einer einzelnen Fläche zweiter Ordnung hat (§ 149, 8, II) die gegenüberliegende Seitenfläche als Polarebene. Jede Ecke eines *gemeinsamen* Polartetraeders muß also in bezug auf beide Flächen dieselbe Polarebene haben oder ein *Punkt gleicher Polarebene* in bezug auf beide sein. Wir fragen daher zuerst nach solchen Punkten.

Die Polarebenen eines Punktes x_k^0 in bezug auf die beiden Flächen (10) und (3) sind nach § 149, (6):

$$(13) \quad \sum_1^4 f_k^0 x_k = 0, \quad \sum_1^4 x_k^0 x_k = 0.$$

Sie fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn mit einem Faktor λ :

$$(14) \quad f_k^0 = \lambda x_k^0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Jeder Punkt gleicher Polarebene x_k^0 genügt also den Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 + a_{34}x_4 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44} - \lambda)x_4 = 0, \end{cases}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleicher Polarebene (§ 50, 3).

4. Die biquadratische Gleichung des Problems. Diese Gleichungen können nur bestehen, wenn der Faktor λ eine Wurzel der biquadratischen Gleichung ist⁸⁹⁾:

$$(16) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

5. Die einer Wurzel entsprechenden Punkte gleicher Polarebene. Ist λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) eine Wurzel der Gleichung (16), so gibt es ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$, die den mit $\lambda = \lambda_i$ gebildeten Gleichungen (15) entsprechen. In der Tat stellen diese Gleichungen vier Ebenen dar, die infolge der Voraussetzung $\Delta(\lambda_i) = 0$ jedenfalls einen Punkt gemein haben, möglicherweise auch mehr. Wenn nämlich für die Wurzel $\lambda = \lambda_i$ alle Unterdeterminanten dritten Grades $\Delta_{ki}(\lambda)$ von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, gehen die drei Ebenen durch eine Gerade; wenn alle Unterdeterminanten zweiten Grades $\delta_{ki}(\lambda)$ verschwinden, fallen sie alle in eine Ebene zusammen; wenn alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, werden sie völlig unbestimmt (I § 61, 3—5).

Zu einer Wurzel $\lambda = \lambda_i$ der Gleichung (16) gehören ein Punkt, oder ∞^1 oder ∞^2 oder ∞^3 Punkte gleicher Polarebene.

6. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (16), so genügen die entsprechenden Punkte gleicher Polarebene $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ nach (14) den Gleichungen:

$$(17) \quad f_k^{(1)} = \lambda_1 x_k^{(1)}, \quad f_k^{(2)} = \lambda_2 x_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

gleich Δ ob zu jeder der beiden Wurzeln ein oder mehr solche Punkte gehören.

Wenn $x_k^{(2)} = x_k^{(1)}$ sein sollte, würde aus den beiden alsdann in $f_k^{(1)}$ und $-x_k^{(1)}$ linearen und homogenen Gleichungen (17) mit der Determinante $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ folgen, daß $f_k^{(1)} = 0$ und $x_k^{(1)} = 0$. Die letztere Gleichung kann aber nicht für alle Werte von k bestehen. Also:

I. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleicher Polarebene können niemals zusammenfallen.

Multipliziert man die Gleichungen (17) bezüglich mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k , so erhält man:

$$\sum_k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \lambda_1 \sum_k x_k^{(1)} x_k^{(2)}, \quad \sum_k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = \lambda_2 \sum_k x_k^{(2)} x_k^{(1)}$$

oder (§ 138, (6)):

$$f_{12} = \lambda_1 g_{12}, \quad f_{12} = \lambda_2 g_{12}.$$

Daraus aber schließt man, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$(18) \quad f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. Zwei Punkte gleicher Polarebene, $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, die zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehören, sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Flächen (10) und (3) (§ 149, (2)).

7. Die Realität der Wurzeln. Sind λ_1 und λ_2 zwei (einfache oder zweifache) konjugiert komplexe, also verschiedene Wurzeln, so ist nach 6, I auch jeder der einen entsprechende Punkt $x_k^{(1)}$ gleicher Polarebene von jedem der andern entsprechenden Punkte $x_k^{(2)}$ verschieden. Entspricht aber vermöge (15) der komplexen Wurzel λ_1 ein Punkt $x_k^{(1)} = y_k' + iy_k''$, so entspricht der konjugierten Wurzel λ_2 jedenfalls der Punkt $x_k^{(2)} = y_k' - iy_k''$, wo y_k'' nicht für jedes k verschwinden kann, da sonst $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ wäre.

Damit ist nach (18):

$$g_{12} = \sum_1^4 x_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^4 (y_k'^2 + y_k''^2) = 0,$$

und damit für jedes k : $y_k' = 0$, $y_k'' = 0$, was für y_k'' nicht möglich. Daher sind konjugiert komplexe Wurzeln nicht möglich oder:

Die biquadratische Gleichung $\mathcal{A}(\lambda) = 0$ hat nur reelle Wurzeln (§ 50, 7).

8. Entwicklung der Determinante $\mathcal{A}(\lambda)$. Die Differentialquotienten der Determinante (16) nach λ sind:

$$(19) \quad \begin{cases} -\mathcal{A}'(\lambda) = \mathcal{A}_{11}(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda) + \mathcal{A}_{33}(\lambda) + \mathcal{A}_{44}(\lambda), \\ \frac{1}{2} \mathcal{A}''(\lambda) = \delta_{11}(\lambda) + \delta_{22}(\lambda) + \delta_{33}(\lambda) + \delta_{44}(\lambda) + \delta_{55}(\lambda) + \delta_{66}(\lambda), \\ -\frac{1}{6} \mathcal{A}'''(\lambda) = (a_{11} - \lambda) + (a_{22} - \lambda) + (a_{33} - \lambda) + (a_{44} - \lambda). \end{cases}$$

Daher ist mit den § 79, (5)—(7) eingeführten Abkürzungen:

$$(20) \quad \mathcal{A}(\lambda) = \lambda^4 - A''' \lambda^3 + A'' \lambda^2 - A' \lambda + A,$$

und für die vier Wurzeln:

$$(21) \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= A''', & \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_4 &= A'', \\ \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= A', & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 &= A. \end{aligned}$$

9. Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinante. Enthält die ganze Funktion $G(\lambda)$ den Faktor $\lambda - \lambda_0$ gerade l mal, so enthält der Differentialquotient $G'(\lambda)$ nach § 50, (22) denselben Faktor gerade:

$$(22) \quad l' = l - 1$$

mal.

Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\mathcal{A}(\lambda)$ vorkommt; ferner $(\lambda - \lambda_i)^{l'_i}$ die höchste, die gleichzeitig in *allen* Unterdeterminanten dritten Grades $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$; $(\lambda - \lambda_i)^{l''_i}$ die höchste, die in *allen* Unterdeterminanten zweiten Grades $\delta_{ki}(\lambda)$; $(\lambda - \lambda_i)^{l'''_i}$ die höchste, die in *allen* Elementen der Determinante $\mathcal{A}(\lambda)$ vorkommt. Es sind dann nach dem Grade der einzelnen Determinanten nur zulässig die Werte:

$$(23) \quad l_i = 1, 2, 3, 4; \quad l'_i = 0, 1, 2, 3; \quad l''_i = 0, 1, 2; \quad l'''_i = 0, 1.$$

Infolge von (19) enthält nun $\mathcal{A}'(\lambda)$ den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in allen $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$ wenigstens l'_i mal vorkommt, auch wenigstens l'_i mal. Daher ist nach (22):

$$l_i - 1 \geq l'_i \quad \text{oder:} \quad l'_i < l_i$$

mit Ausschluß der Gleichheit.

Der Differentialquotient irgendeiner Unterdeterminante dritten Grades:

$$\mathcal{A}'_{44}(\lambda) = -\delta_{11}(\lambda) - \delta_{22}(\lambda) - \delta_{33}(\lambda), \quad \mathcal{A}'_{12}(\lambda) = \delta_{45}(\lambda) - \delta_{12}(\lambda), \dots$$

enthält den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in jedem $\delta_{ki}(\lambda)$ wenigstens l''_i mal vorkommt, auch wenigstens l''_i mal. Da aber unter den Determinanten $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$ wenigstens eine ihn nicht mehr als l'_i mal und daher der entsprechende Differentialquotient $\mathcal{A}'_{ki}(\lambda)$ ihn nach (22) nicht mehr als $l'_i - 1$ mal enthält, so kann l''_i nicht größer sein als $l'_i - 1$:

$$l''_i \leq l'_i - 1 \quad \text{oder:} \quad l''_i < l'_i.$$

Der Differentialquotient irgend einer Unterdeterminante zweiten Grades:

$$\delta'_{11}(\lambda) = -(a_{22} - \lambda) - (a_{33} - \lambda), \quad \delta'_{12}(\lambda) = a_{12}, \dots$$

enthält den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in jedem Elemente wenigstens l'''_i mal vorkommt, auch wenigstens l'''_i mal. Da aber unter den Determi-

11. Die zu einer Wurzel gehörigen Punkte gleicher Polarebene. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) nicht alle $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$ verschwinden, so liefern für $\lambda = \lambda_i$ die Gleichungen (15) mit $k=1, 2, 3$ oder 4 (§ 139, (8)):

$$(28) \quad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \mathcal{A}_{k1}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k2}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k3}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k4}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört stets ein einziger bestimmter Punkt gleicher Polarebene.

Man kann statt (28) mit einem Faktor ϱ auch schreiben¹²¹⁾:

$$(29) \quad \varrho x_k^{(i)} x_i^{(i)} = \mathcal{A}_{ki}(\lambda_i),$$

und hiernach wird mit Rücksicht auf (19) und (6):

$$(30) \quad \varrho g_{ii} = -\mathcal{A}'(\lambda_i).$$

Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$, aber nicht alle $\delta_{ki}(\lambda)$ verschwinden, so genügen für $\lambda = \lambda_i$ den Gleichungen (15) die Punkte der Geraden (§ 139, (16)):

$$(31) \quad q_1^{(i)} : q_2^{(i)} : q_3^{(i)} : q_4^{(i)} : q_5^{(i)} : q_6^{(i)} = \delta_{k1}(\lambda_i) : \delta_{k2}(\lambda_i) : \delta_{k3}(\lambda_i) : \delta_{k4}(\lambda_i) : \delta_{k5}(\lambda_i) : \delta_{k6}(\lambda_i),$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Zu einer zweifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^1 Punkte gleicher Polarebene, die eine Gerade erfüllen.

Da für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle $\delta_{ki}(\lambda)$, aber nicht alle Elemente von $\mathcal{A}(\lambda)$ verschwinden, so genügen für $\lambda = \lambda_i$ den Gleichungen (15) die Punkte der Ebene (§ 139, (24)):

$$(32) \quad u_1^{(i)} : u_2^{(i)} : u_3^{(i)} : u_4^{(i)} = a_{11} - \lambda_i : a_{12} : a_{13} : a_{14} = a_{21} : a_{22} - \lambda_i : a_{23} : a_{24} = \dots = \dots.$$

Zu einer dreifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^2 Punkte gleicher Polarebene, die eine Ebene erfüllen.

Da für eine vierfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle Elemente von $\mathcal{A}(\lambda)$ verschwinden, so sind für eine solche die Gleichungen (15) identisch erfüllt. Alle Punkte des Raumes sind Punkte gleicher Polarebene.

12. Verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (16) findet sich nach (20) die Wurzel $\lambda = 0$ nicht, wenn $A \neq 0$; die Wurzel $\lambda = 0$ einfach, wenn $A = 0$, $A' \neq 0$; zweifach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$; dreifach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$; vierfach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' = 0$.

Die Gleichungen (15), die mit $\lambda = 0$ die zur Wurzel $\lambda = 0$ gehörigen Punkte gleicher Polarebene bestimmen, decken sich aber in diesem Falle mit denjenigen (§ 139, (6)), die die Doppelpunkte der Fläche (10) liefern.

Die der Wurzel $\lambda = 0$ entsprechenden Punkte gleicher Polarebene

in bezug auf die Flächen f und g decken sich mit den Doppelpunkten der Fläche f .

Dies erklärt sich daraus, daß ein Doppelpunkt der Fläche f als Polarebene in bezug auf f jede Ebene des Raumes hat (§ 149, 5), also auch diejenige Ebene, die seine Polarebene in bezug auf g ist.

Da nun nach 11 aus der Multiplizität einer Wurzel die Anzahl der entsprechenden Punkte gleicher Polarebene folgt, so ergibt sich:

Die Fläche f hat keinen Doppelpunkt für $A \neq 0$, einen Doppelpunkt für $A = 0$, $A' \neq 0$, eine Doppelgerade für $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$, eine Doppelebene für $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$.

Wir erhalten damit aufs Neue die bereits § 139, (30) abgeleiteten Bedingungen für den Rang der Fläche f .

13. Nichtverschwindende Wurzeln. Da nach (17) für jede einfache oder mehrfache, verschwindende oder nicht verschwindende Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt gleicher Polarebene $x_k^{(i)}$:

$$\sum_k f_k^{(i)} x_k^{(i)} = \lambda_i \sum_k x_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

oder:

$$(33) \quad f_{ii} = \lambda_i g_{ii},$$

so folgt:

Ein einer nichtverschwindenden Wurzel λ_i entsprechender Punkt gleicher Polarebene $x_k^{(i)}$ liegt entweder auf keiner oder auf jeder der beiden Flächen f und g .

Da im letzteren Falle die gemeinsame Polarebene gemeinsame Tangentialebene wird, so berühren sich die beiden Flächen im Punkte $x_k^{(i)}$.

14. Der einer einfachen Wurzel entsprechende Punkt. Der einer einfachen Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleicher Polarebene (28) kann als reeller Punkt nicht auf der Fläche g , also auch nicht mit seiner gemeinsamen Polarebene in bezug auf f und g vereinigt liegen. Falls $\lambda_i \neq 0$, liegt er nach 13 auch nicht auf f ; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach 12 die Spitze des Kegels f .

15. Fall von vier einfachen Wurzeln. Hat die Gleichung (16) vier einfache Wurzeln λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), so gehört nach 11 zu jeder ein einziger Punkt gleicher Polarebene $x_k^{(i)}$, der nach 14 nicht mit dieser vereinigt liegt. Zugleich ist nach 6, II jeder der vier Punkte $x_k^{(i)}$ harmonischer Pol jedes der drei andern in bezug auf beide Flächen f und g .

I. Wenn die biquadratische Gleichung vier verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Flächen f und g stets ein einziges gemeinsames Polartetraeder.

Seine reellen Ecken $x_k^{(i)}$ sind die den Werten $i = 1, 2, 3, 4$ entsprechenden Punkte (28). Für die orthogonale Substitution (9), welche die Form (12) von f herbeiführt, ist nach (29), (30)¹²¹):

$$(34) \quad \frac{x_k^{(i)} x_l^{(i)}}{g_{ii}} = - \frac{A_{ki}(\lambda_i)}{A'(\lambda_i)}.$$

16. Die einer Doppelwurzel entsprechenden Punkte. Einer *Doppelwurzel* λ_i entspricht eine reelle Gerade (31), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polarebene ist. Ist $\lambda_i \neq 0$, so sind die beiden Punkte S_1 und S_2 , in denen die Gerade die eine Fläche schneidet, nach 13 *Berührungspunkte* beider Flächen. Sie sind als Schnittpunkte einer reellen Geraden (31) mit der imaginären eigentlichen Fläche g konjugiert komplex und daher zwei *getrennte* Punkte (§ 154, 3). Ist $\lambda_i = 0$, so ist die Gerade (31) die Achse des Ebenenpaares f und schneidet wie vorhin die Fläche g in zwei *getrennten* Punkten S_1 und S_2 .

17. Fall von ein oder zwei Doppelwurzeln. Wählt man auf der Geraden (31), die der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ entspricht, irgend ein Paar harmonischer Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu den beiden getrennten Schnittpunkten S_1 und S_2 mit der Fläche g , so sind diese harmonische Pole in bezug auf beide Flächen f und g .

Sind nun die beiden andern Wurzeln λ_3 und λ_4 einfache, so sind die ihnen nach 14 entsprechenden Punkte gleicher Polarebene $x_k^{(3)}$ und $x_k^{(4)}$ nach 6 sowohl unter sich als auch je zu jedem Punkte der Geraden (31) harmonische Pole in bezug auf beide Flächen f und g . Die vier Punkte $x_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ bilden also ein gemeinsames Polartetraeder. Für $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ stehen dabei die ∞^1 zu S_1 , S_2 harmonischen Punktepaare zur Verfügung (§ 149, 6).

Ist aber auch $\lambda_3 = \lambda_4$ eine Doppelwurzel, so wählt man auch auf der ihr entsprechenden Geraden zwei harmonische Punkte $x_k^{(3)}$, $x_k^{(4)}$ zu den getrennten Schnittpunkten S_3 , S_4 der Geraden mit der Fläche g . Jeder Punkt der zu $\lambda_1 = \lambda_2$ gehörigen Geraden ist aber nach 6, II zu jedem Punkte der zu $\lambda_3 = \lambda_4$ gehörigen Geraden harmonischer Pol in bezug auf beide Flächen. Die vier Punkte $x_k^{(i)}$ bilden also wieder ein Polartetraeder.

II. Wenn die biquadratische Gleichung eine zweifache und zwei einfache oder zwei zweifache Wurzeln hat, haben die beiden Flächen f und g ∞^1 , bezüglich ∞^2 gemeinsame Polartetraeder.

18. Fall einer dreifachen Wurzel. Einer dreifachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ entspricht eine reelle Ebene (32), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polarebene ist. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so ist der Kegelschnitt,

in dem die Ebene die eine Fläche schneidet, nach 13 *Berührungskurve* beider Flächen.

Er ist nach § 153, (21) als Schnittkurve einer reellen Ebene mit der imaginären eigentlichen Fläche g notwendig ein *eigentlicher* imaginärer Kegelschnitt. Ist $\lambda_1 = 0$, so fällt f selbst als Doppelebene in die Ebene (32) hinein und schneidet g wie vorhin in einem eigentlichen imaginären Kegelschnitt.

Ein eigentlicher Kegelschnitt hat ∞^3 reelle Polardreiecke (§ 46, 10). Ist nun $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ ein solches Polardreieck und $x_k^{(4)}$ der der einfachen Wurzel λ_4 entsprechende Punkt gleicher Polarebene, so ist dieser nach 6, II zu jedem Punkte der Ebene (32) harmonischer Pol. Die vier Punkte $x_k^{(i)}$ bilden also ein Polartetraeder.

III. Wenn die biquadratische Gleichung eine dreifache und eine einfache Wurzel hat, haben die beiden Flächen f und g ∞^3 gemeinsame Polartetraeder.

IV. Bei einer vierfachen Wurzel fallen f und g überhaupt zusammen.

19. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder mehr gemeinsame Polartetraeder der beiden Flächen f und g vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Formen (8) und (12) stets möglich. Zugleich erhält die Darstellung (12) nach (33) die Form:

$$(35) \quad f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 + \lambda_4 z_4^2 = 0.$$

Die Gleichung (10) kann also stets durch orthogonale Substitution auf die Form (35) gebracht werden, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (16) sind.

Das neue Koordinatentetraeder, auf das sich die Koordinaten z_i beziehen, ist das Polartetraeder, das die Fläche (10) mit der Fläche (3) gemein hat. Es ist eindeutig bestimmt, wenn die Gleichung (16) vier einfache Wurzeln hat, ist dagegen einfach oder zweifach oder dreifach unbestimmt, wenn sie zwei einfache und eine zweifache oder zwei zweifache oder eine einfache und eine dreifache Wurzel hat.

20. Unterscheidung der Vorzeichen. Aus der Gleichung (35) kann nun sowohl der Rang (§ 149, 15) als die Spezies (§ 152, 4) sofort entnommen werden. Sind nämlich mit $A \neq 0$ die vier Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ nach (21) alle von 0 verschieden, so sind ihre Vorzeichen nach (21), abgesehen von der Reihenfolge, für:

$$(36) \quad A > 0 : \pm \pm \pm \pm \text{ oder } + + - -; \quad A < 0 : \pm \pm \pm \mp.$$

Nach der Regel von Descartes¹⁸¹⁾ hat aber die Gleichung (20) soviel positive Wurzeln als Zeichenwechsel in $\Delta(\lambda)$, und soviel negative,

als Zeichenwechsel in $\mathcal{A}(-\lambda)$ vorkommen. Daher sind die Vorzeichen der Wurzeln für:

$$A > 0, A' > 0, A'' > 0, A''' > 0 : + + + +,$$

$$A > 0, A' < 0, A'' > 0, A''' < 0 : - - - -,$$

oder zusammengefaßt, für:

$$(37) \quad A > 0, A'' > 0, A' A''' > 0 : \pm \pm \pm \pm.$$

Nach (36) und (37) sind sie dann für:

$$(38) \quad A > 0, A'', A' A''' \text{ nicht beide } > 0 : + + - -.$$

Ist ferner mit $A = 0$, $A' \neq 0$ etwa $\lambda_4 = 0$, so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\lambda^3 - A''' \lambda^2 + A'' \lambda - A' = 0.$$

Die Vorzeichen sind dann nach § 50, 19 für:

$$(39) \quad A'' > 0, A' A''' > 0 : \pm \pm \pm;$$

$$A'', A' A''' \text{ nicht beide } > 0 : \pm \pm \mp.$$

Ist weiter mit $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$ etwa $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, so sind λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 - A''' \lambda + A'' = 0.$$

Ihre Vorzeichen sind gleich oder verschieden, je nachdem:

$$(40) \quad A'' > 0 \text{ oder } A'' < 0.$$

Schließlich ist mit $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$ nur noch eine Wurzel λ_1 von 0 verschieden.

21. Merkmale der Spezies der Fläche zweiter Ordnung. Bezeichnet man daher allgemein die Wurzel λ_i mit α_i^2 oder $-\alpha_i^2$, je nachdem sie positiv oder negativ ist, so erhält man an Stelle von § 152, (36) folgende *Merkmale für die Spezies der Fläche* (10):

$$(41) \quad \begin{cases} A > 0, A'' > 0, A' A''' > 0: \\ \quad \text{I. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 + \alpha_4^2 z_4^2 = 0; \\ A \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A > 0, A'', A' A''' \text{ nicht beide } > 0: \\ \quad \text{II. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 - \alpha_4^2 z_4^2 = 0; \\ A < 0: \text{ III. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 - \alpha_4^2 z_4^2 = 0. \end{array} \right. \\ \\ A = 0, A' \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A'' > 0, A' A''' > 0: \\ \quad \text{IV. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 = 0; \\ A'', A' A''' \text{ nicht beide } > 0: \\ \quad \text{V. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 = 0. \end{array} \right. \\ \\ A = 0, A' = 0, A'' \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A'' > 0: \quad \text{VI. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 = 0; \\ A'' < 0: \quad \text{VII. } f = \alpha_1^2 z_1^2 - \alpha_2^2 z_2^2 = 0. \end{array} \right. \\ \\ A = 0, A' = 0, A'' = 0, A''' \neq 0: \text{ VIII. } f = \alpha_1^2 z_1^2 = 0. \end{cases}$$

Dabei ist (§ 138, (8); (9)):

$$(42) \quad \begin{cases} A' = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}, & A''' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}, \\ A'' = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} + \alpha_{55} + \alpha_{66}. \end{cases}$$

Diese Merkmale gelten für jedes Koordinatentetraeder, auf das sich die gegebene Gleichung (10) gerade bezieht. Sie können unmittelbar als *Kolonnenüberschriften in die Tabelle § 153, (21)* eingetragen werden.⁹⁵⁾

22. Übergang auf gemeine Koordinaten. Sie gelten insbesondere für *schief- und rechtwinklige gemeine Koordinaten* (I § 57, (1)) und können in diesem Sinne als Kolonnenüberschriften in der Tabelle § 99, (31) benutzt werden.

Die dort für rechtwinklige Koordinaten abgeleiteten Merkmale der Spezies weichen von denen in (41) für die vier ersten Spezies insofern ab, als dort an Stelle von A'' und A''' die verkürzten Summen:

$$A'_{44} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad A''_{44} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

stehen.

Diese Abweichung ist darin begründet, daß überhaupt, bei *gleich bleibenden notwendigen* Bedingungen, die *hinreichenden* Bedingungen entsprechend der verschiedenen Wahl des Polartetraeders für die Quadratdarstellung verschieden ausfallen. In der Tat ist für die Spezies I nach § 152, (14) notwendig, daß neben $A > 0$ alle α_{kk} und alle $a_{kk}A_{ii}$ positiv seien, hinreichend aber schon, daß $A > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $a_{11}A_{44} > 0$.

23. Invarianten der Fläche bei orthogonaler Transformation.

Wird durch irgend eine orthogonale Substitution (9), die also (3) in (8) verwandelt, aber f nicht gerade in die Quadratdarstellung (12) überführt, sondern etwa in:

$$(43) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 b_{mn} z_m z_n,$$

so wird durch sie nach (8) und (43) identisch in λ (§ 50, 20):

$$(44) \quad f - \lambda g = (b_{11} - \lambda) z_1^2 + \dots + 2b_{23} z_2 z_3 + \dots$$

und daher nach § 138, (17):

$$(45) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = S^2 \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Da aber diese Gleichung identisch in λ gilt, so folgt nach (20) durch Gleichsetzen der Koeffizienten:

$$(46) \quad B = S^2 A, \quad B' = S^2 A', \quad B'' = S^2 A'', \quad B''' = S^2 A'''$$

oder:

Die Koeffizienten der Potenzen von λ in der Determinante (16), also: A, A', A'', A''' , sind gegen jede orthogonale Transformation invariant.¹³²⁾

Da nach § 140, (9) und (14) die Gleichung (45) auch für die einfach oder zweifach geränderten Determinanten der Fläche (44) besteht, so sind auch die Koeffizienten der Potenzen von λ in den geränderten Determinanten § 156, (18) und § 157, (5), also die Ausdrücke A^u, A'^u, A''^u, Q^2 in § 156, (26) und $A^{uu'}, A'^{uu'}, Q^3$ in § 157, (12), gegen jede orthogonale Transformation invariant (§ 149, (38)).

§ 156. Orthogonale Transformation der Schnittkurve.

1. Gleichzeitige Quadratdarstellung zweier Schnittkurven. Bezogen auf ein Tetraeder $E_1 E_2 E_3 E_4$ seien zwei Flächen:

$$(1) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \quad (2) \quad g = \sum_1^4 x_k^2 = 0$$

und eine reelle Ebene:

$$(3) \quad u = \sum_1^4 u_k x_k = 0$$

gegeben. Durch Transformation auf ein neues Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$, dessen Ebene $J_1 J_2 J_3$ mit der Ebene (3) zusammenfällt, nehmen f, g und u im allgemeinen die Form an (§ 141, 1):

$$(4) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 f_{mn} y_m y_n = 0, \quad (5) \quad g = \sum_1^4 \sum_1^4 g_{mn} y_m y_n = 0,$$

$$(6) \quad u = S y_4 = 0,$$

und erhalten die Schnittkurven der beiden Flächen mit der Ebene in laufenden, auf das Dreieck $J_1 J_2 J_3$ bezogenen Koordinaten die Form (§ 141, (7)):

$$(7) \quad \sum_1^3 \sum_1^3 f_{mn} y_m y_n = 0, \quad (8) \quad \sum_1^3 \sum_1^3 g_{mn} y_m y_n = 0.$$

Ist im Besonderen $J_1 J_2 J_3$ ein gemeinsames Poldreieck der beiden Kegelschnitte (7) und (8), so werden diese Gleichungen (§ 149, (19)):

$$(9) \quad \sum_1^3 f_{mm} y_m^2 = 0, \quad (10) \quad \sum_1^3 g_{mm} y_m^2 = 0,$$

oder mit:

$$(11) \quad \sqrt{g_{mm}} y_m = z_m:$$

$$(12) \quad \sum_1^3 \frac{f_{mm}}{g_{mm}} z_m^2 = 0, \quad (13) \quad \sum_1^3 z_m^2 = 0.$$

Die Schnittkurve $g \times u$ ist nach § 153, (21) stets ein *imaginärer eigentlicher Kegelschnitt*, während zugleich die Wurzel in (11) bei reellen Punkten J_m reell ist (§ 155, (6)).

Die Schnittkurven einer beliebigen Fläche (1) und der imaginären eigentlichen Fläche (2) mit einer reellen Ebene (3) können also bei Einführung eines gemeinsamen Poldreiecks auf die Form (12) und (13) gebracht werden.

Es handelt sich noch um die Ermittlung eines gemeinsamen Poldreiecks.

2. Punkte gleicher Polare. Die Polarebenen eines Punktes x_k^0 im Raume in bezug auf die Flächen (1) und (2) sind:

$$(14) \quad \sum_1^4 f_k^0 x_k = 0, \quad (15) \quad \sum_1^4 x_k^0 x_k = 0.$$

Liegt der Punkt x_k^0 in der Ebene (3), so wird diese von den Ebenen (14) und (15) in den *Polaren* des Punktes in bezug auf die *Kegelschnitte* $f \times u$ und $g \times u$ geschnitten (§ 68, 8; § 11, 7).

Diese Polaren fallen zusammen, wenn die drei Ebenen (3), (14), (15) eine Achse gemein haben, also (I § 51, (7)):

$$(16) \quad f_k^0 - \lambda x_k^0 + \varrho u_k = 0.$$

Jeder Punkt x_k^0 gleicher Polare in bezug auf die beiden Kegelschnitte genügt daher den fünf Gleichungen:

$$(17) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44} - \lambda)x_4 + \varrho u_4 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \end{cases}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleicher Polare.

3. Die kubische Gleichung des Problems. Die Gleichungen (17) können nur bestehen, wenn λ eine Wurzel der *kubischen Gleichung* ist¹³⁹⁾:

$$(18) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Die einer Wurzel entsprechenden Punkte gleicher Polare.

Ist $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2, 3)$ eine Wurzel der Gleichung (18), so gibt es ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$, die den mit $\lambda = \lambda_i$ gebildeten Gleichungen (17) unter Elimination von ϱ genügen. Nach solcher Elimination stellen die Gleichungen (§ 107, 1) vier Ebenen dar, die wegen $\Delta(\lambda_i) = 0$ durch einen Punkt gehen. Wenn jedoch neben $\Delta(\lambda)$ auch noch die sechzehn Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$, $k, l = 1, 2, 3, 4$ für $\lambda = \lambda_i$ verschwinden, gehen die vier Ebenen durch eine Achse, und wenn auch die 36 Unterdeterminanten $\delta_{kl}(\lambda)$, $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ verschwinden, fallen sie zusammen (§ 107, 7; 9).

Zu einer Wurzel $\lambda = \lambda_i$ der Gleichung (18) gehören ein Punkt oder ∞^1 oder ∞^2 Punkte gleicher Polare (§ 50, 5).

5. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (18), so genügen die entsprechenden Punkte gleicher Polare $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ nach (16) den Gleichungen:

$$(19) \quad f_k^{(1)} - \lambda_1 x_k^{(1)} + \varrho_1 u_k = 0, \quad f_k^{(2)} - \lambda_2 x_k^{(2)} + \varrho_2 u_k = 0,$$

$$(20) \quad \sum_1^4 u_k x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 u_k x_k^{(2)} = 0,$$

gleichviel ob zu jeder der beiden Wurzeln ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$ gehören.

Wäre nun $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, so würde aus (19) folgen:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2)x_k^{(1)} + (\varrho_1 - \varrho_2)u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

und hieraus, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = u_1 : u_2 : u_3 : u_4 \quad \text{oder} \quad x_k^{(1)} = \sigma u_k,$$

und damit aus (20):

$$\sigma \sum_1^4 u_k^2 = 0,$$

was für die reelle Ebene (3) nicht möglich ist.

I. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleicher Polare können niemals zusammenfallen.

Multipliziert man die Gleichungen (19) mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k , so folgt mit Rücksicht auf (20):

$$(21) \quad f_{12} - \lambda_1 g_{12} = 0, \quad f_{21} - \lambda_2 g_{21} = 0,$$

und da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$(22) \quad f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. *Zwei Punkte gleicher Polare, $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, die zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehören, sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Flächen f und g , sowie jeden der beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$.*

6. Die Realität der Wurzeln. Mit Rücksicht auf 5, I und auf (22) überträgt sich der in § 155, 7 gegebene Beweis auch auf den vorliegenden Fall, also:

Die kubische Gleichung $\mathcal{A}(\lambda) = 0$ in (18) hat nur reelle Wurzeln.

7. Entwicklung der Determinante $\mathcal{A}(\lambda)$. Die Differentialquotienten der Determinanten $\mathcal{A}(\lambda)$ sind:

$$(23) \quad \begin{cases} -\mathcal{A}'(\lambda) = \mathcal{A}_{11}(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda) + \mathcal{A}_{33}(\lambda) + \mathcal{A}_{44}(\lambda), \\ \frac{1}{2} \mathcal{A}''(\lambda) = \delta_{11}(\lambda) + \delta_{22}(\lambda) + \delta_{33}(\lambda) + \delta_{44}(\lambda) + \delta_{55}(\lambda) + \delta_{66}(\lambda), \\ \frac{1}{6} \mathcal{A}'''(\lambda) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2, \end{cases}$$

wo:

$$(24) \quad \mathcal{A}_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & u_3 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}, \dots; \delta_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & u_2 \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & u_3 \\ u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

Daher ist mit den Abkürzungen (§ 107, (22); (23)):

$$(25) \quad \begin{cases} \mathcal{A}'^u = \mathcal{A}_{11}^u + \mathcal{A}_{22}^u + \mathcal{A}_{33}^u + \mathcal{A}_{44}^u, \\ \mathcal{A}''^u = \alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u + \alpha_{44}^u + \alpha_{55}^u + \alpha_{66}^u, \\ Q^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \end{cases}$$

für die Entwicklung von $\mathcal{A}(\lambda)$:

$$(26) \quad \mathcal{A}(\lambda) = Q^2 \lambda^3 + \mathcal{A}''^u \lambda^2 - \mathcal{A}'^u \lambda + \mathcal{A}^u,$$

und für die drei Wurzeln:

$$(27) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{\mathcal{A}''^u}{Q^2}, \quad \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{\mathcal{A}'^u}{Q^2}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{\mathcal{A}^u}{Q^2}.$$

8. Die Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinanten.

Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^i$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\mathcal{A}(\lambda)$ vorkommt; ferner $(\lambda - \lambda_i)^{i'}$ die höchste, die gleichzeitig in allen Unterdeterminanten $\mathcal{A}_{kl}(\lambda)$ ($k, l = 1, 2, 3, 4$) und $(\lambda - \lambda_i)^{i''}$ die höchste, die in

allen Unterdeterminanten $\delta_{kl}(\lambda)$ vorkommt ($k, l = 1, 2, \dots, 6$). Es sind dann nach dem Grade der einzelnen Determinanten nur zulässig die Werte:

$$(28) \quad l_i = 1, 2, 3; \quad l'_i = 0, 1, 2; \quad l''_i = 0, 1.$$

Nach der ersten Gleichung (23) folgt dann ebenso, wie in § 155, 9, daß:

$$l'_i < l_i,$$

und da:

$$\mathcal{A}'_{11}(\lambda) = -\delta_{66}(\lambda) - \delta_{55}(\lambda) - \delta_{11}(\lambda), \quad \mathcal{A}'_{12}(\lambda) = \delta_{45}(\lambda) - \delta_{12}(\lambda), \dots,$$

so folgt ebenfalls, wie dort:

$$l''_i < l'_i.$$

Zwischen den Multiplizitäten besteht daher mit Ausschluß der Gleichheit die Ungleichung:

$$(29) \quad l_i > l'_i > l''_i.$$

9. Die Elementarteilerexponenten. Die für die Determinante A^u in § 107, (25); (43) abgeleiteten Identitäten geben mit $a_{kk} - \lambda$ für a_{kk} und mit $-\mathcal{A}'(\lambda)$, $\frac{1}{2}\mathcal{A}''(\lambda)$ für A'' , A''' die in λ identischen Gleichungen⁸⁰⁾:

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}'^2(\lambda) &= \mathcal{A}_{11}^2(\lambda) + \mathcal{A}_{22}^2(\lambda) + \mathcal{A}_{33}^2(\lambda) + \mathcal{A}_{44}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}_{23}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}_{31}^2(\lambda) \\ &\quad + 2\mathcal{A}_{12}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}_{14}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}_{24}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}_{34}^2(\lambda) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{A}''(\lambda), \\ \frac{1}{4}\mathcal{A}''^2(\lambda) &= \delta_{11}^2(\lambda) + \delta_{22}^2(\lambda) + \dots + \delta_{66}^2(\lambda) + 2\delta_{12}^2(\lambda) + \dots \\ &\quad + 2\delta_{56}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}'(\lambda)Q^2. \end{aligned}$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 1)$ von $\mathcal{A}(\lambda)$ nach (28) und (29) stets $l'_i = 0$ ist, folgt aus (30), da alle Wurzeln reell sind: Für eine Doppelwurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 2)$ verschwinden mit $\mathcal{A}(\lambda_i)$ und $\mathcal{A}'(\lambda_i)$ auch alle $\mathcal{A}_{ki}(\lambda_i)$, so daß $l'_i \neq 0$, also nach (28); (29) $l'_i = 1$ ist. Für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 3)$ verschwinden mit $\mathcal{A}(\lambda_i)$, $\mathcal{A}'(\lambda_i)$ und $\mathcal{A}''(\lambda_i)$ auch alle $\delta_{ki}(\lambda_i)$, so daß $l''_i \neq 0$, also nach (28), (29) $l''_i = 1$, $l'_i = 2$ ist.

Danach bestimmt der Wert von l_i stets die Werte von l'_i , l''_i in folgender Weise:

$$(31) \quad l_i, l'_i, l''_i = 1, 0, 0; 2, 1, 0; 3, 2, 1.$$

Alle Elementarteilerexponenten einer jeden Wurzel haben je den Wert 1.

10. Die zu einer Wurzel gehörigen Punkte gleicher Polare. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (31) nicht alle $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$ verschwinden, so liefern für diese die Gleichungen (17) mit $k = 1, 2$ oder 3 (§ 107, (17)):

$$(32) \quad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \mathcal{A}_{k1}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k2}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k3}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k4}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört stets ein einziger bestimmter Punkt gleicher Polare.

Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (31) auch alle $\Delta_{ki}(\lambda)$, aber nicht alle $\delta_{ki}(\lambda)$ verschwinden, so genügen für diese den Gleichungen (17) die Punkte der Geraden (§ 107, (31)):

$$(33) \quad \begin{aligned} q_1^{(i)} : q_2^{(i)} : q_3^{(i)} : q_4^{(i)} : q_5^{(i)} : q_6^{(i)} \\ = \delta_{k1}(\lambda_i) : \delta_{k2}(\lambda_i) : \delta_{k3}(\lambda_i) : \delta_{k4}(\lambda_i) : \delta_{k5}(\lambda_i) : \delta_{k6}(\lambda_i), \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6 .

Zu einer zweifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^1 Punkte gleicher Polare, die eine Gerade erfüllen.

Da für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (31) auch alle $\delta_{ki}(\lambda)$ verschwinden, so sind für eine solche die Gleichungen (17) durch alle Punkte der Ebene (3) erfüllt (§ 107, 9).

11. Verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (18) findet sich nach (26) die Wurzel $\lambda = 0$ *nicht*, wenn $A'' \neq 0$, die Wurzel $\lambda = 0$ *einfach*, wenn $A'' = 0$, $A''' \neq 0$, *zweifach*, wenn $A'' = 0$, $A''' = 0$, $A'''' \neq 0$, und *dreifach*, wenn $A'' = 0$, $A''' = 0$, $A'''' = 0$.

Die Gleichungen (17), die mit $\lambda = 0$ die zur Wurzel $\lambda = 0$ gehörigen Punkte gleicher Polarebene bestimmen, decken sich aber in diesem Falle mit denjenigen (§ 141, (31)), welche die Doppelpunkte der Schnittkurve $f \times u$ liefern.

Die der Wurzel $\lambda = 0$ entsprechenden Punkte gleicher Polare in bezug auf die Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$ decken sich mit den Doppelpunkten des Kegelschnittes $f \times u$.

Da nun nach 10 aus der Multiplizität einer Wurzel die Anzahl der entsprechenden Punkte gleicher Polare folgt, so ergibt sich:

Die Kurve $f \times u$ hat keinen Doppelpunkt für $A'' \neq 0$, einen für $A'' = 0$, $A''' \neq 0$, eine Doppelgerade für $A'' = 0$, $A''' = 0$, $A'''' \neq 0$ und wird unbestimmt für $A'' = 0$, $A''' = 0$, $A'''' = 0$.

Wir erhalten damit aufs Neue die bereits in § 141, (24) abgeleiteten Bedingungen für den Rang der Schnittkurve $f \times u$.

12. Nicht verschwindende Wurzeln. Da nach (19) und (20) für jede einfache oder mehrfache, verschwindende oder nicht verschwindende Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt $x_k^{(i)}$ gleicher Polare:

$$\sum_1^4 f_k^{(i)} x_k^{(i)} - \lambda_i \sum_1^4 x_k^{(i)} x_k^{(i)} = 0$$

oder:

$$(34) \quad f_{ii} = \lambda_i g_{ii},$$

so folgt:

Ein einer nicht verschwindenden Wurzel λ_i entsprechender Punkt gleicher Polare $x_k^{(i)}$ liegt entweder auf keinem oder auf jedem der beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$.

Da im letzteren Fall die gemeinsame Polare gemeinsame Tangente wird, so berühren sich die beiden Kurven im Punkte $x_k^{(i)}$.

13. Fall von drei verschiedenen Wurzeln. Der einer einfachen Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleicher Polare (32') kann als reeller Punkt nicht auf der Kurve $g \times u$, also auch nicht mit seiner gemeinsamen Polare in bezug auf $f \times u$ und $g \times u$ vereinigt liegen. Falls $\lambda_i \neq 0$, liegt er nach 12 auch nicht auf $f \times u$; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach 11 der Doppelpunkt des Linienpaares $f \times u$.

Hat nun die Gleichung (18) drei einfache Wurzeln λ_i ($i = 1, 2, 3$), so gehört nach 10 zu jeder ein einziger Punkt gleicher Polare $x_k^{(i)}$, der nicht mit dieser vereinigt liegt. Zugleich ist nach 5, II jeder der drei Punkte $x_k^{(i)}$ harmonischer Pol jedes anderen.

I. Wenn die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ drei verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Kegelschnitte $f \times g$ stets ein einziges gemeinsames Polardreieck.

14. Fall einer Doppelwurzel. Einer Doppelwurzel λ_i entspricht eine reelle Gerade (33), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polare ist. Ist $\lambda_i \neq 0$, so sind die beiden Punkte S_1 und S_2 , in denen die Gerade den einen Kegelschnitt trifft, *Berührungspunkte* beider Kegelschnitte. Sie sind als Schnittpunkte einer reellen Geraden mit dem imaginären eigentlichen Kegelschnitt $g \times u$ zwei *getrennte* imaginäre Punkte. Ist $\lambda_i = 0$, so fällt die Gerade (33) mit der Doppellinie $f \times u$ zusammen und schneidet wie vorhin die Kurve $g \times u$ in zwei getrennten Punkten S_1 und S_2 .

Wählt man auf der Geraden (33), die der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ entspricht, irgendein Paar harmonischer Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu den getrennten Schnittpunkten S_1 und S_2 mit der Kurve $g \times u$, so sind diese harmonische Pole in bezug auf beide Kegelschnitte. Sie sind aber nach 5, II auch harmonische Pole zu dem Punkte gleicher Polare $x_k^{(3)}$, der der einfachen Wurzel λ_3 entspricht.

II. Wenn die kubische Gleichung eine zweifache und eine einfache Wurzel hat, so haben die beiden Kegelschnitte $f \times u$ und $g \times u$ ∞^1 gemeinsame Polardreiecke.

15. Fall einer dreifachen Wurzel. Bei einer dreifachen Wurzel sind alle Punkte der Ebene (3) Punkte gleicher Polare; die beiden Kegelschnitte fallen zusammen und haben daher alle ihre Polardreiecke gemein.

16. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder mehr gemeinsame Polardreiecke der beiden Kegelschnitte $f \propto u$ und $g \propto u$ vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Darstellungen (12) und (13) stets möglich. Zugleich erhält die Darstellung (12) nach (34) die Form:

$$(35) \quad \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 0.$$

Die Gleichung der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene (3) kann also stets durch orthogonale Transformation auf die Form (35) gebracht werden, wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der kubischen Gleichung (18) sind.

Das Dreieck, auf das sich die Koordinaten z_1, z_2, z_3 beziehen, ist das Polardreieck, das die Kurve (1), (3) mit der Kurve (2), (3) gemein hat. Es ist eindeutig bestimmt, wenn die Gleichung (18) drei einfache Wurzeln hat, ist dagegen einfach oder dreifach unbestimmt, wenn eine doppelte oder eine dreifache Wurzel vorhanden ist.

17. Unterscheidung der Vorzeichen. Aus der Gleichung (35) kann nun sowohl der Rang (§ 46, 13) als die Spezies (§ 51, (35)) der Schnittkurve sofort entnommen werden. Sind nämlich mit $A'' \neq 0$ die drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nach (27) alle von 0 verschieden, so sind ihre Vorzeichen nach der Regel des Descartes¹³¹), wie in § 89, (40) für:

$$A'''' < 0, \quad A'''' < 0, \quad A'' < 0: \quad + + +,$$

$$A'''' > 0, \quad A'''' < 0, \quad A'' > 0: \quad - - -,$$

also für:

$$(36) \quad \begin{cases} -A'' > 0, & A''A'''' > 0: \pm \pm \pm, \\ -A'', & A''A'''' \text{ nicht beide } > 0: \pm \pm \mp. \end{cases}$$

Ist ferner mit $A'' = 0$, $A'' \neq 0$ etwa $\lambda_3 = 0$, so sind die Vorzeichen von λ_1, λ_2 nach (27) für:

$$(37) \quad \begin{cases} -A'' > 0: \pm \pm, \\ -A'' < 0: \pm \mp. \end{cases}$$

Endlich ist mit $A'' = 0$, $A'' = 0$, $A'' \neq 0$ nur noch eine Wurzel von 0 verschieden.

18. Merkmale der Spezies der Schnittkurve mit einer beliebigen Ebene. Mit der zu § 155, (41) eingeführten Bezeichnung der Wurzeln erhält man daher an Stelle von § 153, (21) folgende Tabelle für die Merkmale der Spezies der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene (3):

$$\begin{aligned}
 (38) \quad A'' \neq 0 \quad & \begin{cases} -A'' > 0, & A'' A'''' > 0: & 1. \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 = 0, \\ -A'', A'' A'''' \text{ nicht beide } > 0: & 2. \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 = 0; \end{cases} \\
 A'' = 0, \quad A'' \neq 0 \quad & \begin{cases} -A'' > 0: & 3. \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 = 0, \\ -A'' < 0: & 4. \alpha_1^2 z_1^2 - \alpha_2^2 z_2^2 = 0; \end{cases} \\
 A'' = 0, \quad A'' = 0, \quad A'''' \neq 0: & 5. \alpha_1^2 z_1^2 = 0; \\
 A'' = 0, \quad A'' = 0, \quad A'''' = 0: & 6. \text{ Unbestimmt.}
 \end{aligned}$$

Dabei ist neben § 140, (5) zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}
 (39) \quad A'' &= A_{11}'' + A_{22}'' + A_{33}'' + A_{44}'', \\
 A'''' &= \alpha_{11}'' + \alpha_{22}'' + \alpha_{33}'' + \alpha_{44}'' + \alpha_{55}'' + \alpha_{66}''.
 \end{aligned}$$

Die Merkmale (38) gelten für jedes System von Tetraederkoordinaten, auf das sich die Gleichungen (1) und (3) gerade beziehen, und können unmittelbar als Zeilenvorschriften in die Tabelle § 153, (21) eingetragen werden.

Sie gelten insbesondere für schief- und rechtwinklige gemeine Koordinaten. Für letztere sind sie schon in der Tabelle § 114, (20) als Kolonnenüberschriften enthalten bis auf Abweichungen in den beiden ersten Kolonnen, die sich wie § 155, 22 erklären.

19. Schnittkurve mit einer Koordinatenebene. Nehmen wir für die bisher beliebige Ebene u_k die Ebene $x_4 = 0$ des Koordinatentetraeders, so wird $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$. Infolgedessen gehen die mit u_k geränderte Determinante § 140, (5) und die Unterdeterminanten § 140, (21); (35) auf Unterdeterminanten von A selbst (§ 138, (9)) zurück, und zwar wird:

$$\begin{aligned}
 (40) \quad A'' &= -A_{44}; \\
 A_{11}'' &= -\alpha_{11}, \quad A_{22}'' = -\alpha_{22}, \quad A_{33}'' = -\alpha_{33}, \\
 A_{23}'' &= -\alpha_{23}, \quad A_{31}'' = -\alpha_{31}, \quad A_{12}'' = -\alpha_{12}, \\
 A_{14}'' &= A_{24}'' = A_{34}'' = A_{44}'' = 0; \\
 \alpha_{44}'' &= -\alpha_{11}, \quad \alpha_{55}'' = -\alpha_{22}, \quad \alpha_{66}'' = -\alpha_{33}, \\
 \alpha_{56}'' &= -\alpha_{23}, \quad \alpha_{64}'' = -\alpha_{31}, \quad \alpha_{45}'' = -\alpha_{12}, \\
 &\text{alle übrigen } \alpha_{ki}'' = 0;
 \end{aligned}$$

und damit im Sinne von § 89, (5):

$$(41) \quad -A'' = A_{44}, \quad -A'' = A_{44}', \quad -A'''' = A_{44}''.$$

Für die Spezies der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Koordinatenebene $x_4 = 0$ gelten die folgenden Merkmale:

$$(42) \quad A_{44} \neq 0 \begin{cases} A'_{44} > 0, & A_{44}A''_{44} > 0: & 1. \text{ Imag. eig. Kegelschn.,} \\ A'_{44}, A_{44}A''_{44} \text{ nicht beide } > 0: & 2. \text{ Reell. eig. Kegelschn.;} \end{cases}$$

$$A_{44} = 0, \quad A'_{44} \neq 0 \begin{cases} A'_{44} > 0: & 3. \text{ Imag. getr. Linienp.,} \\ A'_{44} < 0: & 4. \text{ Reell. getr. Linienp.;} \end{cases}$$

$$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} \neq 0: \quad 5. \text{ Doppellinie;}$$

$$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0: \quad 6. \text{ Unbestimmt.}$$

Dies gilt für jedes beliebige System von Tetraederkoordinaten, auf das sich die Gleichung (1) bezieht.

20. Spezies der unendlich fernen Kurve der Fläche. In bezug auf jedes System, für das $x_4 = 0$ die unendlich ferne Ebene ist, also insbesondere für das schief- oder rechtwinklige gemeine Koordinatensystem gibt die Tabelle (42) die Merkmale für die Spezies der unendlich fernen Kurve der Fläche (1), wie sie bereits in der Tabelle § 99, (31) als Zeilenvorschriften auftreten.

21. Die Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung. Die Tabelle § 99, (31) für die Klassifikation beruht hiernach und nach § 155, 22 lediglich auf der Verbindung der Spezies der Fläche selbst und der ihrer unendlich fernen Kurve. So ist beispielsweise das hyperbolische Paraboloid diejenige Linienfläche (Spezies II), welche die unendlich ferne Ebene in einem reellen Linienpaar (Spezies 4) schneidet; der reelle elliptische Zylinder diejenige reelle Kegelfläche (Spezies V), welche die unendlich ferne Ebene in einem imaginären Linienpaar (Spezies 3) schneidet.

§ 157. Orthogonale Transformation des Schnittpunktpaares.

1. Gleichzeitige Quadratdarstellung zweier Schnittpunktpaare.

Wir gehen wieder von den beiden Flächen f und g in § 156, (1); (2) aus. Durch Transformation auf ein neues Tetraeder $J_1J_2J_3J_4$, dessen Kante J_1J_2 in die Schnittlinie q_k der beiden Ebenen:

$$(1) \quad u = \sum_1^4 u_k x_k = 0, \quad u' = \sum_1^4 u'_k x_k = 0$$

fällt und dessen Ecken J_1J_2 ein gemeinsames Polzweieck der Schnittpunktpaare $f \propto u \propto u'$ und $g \propto u \propto u'$ sind, erhalten diese den Entwicklungen von § 156, 1 entsprechend die Gleichungen:

$$(2) \quad \frac{f_{11}}{g_{11}} z_1^2 + \frac{f_{22}}{g_{22}} z_2^2 = 0, \quad z_1^2 + z_2^2 = 0.$$

Es bleibt nur die Bestimmung des gemeinsamen Polzweiecks übrig.

2. Punkte gleichen Poles. Die Polarebenen des Punktes x_k^0 im Raume in bezug auf die Flächen f und g haben die Gleichungen § 156, (14); (15). Liegt der Punkt x_k^0 auf der Geraden $q = u \times u'$, so wird diese von jenen Ebenen in den Polen des Punktes x_k^0 in bezug auf die Punktepaare $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ geschnitten. Diese Pole fallen zusammen, wenn die vier Ebenen (1) und § 156, (14); (15) alle durch einen Punkt gehen, also (I § 51, (16)):

$$(3) \quad f_k^0 - \lambda x_k^0 + \varrho u_k + \varrho' u'_k = 0.$$

Jeder Punkt x_k^0 gleichen Poles in bezug auf die beiden Punktepaare genügt daher den sechs Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varrho u_1 + \varrho' u'_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varrho u_2 + \varrho' u'_2 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 + a_{34}x_4 + \varrho u_3 + \varrho' u'_3 &= 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44} - \lambda)x_4 + \varrho u_4 + \varrho' u'_4 &= 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 &= 0, \\ u'_1x_1 + u'_2x_2 + u'_3x_3 + u'_4x_4 &= 0, \end{aligned}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleichen Poles.

3. Die quadratische Gleichung des Problems. Die Gleichungen (4) können nur bestehen, wenn λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung ist¹⁸³):

$$(5) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u'_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 & u'_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & u_3 & u'_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda & u_4 & u'_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zu jeder Wurzel $\lambda = \lambda_i$ dieser Gleichung gehört vermöge (4) ein Punkt gleichen Poles, eventuell auch ∞^1 Punkte.

4. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung (5) verschieden, so genügen die entsprechenden Punkte gleichen Poles $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ den Gleichungen:

$$(6) \quad f_k^{(1)} - \lambda_1 x_k^{(1)} + \varrho_1 u_k + \varrho'_1 u'_k = 0, \quad f_k^{(2)} - \lambda_2 x_k^{(2)} + \varrho_2 u_k + \varrho'_2 u'_k = 0;$$

$$(7) \quad \sum_1^4 u_k x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 u'_k x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^4 u_k x_k^{(2)} = 0, \quad \sum_1^4 u'_k x_k^{(2)} = 0.$$

Wäre nun $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, so würde aus (6) folgen:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2)x_k^{(1)} + (q_1 - q_2)u_k + (q_1' - q_2')u_k' = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

oder, da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ist:

$$x_k^{(1)} = \sigma u_k + \sigma' u_k',$$

wo σ und σ' nicht beide 0 sein können. Damit wird aber aus (7):

$$\sigma \sum_1^4 u_k^2 + \sigma' \sum_1^4 u_k u_k' = 0, \quad \sigma \sum_1^4 u_k u_k' + \sigma' \sum_1^4 u_k'^2 = 0,$$

was nur möglich, wenn die Determinante (§ 140, (15)):

$$\sum_1^4 u_k^2 \cdot \sum_1^4 u_k'^2 - \left(\sum_1^4 u_k u_k' \right)^2 = \sum_1^6 q_k^2 = 0;$$

dies ist aber für die reelle Gerade q_k ausgeschlossen.

I. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleichen Poles können niemals zusammenfallen.

Durch Multiplikation mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ folgt dann aus (6) mit Rücksicht auf (7), ebenso wie § 156, 5:

$$(8) \quad f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. Zwei zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehörende Punkte gleichen Poles sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Flächen f und g , sowie jedes der beiden Punktepaare $f \propto u \times u'$ und $g \propto u \times u'$.

5. Die Realität der Wurzeln. Wie in § 155, 7 folgt auch hier: Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (5) sind stets reell.

6. Entwicklung der Determinante. Die Differentialquotienten der Determinante $\mathcal{A}(\lambda)$ sind:

$$(9) \quad \begin{cases} -\mathcal{A}'(\lambda) = \mathcal{A}_{11}(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda) + \mathcal{A}_{33}(\lambda) + \mathcal{A}_{44}(\lambda), \\ \frac{1}{2} \mathcal{A}''(\lambda) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 = Q^2, \end{cases}$$

wo:

$$(10) \quad \mathcal{A}_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & u_2 & u_2' \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} & u_3 & u_3' \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda & u_4 & u_4' \\ u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots$$

Daher ist mit der Abkürzung (§ 142, (22)):

$$(11) \quad A^{uu'} = A_{11}^{uu'} + A_{22}^{uu'} + A_{33}^{uu'} + A_{44}^{uu'}$$

die Entwicklung von $\mathcal{A}(\lambda)$:

$$(12) \quad \mathcal{A}(\lambda) = Q^2 \lambda^2 - A'^{uu'} \lambda + A^{uu'},$$

und für die Wurzeln:

$$(13) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{A'^{uu'}}{Q^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{A^{uu'}}{Q^2}.$$

7. Die Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinante.

Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l'_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\mathcal{A}(\lambda)$ vorkommt und $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste, die gleichzeitig in allen Unterdeterminanten $\mathcal{A}_{kl}(\lambda)$ vorkommt ($k, l = 1, 2, 3, 4$). Dann ist nach dem Grade der Determinanten zulässig:

$$(14) \quad l_i = 1, 2; \quad l'_i = 0, 1.$$

und ist nach (9), wie in § 156, 8:

$$(15) \quad l'_i < l_i.$$

8. Die Elementarteilerexponenten. Die für die zweifach geränderte Determinante § 140, (12) abgeleitete Gleichung § 142, (23) gibt mit $a_{kk} - \lambda$ für a_{kk} und mit $-\mathcal{A}'(\lambda)$ für $A'^{uu'}$ die in λ identische Gleichung⁸⁰⁾:

$$(16) \quad \mathcal{A}'^2(\lambda) = \mathcal{A}_{11}^2(\lambda) + \mathcal{A}_{22}^2(\lambda) + \mathcal{A}_{33}^2(\lambda) + \mathcal{A}_{44}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}_{23}^2(\lambda) + \dots \\ + 2\mathcal{A}_{34}^2(\lambda) + 2\mathcal{A}(\lambda) Q^2.$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ ($l_i = 1$) von $\mathcal{A}(\lambda)$ nach (14) und (15) stets $l'_i = 0$ sein muß, verschwinden für eine Doppelwurzel $\lambda = \lambda_i$ ($l_i = 2$) mit $\mathcal{A}(\lambda_i)$ und $\mathcal{A}'(\lambda_i)$ nach (16) auch alle $\mathcal{A}_{ki}(\lambda_i)$, so daß $l'_i \neq 0$, also nach (14) $l'_i = 1$ ist.

Danach ist stets:

$$(17) \quad l_i = 1, \quad l'_i = 0 \quad \text{oder} \quad l_i = 2, \quad l'_i = 1.$$

9. Der zu einer Wurzel gehörige Punkt gleichen Poles. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nicht sämtliche Unterdeterminanten $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$ verschwinden, liefern die Gleichungen (4) (§ 142, (29)):

$$(18) \quad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} : x_4^{(i)} = \mathcal{A}_{k1}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k2}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k3}(\lambda_i) : \mathcal{A}_{k4}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört daher stets ein einziger bestimmter Punkt gleichen Poles. Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ alle $\mathcal{A}_{ki}(\lambda)$ verschwinden, wird der zugehörige Punkt gleichen Poles ganz unbestimmt (§ 142, 9).

10. Verschwindende und nicht verschwindende Wurzeln.

Unter den Wurzeln der Gleichung (5) findet sich nach (12) die Wurzel $\lambda = 0$ nicht, wenn $A^{uu'} \neq 0$, die Wurzel $\lambda = 0$ einfach, wenn $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} \neq 0$, und zweifach, wenn $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} = 0$.

Entsprechend § 156, 11 ergibt sich daher, wie in § 142, (24):

Das Schnittpunktpaar $f \times u \times u'$ ist getrennt für $A^{uu'} \neq 0$, zusammenfallend für $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} \neq 0$, unbestimmt für $A^{uu'} = 0$, $A'^{uu'} = 0$.

Für jede Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt gleichen Poles $x_k^{(i)}$ ist nach (6) und (7):

$$\sum_1^4 f_k^{(i)} x_k^{(i)} - \lambda_i \sum_1^4 x_k^{(i)} x_k^{(i)} = 0$$

oder:

$$(19) \quad f_{ii} = \lambda_i g_{ii}.$$

Ein einer nicht verschwindenden Wurzel λ_i entsprechender Punkt gleichen Poles $x_k^{(i)}$ gehört entweder keinem oder jedem der beiden Punktepaare $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ an.

11. Fall von zwei verschiedenen Wurzeln. Der einer einfachen Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleichen Poles (18) kann als reeller Punkt nicht dem Punktepaar $g \times u \times u'$ angehören, also auch nicht mit seinem gemeinsamen Pol in bezug auf $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ vereinigt liegen. Falls $\lambda_i \neq 0$ ist, gehört er nach 10 auch nicht dem Punktepaar $f \times u \times u'$ an; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach 10 der Doppelpunkt $f \times u \times u'$.

Hat nun die Gleichung (5) zwei einfache Wurzeln λ_1 und λ_2 , so gehört zu jeder ein einziger Punkt gleichen Poles $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, der nicht mit diesem Pol zusammenfällt. Zugleich ist nach 4, II jeder der beiden Punkte harmonischer Pol des andern.

Wenn die quadratische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ zwei verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Punktepaare $f \times u \times u'$ und $g \times u \times u'$ stets ein einziges gemeinsames reelles Polzweieck.

12. Fall einer Doppelwurzel. Für eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ sind alle Punkte der Geraden $u \times u'$ Punkte gleichen Poles; die beiden Schnittpunktepaare haben alle ihre Polzweiecke gemein und fallen zusammen.

13. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder ∞^1 gemeinsame Polzweiecke der beiden Punktepaare vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Darstellung (2) stets möglich. Zugleich erhält die erste Darstellung (2) nach (19) die Form:

$$(20) \quad \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0.$$

Die Gleichung des Schnittpunktepaares der Fläche $f=0$ in § 156, (1) mit der Schnittlinie der beiden Ebenen (1) kann also stets durch ortho-

gonale Transformation auf die Form (20) gebracht werden, wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung (5) sind.

Das Zweieck, auf das sich die Koordinaten z_1, z_2 beziehen, ist das Polzweieck, welches das Punktpaar $f \times u \times u'$ mit dem imaginären eigentlichen Punktpaar $g \times u \times u'$ gemein hat. Es ist eindeutig für $\lambda_1 \neq \lambda_2$, einfach unbestimmt für $\lambda_1 = \lambda_2$.

14. Merkmale der Spezies des Schnittpunktpaares der Fläche mit einer beliebigen Geraden. Für die Spezies des Schnittpunktpaares der Fläche § 156, (1) mit der Schnittlinie der beiden Ebenen u und u' in (1) gelten nach (20) und (13) folgende Merkmale (§ 51, (35)):

$$(21) \quad \left. \begin{array}{l} A^{uu'} \neq 0 \\ A^{uu'} = 0, A'^{uu'} \neq 0 \\ A^{uu'} = 0, A'^{uu'} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A^{uu'} > 0: 1. \text{ Imag. eigtl. Punktpaar,} \\ A^{uu'} < 0: 2. \text{ Reell. eigtl. Punktpaar;} \\ 3. \text{ Zusammenfall. Punktpaar;} \\ 4. \text{ Unbest. Punktpaar.} \end{array}$$

15. Schnittpunktpaar eines ebenen Schnittes der Fläche mit einer Koordinatenebene. Die Gerade $u \times u'$ fällt in eine Seitenebene $x_4 = 0$ des Koordinatentetraeders, wenn $u'_1 = 0, u'_2 = 0, u'_3 = 0, u'_4 = 1$. In diesem Falle wird aber nach § 140, (12) im Sinne von § 140, (21); (35):

$$(22) \quad A^{uu'} = -A_{44}^u;$$

$$(23) \quad A_{11}^{uu'} = -\alpha_{11}^u, A_{22}^{uu'} = -\alpha_{22}^u, A_{33}^{uu'} = -\alpha_{33}^u, A_{44}^{uu'} = 0;$$

und im Sinne von § 109, (10):

$$(24) \quad A'^{uu'} = -A_{44}'^u.$$

Für die Spezies des Schnittpunktpaares, in dem die Schnittkurve der Fläche § 156, (1) mit der Ebene u in § 156, (3) die Koordinatenebene $x_4 = 0$ schneidet, gelten die Merkmale:

$$(25) \quad \left. \begin{array}{l} A_{44}^u \neq 0 \\ A_{44}^u = 0, A_{44}'^u \neq 0 \\ A_{44}^u = 0, A_{44}'^u = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -A_{44}^u > 0: 1. \text{ Imag. eig. Punktpaar,} \\ -A_{44}^u < 0: 2. \text{ Reell. eig. Punktpaar;} \\ 3. \text{ Zusammenfall. Punktpaar;} \\ 4. \text{ Unbest. Punktpaar.} \end{array}$$

Dies gilt für jedes beliebige System von Tetraederkoordinaten, auf das sich die Gleichung § 156, (1) gerade bezieht.

16. Unendlich fernes Punktpaar eines ebenen Schnittes. In bezug auf jedes System, für das $x_4 = 0$ die unendlich ferne Ebene ist, also insbesondere für das schief- oder rechtwinklige gemeine Koordinatensystem gibt die Tabelle (25) die Merkmale für die Spezies des unendlich fernen Punktpaares eines ebenen Schnittes, wie sie bereits in der Tabelle § 114, (20) als Zeilenmerkmale auftreten.

§ 158. Polarberührungstetraeder und Erzeugung durch reziproke Bündel.

1. Begriff des Polarberührungstetraeders. Während bei einem *Polartetraeder* $J_1 J_2 J_3 J_4$ einer Fläche zweiter Ordnung und Klasse je zwei verschiedene Ecken, also $J_2, J_3; J_3, J_1; J_1, J_2; J_1, J_4; J_2, J_4; J_3, J_4$ harmonische Pole sind, soll als *Polarberührungstetraeder* ein solches bezeichnet werden, bei dem (§ 68, 9, II):

$$(1) \quad J_2, J_3; J_3, J_1; J_1, J_2; J_2, J_4; J_3, J_4; J_1, J_1; J_4, J_4,$$

je zwei harmonische Pole sind, während es J_1, J_4 nicht sind.¹³⁴⁾

Man wählt, um ein solches Tetraeder zu erhalten, als Ecken J_1 und J_4 irgend zwei getrennte Punkte der Fläche selbst (∞^2, ∞^2), deren Verbindungslinie nicht gerade Erzeugende der Fläche ist, und nimmt alsdann auf der reziproken Polare dieser Verbindungslinie (§ 68, 15, III) irgend zwei harmonische Pole (∞^1) der Fläche als Ecken J_2 und J_3 , worauf die Bedingungen (1) erfüllt sind.

Es gibt hiernach ∞^5 (reelle) Polarberührungstetraeder einer (reellen) Fläche zweiter Ordnung und Klasse.

2. Gleichungsform der Fläche. Den analytischen Ausdruck der Definition (1) eines Polarberührungstetraeders der Fläche (§ 143, (1), (2)):

$$(2) \quad f = \sum_1^4 \sum_1^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \quad (3) \quad F = \sum_1^4 \sum_1^4 A_{ki} u_k u_i = 0$$

bilden die Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} f_{11} = 0, f_{44} = 0 \text{ (§ 138, (13)); } f_{14} \neq 0 \text{ (§ 146, (7));} \\ f_{23} = 0, f_{31} = 0, f_{12} = 0, f_{24} = 0, f_{34} = 0 \text{ (§ 149, (6)).} \end{cases}$$

Die Gleichung (2) erhält also immer und nur in bezug auf ein *Polarberührungstetraeder* die Form (§ 138, (12)):

$$(5) \quad b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 + 2b_{14} y_1 y_4 = 0.$$

Die Determinante der Gleichung (5) ist:

$$(6) \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -b_{22} b_{33} b_{14}^2.$$

Die Gleichung der Fläche in Ebenen- und Strahlenkoordinaten (§ 143, (2); § 144, (2)) werden daher nach § 138, (30):

$$(7) \quad S^2 F = B \left\{ \frac{v_2^2}{b_{22}} + \frac{v_3^2}{b_{33}} + \frac{2v_1 v_4}{b_{14}} \right\} = 0,$$

$$(8) \quad \varphi = -B \left\{ \frac{r_1^2}{b_{14}^2} - \frac{r_4^2}{b_{22} b_{33}} + \frac{2r_2 r_3}{b_{22} b_{14}} - \frac{2r_3 r_5}{b_{33} b_{14}} \right\} = 0.$$

3. Dualität des Berührungstetraeders. Nach der Form der Gleichungen (5) und (7) ist ein Polarberührungstetraeder *sich selbst dual*.

Die beiden Ecken J_1 und J_4 sind Punkte (*Berührungspunkte*) der Fläche, die Seitenebenen l_1 und l_4 sind *Berührungsebenen*. Die Eckenpaare $J_2, J_3; J_3, J_1; J_1, J_2; J_2, J_4; J_3, J_4$ sind *harmonische Pole* und die Seitenebenenpaare $l_2, l_3; l_3, l_1; l_1, l_2; l_2, l_4; l_3, l_4$ *harmonische Polarebenen*. J_1 und l_4 , J_4 und l_1 , J_2 und l_2 , J_3 und l_3 sind je *Pol* und *Polarebene*. Die Kanten $J_1J_4 = l_2 \times l_3$ und $J_2J_3 = l_1 \times l_4$ sind *reziproke Polaren*, die Kanten J_1J_2 und J_1J_3 , sowie J_4J_2 und J_4J_3 (I § 63, Fig. 319) konjugierte Tangenten (§ 68, 16).

4. Spezies der Fläche. Eine imaginäre Fläche kann die Gleichung (5) nicht darstellen, da die ihr genügenden Ecken J_1 und J_4 reell angenommen sind. Dagegen folgt aus (6) mit Rücksicht auf § 152, 7; 9:

Die auf ein Polarberührungstetraeder bezogene Gleichung (5) stellt stets eine reelle geradlinige oder nicht geradlinige Fläche dar, je nachdem die Koeffizienten b_{22} und b_{33} verschiedenes oder gleiches Vorzeichen haben.

5. Beispiel. Unter die Form (5) fällt die in § 73, (8) angegebene Gleichung des Paraboloides. Dort sind der Anfangspunkt Ω als J_4 und der unendlich ferne Punkt der ξ -Achse als J_1 Punkte der Fläche. Ihre Tangentialebenen, die $\eta\xi$ -Ebene und die unendlich ferne Ebene, schneiden sich in der unendlich fernen Geraden der $\eta\xi$ -Ebene, die somit reziproke Polare der ξ -Achse ist. Die η - und ξ -Achse sind konjugierte Tangenten, also ihre unendlich fernen Punkte als J_2 und J_3 harmonische Pole (§ 68, 16; 15, III).

Setzt man insbesondere:

$$b_{22}, b_{33}, b_{14} = \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, 1; y_1, y_2, y_3, y_4 = x, y, z, t; v_1, v_2, v_3, v_4 = u, v, w, s;$$

$$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 = p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34},$$

so erhält man aus (5), (7), (8) wieder die Gleichungen § 70, (24), (32), (41) mit $a = 0$.

6. Darstellung reziproker Bündel in Dreikantskoordinaten. In einem Bündel mit dem Mittelpunkt E seien, in bezug auf ein beliebiges Koordinatendreikant, x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des laufenden Strahles und u_1, u_2, u_3 die Koordinaten der laufenden Ebene. In einem zweiten Bündel mit dem Mittelpunkt E' mögen x'_1, x'_2, x'_3 und u'_1, u'_2, u'_3 die entsprechende Bedeutung haben (Fig. 223).

Dann werden die beiden Bündel reziprok aufeinander bezogen durch die vier Systeme von Gleichungen (I § 67, 7):

$$(9) \quad u'_k = \sum_1^3 c_{ki} x_i, \quad (10) \quad C x_i = \sum_1^3 C_{ki} u'_k;$$

$$(11) \quad C x'_k = \sum_1^3 C_{ki} u_i, \quad (12) \quad u_i = \sum_1^3 c_{ki} x'_k.$$

Die Gleichungen (9) enthalten, da es überall nur auf die Verhältnisse der Koordinaten ankommt, die acht unabhängigen Verhältnisse der neun Konstanten c_{ki} , deren Determinante:

$$(13) \quad C = |c_{ki}|$$

nicht 0 sei. Mit C_{ki} sind deren Unterdeterminanten bezeichnet.

Die Gleichungen (9) und (10), die Auflösungen voneinander sind, bestimmen zu einem Strahl x_i des ersten Bündels die entsprechende Ebene u'_k des zweiten und umgekehrt; die Gleichungen (11) und (12) zu einer Ebene u_i des ersten Bündels den entsprechenden Strahl x'_k des zweiten und umgekehrt (§ 18, (16)—(19)).

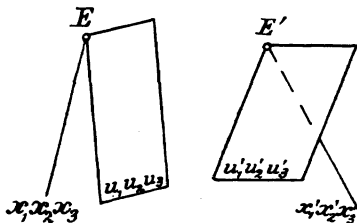


Fig. 223.

7. Darstellung reziproker Bündel in Raumkoordinaten. Um die beiden Bündel im Raume darzustellen, wo sie eine beliebige Lage gegeneinander haben, nehmen wir die Mittelpunkte E und E' als Ecken J_4 und J_1 eines Koordinatentetraeders und lassen die Kanten der beiderseitigen Koordinatendreikante der Bündel in die von J_4 , bezüglich J_1 ausgehenden Kanten des Tetraeders fallen.

Sind dann in laufenden Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 des Raumes:

$$(14) \quad y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu, \quad (15) \quad v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0$$

die Gleichungen eines Strahles (I § 59, (20')) und einer Ebene (I § 58, (4)) des Bündels J_4 und:

$$(16) \quad y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu', \quad (17) \quad v_2' y_2 + v_3' y_3 + v_4' y_4 = 0$$

die Gleichungen eines Strahles und einer Ebene des Bündels J_1 , so sind $\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'; v_1, v_2, v_3$ und v_2', v_3', v_4' bezüglich zugleich die in 6 mit $x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; u_1, u_2, u_3$ und u'_1, u'_2, u'_3 bezeichneten Koordinaten (I § 57, 15, vorletzter Absatz links; I § 57, 16, Satz rechts). Daher entspricht (Fig. 224):

dem Strahl s :

$$(18) \quad y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu$$

des Bündels J_4 nach (9) die Ebene Σ' :

$$(20) \quad (c_{11}\lambda + c_{12}\mu + c_{13}\nu)y_2 + (c_{21}\lambda + c_{22}\mu + c_{23}\nu)y_3 + (c_{31}\lambda + c_{32}\mu + c_{33}\nu)y_4 = 0$$

des Bündels J_1 .

dem Strahl s' :

$$(19) \quad y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu'$$

des Bündels J_1 nach (12) die Ebene Σ :

$$(21) \quad (c_{11}\lambda' + c_{21}\mu' + c_{31}\nu')y_1 + (c_{12}\lambda' + c_{22}\mu' + c_{32}\nu')y_2 + (c_{13}\lambda' + c_{23}\mu' + c_{33}\nu')y_3 = 0$$

des Bündels J_4 .

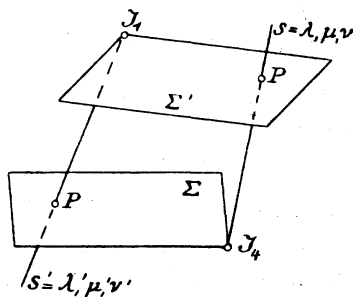


Fig. 224.

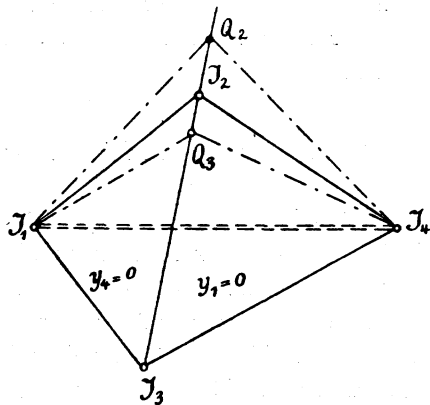


Fig. 225.

8. Die dem Verbindungsstrahl der Mittelpunkte entsprechenden Ebenen. Der Verbindungsstrahl der beiden Mittelpunkte J_1 und J_4 (Fig. 225) hat als Strahl (18) und (19) bezüglich die Parameter:

$$\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 0; \quad \lambda' = 0, \mu' = 0, \nu' = 1,$$

und daher nach (20) und (21) als entsprechende Ebenen:

$$(22) \quad c_{11}y_2 + c_{21}y_3 + c_{31}y_4 = 0; \quad (23) \quad c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 = 0.$$

Nehmen wir diese beiden Ebenen als Koordinatenebenen $J_1J_2J_3$ ($y_4 = 0$) und $J_2J_3J_4$ ($y_1 = 0$), so sind:

$$c_{11} = 0, c_{21} = 0; \quad c_{32} = 0, c_{33} = 0.$$

Ändern wir dann die Bezeichnung der andern Konstanten, indem wir setzen:

$$c_{12} = b_{22}, \quad c_{13} = \sigma, \quad c_{22} = \tau, \quad c_{23} = b_{33}, \quad c_{31} = 2b_{14},$$

so findet die reziproke Beziehung der beiden Bündel nunmehr den Ausdruck:

Dem Strahl s :

$$(24) \quad y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu$$

des Bündels J_4 entspricht die Ebene Σ' :

$$(26) \quad (b_{22}\mu + \sigma\nu)y_2 + (\tau\mu + b_{33}\nu)y_3 + 2b_{14}\lambda y_4 = 0$$

des Bündels J_1 .

Dem Strahl s' :

$$(25) \quad y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu'$$

des Bündels J_1 entspricht die Ebene Σ :

$$(27) \quad 2b_{14}\nu'y_1 + (b_{22}\lambda' + \tau\mu')y_2 + (\sigma\lambda' + b_{33}\mu')y_3 = 0$$

des Bündels J_4 .

9. Strahlen, die mit ihrer Ebene vereinigt liegen. Der Strahl s liegt nach (24); (26) in der Ebene Σ' , bezüglich s' nach (25); (27) in Σ , wenn identisch in y_1 und y_4 :

$$(b_{22}\mu + \sigma\nu)\mu y_1 + (\tau\mu + b_{33}\nu)\nu y_1 + 2b_{14}\lambda^2 y_4 = 0,$$

also:

$$(28) \quad \lambda = 0, \quad b_{22}\mu^2 + (\sigma + \tau)\mu\nu + b_{33}\nu^2 = 0.$$

$$2b_{14}\nu'^2 y_1 + (b_{22}\lambda' + \tau\mu')\lambda' y_4 + (\sigma\lambda' + b_{33}\mu')\mu' y_4 = 0,$$

$$(29) \quad b_{22}\lambda'^2 + (\sigma + \tau)\lambda'\mu' + b_{33}\mu'^2 = 0, \quad \nu' = 0.$$

In jedem der beiden Bündel gibt es also ein Paar von Strahlen, die je mit ihrer entsprechenden Ebene vereinigt liegen.

Die Gleichungen dieser Strahlenpaare lauten nach (28) und (24), bezüglich (29) und (25):

$$y_1 = 0, \quad b_{22}y_2^2 + (\sigma + \tau)y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0.$$

$$b_{22}y_2^2 + (\sigma + \tau)y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Sie sind also die Verbindungslinien der Mittelpunkte J_4 und J_1 der beiden Bündel mit dem auf der Kante J_2J_3 gelegenen Punktepaar:

$$(30) \quad b_{22}y_2^2 + (\sigma + \tau)y_2y_3 + b_{33}y_3^2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt zugleich die beiden Ebenen dar, die mit ihren entsprechenden Strahlen vereinigt liegen.

10. Definitive Wahl des Koordinatentetraeders. Nach der unter 8 getroffenen Verfügung sind die Ecken J_1 und J_4 und die Ebenen $J_1J_2J_3$ und $J_2J_3J_4$ des Koordinatentetraeders und damit auch die Kante J_2J_3 bestimmt, die Ecken J_2 und J_3 aber auf dieser noch beliebig. Wir verfügen nunmehr über sie, indem wir sie als zwei zu dem Punktepaar Q_2Q_3 in (30) harmonische Punkte annehmen (Fig. 225). Dazu muß:

$$(31) \quad \sigma + \tau = 0$$

genommen werden, so daß die Gleichungen (30) werden:

$$(32) \quad b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Damit folgt dann:

Für zwei beliebige reziproke Bündel sei ein Koordinatentetraeder eingeführt, dessen Ecken J_4 und J_1 die Mittelpunkte der beiden Bündel sind und dessen Ecken J_2 und J_3 auf der Schnittlinie der dem Verbindungsstrahl J_1J_4 entsprechenden Ebenen liegen und harmonisch sind zu den beiden Punkten Q_2, Q_3 , in denen diese Schnittlinie von den mit ihren entsprechenden Ebenen vereinigt liegenden Strahlen beider Bündel getroffen wird. In bezug auf ein solches Tetraeder stellt sich die reziproke Beziehung derart dar, daß:

dem Strahle s :

$$(33) \quad y_1 : y_2 : y_3 = \lambda : \mu : \nu$$

des Bündels J_4 die Ebene Σ' :

$$(35) \quad (b_{22}\mu + \sigma\nu)y_2 + (-\sigma\mu + b_{33}\nu)y_3 + 2b_{14}\lambda y_4 = 0$$

des Bündels J_1 entspricht.

dem Strahle s' :

$$(34) \quad y_2 : y_3 : y_4 = \lambda' : \mu' : \nu'$$

des Bündels J_1 die Ebene Σ :

$$(36) \quad 2b_{14}\nu'y_1 + (b_{22}\lambda' - \sigma\mu')y_2 + (\sigma\lambda' + b_{33}\mu')y_3 = 0$$

des Bündels J_4 entspricht.

Hier sind b_{22}, b_{33}, b_{14} und σ beliebige Konstanten und muß nur die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{22} & \sigma \\ 0 & -\sigma & b_{33} \\ 2b_{14} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2b_{14}(b_{22}b_{33} + \sigma^2)$$

von Null verschieden sein.

Den in der Ebene $y_1 = 0$ liegenden Strahlen (33) und den in der Ebene $y_4 = 0$ liegenden Strahlen (34) entsprechen nach (35) mit $\lambda = 0$ und (36) mit $\nu' = 0$ die Ebenen durch die Kante J_1J_4 , die beiden Bündeln angehören.

11. Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente. Jeder Strahl des einen Bündels schneidet die ihm entsprechende Ebene des andern, falls er nicht ganz in ihr liegt, in einem Punkte P (Fig. 224). Den Ort solcher Schnittpunkte erhält man durch Elimination der Parameter $\lambda : \mu : \nu$ aus (33) und (35) oder der Parameter λ', μ', ν' aus (34) und (36). Beides führt zu derselben Gleichung:

$$(37) \quad b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 + 2b_{14}y_1y_4 = 0.$$

Daraus aber folgt mit Rücksicht auf (5):

I. *Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Ebenen zweier reziproker Bündel ist eine Fläche zweiter Ordnung.*¹⁹⁴⁾

Das für die beiden Bündel unter 10 eingeführte Tetraeder ist ein Polarberührungstetraeder der Fläche. Im besonderen liegen die Mittelpunkte der Bündel auf der Fläche und die ihrem Verbindungs-

strahl entsprechenden Ebenen sind Tangentialebenen der Fläche in jenen Punkten. Mit Rücksicht auf (32) und 4 folgt zugleich:

II. *Je nachdem die mit ihren entsprechenden Ebenen vereinigt liegenden Strahlen der beiden Bündel reell oder nicht reell sind, ist die Fläche eine geradlinige oder nicht geradlinige.*

Dual gilt in gleicher Weise der Satz:

I'. *Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen und Punkte zweier reziproker Ebenen im Raume umhüllen eine Fläche zweiter Klasse.*

12. Erzeugung einer gegebenen Fläche durch reziproke Bündel. Ist umgekehrt die auf eines ihrer ∞^5 Polarberührungstetraeder bezogene Fläche (37) gegeben, so sind damit auch die reziproken Bündel (33)—(36) bis auf die willkürlich bleibende Konstante σ bestimmt.

III. *Jede gegebene reelle Fläche zweiter Ordnung kann durch reziproke Bündel erzeugt werden. Zu jedem der ∞^5 Polarberührungstetraeder der Fläche gehören ∞^1 solche Erzeugungen.*

13. Parameterdarstellung der Fläche. Bezeichnet man in (33) und (35) die Verhältnisse $\mu : \lambda$, $\nu : \lambda$ kurz mit μ , ν , setzt also $\lambda = 1$, und nimmt die Konstanten in die Koordinaten auf (I § 57, 6), setzt also $b_{22} = 1$, $b_{33} = \varepsilon = \pm 1$, $2b_{14} = -1$, wählt endlich $\sigma = 0$, so ergibt sich aus (33) sofort (§ 52, (9); (9')):

Die Koordinaten des laufenden Punktes der Fläche:

$$(38) \quad y_2^2 + \varepsilon y_3^2 - y_1 y_4 = 0$$

stellen sich durch die Parameter μ , ν des Strahles s in folgender Weise dar:

$$(39) \quad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 1 : \mu : \nu : \mu^2 + \varepsilon \nu^2.$$

Da ferner die Tangentialebene der Fläche im Punkte y_k die Koordinaten hat (§ 143, (5)):

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = y_4 : -2y_2 : -2\varepsilon y_3 : y_1,$$

so lautet die zugehörige Parameterdarstellung der laufenden Tangentialebene:

$$(40) \quad v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = \mu^2 + \varepsilon \nu^2 : -2\mu : -2\varepsilon \nu : 1.$$

§ 159. Schmiegunstetraeder und Erzeugung durch projektive Büschel.

1. Begriff des Schmiegunstetraeders. Bei einer Linienfläche zweiter Ordnung bestimmen irgend zwei Erzeugende der einen Schar mit irgend zwei Erzeugenden der andern Schar ein *Schmiegunstetraeder*. Die vier Ecken J_1, J_2, J_3, J_4 (Fig. 226) eines solchen gehören, als Schnittpunkte der vier Erzeugenden, der Fläche selbst an.

Die in die vier Erzeugenden fallenden Kanten J_3J_1 , J_1J_2 , J_2J_4 , J_4J_3 bilden ein auf der Fläche liegendes windschiefes Vierseit. Die vier Seitenebenen $J_1J_2J_3$, $J_2J_1J_4$, $J_3J_1J_4$, $J_4J_2J_3$ sind die Tangentialebenen

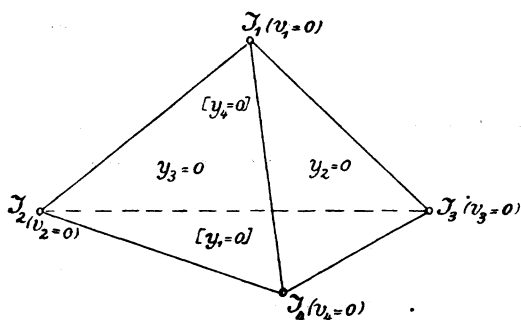


Fig. 226.

der Fläche bezüglich in den Ecken J_1 , J_2 , J_3 , J_4 , da sie zwei durch die Ecke gehende Erzeugende verbinden. Die beiden Kanten J_2J_3 und J_1J_4 liegen nicht auf der Fläche und sind reziproke Polaren, da jede von beiden die Schnittlinie der Tangentialebenen in den Schnittpunkten der Fläche mit der andern ist (§ 68, 15, V).

Das Schmiegungstetraeder ist sich selbst dual¹³⁴.

2. Form der Gleichung in bezug auf ein Schmiegungstetraeder.

Die Bedingungen für ein Schmiegungstetraeder der Fläche:

$$(1) \quad f = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 a_{ki} x_k x_i = 0, \quad (2) \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 A_{ki} u_k u_i = 0$$

lauten nach seiner Definition (§ 146, (7)):

$$(3) \quad f_{11} = 0, f_{22} = 0, f_{33} = 0, f_{44} = 0; \quad f_{31} = 0, f_{12} = 0, f_{24} = 0, f_{43} = 0.$$

Die Gleichung der Fläche erhält daher immer und nur in bezug auf ein Schmiegungstetraeder die Form (§ 62, (7)):

$$(4) \quad f = 2b_{23}y_2y_3 + 2b_{14}y_1y_4 = 0.$$

Die Determinante dieser Gleichung ist:

$$(5) \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = b_{23}^2 b_{14}^2.$$

Daher wird:

$$B_{23} = B_{32} = b_{23}b_{14}^2, \quad B_{14} = B_{41} = b_{23}^2b_{14};$$

$$\beta_{11} = -b_{23}^2, \quad \beta_{44} = -b_{14}^2, \quad \beta_{25} = \beta_{52} = b_{23}b_{14}, \quad \beta_{36} = \beta_{63} = -b_{23}b_{14},$$

während die übrigen B_{ki} und β_{ki} alle verschwinden.

Die Gleichung der Fläche in Ebenen- und Strahlenkoordinaten (§ 143, (2); § 144, (2)) wird dann nach § 138, (30):

$$(6) \quad S^2 F = B \left(2 \frac{v_2 v_3}{b_{23}} + 2 \frac{v_1 v_4}{b_{14}} \right) = 0;$$

$$(7) \quad -\varphi = b_{23}^2 r_1^2 + b_{14}^2 r_4^2 - 2b_{23}b_{14}(r_2 r_5 - r_3 r_6) = 0.$$

3. Die linearen Komplexe der Erzeugenden. Die sechs linearen Komplexe einer Regelschar der Fläche (4) sind nach § 147, (17); (18):

$$\begin{aligned} \varrho r_4 &= -b_{23}^2 r_1, & \varrho r_5 &= b_{23} b_{14} r_5, & \varrho r_6 &= -b_{23} b_{14} r_6, & \varrho r_1 &= -b_{14}^2 r_4, \\ & & \varrho r_2 &= b_{23} b_{14} r_2, & \varrho r_3 &= -b_{23} b_{14} r_3, \end{aligned}$$

wo $\varrho = \sqrt{B} = b_{23} b_{14}$ oder $\varrho = -\sqrt{B} = -b_{23} b_{14}$. Setzt man diese Werte ein, so ergeben sich als Gleichungen der drei Komplexe, durch welche die beiden Scharen der Erzeugenden bestimmt werden:

$$(8) \quad b_{23} r_1 + b_{14} r_4 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_6 = 0$$

und bezüglich:

$$(8') \quad b_{23} r_1 - b_{14} r_4 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_5 = 0.$$

4. Beseitigung der Konstanten. Da die Tetraederkoordinaten y_k bei festbleibendem Koordinatentetraeder um beliebige Faktoren geändert werden können (I § 57, 6), darf in (4)—(7) ohne Beschränkung $b_{23} = 1$, $b_{14} = -1$ gesetzt werden.

Jede Linienfläche kann daher in bezug auf ein Schmiegungstetraeder in Punkt-, Ebenen- und Linienkoordinaten durch die zusammengehörigen Gleichungen:

$$(9) \quad y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0, \quad (10) \quad v_2 v_3 - v_1 v_4 = 0,$$

$$(11) \quad r_1^2 + r_4^2 + 2(r_2 r_5 - r_3 r_6) = 0$$

dargestellt werden.

Die beiden Regelscharen der Fläche sind dann die gemeinsamen Strahlen je dreier Komplexe:

$$(12) \quad r_1 - r_4 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_6 = 0; \quad (12') \quad r_1 + r_4 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_5 = 0.$$

Diese Strahlen genügen als Tangenten auch der Gleichung (11), die man mit Rücksicht auf die Identität:

$$(13) \quad r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 = 0$$

in den beiden Formen schreiben kann:

$$(14) \quad (r_1 - r_4)^2 - 4r_3 r_6 = 0 \quad (14') \quad (r_1 + r_4)^2 + 4r_2 r_5 = 0.$$

5. Erzeugung der Fläche durch projektive Ebenenbüschel oder Punktreihen. Die Gleichung (9) ist das Resultat der Elimination von λ , bezüglich λ' aus dem einen oder andern der beiden Gleichungspaare (§ 63, (22); § 82, (30); (30')):

$$(15) \quad \begin{cases} y_1 - \lambda y_2 = 0, \\ y_3 - \lambda y_4 = 0; \end{cases} \quad (15') \quad \begin{cases} y_1 - \lambda' y_3 = 0, \\ y_2 - \lambda' y_4 = 0; \end{cases}$$

die Gleichung (10) ebenso aus:

$$(16) \quad \begin{cases} \lambda v_1 + v_2 = 0, \\ \lambda v_3 + v_4 = 0; \end{cases} \quad (16') \quad \begin{cases} \lambda' v_1 + v_3 = 0, \\ \lambda' v_2 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (15) stellen aber zwei projektive Ebenenbüschel mit den Achsen J_3J_4 und J_1J_2 , die Gleichungen (15') zwei andere mit den Achsen J_2J_4 und J_3J_1 dar. Ebenso hat man in (16) und (16') je zwei projektive Punktreihen mit den Achsen J_1J_2 und J_3J_4 , bezüglich J_3J_1 und J_2J_4 .¹⁵⁷⁾

Die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden projektiven Ebenenbüschel (15) oder (15'), sowie die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Punktreihen (16) oder (16') liegen demnach auf der Fläche (9); (10).¹⁰⁹⁾

6. Erzeugung der einzelnen Scharen. Die Linien (15) und (16) haben beide dieselben Strahlenkoordinaten (I § 59, 1):

$$(17) \quad r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 = \lambda : -\lambda^2 : 0 : \lambda : 1 : 0,$$

sind also für jedes λ identisch. Ebenso die Linien (15') und (16'), deren Strahlenkoordinaten sind¹⁶¹⁾:

$$(17') \quad r_1 : r_2 : r_3 : r_4 : r_5 : r_6 = -\lambda' : 0 : \lambda'^2 : \lambda' : 0 : 1.$$

Durch Elimination von λ aus der mit Rücksicht auf (13) für vier unabhängige Gleichungen zählenden Proportion (17) erhält man die Gleichungen (12), aus (17') entsprechend die Gleichungen (12').

Daher erzeugen die beiden Ebenenbüschel (15) und die beiden Punktreihen (16) die eine Regelschar (12), dagegen die Ebenenbüschel (15') und die Punktreihen (16') die andere Regelschar (12') der Fläche (9), (10).

7. Lineare Komplexe der beiden Scharen. Sollen die beiden Scharen (17) und (17') beide zugleich einem und demselben linearen Komplex (I § 60, (12)):

$$(18) \quad c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3 + c_4 r_4 + c_5 r_5 + c_6 r_6 = 0$$

angehören, so muß identisch in λ und λ' sein:

$$(19) \quad -c_2 \lambda^2 + (c_1 + c_4) \lambda + c_5 = 0,$$

$$(19') \quad c_3 \lambda'^2 - (c_1 - c_4) \lambda' + c_6 = 0,$$

was nur möglich ist, wenn $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_1 + c_4 = 0$, $c_1 - c_4 = 0$, also alle sechs Koeffizienten c_k von (18) verschwinden.

I. Es gibt daher keinen linearen Komplex, dem gleichzeitig beide Regelscharen einer Fläche zweiter Ordnung angehören.

Soll dagegen nur die Schar (17) dem Komplex (18) und die Schar (17') dem Komplex:

$$(18') \quad c_1' r_1 + c_2' r_2 + c_3' r_3 + c_4' r_4 + c_5' r_5 + c_6' r_6 = 0$$

angehören, muß nach (19) und, mit c_k' für c_k , nach (19') sein:

$$(20) \quad c_2 = 0, c_1 + c_4 = 0, c_5 = 0; \quad (20') \quad c_3' = 0, c_1' - c_4' = 0, c_6' = 0.$$

II. Jede der beiden Regelscharen (17) und (17') gehört somit ∞^2 linearen Komplexen, einem „dreigliedrigen linearen System“ an, welches bezüglich durch die Gleichung:

(21) $c_1(r_1 - r_4) + c_3r_3 + c_6r_6 = 0$; (21') $c_1'(r_1 + r_4) + c_2'r_2 + c_5'r_5 = 0$
mit beliebigen Verhältnissen $c_1 : c_3 : c_6$ und $c_1' : c_2' : c_5'$ dargestellt ist (vgl. (12); (12')).¹⁷³⁾

8. **Involutorische Lage der beiden linearen Systeme.** Man nennt die beiden linearen Komplexe (18) und (18') in Involution liegend, wenn zwischen ihren Koeffizienten die Bedingung besteht:

$$(22) \quad c_1c_4' + c_2c_5' + c_3c_6' + c_4c_1' + c_5c_2' + c_6c_3' = 0.$$

Zu dem Komplex (21) oder (21') liegen daher alle Komplexe (18') oder (18) in Involution, für die bezüglich:

$$(23) \quad -c_1(c_1' - c_4') + c_6c_3' + c_3c_6' = 0; \quad (23') \quad c_1'(c_1 + c_4) + c_2'c_5 + c_5'c_2 = 0.$$

Die erste Bedingung ist unabhängig von $c_1 : c_3 : c_6$ erfüllt für (20'), die zweite unabhängig von $c_1' : c_2' : c_3'$ für (20), oder:

III. Das lineare System (21') umfaßt gerade alle linearen Komplexe, die zu jedem Komplex des Systems (21) in Involution liegen, das System (21) umfaßt alle linearen Komplexe, die zu jedem Komplex des Systems (21') in Involution liegen.

9. **Spezielle Komplexe der beiden linearen Systeme.** Unter den ∞^2 linearen Komplexen (21) oder (21') sind nach § 86, 4 (I § 60, (13)) diejenigen ∞^1 Komplexe speziell, für die:

$$(24) \quad -c_1^2 + c_3c_6 = 0, \quad (24') \quad c_1'^2 + c_2'c_5' = 0,$$

die also durch die Gleichungen dargestellt sind:

$$(r_1 - r_4) + \frac{c_1}{c_6}r_3 + \frac{c_6}{c_1}r_6 = 0; \quad (r_1 + r_4) - \frac{c_1'}{c_5'}r_2 + \frac{c_5'}{c_1'}r_5 = 0$$

oder mit den Abkürzungen $\lambda' = c_6 : c_1 = c_1 : c_3$ und $\lambda = -c_5' : c_1' = c_1' : c_2'$ durch:

$$(25) \quad \lambda'(r_1 - r_4) + r_3 + \lambda'^2r_6 = 0; \quad (25') \quad \lambda(r_1 + r_4) + r_2 - \lambda^2r_5 = 0.$$

Die Achse des speziellen linearen Komplexes (25) hat aber nach § 86, (16) (I § 60, 5) die Strahlenkoordinaten (17') und die Achse von (25') ebenso die Strahlenkoordinaten (17). Damit ergibt sich:

IV. Die Achsen der speziellen Komplexe der dreigliedrigen Systeme (21) und (21') sind bezüglich die beiden Regelscharen (17') und (17).

10. **Parameterdarstellung der Fläche.** Die Koordinaten y_k des Schnittpunktes der beiden ungleichnamigen Erzeugenden λ und λ' sind nach (15) und (15') (§ 63, (26)):

$$(26) \quad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \lambda\lambda' : \lambda' : \lambda : 1$$

und die Koordinaten v_k der Verbindungsebene nach (16) und (16') (§ 82, (33)):

$$(27) \quad v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 1 : -\lambda : -\lambda' : \lambda\lambda'.$$

Die Gleichungen (26) und (27) enthalten die Darstellung der Punkte und Tangentialebenen der Fläche (9), (10) durch die Parameter der beiden Erzeugenden, die durch den Punkt gehen, bezüglich in der zugehörigen Tangentialebene liegen.¹⁶¹⁾

11. Verbindungsebenen zweier festen Erzeugenden mit einer laufenden. Die Verbindungsebenen zweier festen Erzeugenden λ_1 und λ_2 der einen Schar mit einer laufenden λ' der andern haben (I § 58, (3)) nach (27) die Gleichungen (§ 82, (35)):

$$(28) \quad \begin{cases} (y_1 - \lambda_1 y_2) - \lambda'(y_3 - \lambda_1 y_4) = 0, \\ (y_1 - \lambda_2 y_2) - \lambda'(y_3 - \lambda_2 y_4) = 0; \end{cases}$$

die Schnittpunkte derselben festen Erzeugenden λ_1 und λ_2 mit derselben laufenden λ' ebenso nach (26) die Gleichungen:

$$(29) \quad \begin{cases} \lambda'(\lambda_1 v_1 + v_2) + (\lambda_1 v_3 + v_4) = 0, \\ \lambda'(\lambda_2 v_1 + v_2) + (\lambda_2 v_3 + v_4) = 0. \end{cases}$$

Aus der Form dieser Gleichungen folgt unmittelbar (I § 66, 4):

Die Verbindungsebenen oder Schnittpunkte irgend zweier festen Erzeugenden der einen Schar mit der laufenden Erzeugenden der andern bilden zwei projektive Ebenenbüschel, bezüglich Punktreihen.

12. Doppelverhältnis von vier Erzeugenden. Die Verbindungsebenen oder Schnittpunkte einer laufenden Erzeugenden λ mit vier festen Erzeugenden λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) haben nach (28) und (29) die Gleichungen:

$$(30) \quad (y_1 - \lambda y_2) - \lambda_i'(y_3 - \lambda y_4) = 0,$$

$$(31) \quad \lambda_i'(\lambda v_1 + v_2) + (\lambda v_3 + v_4) = 0$$

und daher (I § 42, (27); I § 46, (13); I § 58, 8) das Doppelverhältnis:

$$(32) \quad \delta = \frac{(\lambda_1' - \lambda_3')(\lambda_2' - \lambda_4')}{(\lambda_2' - \lambda_3')(\lambda_1' - \lambda_4')}.$$

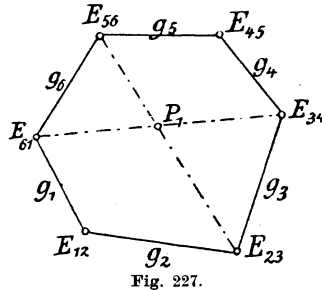
Die vier Verbindungsebenen sowohl wie die vier Schnittpunkte von vier festen Erzeugenden der einen Schar mit der laufenden Erzeugenden der anderen haben ein von λ unabhängiges und zwar dasselbe Doppelverhältnis.¹³⁶⁾ Es heißt das Doppelverhältnis der vier Erzeugenden (§ 52, 7).

§ 160. Das Pascalsche und Brianchonsche Sechseck im Raume.

1. Begriff des Pascalschen und Brianchonschen Sechsecks. Ein unebenes Sechseck (Fig. 227) mit den Seiten $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ hat drei Paare von Gegenseiten, g_1 und g_4, g_2 und g_5, g_3 und g_6 , ferner drei Paare von Gegenecken und drei Paare von Gegenecken:

$$(1) \quad \begin{cases} E_{12} = g_1 g_2, & E_{45} = g_4 g_5; \\ E_{34} = g_3 g_4, & E_{61} = g_6 g_1; \\ E_{56} = g_5 g_6, & E_{23} = g_2 g_3; \end{cases}$$

$$(1') \quad \begin{cases} E_{12} = g_1 \times g_2, & E_{45} = g_4 \times g_5; \\ E_{34} = g_3 \times g_4, & E_{61} = g_6 \times g_1; \\ E_{56} = g_5 \times g_6, & E_{23} = g_2 \times g_3; \end{cases}$$



indem $g_k g_l$ die Verbindungsebene und $g_k \times g_l$ den Schnittpunkt der Geraden g_k und g_l bezeichnet (§ 37, 1).

Es heißt ein Pascalsches, wenn die drei Schnittpunkte je zweier Gegenecken:

$$(2) \quad \begin{cases} E_{12} \times E_{45} = h_1, \\ E_{34} \times E_{61} = h_2, \\ E_{56} \times E_{23} = h_3 \end{cases}$$

in einer Ebene, der Pascalebene, liegen.

Es heißt ein Brianchonsches, wenn die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken:

$$(2') \quad \begin{cases} E_{12} E_{45} = k_1, \\ E_{34} E_{61} = k_2, \\ E_{56} E_{23} = k_3 \end{cases}$$

durch einen Punkt, den Brianchonpunkt, gehen.

2. Andere notwendige und hinreichende Eigenschaften. Da bei dem Brianchonschen Sechseck die Verbindungslinien $E_{34} E_{61}$ und $E_{56} E_{23}$ durch einen Punkt gehen, also in einer Ebene liegen, so befinden sich auch die vier Ecken $E_{34}, E_{61}, E_{56}, E_{23}$ und damit die Gegenseiten $g_3 = E_{23} E_{34}$ und $g_6 = E_{56} E_{61}$ in dieser Ebene. Mit Hinzufügung des dualen Satzes folgt also:

Bei einem Pascalschen Sechseck gehen je zwei Gegenseiten durch einen Punkt.

Bei einem Brianchonschen Sechseck liegen je zwei Gegenseiten in einer Ebene.

Liegen umgekehrt bei einem unebenen Sechseck je zwei Gegenseiten g_1 und g_4, g_2 und g_5, g_3 und g_6 in einer Ebene E_{14}, E_{25}, E_{36} , so schneiden sich diese drei Ebenen in einem Punkte $P = E_{14} \times E_{25} \times E_{36}$. Da nun die Gerade $k_1 = E_{12} E_{45}$ die Geraden g_1, g_4 , sowie g_2, g_5 schneidet, also in den Ebenen E_{14} , sowie E_{25} liegt, geht sie ebenfalls durch P . Dasselbe gilt von $k_2 = E_{34} E_{61}$ und $k_3 = E_{56} E_{23}$.

Gehen je zwei Gegenseiten eines unebenen Sechsseits durch einen Punkt, so ist es ein Pascalsches.	Liegen je zwei Gegenseiten eines unebenen Sechsseits in einer Ebene, so ist es ein Brianchonsches.
---	--

Jedes unebene Pascalsche Sechseit ist daher auch ein Brianchonsches und umgekehrt.¹⁶³⁾

3. Sechseite auf den Linienflächen zweiter Ordnung. Die Seite g_1 eines Brianchonschen Sechsseits schneidet die anschließenden Seiten g_2 und g_6 und nach 2 auch die Gegenseite g_4 ; ebenso schneiden die Seiten g_3 und g_5 je die Seiten g_2, g_4, g_6 . Daher gehören (§ 74, 6) g_1, g_3, g_5 der durch g_2, g_4, g_6 bestimmten Linienfläche zweiter Ordnung an, welche auch g_2, g_4, g_6 enthält. Keine zwei von den drei Seiten g_2, g_4, g_6 können in einer Ebene liegen, ohne daß das ganze Sechseit eben wird. Entsprechendes gilt mit Vertauschung der ungeraden und geraden Seiten.

Jedes Pascalsche und jedes Brianchonsche unebene Sechseit liegt auf einer Linienfläche zweiter Ordnung derart, daß seine drei ungeraden Seiten g_1, g_3, g_5 der einen und seine drei geraden Seiten g_2, g_4, g_6 der anderen Schar von Erzeugenden angehören.

Liegt umgekehrt ein Sechseit auf dem Hyperboloid, so müssen, da je zwei benachbarte Seiten in einer Ecke zusammentreffen, die drei ungeraden Seiten g_1, g_3, g_5 der einen und die drei geraden g_2, g_4, g_6 der andern Schar der Erzeugenden angehören. Dann schneiden sich aber auch die Gegenseiten g_1 und g_4, g_2 und g_5, g_3 und g_6 (§ 63, 4) und so folgt nach 2:

Jedes auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichnete Sechseit ist gleichzeitig ein Pascalsches und ein Brianchonsches unebenes Sechseit.

4. Mannigfaltigkeit der Sechsfäche und Sechsecke bei gegebenen Seiten. Wir haben bisher angenommen, daß die Seiten g_k des der Linienfläche aufgeschriebenen Sechsseits in bestimmter Reihenfolge gegeben sind, worauf die sechs Seitenebenen und sechs Ecken als Verbindungsebenen und Schnittpunkte je zweier aufeinanderfolgender Seiten, wie in (1); (1') bestimmt sind.

Nun bleibt aber die unter 2 gefundene charakteristische Eigenschaft des durch seine sechs Seiten gegebenen Pascalschen und Brianchonschen Sechsseits vollkommen erhalten, wenn man bei festgehaltenen ungeraden Seiten die geraden auf alle möglichen Weisen vertauscht (oder umgekehrt), also die Anordnungen trifft:

$$(3) \quad \begin{cases} S_1 = g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 g_6, \\ S_2 = g_1 g_4 g_3 g_6 g_5 g_2, \\ S_3 = g_1 g_6 g_3 g_2 g_5 g_4, \end{cases} \quad (3') \quad \begin{cases} S'_1 = g_1 g_4 g_3 g_2 g_5 g_6, \\ S'_2 = g_1 g_2 g_3 g_6 g_5 g_4, \\ S'_3 = g_1 g_6 g_3 g_4 g_5 g_2. \end{cases}$$

Denn in jeder dieser Anordnungen schneiden sich je zwei Gegenseiten, die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste, weil sie ungleichnamige Erzeugende der Linienfläche sind, auf der das Sechsseit liegt. *Alle sechs Sechsseite (3), (3') sind also Pascalsche und Brianchonsche, sobald es das erste ist.*

Die Seitenebenen und Ecken der sechs aus denselben sechs Seiten gebildeten Sechsseite sind aber nicht dieselben, sondern bezüglich die folgenden:

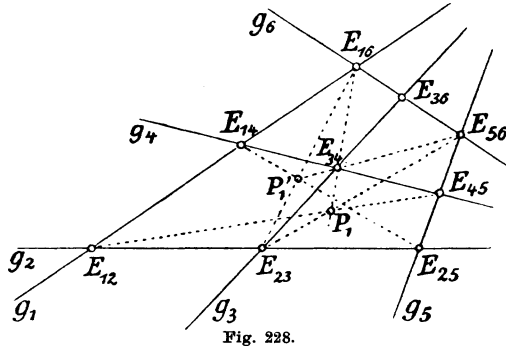
$$(4) \quad \begin{cases} S_1 = E_{12} E_{23} E_{34} E_{45} E_{56} E_{61}, \\ S_2 = E_{14} E_{43} E_{36} E_{65} E_{52} E_{21}, \\ S_3 = E_{16} E_{63} E_{32} E_{25} E_{54} E_{41}, \end{cases} \quad \begin{cases} S'_1 = E_{14} E_{43} E_{32} E_{25} E_{56} E_{61}, \\ S'_2 = E_{12} E_{23} E_{36} E_{65} E_{54} E_{41}, \\ S'_3 = E_{16} E_{63} E_{34} E_{45} E_{52} E_{21}, \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} S_1 = E_{12} E_{23} E_{34} E_{45} E_{56} E_{61}, \\ S_2 = E_{14} E_{43} E_{36} E_{65} E_{52} E_{21}, \\ S_3 = E_{16} E_{63} E_{32} E_{25} E_{54} E_{41}, \end{cases} \quad \begin{cases} S'_1 = E_{14} E_{43} E_{32} E_{25} E_{56} E_{61}, \\ S'_2 = E_{12} E_{23} E_{36} E_{65} E_{54} E_{41}, \\ S'_3 = E_{16} E_{63} E_{34} E_{45} E_{52} E_{21}, \end{cases}$$

wo wieder die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste Seitenebene und Ecke als Gegenebenen und Gegenecken gelten.

Die beiden Kolonnen (3) und (3') sind so angeordnet, daß S_1, S_2, S_3 einerseits und S'_3, S'_2, S'_1 andererseits je durch *zyklische Vertauschung von g_2, g_4, g_6* in-einander übergehen, während die Transposition 24 von (3) zu (3') überführt.

Jeder der *neun Schnittpunkte* der drei Erzeugenden g_1, g_3, g_5 (Fig. 228) mit den drei Erzeugenden g_2, g_4, g_6 tritt unter den Ecken (4') viermal auf, ebenso jede der *neun Verbindungsebenen* viermal unter den Seitenebenen (4).



5. Die sechs Pascalebene und sechs Brianchonpunkte. Zu jedem der sechs Pascalschen und Brianchonschen Sechsseite S_k, S'_k gehört eine Pascalebene Π_k, Π'_k und ein Brianchonpunkt P_k, P'_k ($k = 1, 2, 3$).

Da der Brianchonpunkt P_1 des Sechsseits S_1 auf den Verbindungs-

linien der Gegenecken E_{12} mit E_{45} und E_{34} mit E_{61} liegt, so liegt er auch in der Ebene E_{14} , welche die Seiten $g_1 = E_{61}E_{12}$ und $g_4 = E_{34}E_{45}$ verbindet, ebenso in den Ebenen E_{36} und E_{52} . Er ist also der Schnittpunkt der Verbindungsebenen je zweier Gegenseiten. Ebenso ist Π_1 die Verbindungsebene der Schnittpunkte E_{14} , E_{36} , E_{52} je zweier Gegenseiten. Da entsprechendes auch für die anderen Sechsecke gilt, so erhält man *die sechs Pascalebenen und sechs Brianchonpunkte* in folgender Weise:

$$(5) \quad \begin{cases} P_1 = E_{14} \times E_{36} \times E_{52}, & P'_1 = E_{12} \times E_{36} \times E_{54}; \\ P_2 = E_{16} \times E_{32} \times E_{54}, & P'_2 = E_{16} \times E_{34} \times E_{52}; \\ P_3 = E_{12} \times E_{34} \times E_{56}, & P'_3 = E_{14} \times E_{32} \times E_{56}; \end{cases}$$

$$(5') \quad \begin{cases} \Pi_1 = E_{14}E_{36}E_{52}, & \Pi'_1 = E_{12}E_{36}E_{54}; \\ \Pi_2 = E_{16}E_{32}E_{54}, & \Pi'_2 = E_{16}E_{34}E_{52}; \\ \Pi_3 = E_{12}E_{34}E_{56}, & \Pi'_3 = E_{14}E_{32}E_{56}. \end{cases}$$

6. Die analytischen Bedingungen der auf einer Linienfläche liegenden Sechsecke. Die Seiten $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ seien Erzeugende der Linienfläche § 159, (9); (10); die ungeraden mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5$ sollen der Schar § 159, (15); (16), die geraden mit den Parametern $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ der Schar § 159, (15'); (16') angehören. Als dann sind die Gleichungen der Seitenebenen und Ecken nach § 159, (28); (29):

$$(6) \quad \begin{cases} E_{12} = y_1 - \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_3 + \lambda_1 \lambda_2 y_4 = 0, \\ E_{54} = y_1 - \lambda_5 y_2 - \lambda_4 y_3 + \lambda_5 \lambda_4 y_4 = 0, \dots, \end{cases}$$

$$(6') \quad \begin{cases} E_{12} = \lambda_1 \lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_1 v_3 + v_4 = 0, \\ E_{54} = \lambda_5 \lambda_4 v_1 + \lambda_4 v_2 + \lambda_5 v_3 + v_4 = 0, \dots, \end{cases}$$

wo $E_{12}, E_{54}, \dots$ und $E_{12}, E_{54}, \dots$ zugleich als Abkürzungen für die linken Seiten der Gleichungen der Ebenen und Punkte dienen.

Um die alsdann bestehenden Beziehungen zwischen den Ebenen und Punkten analytisch darzustellen, benutzen wir wieder die in § 37, (4) und § 52, (24) eingeführten Abkürzungen q_i, q'_i, q''_i ($i=1, 2, 3$), sowie die in § 52, (19) angegebenen für L_i, M_i, N_i ($i=1, 2, 3, 4$).

Dann ergibt sich zunächst aus (6):

$$(7) \quad q'_1 E_{54} - q_1 E_{12} = \{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2) - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\} y_1 \\ - \{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2)\lambda_5 - (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\lambda_1\} y_2 - \dots + \dots$$

$$(8) \quad q'_1 E_{54} - q_1 E_{12} \\ = \{\lambda_1 \lambda_6 + \lambda_3 \lambda_2 + \lambda_5 \lambda_4\} - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_5 \lambda_6) y_1 \\ - \{(\lambda_3 \lambda_5 \lambda_2 + \lambda_5 \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_6) - (\lambda_3 \lambda_5 \lambda_6 + \lambda_5 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4)\} y_2 - \dots + \dots$$

und mit Benutzung der genannten Abkürzungen:

$$(9) \quad \varrho_1' E_{54} - \varrho_1 E_{12} = \Pi_1,$$

$$(10) \quad \Pi_1 = (M_1 - N_1)y_1 + (M_2 - N_2)y_2 + (M_3 - N_3)y_3 + (M_4 - N_4)y_4,$$

und ebenso:

$$(9') \quad \varrho_1' E_{54} - \varrho_1 E_{12} = P_1,$$

$$(10') \quad P_1 = (M_4 - N_4)v_1 - (M_3 - N_3)v_2 - (M_2 - N_2)v_3 + (M_1 - N_1)v_4,$$

wo Π_1, P_1 ihrerseits als Abkürzungen für die Ausdrücke rechts in (10) und (10') gebraucht sind.

Nun haben die Ausdrücke § 52, (19) sämtlich die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn gleichzeitig die drei ungeraden Parameter $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5$ und die drei geraden $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ je unter sich zyklisch vertauscht werden, indem sich dabei die drei Glieder jedes Ausdrucks selbst zyklisch vertauschen. Dagegen gehen dabei nach § 37, (4) ϱ_1 in ϱ_2 , ϱ_1' in ϱ_2' , und E_{54} in E_{16} , E_{12} in E_{34} , E_{54} in E_{16} , E_{12} in E_{34} über. Mit zweimaliger Anwendung dieses Verfahrens ergänzen sich also die identischen Gleichungen (9) und (9') zu folgendem System:

$$(11) \quad \begin{cases} \varrho_1 E_{12} - \varrho_1' E_{54} + \Pi_1 = 0, \\ \varrho_2 E_{34} - \varrho_2' E_{16} + \Pi_1 = 0, \\ \varrho_3 E_{56} - \varrho_3' E_{32} + \Pi_1 = 0; \end{cases} \quad (11') \quad \begin{cases} \varrho_1 E_{12} - \varrho_1' E_{54} + P_1 = 0, \\ \varrho_2 E_{34} - \varrho_2' E_{16} + P_1 = 0, \\ \varrho_3 E_{56} - \varrho_3' E_{32} + P_1 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten aber den Satz:

Jedes auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichnete Sechseck $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6$ ist ein Pascalsches und Brianchonsches.

7. Beziehung zwischen Pascalebene und Brianchonpunkt. Dabei sind:

$$(12) \quad \Pi_1 = 0, \quad (12') \quad P_1 = 0$$

die Gleichungen der Pascalebene und des Brianchonpunktes.

Da aber zwischen Pol y_k und Polarebene v_k in bezug auf die Fläche § 159, (9) nach § 149, (3') die Beziehung:

$$(13) \quad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = v_4 : -v_3 : -v_2 : v_1$$

besteht, ergibt sich mit Rücksicht auf (10) und (10'):

Pascalebene und Brianchonpunkt eines auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichneten Sechsecks sind Polarebene und Pol in bezug auf die Fläche.

Dies stimmt mit (5) und (5') überein, da E_{14}, E_{36}, E_{52} die Tangentialebenen der Fläche in den Punkten E_{14}, E_{36}, E_{52} sind.

8. Gleichung der Linienfläche eines Pascalschen Sechsseits. Sind umgekehrt für sechs Ebenen $E_{12} = 0, E_{23} = 0, E_{34} = 0, E_{45} = 0, E_{56} = 0,$

$E_{64} = 0$ in Verbindung mit einer siebenten $\Pi_1 = 0$ die Bedingungen (11) mit beliebigen Faktoren q_k, q'_k erfüllt, so liegen die Schnittlinien je zweier Gegenebenen des von den sechs Ebenen gebildeten Sechsecks wie in 1 in der Ebene (12). Setzt man nun zur Abkürzung:

$$(14) \quad q_1 E_{12} = V_1, \quad q_2 E_{34} = V_2, \quad q_3 E_{56} = V_3; \\ q'_1 E_{54} = -V'_1, \quad q'_2 E_{16} = -V'_2, \quad q'_3 E_{32} = -V'_3; \quad \Pi_1 = -V,$$

so stellt die Gleichung:

$$(15) \quad V^2 - (V_1 + V_2 + V_3) V + (V_2 V_3 + V_3 V_1 + V_1 V_2) = 0,$$

analog wie § 37, (16), eine Fläche zweiter Ordnung dar, auf der die sechs Seiten:

$$g_1 : V_1 = 0, \quad V'_2 = 0, \quad g_2 : V_1 = 0, \quad V'_3 = 0, \dots$$

des Sechsecks liegen.

Jedes Pascalsche oder Brianchonsche unebene Sechseck liegt auf einer Fläche zweiter Ordnung.

9. Die Steinerschen Linien der sechs Sechsecke aus sechs Erzeugenden. Bei einer wiederholten zyklischen Vertauschung der Parameter $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ nehmen die identischen Gleichungen (11) und (11') die Form an (§ 52, (23)):

$$(16) \quad \{ q_3'' E_{14} - q_3 E_{56} + \Pi_2 = 0, \quad (16') \quad \{ q_3'' E_{14} - q_3 E_{56} + P_2 = 0,$$

$$(17) \quad \{ q_2' E_{16} - q_2'' E_{52} + \Pi_3 = 0, \quad (17') \quad \{ q_2' E_{16} - q_2'' E_{52} + P_3 = 0,$$

Diese Identitäten kennzeichnen aber die Sechsecke S_2 und S_3 in (4) als Pascalsche und in (4') als Brianchonsche.

Die Gleichungen der Pascalebenen und Brianchonpunkte der drei Sechsecke (3) werden dabei:

$$(18) \quad \begin{cases} \Pi_1 = (M_1 - N_1)y_1 + (M_2 - N_2)y_2 + (M_3 - N_3)y_3 + (M_4 - N_4)y_4 = 0, \\ \Pi_2 = (N_1 - L_1)y_1 + (N_2 - L_2)y_2 + (N_3 - L_3)y_3 + (N_4 - L_4)y_4 = 0, \\ \Pi_3 = (L_1 - M_1)y_1 + (L_2 - M_2)y_2 + (L_3 - M_3)y_3 + (L_4 - M_4)y_4 = 0; \end{cases}$$

$$(18') \quad \begin{cases} P_1 = (M_4 - N_4)v_1 - (M_3 - N_3)v_2 - (M_2 - N_2)v_3 + (M_1 - N_1)v_4 = 0, \\ P_2 = (N_4 - L_4)v_1 - (N_3 - L_3)v_2 - (N_2 - L_2)v_3 + (N_1 - L_1)v_4 = 0, \\ P_3 = (L_4 - M_4)v_1 - (L_3 - M_3)v_2 - (L_2 - M_2)v_3 + (L_1 - M_1)v_4 = 0, \end{cases}$$

weil die zyklische Vertauschung von $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ die Ausdrücke L_k, M_k, N_k in § 52, (19) selbst zyklisch vertauscht. Die Gleichungen der Pascalebenen und Brianchonpunkte der drei Sechsecke (3') entstehen aus (18) und (18') durch Vertauschung von λ_2 und λ_4 .

Da nun identisch:

$$(19) \quad \begin{aligned} \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 &= 0, & P_1 + P_2 + P_3 &= 0, \\ \Pi_1' + \Pi_2' + \Pi_3' &= 0, & P_1' + P_2' + P_3' &= 0, \end{aligned}$$

so folgt (I § 51, (7)):

Die drei Pascalen Ebenen der Sechsecke S_1, S_2, S_3 in (3), sowie S_1', S_2', S_3' in (3') gehen je durch eine Gerade und die drei Brianchonpunkte der Sechsecke S_1, S_2, S_3 , sowie S_1', S_2', S_3' liegen in einer Geraden (Steinerschen Geraden).

Die Geraden seien mit g, g', h, h' bezeichnet:

$$(20) \quad \begin{aligned} \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3 &= g, & P_1 P_2 P_3 &= h, \\ \Pi_1' \times \Pi_2' \times \Pi_3' &= g', & P_1' P_2' P_3' &= h'. \end{aligned}$$

Da aber der Punkt P_1 nach (2') auf der Verbindungslinie von E_{12} und E_{45} , von E_{34} und E_{61} , von E_{56} und E_{23} liegt, liegt er nach (5') auf den Ebenen Π_1', Π_2', Π_3' . Dasselbe gilt von P_2 , da er nach (4') auf der Verbindungslinie von E_{14} und E_{65} , E_{43} und E_{52} , E_{36} und E_{21} liegt, ebenso von P_3 . Da somit P_1, P_2, P_3 alle auf g' und ebenso P_1', P_2', P_3' auf g liegen, so ist nach (20):

$$(21) \quad h = g', \quad h' = g.$$

Zugleich folgt aber aus 7:

Die beiden Steinerschen Linien (21) sind reziproke Polaren in bezug auf die Linienfläche, auf der die Sechsecke (3), (3') liegen.

10. Übergang auf die Kurven und Kegel zweiter Ordnung und Klasse.

Schneidet man das auf einer Linienfläche verzeichnete Sechseck mit einer Ebene A , so liefern die sechs Seiten g_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) des Sechsecks die sechs Ecken G_k eines der Schnittkurve eingeschriebenen Pascalschen Sechsecks und die neun Seitenebenen E_{ki} neun Seiten e_{ki} dieses Sechsecks ($k = 1, 3, 5$; $l = 2, 4, 6$) (§ 52, 11).

Die sechs Pascalschen Ebenen Π_k, Π_k' ($k = 1, 2, 3$) liefern die sechs Pascalschen Linien der den Kombinationen (3), (3') entsprechenden Pascalschen Sechsecke, die

Projiziert man das auf einer Linienfläche verzeichnete Sechseck von einem Punkte A , so liefern die sechs Seiten g_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) des Sechsecks die sechs Seitenebenen Γ_k eines dem Berührungskegel umbeschriebenen Brianchonschen Sechsecks und die neun Eckpunkte E_{ki} neun Kanten dieses Sechsecks ($k = 1, 3, 5$; $l = 2, 4, 6$).

Die sechs Brianchonpunkte P_k, P_k' ($k = 1, 2, 3$) liefern die sechs Brianchonschen Linien der den Kombinationen (3), (3') entsprechenden Brianchonschen Sech-

wieder zu je dreien durch die Steinerschen Punkte G und G' gehen, in denen die Steinerschen Linien g und g' die Ebene A schneiden.

Die Steinerschen Punkte G und G' sind nach 9 harmonische Pole in bezug auf die Schnittkurve.

Die Verbindungsfigur der Ebene A mit einem Punkte A führt auf *das einem Kegel zweiter Ordnung einbeschriebene Pascalsche Sechskant.*

flache, die wieder zu je dreien in den Steinerschen Ebenen Γ und Γ' liegen, welche die Steinerschen Linien g und g' mit dem Punkte A verbinden.

Die Steinerschen Ebenen Γ und Γ' sind nach 9 harmonische Polarebenen in bezug auf den Kegel.

Die Schnittfigur des Bündels am Punkte A mit einer Ebene A führt auf *das einem Kegelschnitt umbeschriebene Brianchonsche Sechseit* (§ 37, 4).