Drittes Kapitel.

Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale von Differentialgleichungen.

§ 8.

Untersuchungen über das erweiterte Abel'sche Theorem für das Geschlecht $p = 1$; weitere Sätze über den Zusammenhang des allgemeinen Integrales mit den particulären einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wollen im Folgenden einige Anwendungen der oben entwickelten Principien und Sätze behandeln, welche Verallgemeinerungen wichtiger Sätze der Integralrechnung zum Gegenstande haben.

Das Abel'sche Theorem liefert bekanntlich für die Summe einer *beliebigen* Anzahl gleichartiger Abel'scher Integrale stets, von einer algebraisch-logarithmischen Function abgesehen, die Summe einer *festen* Anzahl derselben Abel'schen Integrale, deren Zahl durch das Geschlecht p der algebraischen Function unter dem Integral bestimmt ist, und deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung p^{ten} Grades liefern, deren Coefficienten rationale Functionen der Grenzen der gegebenen Integrale und der zu ihnen gehörigen Irrationalitäten sind, während die diesen Lösungen zugehörigen Irrationalitäten durch eben diese mit Hülfe der vorher bezeichneten Grössen rational ausdrückbar sind, — dass diese Relation zwischen den Integralen eine additive mit constanten Coefficienten sein muss, folgt aus dem oben bewiesenen allgemeinen Satze, dass zwischen Abel'schen Integralen überhaupt nur additive Beziehungen dieser Art stattfinden können, ein Satz, der die Grundlage für die Transformationstheorie der Abel'schen Integrale und Functionen bildet. Es soll nunmehr die Frage aufgeworfen werden, ob es ähnliche Theoreme für beliebige Differential-

---

ductibel sein muss, geht daraus hervor, dass, wie früher gezeigt worden, für den Fall, dass nicht die beiden Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, die Voraussetzung der Reductibilität der Differentialgleichung erfordert, dass ein Integral derselben der homogenen linearen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0$ genügt; nun geht freilich $y = e^{-\int f(x)\,dx}$, da $f(x)$ eine rationale Function ist, bei einer Umkreisung eines singulären Punktes dieser Function in sich selbst mit einem constanten Factor versehen über, aber nicht alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welchen die oben angegebene Eigenschaft der Fundamentalintegrale zukommt, haben Integrale dieser Form, sind also reductibel.

gleichungen giebt, wie es das Abel'sche Theorem für die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = y$$

liefert, in welcher y eine algebraische Function von x bedeutet, oder, praeciser ausgedrückt, *ob man die Gestalt und Eigenschaft von algebraischen Beziehungen angeben kann, welche für ein bestimmtes particuläres Integral irgend einer Differentialgleichung zwischen den Werthen desselben für algebraisch unter einander zusammenhängende Werthe der unabhängigen Variabeln stattfinden.*

Gehen wir von der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1) \cdots \cdot \frac{dz}{dx} = zy$$

aus, in welcher y eine algebraische Function von x bedeutet, so folgt aus dem in § 7 bewiesenen Theorem, wenn wir die Gleichungen (58) in *eine* Gleichung zusammenfallen lassen, und die abhängigen x-Werthe durch die unabhängigen ausdrücken, dass die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen den Werthen eines bestimmten particulären Integrales dieser Differentialgleichung für unter einander in algebraischer Beziehung stehende Werthe der Variabeln die Gestalt hat

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots \cdot z_m^{a_m} = u,$$

worin $a_1, a_2, \cdots a_m$ rationale Constanten, und u eine algebraische Function bedeutet. Umgekehrt besteht aber auch in der That, weil, wenn

$$\zeta_1 = \int^{x_1} y\,dx, \ \zeta_2 = \int^{x_2} y\,dx, \cdots \zeta_\mu = \int^{x_\mu} y\,dx, \ Z_1 = \int^{\xi_1} y\,dx, \cdots Z_p = \int^{\xi_p} y\,dx$$

gesetzt wird, nach dem Abel'schen Theorem — wenn die Integrale z. B. erster Gattung sind — die Beziehung statthat

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_\mu = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_p,$$

worin $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_p$ von $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ in bekannter Weise abhängen, wegen

$$z_1 = e^{\zeta_1}, \ z_2 = e^{\zeta_2}, \cdots z_\mu = e^{\zeta_\mu}, \ z_1' = e^{Z_1}, \cdots z_p' = e^{Z_p}$$

die Relation

$$(2) \cdots \cdot z_1 z_2 \cdots z_\mu z_1'^{-1} z_2'^{-1} \cdots z_p'^{-1} = 1,$$

welche unter der Beschränkung, die für y durch die Annahme von Integralen erster Gattung gemacht worden, *das erweiterte Abel'sche Theorem für die Differentialgleichung* (1) *bildet.* Für den Fall, dass $\int y\,dx$ ein allgemeines Abel'sches Integral darstellt, hat das Additionstheorem der Integrale bekanntlich die Form

$$\int^{x_1} y\,dx + \int^{x_2} y\,dx + \cdots + \int^{x_\mu} y\,dx = \int^{\xi_1} y\,dx + \cdots + \int^{\xi_p} y\,dx$$
$$+ u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\varrho \log v_\varrho,$$

worin $u, v_1, v_2, \cdots v_\varrho$ rationale Functionen von $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ und der zu diesen Grenzen gehörigen Irrationalitäten sind, und man erhält somit als allgemeines Abel'sches Theorem für ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1) die Form

$$(3) \cdots\cdot z_1 z_2 \cdots z_\mu z_1'^{-1} \cdots z_p'^{-1} = v_1^{A_1} v_2^{A_2} \cdots v_\varrho^{A_\varrho} e^u,$$

wodurch im Allgemeinen nicht mehr eine algebraische Relation repräsentirt wird.

Wir sehen somit, dass der im zweiten Kapitel bewiesene allgemeine Satz von der Erhaltung der algebraischen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen, welcher zugleich ein Mittel zur Erforschung der Form jener Relation lieferte, für den Fall, dass alle Differentialgleichungen in eine zusammenfallen, zugleich ein Mittel bieten wird, um für den Fall, dass ein particuläres Integral einer beliebigen Differentialgleichung ein erweitertes Abel'sches Theorem besitzt, die Form desselben festzustellen.

Für den Fall, dass das Geschlecht der algebraischen Function y gleich 1 ist, würde die Gleichung (2) die Gestalt annehmen

$$(4) \cdots\cdot z_1' = z_1 z_2,$$

worin ξ_1 und y_{ξ_1} rationale Functionen von $x_1, x_2, y_{x_1}, y_{x_2}$ sind. Fragen wir jetzt allgemein nach denjenigen Differentialgleichungen, für welche ein particuläres Integral z die Eigenschaft hat, dass zwischen zweien seiner Werthe z_1 und z_2 für die unabhängigen Variabeln x_1 und x_2 und seinem Werthe Z für die Variable X, welche mit x_1 und x_2 durch die algebraische Gleichung

$$(5) \cdots\cdot X = \varphi(x_1, x_2)$$

verbunden ist, eine algebraische Relation

$$(6) \cdots\cdot Z = f(z_1, z_2)$$

bestehe, in welche, wie oben in (4), die unabhängigen Variabeln selbst nicht eintreten.

Differentiirt man die Gleichung (6) nach x_1 und x_2, so folgt

$$\frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2},$$

und durch Elimination von $\frac{dZ}{dX}$

$$(7) \cdots\cdot \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2}\frac{\partial X}{\partial x_1};$$

setzt man hierin x_2 und z_2 gleich numerischen Constanten, so folgt, dass, weil $\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}$ und $\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}$ algebraische Functionen von z_1 und z_2 sind, z_1 *als Function von* x_1 *aufgefasst einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen muss.* Wir können somit schon hieraus schliessen, *dass irreductible algebraische Differentialgleichungen von einer höheren Ordnung als der ersten ein durch die Gleichung* (6) *dargestelltes Abel'sches Theorem nicht besitzen können.*

Fragen wir jetzt, welche Differentialgleichungen erster Ordnung mit der Gleichung (6) vereinbar sind; sei eine solche Differentialgleichung

$$(8) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = F(x, z),$$

und das betrachtete particuläre Integral ein nicht algebraisches, so wird sich wegen

$$(9) \cdots\cdot \frac{dZ}{dX} = F(X, Z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = \frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_2}$$

die Gleichung

$$(10) \cdots\cdot \frac{\partial Z}{\partial x_2} = F(X, Z)\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial Z}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2}$$

ergeben, und somit nach (6) und vermöge der Beziehung

$$(11) \cdots\cdot \frac{dz_2}{dx_2} = F(x_2, z_2)$$

auch

$$(12) \cdots\cdot \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} F(x_2, z_2) = F\big(X, f(z_1, z_2)\big)\frac{\partial X}{\partial x_2}.$$

Da diese letzte Gleichung eine algebraische Gleichung in z_1 und z_2 vorstellt, diese Grössen jedoch von einander unabhängig sind, so wird dieselbe eine in ihnen identische sein müssen, und wenn man daher für z_2 irgend ein anderes particuläres Integral z_2' der mit Adjunction von X irreductibel gemachten Gleichung (11) substituirt, ferner eine Grösse Z' aus der Gleichung $Z' = f(z_1, z_2')$ herleitet, so wird offenbar die Gleichung (12) in die der Gleichung (10) analoge

$$\frac{\partial Z'}{\partial z_2'}\frac{dz_2'}{dx_2} = \frac{\partial Z'}{\partial x_2} = F(X, Z')\frac{\partial X}{\partial x_2},$$

oder in

$$\frac{dZ'}{dX} = F(X, Z')$$

übergehen, d. h. Z' ist noch ein Integral der Gleichung (9). Setzt man somit in (6) statt z_2 das allgemeine Integral der mit Adjunction von X irreductibel gemachten Gleichung

$$\frac{dz}{dx_2} = F(x_2, z),$$

so enthält dieses eine willkürliche Constante, kann also für ein festes, aber beliebiges x_2 noch alle Werthe annehmen und somit als willkürliche Constante C betrachtet werden; da aber Z aus Gleichung (6) immer ein Integral von (9) bleibt, so wird, da die willkürliche Constante C in dem Ausdrucke dieses Integrales

$$(13) \cdots\cdot Z = f(z_1, C)$$

enthalten ist, diese Form das allgemeine Integral jener Differentialgleichung darstellen; bezeichnet man nun einen bestimmten Werth von C mit C_0 und das zugehörige particuläre Integral von (9) durch

$$(14) \cdots\cdot Z_0 = f(z_1, C_0),$$

so erhält man durch Elimination von z_1 zwischen (13) und (14)

$$(15) \cdots\cdot Z = \psi(Z_0, C),$$

d. h. *es ist das allgemeine Integral jener Differentialgleichung* (9) *eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten, in welche die unabhängige Variable X nicht explicite eintritt.* Wenn aber eine Differentialgleichung erster Ordnung diese Eigenschaft besitzt, so muss dieselbe, wie in § 6 gezeigt worden, die Form haben

$$(16) \cdots\cdot \frac{dZ}{dX} = \lambda(X)\,\mu(Z),$$

worin $\lambda(X)$ eine willkürliche algebraische Function von x, und $\mu(Z)$ eine solche algebraische Function von Z ist, dass ihr Geschlecht 1 ist und $\frac{dZ}{\mu(Z)}$ ein Differential erster Gattung vorstellt, d. h. zwei solche Differentialausdrücke sich so zu einem gleichartigen Differentiale vereinigen lassen, dass die Variablen in einem algebraischen Zusammenhange stehen — und diese Bedingung war auch hinreichend. Es müssen somit all' die gesuchten Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form sein

$$(17) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = \lambda(x)\,\mu(z),$$

aber nicht umgekehrt wird jede Differentialgleichung dieser Form die Eigenschaft haben, dass es, wenn x_1 und x_2 zwei willkürliche Argumente, z_1 und z_2 die zu diesen gehörigen Werthe eines particulären Integrales der Differentialgleichung bedeuten, ein Argument x_3 giebt, welches von x_1 und x_2 algebraisch so abhängig ist, dass der dazu gehörige Werth z_3 desselben particulären Integrales mit z_1 und z_2 ebenfalls in einem algebraischen Zusammenhange steht; bemerkt man jedoch, dass, wenn man x als Function von z auffasst, für diese Function dieselbe Eigenschaft gefordert wird, wie vorher von z als Function von x, so folgt, dass die Differentialgleichung auch die Form haben muss

$$(18) \cdots\cdot \frac{dx}{dz} = A(z)\,M(x),$$

worin $A(z) = \frac{1}{\mu(z)}$, $M(x) = \frac{1}{\lambda(x)}$ und $\int \frac{dx}{M(x)} = \int \lambda(x)\,dx$ ein Integral erster Gattung vom Geschlechte 1 sein muss; setzt man nunmehr

$$\frac{dz_1}{\mu(z_1)} = \lambda(x_1)\,dx_1, \quad \frac{dz_2}{\mu(z_2)} = \lambda(x_2)\,dx_2,$$

also

$$(19) \cdots\cdot \quad \frac{dz_1}{\mu(z_1)} + \frac{dz_2}{\mu(z_2)} = \lambda(x_1)\,dx_1 + \lambda(x_2)\,dx_2,$$

so ergiebt sich der gemachten Annahme zufolge

$$\frac{dz_1}{\mu(z_1)} + \frac{dz_2}{\mu(z_2)} = \frac{dz_3}{\mu(z_3)}, \quad \lambda(x_1)\,dx_1 + \lambda(x_2)\,dx_2 = \lambda(x_3)\,dx_3,$$

worin z_3 algebraisch von z_1 und z_2, x_3 algebraisch von x_1 und x_2 abhängt, und da nach (19) wieder

$$\frac{dz_3}{dx_3} = \lambda(x_3)\,\mu(z_3)$$

ist, so folgt, dass *eine algebraische Differentialgleichung dann und nur dann ein erweitertes Abel'sches Theorem von der Form besitzt, dass die Werthe eines particulären Integrales für zwei beliebige Werthe der Variabeln in einem von den Variabeln freien algebraischen Zusammenhange stehen mit dem Werthe desselben particulären Integrales für einen Werth der Variabeln, der algebraisch von jenen ersten Werthen abhängt, — wenn jenes Integral, das selbst nicht algebraisch sein soll, einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form genügt*

$$\frac{dz}{dx} = \lambda(x)\,\mu(z),$$

in welcher $\lambda(x)$ und $\mu(z)$ algebraische Functionen von der Beschaffenheit sind, dass

$$\frac{dz}{\mu(z)} \quad \text{und} \quad \lambda(x)\,dx$$

zum Geschlechte 1 gehörige Differentialien erster Gattung sind.

So wird z. B. für die den obigen Bedingungen genügende Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2} \cdot \frac{1}{x}$$

das particuläre Integral

$$z = \sin \log x$$

das Abel'sche Theorem in der Form liefern

$$z_3 = z_1 \sqrt{1 - z_2^2} + z_2 \sqrt{1 - z_1^2},$$

wenn

$$x_3 = x_1 x_2$$

ist.

Ich füge hier noch eine Eigenschaft der durch die Differentialgleichung (17) definirten Functionen hinzu; da die Differentialien $\frac{dz}{\mu(z)}$ und $\lambda(x)\,dx$ erster Gattung vom Geschlechte 1 sein sollten, so wird man die Differentialgleichung auf die Form

$$(20) \dots \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{(1-u^2)(1-c^2u^2)}}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}$$

bringen können, aus welcher mit Zuordnung von $t=0$, $u=0$

$$u = \operatorname{sinam}\left[\int_0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}},\ c\right] = F(t)$$

folgt; nun bleibt u unverändert, wenn das Argument um die zum Integralmodul c gehörigen Periodicitätsmoduln ω und ω' vermehrt wird, und man hat daher, wenn

$$\int_0 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}} + m\omega + n\omega' = \int_0 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\varkappa^2\tau^2)}},$$

oder

$$t = \operatorname{sinam}(v, \varkappa) \quad \text{also} \quad \tau = \operatorname{sinam}(v + m\omega + n\omega', \varkappa)$$

und

$$\operatorname{sinam}(m\omega + n\omega', \varkappa) = A$$

gesetzt wird,

$$\tau = \frac{t\sqrt{(1-A^2)(1-\varkappa^2A^2)} + A\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}{1-\varkappa^2A^2t^2};$$

es ergiebt sich somit für u als Function von t die durch die nachfolgende Gleichung ausgedrückte Eigenschaft:

$$F\left(\frac{t\sqrt{(1-A^2)(1-\varkappa^2A^2)} + A\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}{1-\varkappa^2A^2t^2}\right) = F(t),$$

während die oben erwähnte Function sin log t die analoge Gleichung

$$\sin\log(e^{2\varkappa\pi}t) = \sin\log t\,^{*)}$$

liefert, wenn $\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet.

Wir haben bisher von einem Abel'schen Theorem mit der Zahl $p=1$ in dem Sinne gesprochen, dass in die Beziehung (6)

$$Z = f(z_1, z_2)$$

---

*) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass eine Functionalbeziehung von der Form $f(\mu t) = f(t)$, wie sie oben für die sin log-Function besteht, nicht etwa die Existenz eines Abel'schen Theorems von der oben angegebenen Gestalt nach sich zieht, wie ja schon daraus ersichtlich ist, dass lineare Differentialgleichungen die Eigenschaft haben, dass ein Fundamentalintegral bei der Umkreisung eines singulären Punktes in den μ-fachen Werth übergeht, so dass, wenn die Umkehrungsfunction des particulären Integrales $z = \varphi(x)$ mit $x = f(z)$ bezeichnet wird, $f(\mu z) = f(z)$ sich ergiebt, und doch haben, wie oben gezeigt worden ist, irreductible Differentialgleichungen höherer Ordnung als der ersten kein Abel'sches Theorem von dieser Art.

die unabhängigen Variabeln nicht eintreten sollen, doch sieht man leicht, dass es auch andere algebraische Beziehungen für das Integral einer Differentialgleichung giebt, für welche ebenfalls noch $p = 1$ ist. Sei z. B. y eine algebraische Function von x, so wird die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(21) \quad \cdots\cdot \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = y,$$

deren allgemeines Integral die Form hat

$$z = cx + x\int \frac{y}{x}\, dx,$$

die Eigenschaft besitzen, dass, wenn $x_1, x_2, \cdots x_\lambda$ beliebige Argumente, $X_1, X_2, \cdots X_p$ p andere in bestimmter Weise von jenen algebraisch abhängige bedeuten, und $z_1, z_2, \cdots z_\lambda, Z_1, Z_2, \cdots Z_p$ die entsprechenden Werthe irgend eines der particulären Integrale darstellen,

$$\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} + \cdots + \frac{z_\lambda}{x_\lambda} = \frac{Z_1}{X_1} + \frac{Z_2}{X_2} + \cdots + \frac{Z_p}{X_p} + C$$

ist, wenn $\int \frac{y}{x}\, dx$ ein Abel'sches Integral erster Gattung ist, und wenn somit das Geschlecht der algebraischen Function 1 ist,

$$(22) \quad \cdots\cdot \frac{Z_1}{X_1} = \frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} + c,$$

also ein Theorem der bezeichneten Art, in welches die unabhängigen Variabeln selbst eintreten. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass ein ähnliches Theorem für jede lineare Differentialgleichung erster Ordnung von der Form gilt:

$$\frac{dz}{dx} - z\,\frac{d\log y_1}{dx} = y,$$

in welcher y_1 eine algebraische Function von x bedeutet. Sind die für die obige Differentialgleichung in Frage kommenden Abel'schen Integrale nicht erster Gattung, so treten nur noch algebraisch-logarithmische Theile hinzu.

Endlich mag noch hervorgehoben werden, dass ein Abel'sches Theorem dieser Form nicht auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt ist; denn sei z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$$

vorgelegt, deren allgemeines Integral

$$z = x\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} - \tfrac{1}{2} \arcsin x^2 + cx + c_1$$

ist, so ist unmittelbar zu sehen, dass das zugehörige Abel'sche Theorem die Form hat

$$\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_2}{x_2} = \frac{Z}{X} - \frac{1}{2}\,\frac{\arcsin {x_1}^2}{x_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\arcsin {x_2}^2}{x_2} + \frac{1}{2}\,\frac{\arcsin X^2}{X} + \varphi(x_1, x_2, X),$$

worin φ eine lineare gebrochene Function der Argumente vorstellt, und

$$X = \frac{x_1 \sqrt{1-x_2^4} + x_2 \sqrt{1-x_1^4}}{1+x_1^2 x_2^2}$$

ist; die arc sin-Functionen treten hier wie die Logarithmen beim Abel'schen Theorem für Abel'sche Integrale dritter Gattung auf.

Gehen wir also wieder zur allgemeinen Untersuchung zurück und erörtern nunmehr die Frage, für welche Differentialgleichungen ein particuläres Integral die Eigenschaft hat, dass zwischen zweien seiner Werthe z_1 und z_2 für die unabhängigen Variabeln x_1 und x_2 und seinem Werthe Z für die Variable X, welche mit x_1 und x_2 durch die Gleichung

$$(23) \cdots\cdot X = \varphi(x_1, x_2)$$

verbunden ist, eine algebraische Relation

$$(24) \cdots\cdot Z = f(z_1, z_2, x_1, x_2)$$

bestehe. Die Differentiation von (24) nach x_1 und x_2 liefert

$$\frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}, \quad \frac{dZ}{dX}\frac{\partial X}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2},$$

und die Elimination von $\frac{dZ}{dX}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1}\right)\frac{\partial X}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2}\right)\frac{\partial X}{\partial x_1},$$

woraus sich wieder, wenn x_2 und z_2 als Parameter betrachtet werden, folgern lässt, *dass z_1 als Function von x_1 aufgefasst, einer Differentialgleichung erster Ordnung genügen muss, und somit irreductible Differentialgleichungen von einer höheren Ordnung als der ersten ein durch die Gleichung* (24) *dargestelltes Abel'sches Theorem nicht besitzen können.* Verfährt man mit einer solchen Differentialgleichung erster Ordnung genau wie mit Gleichung (8) geschehen, so ergeben sich statt der Gleichungen (13) und (14) für ein beliebiges, aber festgewähltes x_2 die Beziehungen

$$Z = f(z_1, C, x_1) \quad \text{und} \quad Z_0 = f(z_1, C_0, x_1),$$

aus denen durch Zusammenstellung mit (23) x_1 und z_1 eliminirt werden können, und es folgt somit

$$(25) \cdots\cdot Z = \psi(Z_0, X, C),$$

d. h. *es wird das allgemeine Integral jener Differentialgleichung eine algebraische Function eines particulären und einer willkürlichen Constanten sein, in welcher die unabhängige Variable im Allgemeinen auch explicite enthalten ist.*

So besteht für die oben behandelte Differentialgleichung erster Ordnung (21) zwischen ihrem allgemeinen Integrale z und einem particulären z_0 der algebraische Zusammenhang

$$z = z_0 + (c - c_0)x^{*}).$$

*) Es mag hier die folgende Bemerkung hinzugefügt werden, welche sich auf den Zusammenhang des allgemeinen und eines particulären Integrales einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\alpha) \cdots\cdots \frac{dz}{dx} + zy = y_1$$

bezieht, in der y und y_1 algebraische Functionen von x bedeuten, und deren Integral bekanntlich

$$(\beta) \cdots\cdots z = c e^{-\int y\,dx} + e^{-\int y\,dx} \int y_1 e^{\int y\,dx} dx,$$

ist. Soll zwischen z und einem particulären Integrale z_0 eine algebraische Beziehung bestehen von der Form

$$(\gamma) \cdots\cdots z = F(x, z_0, c),$$

so muss sich wegen der unmittelbar ersichtlichen Gleichung

$$(\delta) \cdots\cdots z = z_0 + (c - c_0)\, e^{-\int y\,dx}$$

die Beziehung

$$(\varepsilon) \cdots\cdots F(x, z_0, c) = z_0 + (c - c_0)\, e^{-\int y\,dx}$$

ergeben; diese Gleichung ist nun entweder eine in z_0 identische oder eine die Grösse z_0 bestimmende algebraische Gleichung — im ersteren Falle würde sich $e^{-\int y\,dx}$ als algebraische Function von x ergeben, und umgekehrt sieht man aus (δ), dass, wenn diese Exponentialfunction algebraisch ist, ein linearer algebraischer Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale stattfindet — im zweiten Falle würde sich aus (ε) z_0 als algebraische Function von x und $e^{-\int y\,dx}$ ergeben, oder es wären nach (β) die Functionen

$$H_1 = \int y_1 e^{\int y\,dx} dx \quad \text{und} \quad G_1 = e^{\int y\,dx}$$

algebraisch von einander abhängig. Beachtet man aber, dass in der in § 2 für die Gleichungen (10) und (11) angestellten Untersuchung über den algebraischen Zusammenhang der Grössen G und H alle Schlüsse unverändert bleiben, wenn wir G und H durch G_1 und H_1 ersetzen, so dass die Gleichung (15) daselbst in

$$\int y_1 e^{\int y\,dx} dx = A e^{\int y\,dx} + B$$

übergeht, und somit — wie dort in (16) — erfordert wird, dass die vorgelegte Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + zy = y_1$$

ein algebraisches Integral besitzt, so folgt der Satz:

dass in einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dz}{dx} + zy = y_1$ *dann und nur dann eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen, einem particulären Integrale und der Variabeln* x *besteht, wenn entweder* $e^{\int y\,dx}$ *eine*

Beschäftigen wir uns nunmehr mit denjenigen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren allgemeines Integral sich algebraisch mit Hülfe der Variabeln und einer willkürlichen Constanten durch *ein* particuläres Integral ausdrücken lässt, und fragen wir zuerst nach solchen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(26) \cdots \frac{dz}{dx} = F(x, z),$$

für welche sich das allgemeine Integral als *ganze* Function *eines* particulären Integrales mit variabeln Coefficienten darstellen lässt; sei diese Beziehung

$$(27) \cdots z = \varphi_0(x, c) z_0^m + \varphi_1(x, c) z_0^{m-1} + \cdots + \varphi_m(x, c) = \varphi(z_0, x, c),$$

in welcher c eine willkürliche Constante, und $\varphi_\alpha(x, c)$ algebraische Functionen von x und c bedeuten, so wird nach der in § 6 zu den Gleichungen (52) und (53) hinzugefügten Anmerkung die identische Gleichung bestehen müssen

$$z_0 = \varphi\left(\varphi(z_0, x, \varkappa), x, c\right)$$

oder

$$z_0 = \varphi_0(x, c)\left\{\varphi_0(x, \varkappa) z_0^m + \cdots + \varphi_m(x, \varkappa)\right\}^m$$

$$+ \varphi_1(x, c)\left\{\varphi_0(x, \varkappa) z_0^m + \cdots + \varphi_m(x, \varkappa)\right\}^{m-1} + \cdots + \varphi_m(x, c),$$

und somit, wenn $m > 1$, da z_0 kein algebraisches Integral sein soll,

$$\varphi_0(x, c)\, \varphi_0(x, \varkappa)^m = 0;$$

da aber $\varphi_0(x, c)$ für ein willkürliches c nicht verschwinden kann, weil sonst z_0 nur vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade wäre, andererseits aber auch $\varphi_0(x, \varkappa)$ nicht Null sein kann, da $\varkappa$ als Function von c ebenfalls eine willkürliche Grösse ist, so muss $m = 1$ sein, und *es giebt somit keine anderen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function eines nicht algebraischen particulären Integrales sein soll, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, als solche, für welche diese Relation eine ganze lineare ist.*

Sei nun diese Beziehung

$$(28) \cdots z = Cz_0 + C_1,$$

---

algebraische Function von x ist oder die Differentialgleichung selbst ein algebraisches particuläres Integral besitzt; in beiden Fällen ist diese Beziehung eine lineare von der Form $Az + A_0 z_0 = \omega(x)$, wenn $\omega(x)$ eine algebraische Function von x, A und A_0 Constanten bedeuten, in denen die willkürliche Integrationsconstante enthalten ist.

worin C und C_1 algebraische Functionen von x und der willkürlichen Constanten bedeuten, so erhält man wegen

$$\frac{dz}{dx} = C\frac{dz_0}{dx} + z_0\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx}$$

nach (26) die Beziehungen

$$\frac{dz_0}{dx} = F(x, z_0), \quad C\frac{dz_0}{dx} + z_0\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx} = F(x, Cz_0 + C_1),$$

oder

$$(29) \cdots\cdot F(x, Cz_0 + C_1) = CF(x, z_0) + z_0\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx}.$$

Da nun z_0 kein algebraisches Integral ist, die Gleichung (29) somit eine in z_0 identische sein muss, so wird man diese nach z_0 und c differentiiren dürfen und erhält leicht*) durch Elimination von $\frac{\partial F(x, Cz_0 + C_1)}{\partial(Cz_0 + C_1)}$ für $F(x, z_0)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F(x, z_0)}{\partial z_0} + F(x, z_0)\frac{\partial}{\partial z_0}\log\frac{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial z_0}}{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial c}} = -\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial z_0}}{\frac{\partial(Cz_0 + C_1)}{\partial c}},$$

welche integrirt

$$(30) \cdots\cdot F(x, z_0) = M\left(z_0\frac{\partial C}{\partial c} + \frac{\partial C_1}{\partial c}\right)$$

$$-\frac{\left(z_0\frac{\partial C}{\partial c} + \frac{\partial C_1}{dc}\right)}{C}\int^{z_0}\frac{z_0\left(\frac{\partial C}{\partial c}\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial c}\right) + \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial c} - C\frac{\partial^2 C_1}{\partial x\partial c}}{\left(z_0\frac{\partial C}{\partial c} + \frac{\partial C_1}{\partial c}\right)^2}dz_0$$

liefert, worin M im Allgemeinen von x abhängig ist; da nun aber $F(x, z_0)$ eine algebraische Function von x und z_0 sein soll, so muss, wie leicht zu sehen,

$$\frac{\partial C}{\partial c}\frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial c} = -C^2\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{C}\right] = 0,$$

also $\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{C}$ von c unabhängig, d. h.

$$C = \chi(c)\,\psi(x)$$

sein, worin χ und ψ noch willkürliche algebraische Functionen bedeuten, und es folgt somit unmittelbar aus (30), dass $F(x, z_0)$ eine lineare Function von z_0 wird, und daher die Differentialgleichung die Form haben muss

$$(31) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = Mz + N;$$

---

*) Wir werden diese Untersuchung gleich nachher für eine beliebige algebraische Relation zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale durchführen.

zugleich ergiebt sich durch Einsetzen des Werthes $F(x, z_0) = Mz_0 + N$ in die Functionalgleichung (29), dass $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$, d. h. die Grösse C in der Relation zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale $z = Cz_0 + C_1$ eine Constante ist. Wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function eines particulären Integrales sein soll, deren Coefficienten von der willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist die der linearen, und zwar mit der linearen Beziehung $z = Cz_0 + C_1$, worin C eine Constante und C_1 eine algebraische Function von x ist.

Nun war aber in der vorhergegangenen Anmerkung gezeigt worden, dass, wenn in einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung (31) eine algebraische Beziehung — und zwar wurde nachgewiesen, dass es nothwendig eine lineare war — zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale bestehen sollte, entweder $e^{\int M dx}$ eine algebraische Function sein musste, oder die Differentialgleichung selbst ein algebraisches Integral besass. Ist das erstere der Fall, und wird

$$e^{\int M dx} = y, \quad \int \frac{N}{y}\, dx = y_1$$

gesetzt, worin y eine algebraische Function und y_1 ein Abel'sches Integral ist, so hat das Integral der Differentialgleichung die Form

$$z = \mu y + y y_1 \quad \text{oder} \quad y_1 = \frac{z}{y} - \mu,$$

worin μ eine Constante bedeutet, und hieraus geht unmittelbar hervor, dass z ein Abel'sches Theorem von der Form

$$\frac{z'}{y'} + \frac{z''}{y''} + \cdots + \frac{z^{\lambda}}{y^{(\lambda)}} = \frac{Z_1}{Y_1} + \frac{Z_2}{Y_2} + \cdots + \frac{Z_p}{Y_p} + \text{alg. log.}$$

besitzt; im zweiten Falle, in dem die Differentialgleichung ein algebraisches Integral $z = \zeta$ besitzt, wird für ein bestimmtes ν

$$\zeta = \nu e^{\int M dx} + e^{\int M dx} \int N e^{-\int M dx}\, dx$$

sein, und das allgemeine Integral nimmt somit die Form an

$$z = \zeta + (c - \nu)\, e^{\int M dx};$$

da aber $e^{\int M dx}$ ein Abel'sches Theorem in der Form der Gleichung (2) oder (3) besitzt, so wird z. B. für den Fall der Gleichung (2)

$$(z^{(1)} - \zeta^{(1)})\,(z^{(2)} - \zeta^{(2)}) \cdot\cdot\, (z^{(\lambda)} - \zeta^{(\lambda)})\,(Z_1 - \zeta_1)^{-1}\,(Z_2 - \zeta_2)^{-1} \cdot\cdot\, (Z_p - \zeta_p)^{-1} = C$$

sein, und *es wird somit die Annahme, dass für eine Differentialgleichung erster Ordnung das allgemeine Integral eine ganze rationale Function* *eines particulären mit variabeln Coefficienten ist, in allen Fällen zu einem Abel'schen Theorem führen.*

Soll nun für eine Differentialgleichung erster Ordnung überhaupt das allgemeine Integral eine algebraische Function eines particulären also

$$z = \varphi(z_0, x, c)$$

sein, so wird aus der Zusammenstellung der Gleichungen

$$\frac{dz_0}{dx} = F(x, z_0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0}\frac{dz_0}{dx} = \frac{dz}{dx} = F(x, z)$$

wieder

$$F\big(x, \varphi(z_0, x, c)\big) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} F(x, z_0),$$

und durch Differentiation dieser nach z_0 und c und Elimination von $\frac{\partial F(x, \varphi(x, z_0, c))}{\partial \varphi(x, z_0, c)}$ die für jedes z_0 geltende Bestimmungsgleichung für $F(x, z_0)$ folgen

$$\frac{\partial F(x, z_0)}{\partial z_0} + F(x, z_0)\frac{\partial}{\partial z_0}\log\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}} = -\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}},$$

also durch Integration

$$(32) \cdots\cdot F(x, z_0) = M\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z_0}}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}dz_0,$$

worin M eine noch willkürliche Function von x und c ist, und $F(x, z_0)$ der Bedingung zu unterwerfen ist, dass es eine algebraische Function seiner Variabeln sein soll.

Werfen wir speciell die Frage nach einer rational gebrochenen Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale auf und fassen die bekanntlich wiederum — wie oben für die Gleichung (27) — geltende Beziehung

$$z_0 = \varphi\big(\varphi(z_0, x, \varkappa), x, c\big)$$

in der Weise auf, dass die Gleichung

$$z_0 = \varphi(z, x, c)$$

zu einer ihrer Auflösungen die Grösse

$$z = \varphi(z_0, x, \varkappa)$$

haben soll, so wird für die Annahme einer rational gebrochenen Beziehung die Gleichung

$$(33) \cdots\cdot z_0 = \frac{A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_m}{B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \cdots + B_n}$$

lauten, und eine ihrer Auflösungen

$$(34) \cdots\cdot z = \frac{a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 z_0^n + b_1 z_0^{n-1} + \cdots + b_n}$$

sein, wenn $a_0, a_1, \cdot\cdot a_m, b_0, b_1, \cdot\cdot b_n$ dieselben algebraischen Functionen von x und $\varkappa$ bedeuten, wie es $A_0, A_1, \cdots A_m, B_0, B_1, \cdots B_n$ von x und c sind, oder es wird (34) in (33) eingesetzt eine identische Gleichung liefern müssen, da z_0 nicht eine algebraische Function von x sein soll. Ordnet man die Gleichung (33) nach Potenzen von z, so sieht man, dass z, wenn $m > n$, für kein endliches z_0, wenn $m < n$ nur für $z_0 = 0$, und wenn $m = n$ nur für *einen* Werth von z_0 unendlich werden kann; da aber (34) eine gebrochene Function von z_0 ist, so ist der Fall $m > n$ nach dem eben hervorgehobenen von selbst ausgeschlossen, und es muss der Nenner von z die n^{te} Potenz einer linearen Function von z_0 sein. Ferner wird $z = 0$ für den durch die Beziehung $A_m - B_n z_0 = 0$ definirten Werth von z_0 oder für $z_0 = \infty$, und es wird daher der Zähler von z die m^{te} Potenz dieser linearen Function von z_0 sein müssen, so dass sich, je nachdem $m < n$ oder $m = n$, die beiden Formen für z ergeben

$$z = \frac{(a_0 z_0 + a_1)^m}{z_0^n} \quad \text{oder} \quad z = \left(\frac{a_0 z_0 + a_1}{b_0 z_0 + b_1}\right)^m;$$

man sieht nun unmittelbar, dass diese beiden Beziehungen mit den entsprechenden

$$z_0 = \frac{(A_0 z + A_1)^m}{z^n} \quad \text{oder} \quad z_0 = \left(\frac{A_0 z + A_1}{B_0 z + B_1}\right)^m$$

nur für den zweiten Fall und zwar nur für $m = 1$ zusammen bestehen können, und findet daher als einzig möglichen Fall die linear gebrochene Beziehung.

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function eines particulären sein soll, deren Coefficienten von der willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, ist diejenige, für welche diese rationale Function eine lineare ist.

Aber es lässt sich auch leicht die nothwendige Form dieser Differentialgleichungen erster Ordnung angeben, welche eine derartige Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale liefern können; denn setzt man in (32)

$$\varphi(z_0, x, c) = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta},$$

so folgt leicht

$$(35) \cdots\cdot F(x, z_0) = \frac{(\gamma z_0 + \delta)\left(z_0 \frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{\partial \beta}{\partial c}\right) - (\alpha z_0 + \beta)\left(z_0 \frac{\partial \gamma}{\partial c} + \frac{\partial \delta}{\partial c}\right)}{\alpha\delta - \beta\gamma} \left\{M + \frac{\partial J}{\partial x}\right\},$$

wenn

$$J = (\alpha\delta - \beta\gamma)\int \frac{dz_0}{(\gamma z_0 + \delta)\left(z_0 \frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{\partial \beta}{\partial c}\right) - (\alpha z_0 + \beta)\left(z_0 \frac{\partial \gamma}{\partial c} + \frac{\partial \delta}{\partial c}\right)}$$

gesetzt wird. Da nun im Allgemeinen

$$J = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}} \frac{1}{a-b} \log \left\{\frac{z_0 - a}{z_0 - b}\right\}$$

sein wird, worin a und b algebraische Functionen von x und c bedeuten, so muss, da $F(x, z_0)$ eine algebraische Function von x und z_0 sein soll,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\left(\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right)(a-b)}\right] = 0$$

sein, und somit, wie leicht zu sehen,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{a-b} \frac{(z_0 - a)\frac{\partial b}{\partial x} - (z_0 - b)\frac{\partial a}{\partial x}}{(\gamma z_0 + \delta)\left(z_0 \frac{\partial \alpha}{\partial c} + \frac{\partial \beta}{\partial c}\right) - (\alpha z_0 + \beta)\left(z_0 \frac{\partial \gamma}{\partial c} + \frac{\partial \delta}{\partial c}\right)},$$

wonach sich $F(x, z_0)$ nach Gleichung (35) als ganze Function zweiten Grades in z_0 ergiebt, deren Coefficienten noch willkürliche algebraische Functionen von x sind. Waren die Grössen a und b einander gleich, so ergiebt sich

$$J = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}} \frac{1}{z_0 - a},$$

und da hieraus

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{1}{z_0 - a} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}}\right] - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial c} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial c}} \frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{(z_0 - a)^2}$$

folgt, so erhalten wir wiederum nach Gleichung (35) für $F(x, z_0)$ eine ganze Function zweiten Grades in z_0.

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function eines particulären sein kann, deren Coefficienten von den unabhängigen Variabeln und der Integrationsconstanten algebraisch abhängen, ist von der Form $\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C$, *worin* A, B, C *algebraische Functionen von* x *bedeuten, und zwar wird dann zwischen diesen Integralen nur eine lineare Relation mit im Allgemeinen von* x *algebraisch abhängigen Coefficienten stattfinden können.*

Sei z. B. die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(36) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} + z^2 + xz + \frac{x^2}{4} = 0$$

vorgelegt, deren allgemeines Integral

$$(37) \cdots\cdot z = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\frac{ce^{x\sqrt{2}}+1}{ce^{x\sqrt{2}}-1}$$

ist, so besteht, wenn z_0 irgend ein particuläres transcendentes Integral dieser Differentialgleichung bedeutet, zwischen dem allgemeinen Integral und dem particulären die lineare Beziehung

$$(38) \cdots\cdot \frac{z+\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_0+\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} = C\cdot\frac{z+\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_0+\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

somit eine lineare gebrochene Relation zwischen z und z_0. Zugleich ist aber auch zu sehen, dass für diese Differentialgleichung, weil

$$ce^{x\sqrt{2}} = \frac{z+\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z+\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

ist, ein Abel'sches Theorem für $p=1$ stattfindet, indem für die Argumente x_1, x_2, x_3, welche in der algebraischen Beziehung stehen

$$x_3 = x_1 + x_2,$$

die zu diesen gehörigen Werthe z_1, z_2, Z eines beliebigen Integrales der algebraischen Gleichung genügen

$$(39) \cdots\cdot \frac{Z+\frac{x_3}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{Z+\frac{x_3}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{z_1+\frac{x_1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_1+\frac{x_1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{z_2+\frac{x_2}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{z_2+\frac{x_2}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Wir wollen uns, nachdem die nothwendige Form jener Differentialgleichungen gefunden worden, nun mit der Frage beschäftigen, welchen Differentialgleichungen von der Form

$$(40) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C,$$

worin A, B, C algebraische Functionen von x bedeuten, auch wirklich eine lineare Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale entspricht.

Macht man auf (40) die Substitution

$$(41) \cdots\cdot z = -\frac{1}{A}\,\frac{d\log u}{dx},$$

so geht diese Gleichung bekanntlich über in die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(42) \cdots\cdot \frac{d^2u}{dx^2} + P\,\frac{du}{dx} + Qu = 0,$$

wenn

$$(43) \cdots\cdot P = -\left(\frac{\frac{dA}{dx}}{A} + B\right), \quad Q = AC$$

gesetzt werden; sind nun u_1 und u_2 zwei particuläre Fundamentalintegrale der Gleichung (42), so wird sich aus dem allgemeinen derselben $C_1 u_1 + C_2 u_2$, wenn $\frac{C_2}{C_1} = c$ gesetzt wird, das allgemeine Integral der Differentialgleichung (40) in der Form ergeben

$$(44) \cdots\cdot z = -\frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{A(u_1 + cu_2)}.$$

Soll nun zwischen z und z_0 ein rationaler linearer Zusammenhang von der Form

$$(45) \cdots\cdot z = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

bestehen, so muss nach (44) auch

$$(46) \cdots\cdot \frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{A(u_1 + cu_2)} = \frac{\alpha\left(\frac{du_1}{dx} + c_0\frac{du_2}{dx}\right) - \beta A(u_1 + c_0 u_2)}{-\gamma\left(\frac{du_1}{dx} + c_0\frac{du_2}{dx}\right) + \delta A(u_1 + c_0 u_2)}$$

oder

$$(47) \cdots\cdot \gamma \frac{d\log(u_1 + cu_2)}{dx}\frac{d\log(u_1 + c_0 u_2)}{dx} - \delta A\frac{d\log(u_1 + cu_2)}{dx}$$
$$+ \alpha A\frac{d\log(u_1 + c_0 u_2)}{dx} - \beta A^2 = 0$$

sein — worin der Fall, in dem A, B, C Constanten sind, als ein specieller Fall der Gleichung (16) ausgeschlossen werden darf.

Sind z_1 und z_2 irgend zwei von einander verschiedene Integrale der Gleichung (40), so werden nach (41) die beiden entsprechenden Werthe von u

$$(48) \cdots\cdot u_1 = e^{-\int A z_1 dx} \quad \text{und} \quad u_2 = e^{-\int A z_2 dx}$$

stets als Fundamentalintegrale der Gleichung (42) aufgefasst werden dürfen, da

$$c_1 e^{-\int A z_1 dx} + c_2 e^{-\int A z_2 dx} = 0$$

die Identität von z_1 und z_2 voraussetzen würde, und nimmt man nun an, die Differentialgleichung (40) habe zwei algebraische Integrale ζ_1 und ζ_2, so wird nach (48)

$$(A) \cdots\cdot \frac{du_1}{dx} = -A\zeta_1 u_1 \quad \text{und} \quad \frac{du_2}{dx} = -A\zeta_2 u_2$$

sein, und somit die Gleichung (46) in

$$(49) \cdots\cdot \frac{\zeta_1 u_1 + c\zeta_2 u_2}{u_1 + cu_2} = \frac{\alpha(\zeta_1 u_1 + c_0\zeta_2 u_2) + \beta(u_1 + c_0 u_2)}{\gamma(\zeta_1 u_1 + c_0\zeta_2 u_2) + \delta(u_1 + c_0 u_2)}$$

übergehen, oder in

$$(50)\cdots\cdot u_1^2[\gamma\zeta_1^2+(\delta-\alpha)\zeta_1-\beta]+u_1u_2[c(\gamma\zeta_1\zeta_2+\delta\zeta_2-\alpha\zeta_1-\beta)+$$
$$+c_0(\gamma\zeta_1\zeta_2+\delta\zeta_1-\alpha\zeta_2-\beta)]+u_2^2cc_0[\gamma\zeta_2^2+(\delta-\alpha)\zeta_2-\beta]=0.$$

Bestimmt man nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so, dass diese Gleichung identisch erfüllt wird, so folgt

$$(51)\cdots\cdot \frac{\gamma}{\beta}=-\frac{1}{\zeta_1\zeta_2},\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{c_0\zeta_1-c\zeta_2}{(c-c_0)\zeta_1\zeta_2},\quad \frac{\delta}{\beta}=\frac{c\zeta_1-c_0\zeta_2}{(c-c_0)\zeta_1\zeta_2},$$

also stets endliche Ausdrücke, und, da (50) nur eine Umformung von (49) ist, so wird, wenn u_1 und u_2 Integrale der Gleichungen (A) sind, die Gleichung (50) für die gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auch durch die Gleichung (46) ersetzt werden können, d. h. es wird für die Gleichung (40) die algebraische Beziehung (45) gültig sein, welche die Form annimmt:

$$(52)\cdots\cdot z=\frac{(c_0\zeta_1-c\zeta_2)z_0+(c-c_0)\zeta_1\zeta_2}{(c_0-c)z_0+c\zeta_1-c_0\zeta_2}.$$

Wir finden somit, *dass, wenn die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung* (40) *zwei particuläre algebraische Integrale besitzt, stets eine lineare Beziehung mit algebraischen Coefficienten zwischen ihrem allgemeinen und einem transcendenten particulären Integrale besteht, vorausgesetzt, dass ein solches existirt.*

So hat z. B. die Differentialgleichung (36) die beiden den constanten $c=0$ und $c=\infty$ entsprechenden algebraischen Integrale

$$\zeta_1=-\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}},\quad \zeta_2=-\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}},$$

und die aus (52) sich ergebende Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale

$$z=\frac{\left(\frac{x}{2}-C_1\sqrt{\frac{1}{2}}\right)z_0+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}}{-z_0-\frac{x}{2}-C_1\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

fällt mit der oben gefundenen Gleichung (38) zusammen, wenn

$$\frac{C+1}{C-1}=C_1$$

gesetzt wird.

In dem Falle, dass ζ_1 und ζ_2 zwei algebraische Integrale der Gleichung (40) waren, wurde durch die gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Gleichung (50) identisch befriedigt, und es brauchte somit nicht $\frac{u_1}{u_2}$ dieser Gleichung gemäss eine algebraische Function zu sein, sowie in der That in unserem Beispiel

$$\frac{u_1}{u_2}=e^{-\int A(\zeta_1-\zeta_2)\,dx}=e^{-\sqrt{2}\int dx}=e^{-\sqrt{2}\cdot x}$$

ist; andererseits sieht man aber umgekehrt leicht, dass, wenn u_1 und u_2 so beschaffen sind, dass ihr Quotient algebraisch ist, also

$$e^{-\int A(\zeta_1-\zeta_2)\,dx} = \varphi(x)$$

ist, worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function bedeutet,

$$A(\zeta_1-\zeta_2) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

also $\zeta_1 - \zeta_2$ selbst algebraisch ist; da aber nach (40)

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = A\zeta_1^2 + B\zeta_1 + C, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = A\zeta_2^2 + B\zeta_2 + C,$$

also

$$\frac{d(\zeta_1-\zeta_2)}{dx} = A(\zeta_1-\zeta_2)(\zeta_1+\zeta_2) + B(\zeta_1-\zeta_2)$$

ist, so folgt hieraus, dass auch $\zeta_1 + \zeta_2$ eine algebraische Function, also ζ_1 und ζ_2 selbst algebraische Integrale der Gleichung (40) sein müssen.

Es ist aber leicht zu sehen, *dass in allen Fällen, in welchen die Differentialgleichung* (40) *zwei algebraische Integrale* ζ_1 *und* ζ_2 *hat, jedes transcendente Integral derselben ein Abel'sches Theorem besitzt*; denn da nach (44), wenn

$$u_1 = e^{-\int A\zeta_1\,dx}, \quad u_2 = e^{-\int A\zeta_2\,dx}$$

gesetzt wird,

$$z = \frac{\zeta_1 u_1 + c\zeta_2 u_2}{u_1 + c u_2} = \frac{\zeta_1 \frac{u_1}{u_2} + c\zeta_2}{\frac{u_1}{u_2} + c},$$

oder

$$\frac{u_1}{u_2} = e^{-\int A(\zeta_1-\zeta_2)\,dx} = c \cdot \frac{\zeta_2 - z}{z - \zeta_1}$$

wird, und der Voraussetzung nach ζ_1 und ζ_2 algebraische Functionen von x sind, so ist $\frac{u_1}{u_2}$ eine Exponentialgrösse, deren Exponent ein Abel'sches Integral ist, und nachdem oben in Gleichung (2) oder (3) das Abel'sche Theorem für solche Exponentialfunctionen entwickelt worden, so folgt aus der obigen Gleichung, dass, wenn z. B. das Integral der Exponentialfunction ein solches erster Gattung ist, und die zu den Argumenten $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ gehörigen Werthe irgend eines Integrales z der Differentialgleichung (40) mit $z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots z^{(\mu)}$ und die zugehörigen ζ-Werthe mit $\zeta_\alpha^{(1)}, \zeta_\alpha^{(2)}, \cdots \zeta_\alpha^{(\mu)}$, ferner die den in bekannter Weise algebraisch abhängigen Argumenten $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_p$ zugehörigen Werthe mit $z^{(I)}, z^{(II)}, \cdots z^{(P)}, \zeta_\alpha^{(I)}, \zeta_\alpha^{(II)}, \cdots \zeta_\alpha^{(P)}$ bezeichnet werden, das Abel'sche Theorem in der Form

$$\frac{\zeta_2^{(1)} - z^{(1)}}{z^{(1)} - \zeta_1^{(1)}} \cdot \frac{\zeta_2^{(2)} - z^{(2)}}{z^{(2)} - \zeta_1^{(2)}} \cdots \frac{\zeta_2^{(\mu)} - z^{(\mu)}}{z^{(\mu)} - \zeta_1^{(\mu)}} \cdot \frac{z^{(I)} - \zeta_1^{(I)}}{\zeta_2^{(I)} - z^{(I)}} \cdots \frac{z^{(P)} - \zeta_1^{(P)}}{\zeta_2^{(P)} - z^{(P)}} = C.$$

Dass es aber auch Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form (40) giebt, die nicht zwei algebraische Integrale besitzen, und für welche dennoch das allgemeine Integral eine gebrochene lineare Function eines particulären mit variablen Coefficienten ist, sieht man z. B. aus der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = z^2 - \frac{1}{x} z,$$

deren allgemeines Integral

$$z = \frac{1}{cx - x \log x}$$

ist, und für welche der gesuchte Zusammenhang

$$z = \frac{z_0}{(c - c_0) x z_0 + 1}$$

ist.

Hat also die Differentialgleichung (40) nicht zwei algebraische Integrale, so wird sich die geforderte Beziehung (45) in die Form setzen lassen

$$(53) \ldots \quad \frac{\zeta_1 e^{-\int A \zeta_1 dx} + c \zeta_2 e^{-\int A \zeta_2 dx}}{e^{-\int A \zeta_1 dx} + c e^{-\int A \zeta_2 dx}} = \frac{\alpha \zeta_1 + \beta}{\gamma \zeta_1 + \delta},$$

wenn ζ_1 irgend ein transcendentes Integral der Differentialgleichung (40) bedeutet, oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{\alpha \zeta_1 + \beta}{\gamma \zeta_1 + \delta} = f(\zeta_1)$$

gesetzt wird, in

$$(54) \ldots \quad e^{-\int A (\zeta_1 - \zeta_2) dx} = - c \cdot \frac{f(\zeta_1) - \zeta_2}{f(\zeta_1) - \zeta_1}$$

übergehen, wobei die Constante c in α, β, γ, δ, also in $f(\zeta_1)$ enthalten ist. Diese Beziehung muss nun einerseits für beliebige c bestehen, andererseits muss sie nach x logarithmisch differentiirt die in den Grössen ζ_1 und ζ_2 algebraische Beziehung liefern

$$A(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{f'(\zeta_1)(A\zeta_1^2 + B\zeta_1 + C) + \frac{\partial f(\zeta_1)}{\partial x} - (A\zeta_2^2 + B\zeta_2 + C)}{f(\zeta_1) - \zeta_2} - \frac{[1 - f'(\zeta_1)](A\zeta_1^2 + B\zeta_1 + C) - \frac{\partial f(\zeta_1)}{\partial x}}{\zeta_1 - f(\zeta_1)}.$$

Untersuchen wir jetzt den Fall, in dem $C = 0$, also die Differentialgleichung (40)

$$(55) \ldots \quad \frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz$$

lautet, so geht dieselbe durch die Substitution $z = \frac{1}{y}$ in die Gleichung

$$(56) \ldots \quad \frac{dy}{dx} + By = - A$$

über, und es folgt, dass, wenn die Gleichung (55) die Eigenschaft haben soll, dass ihr allgemeines Integral eine lineare rationale Function eines particulären mit variabeln Coefficienten sein soll, dasselbe auch für (56) stattfinden muss; wenn aber für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung überhaupt ein algebraischer Zusammenhang zwischen seinem allgemeinen und einem particulären Integrale existiren soll, so muss dieser, wie oben gezeigt worden, ein ganzer linearer sein von der Form

$$(57) \cdots\cdot \; y = My_0 + N,$$

worin M eine Constante, N eine algebraische Function von x ist, und zwar konnte dies nur stattfinden, wenn entweder $e^{\int B\,dx}$ eine algebraische Function von x ist, oder die Differentialgleichung (56) ein algebraisches Integral besitzt. Da nun aber dem Zusammenhange (57) für die Differentialgleichung (55) offenbar die linear gebrochene Beziehung

$$(58) \cdots\cdot \; z = \frac{z_0}{M + Nz_0}$$

entspricht, so folgt, *dass ein linear gebrochener Zusammenhang für die Gleichung* (55) *nur in der Gestalt* (58) *existiren kann, und dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür entweder erfordern, dass* $e^{\int B\,dx}$ *eine algebraische Function sei, oder dass die Differentialgleichung* (55) *ein algebraisches Integral besitzt.*

Da nun im ersten Falle, wie oben gezeigt worden, für die Gleichung (56), mit Beschränkung auf Integrale erster Gattung, ein Abel'sches Theorem von der Form existirt

$$\begin{aligned} &y^{(1)} f(x_1) + y^{(2)} f(x_2) + \cdots + y^{(\lambda)} f(x_\lambda) \\ &= Y_1 f(X_1) + Y_2 f(X_2) + \cdots + Y_p f(X_p), \end{aligned}$$

wenn

$$e^{\int B\,dx} = f(x)$$

gesetzt wird, und $f(x)$ eine algebraische Function von x bedeutet, im zweiten Falle dagegen das Abel'sche Theorem die Gestalt hat

$$(y^{(1)}-\eta^{(1)})(y^{(2)}-\eta^{(2)})\cdot\cdot(y^{(\lambda)}-\eta^{(\lambda)})(Y_1-\eta_1)^{-1}(Y_2-\eta_2)^{-1}\cdot\cdot(Y_p-\eta_p)^{-1} = C,$$

worin η das algebraische Integral der Gleichung (56) bedeutet, so wird in den beiden bezeichneten Fällen, dass $e^{\int B\,dx}$ eine algebraische Function $F(x)$ ist oder die Differentialgleichung (55) ein algebraisches Integral ζ besitzt, ein Abel'sches Theorem existiren und zwar in den resp. Formen

$$\begin{aligned} &\left[z^{(1)} F(x_1)\right]^{-1} + \left[z^{(2)} F(x_2)\right]^{-1} + \cdots + \left[z^{(\lambda)} F(x_\lambda)\right]^{-1} \\ &= \left[Z_1 F(X_1)\right]^{-1} + \cdots + \left[Z_p F(X_p)\right]^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{z^{(1)}} - \frac{1}{\zeta^{(1)}}\right]\left[\frac{1}{z^{(2)}} - \frac{1}{\zeta^{(2)}}\right]\cdots\left[\frac{1}{z^{(\lambda)}} - \frac{1}{\zeta^{(\lambda)}}\right]\left[\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\zeta_1}\right]^{-1}\cdots \\ &\cdots\left[\frac{1}{z_p} - \frac{1}{\zeta_p}\right]^{-1} = C. \end{aligned}$$

Hiermit brechen wir die Untersuchung der Fälle ab, in denen für Differentialgleichungen ein Abel'sches Theorem mit der festen Zahl $p = 1$ existiren sollte, und welche unter der Klasse der irreductibeln Differentialgleichungen nur auf solche erster Ordnung führten.

§ 9.

Untersuchungen über das erweiterte Abel'sche Theorem für das Geschlecht $p = 2$; weitere Sätze über den Zusammenhang des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung mit den particulären. Anwendung auf die linearen Differentialgleichungen.

Sei nunmehr die feste Zahl p des gesuchten Abel'schen Theorems für Differentialgleichungen gleich 2, die gesuchte algebraische Beziehung also von der Form

$$(59) \cdots\cdot F(Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3) = 0,$$

worin z_1, z_2, z_3 Werthe eines particulären Integrales einer Differentialgleichung für die von einander unabhängigen Variabeln x_1, x_2, x_3, und Z_1, Z_2 Werthe desselben particulären Integrales für die resp. Variabeln X_1 und X_2 vorstellen, welche algebraisch von x_1, x_2, x_3 durch die Gleichungen

$$(60) \cdots\cdot X_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \qquad X_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3)$$

abhängen, und wobei zugelassen wird, dass in die das Abel'sche Theorem darstellende Gleichung (59) auch die unabhängigen Variabeln eintreten können.

Stellt man mit (59) die nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 genommenen Differentialquotienten dieser Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dX_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial Z_2}\frac{dZ_2}{dX_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dX_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial Z_2}\frac{dZ_2}{dX_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial Z_1}\frac{dZ_1}{dX_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial F}{\partial Z_2}\frac{dZ_2}{dX_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F}{\partial z_3}\frac{dz_3}{dx_3} + \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

zusammen, so kann man aus diesen 4 Gleichungen im allgemeinen noch nicht die 4 Grössen $Z_1, Z_2, \frac{dZ_1}{dX_1}, \frac{dZ_2}{dX_2}$ eliminiren; wenn man jedoch die drei zuletzt erhaltenen Gleichungen resp. nach x_1, x_2, x_3 differentiirt, so erhält man im Ganzen 7 Gleichungen, aus denen man die 6 Grössen

$$Z_1, Z_2, \frac{dZ_1}{dX_1}, \frac{dZ_2}{dX_2}, \frac{d^2Z_1}{dX_1^{\,2}}, \frac{d^2Z_2}{dX_2^{\,2}}$$

eliminiren kann, und es ergiebt sich eine algebraische Gleichung von der Form

$$\mathfrak{F}\left(z_1, z_2, z_3, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{dz_3}{dx_3}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}, \frac{d^2z_2}{dx_2^2}, \frac{d^2z_3}{dx_3^2}, x_1, x_2, x_3\right) = 0,$$

so dass, wenn x_2, x_3, z_2, z_3 und die Differentialquotienten dieser Grössen numerischen Constanten gleich gesetzt werden, z_1 das Integral einer algebraischen Differentialgleichung

$$(61) \cdots\cdot f\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2z_1}{dx_1^2}\right) = 0$$

wird, und *somit ein Abel'sches Theorem für $p = 2$ algebraischen irreductibeln Differentialgleichungen von höherer Ordnung als der zweiten nicht zukommen kann.*

Es bedarf keiner weiteren Ausführung dieses Satzes für beliebige p.

Wir werfen nun die Frage auf, welche Eigenschaft eine Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzen muss, wenn einem ihrer particulären Integrale ein Abel'sches Theorem von der durch die Gleichungen (59) und (60) definirten Form zukommen soll. Beachtet man, dass nach dem Satze I des § 5 in Gleichung (59) für z_2 und z_3 beliebige Integrale der resp. Differentialgleichungen gesetzt werden dürfen, wenn nur für Z_1 und Z_2 passende Integrale substituirt werden, vorausgesetzt, dass — was ja stets von der Gleichung (61) angenommen werden darf — die zu Grunde gelegte Differentialgleichung irreductibel oder wenigstens in Bezug auf den zweiten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist und die in Betracht kommenden Integrale nicht einer Differentialgleichung niederer Ordnung genügen, so folgt, dass, wenn man für z_2 und z_3 die allgemeinen, zu den Argumenten x_2 und x_3 gehörigen Integrale, welche je zwei willkürliche Constanten μ_1, μ_2 und ν_1, ν_2 enthalten, setzt, dann für Z_1 und Z_2 nur passende, zu den Argumenten X_1 und X_2 gehörige Integrale (man kann eine solche continuirliche Reihe von Integralen z_2 und z_3 wählen, dass X_1 und X_2 ihre Werthe beibehalten) zu substituiren sind, deren Integrationsconstanten m_1, m_2 und n_1, n_2 bestimmte Functionen

$$m_1 = \varphi_1(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2), \; m_2 = \varphi_2(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2), \; n_1 = \psi_1(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2),$$
$$n_2 = \psi_2(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2)$$

jener 4 anderen Integrationsconstanten sein werden. Wählen wir nun zwischen den 4 Grössen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 solche zwei feste Beziehungen, dass n_1 und n_2 für alle möglichen Variationen dieser 4 Constanten, von denen also nur noch zwei von einander unabhängig bleiben, dieselben beliebigen, aber fest gegebenen Werthe annehmen, so werden in der Gleichung (59)

$$(62) \cdots\cdot F(Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0$$

z_2 und z_3 zwei willkürliche Constanten bedeuten dürfen, und man wird für zwei specielle Werthepaare derselben, wie eben nachgewiesen, bei verändertem Z_1 dasselbe Z_2 erhalten können, so dass sich die Beziehungen ergeben

$$F(Z_1, Z_2, z_1, C_1, C_2, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(0)}, Z_2, z_1, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(1)}, Z_2, z_1, C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

aus denen sich mit Hülfe der Gleichungen (60) die Grössen Z_2, z_1 X_2, x_1 eliminiren lassen, und somit eine Gleichung

$$(63) \cdots\cdot Z_1 = \Phi(Z_1^{(0)}, Z_1^{(1)}, X_1, C_1, C_2)$$

folgt, in welcher x_2 und x_3 als willkürliche, aber bestimmt gewählte Parameter auftreten, und welche zeigt, dass *ein Abel'sches Theorem für $p = 2$ nur solchen irreductibeln Differentialgleichungen zweiter Ordnung zukommen kann, bei welchen das allgemeine Integral eine algebraische Function von zwei particulären Integralen und zwei willkürlichen Constanten ist, in welche auch die unabhängige Variable algebraisch eintreten kann.*

Ist die Differentialgleichung, für welche ein Abel'sches Theorem mit der Zahl $p = 2$ bestehen soll, von der ersten Ordnung, so wird man in der algebraischen Beziehung (62) wieder für z_2 und z_3 willkürliche andere Integrale der resp. Differentialgleichungen setzen können, wenn man nur für Z_1 und Z_2 passende Integrale substituirt. Nimmt man nun wieder für z_2 und z_3 die zu x_2 und x_3 gehörigen allgemeinen Integrale, deren willkürliche Constanten mit μ und ν bezeichnet werden mögen, so wird die im allgemeinen Integrale der zu X_2 gehörenden Differentialgleichung vorkommende Constante n eine Function von μ und ν sein, so dass man eine solche Beziehung zwischen μ und ν festsetzen kann, dass n sich nicht ändert, und somit nur *eine* willkürliche Constante in der Gleichung (62) übrig bleibt, die jetzt genau wie oben durch Specialisirung die Gleichungen liefert

$$F(Z_1, Z_2, z_1, C, a, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(0)}, Z_2, z_1, C^{(0)}, a, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$F(Z_1^{(1)}, Z_2, z_1, C^{(1)}, a, X_1, X_2, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

aus denen wiederum durch Elimination von Z_2, z_1, X_2, x_1 mit Hülfe von (60) die Beziehung folgt

$$(64) \cdots\cdot Z_1 = \Phi(Z_1^{(0)}, Z_1^{(1)}, X_1, C),$$

welche aussagt, dass *ein Abel'sches Theorem für $p = 2$ nur solchen*

Differentialgleichungen erster Ordnung zukommen kann, bei welchen das allgemeine Integral eine algebraische Function von zwei particulären Integralen und einer willkürlichen Constanten ist, in welche auch die unabhängige Variable algebraisch eintreten kann.

Es mag bemerkt werden, dass das eben angewendete Verfahren in gewissen Fällen nicht nothwendig zu einer Beziehung zu führen braucht, welche das allgemeine Integral mit *zwei* particulären Integralen und einer Constanten verbindet; denn betrachten wir z. B. das Abel'sche Theorem für Integrale algebraischer Functionen, welche zum Geschlechte $p = 2$ gehören, und welches sich in linearer Form folgendermassen ausdrückt

$$(65) \cdots\cdot \quad Z_1 + Z_2 = z_1 + z_2 + z_3,$$

worin die Grenzen der links stehenden Integrale die Lösungen einer quadratischen Gleichung sind, deren Coefficienten rational aus den Grenzen der rechts stehenden Integrale und der diesen zugehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, so wird, wenn man, wie oben gefordert wurde, die Gleichungen

$$Z_1 + Z_2 = z_1 + C + a \quad \text{und} \quad Z_1^{(0)} + Z_2 = z_1 + C^{(0)} + a$$

bildet, die Zusammenstellung schon dieser beiden Gleichungen durch Abziehen die Elimination von Z_2 und z_1 ermöglichen und

$$Z_1 = Z_1^{(0)} + C - C^{(0)}$$

liefern, so dass, wie es offenbar sein muss, das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x),$$

worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function vom Geschlechte $p = 2$ ist, schon durch *ein* particuläres Integral und eine willkürliche Constante algebraisch ausdrückbar ist.

Dass es aber in der That Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constanten ist, sehen wir an der allgemeinen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(66) \cdots\cdot \quad \frac{dz}{dx} + f(x)z = \varphi(x),$$

deren allgemeines Integral, wenn

$$e^{-\int f(x)\,dx} = i, \quad e^{-\int f(x)\,dx}\int \varphi(x)\, e^{\int f(x)\,dx}\,dx = J$$

gesetzt wird,

$$z = ci + J$$

ist, welches mit den particulären Integralen

$$z_1 = c_1 i + J, \quad z_2 = c_2 i + J$$

zusammengestellt die Beziehung

$$(67) \cdots\cdot z = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} z_1 + \frac{c - c_1}{c_2 - c_1} z_2$$

liefert.

Werfen wir jetzt allgemein die Frage auf, für welche Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(68) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = f(x, z)$$

zwischen dem allgemeinen Integrale z und zwei particulären Integralen z_1 und z_2 derselben und einer willkürlichen Constanten eine algebraische Beziehung von der Form besteht

$$(69) \cdots\cdot z = F(z_1, z_2, c),$$

wobei angenommen werden soll, dass die unabhängige Variable in diese Relation nicht eintritt*). Es folgt aus (68) und (69), wie leicht zu sehen,

$$(70) \cdots\cdot \frac{\partial F}{\partial z_1} f(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_2} f(x, z_2) = f\big(x, F(z_1, z_2, c)\big),$$

und da angenommen werden darf, dass nicht schon zwischen z_1 und z_2 ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, weil sonst die Gleichung (69) auf ein Problem des vorigen Paragraphen zurückführt, die Gleichung (70) somit eine in z_1 und z_2 identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach z_1, z_2 und c

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} f(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_1} \frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} f(x, z_2) = \frac{\partial f(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial z_2} f(x, z_1) + \frac{\partial F}{\partial z_2} \frac{\partial f(x, z_2)}{\partial z_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_2^2} f(x, z_2) = \frac{\partial f(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial z_2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial c} f(x, z_1) + \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial c} f(x, z_2) = \frac{\partial f(x, F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c},$$

und hieraus die beiden Differentialgleichungen für $f(x, z_1)$ und $f(x, z_2)$

$$\frac{\partial f(x, z_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial c}}{\dfrac{\partial F}{\partial z_1}} \right) f(x, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} \log \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial c}}{\dfrac{\partial F}{\partial z_1}} \right) f(x, z_2)$$

$$\frac{\partial f(x, z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\partial z_1} \log \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial c}}{\dfrac{\partial F}{\partial z_2}} \right) f(x, z_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} \log \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial c}}{\dfrac{\partial F}{\partial z_2}} \right) f(x, z_2),$$

welche für jedes z_1 und z_2 stattfinden müssen; betrachten wir daher die erste dieser Gleichungen als eine Differentialgleichung zur Be-

*) Es braucht kaum ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass die Untersuchung des Falles, in welchem mehr als zwei particuläre Integrale in die Beziehung (69) eintreten, genau in derselben Weise geführt werden kann.

stimmung von $f(x, z_1)$ als Function von z_1, indem wir x und z_2 als Parameter auffassen, so liefert die Integration dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(71) \cdots f(x, z_1) = L \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}} f(x, z_2) \int \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} \right) dz_1,$$

worin L eine von x und z_2 algebraisch abhängige Function sein kann, und da man wegen der Unabhängigkeit der linken Seite dieser Gleichung von z_2 für diese Variable auf der rechten Seite irgend einen numerischen Werth z. B. $z_2 = 0$ setzen darf, so folgt, da die F-Function die Variable x nicht explicite enthalten sollte, für $f(x, z_1)$ die Form

$$f(x, z_1) = \varphi(x)\, \varphi_1(z_1) + \psi(x)\, \psi_1(z_1),$$

und somit die *nothwendige Form der Differentialgleichung erster Ordnung*

$$(72) \cdots \frac{dz}{dx} = \varphi(x)\, \varphi_1(z) + \psi(x)\, \psi_1(z).$$

Wir können aber für die Functionen $\varphi_1(z)$ und $\psi_1(z)$ noch eine weitere Bedingung aufstellen; da nämlich ausser der Gleichung (72), in welcher z das allgemeine Integral bedeuten mag, noch für die particulären Integrale z_1 und z_2 die Beziehungen bestehen müssen

$$(72\text{a}) \cdots \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \varphi(x)\, \varphi_1(z_1) + \psi(x)\, \psi_1(z_1) \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx} = \varphi(x)\, \varphi_1(z_2) + \psi(x)\, \psi_1(z_2), \end{cases}$$

so folgt

$$\begin{aligned}(73) \cdot\cdot [\varphi_1(z_1)\psi_1(z_2) - \varphi_1(z_2)\psi_1(z_1)]dz + [\varphi_1(z_2)\psi_1(z) - \varphi_1(z)\psi_1(z_2)]dz_1 \\ + [\varphi_1(z)\psi_1(z_1) - \varphi_1(z_1)\psi_1(z)]dz_2 = 0,\end{aligned}$$

es müssen daher, da diese Differentialgleichung das allgemeine Integral

$$(74) \cdots z = F(z_1, z_2, c)$$

haben soll, die Functionen φ_1 und ψ_1 der Bedingung der Integrabilität jener Gleichung (73) genügen*), und es muss ausserdem diese

---

*) Es mag hier eine kurze Bemerkung in Betreff der Integrabilitätsbedingung einer Differentialgleichung von der Form

$$(\alpha) \cdots Z dz + Z_1 dz_1 + Z_2 dz_2 = 0$$

angefügt werden; es ist bekannt, dass man daraus, dass z eine Function der beiden unabhängigen Variabeln z_1 und z_2 sein soll, auf das nothwendige Bestehen der Gleichung

$$(\beta) \cdots Z_2\left(\frac{\partial Z}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) + Z_1\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z_2}\right) + Z\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\right) = 0$$

geführt wird, und es soll nur hervorgehoben werden, dass daraus, dass z eine

Differentialgleichung ein *algebraisches* allgemeines Integral besitzen — umgekehrt ist aber auch sofort zu sehen, dass, wenn die totale Differentialgleichung (73) ein algebraisches allgemeines Integral besitzt, eine Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (72),

---

Function der unabhängigen Variabeln z_1 und z_2 sein soll, noch nicht geschlossen werden kann, dass die Gleichung (β) identisch für alle Werthe von z, z_1, z_2 befriedigt sein muss — nur die Annahme, dass z eine Function von z_1 und z_2 und einer *willkürlichen Constanten* sein soll, verlangt das identische Verschwinden von (β), weil sich aus dieser Gleichung z nur als bestimmte Function von z_1 und z_2 ergeben würde, aber jene mit einer willkürlichen Constanten behaftete Function auch in dieser Gleichung enthalten sein muss; desshalb kann aber eine von einer Constanten freie Beziehung zwischen z, z_1, z_2 existiren, welche (α) und (β) befriedigt, ohne dass letztere identisch für alle z, z_1, z_2 erfüllt wird — es kann somit ein von der willkürlichen Constanten freies, also particuläres Integral der Gleichung (α) vorhanden sein, welches auch die Gleichung (β) befriedigen wird, ohne dass diese jedoch identisch erfüllt wird; so wird z. B. die Differentialgleichung

$$z z_1^2 dz + z z_2 dz_1 - z_2 dz_2 = 0$$

das Integral $z = \frac{z_2}{z_1}$ haben, während die Integrabilitätsbedingung (β)

$$- z_2 (2 z z_1 - z_2) + z^2 z_1^2 = 0$$

nicht identisch, aber für $z = \frac{z_2}{z_1}$ erfüllt wird.

Was nun die Gleichung (73) angeht, von der das Integral (74) gegeben ist, so wird die Integrabilitätsbedingung durch dieses mit einer Constanten behaftete Integral nur dann identisch erfüllt sein müssen, wenn z_1 und z_2 als von einander unabhängige Grössen zu betrachten sind, oder wenn die aus den Gleichungen

$$z = F(z_1, z_2, c) \quad \text{und} \quad dz = \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2} dz_2$$

entnommenen Werthe von z und dz, welche die Gleichung (73) in

$$(\gamma) \quad \cdots \quad P dz_1 + Q dz_2 = 0$$

verwandeln, $P = 0$ und $Q = 0$ identisch für alle z_1 und z_2 liefern und nicht die Gleichung (γ) als eine Differentialgleichung zwischen z_1 und z_2 definiren. Da aber ferner aus (72a) die Beziehung folgt

$$(\delta) \cdots [\varphi(x)\varphi_1(z_2) + \psi(x)\psi_1(z_2)] dz_1 - [\varphi(x)\varphi_1(z_1) + \psi(x)\psi_1(z_1)] dz_2 = 0,$$

so müsste, wenn nicht $P = 0$, $Q = 0$ wäre,

$$(\varepsilon) \cdots [\varphi(x)\varphi_1(z_2) + \psi(x)\psi_1(z_2)] Q + [\varphi(x)\varphi_1(z_1) + \psi(x)\psi_1(z_1)] P = 0$$

sein, d. h. es bestünde, da die φ- und ψ-Functionen so wie die Function F algebraische Functionen bedeuten, zwischen z_1, z_2 und x eine algebraische Beziehung, was von vornherein ausgeschlossen war, und da die Gleichung (ε) in den Klammerausdrücken die Grösse x enthält, während P und Q nur von z_1 und z_2 abhängen, so wird diese Gleichung, wie leicht zu sehen, nicht anders identisch verschwinden können, als wenn $P = 0$ und $Q = 0$ ist, wenn schon im vorigen Paragraphen behandelte Fälle der Gleichung (72) ausgeschlossen werden.

was auch die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sein mögen, stets eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale, zwei particulären und einer willkürlichen Constanten liefern wird.

So lautet für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung (66) die Gleichung (73), da $\varphi_1(z) = -z$, $\psi_1(z) = 1$ ist,

$$(z_2 - z_1)dz + (z - z_2)dz_1 + (z_1 - z)dz_2 = 0,$$

welche in der That der Bedingung der Integrabilität genügt und das algebraische allgemeine Integral besitzt

$$z = C(z_1 - z_2) + z_1,$$

welches mit (67) identisch ist.

Untersuchen wir nun die Form der Gleichung (69) näher, in der jetzt die unabhängige Variable x noch explicite vorkommen mag; nach dem Satze II des § 5, auch dort specialisirt für Differentialgleichungen erster Ordnung, wird die Beziehung (69) erhalten bleiben, wenn man für z und z_2 beliebige Integrale der Differentialgleichung (72) setzt, wenn man nur für z_1 ein anderes passendes Integral eben dieser Differentialgleichung substituirt, vorausgesetzt, dass man die Differentialgleichung (68), was geschehen darf, als eine in Bezug auf $\frac{dz}{dx}$ algebraisch irreductible betrachtet, ferner die Integrale z und z_2 transcendente sind und angenommen wird, was selbstverständlich ist, dass nicht schon zwischen z und z_2 eine algebraische Beziehung stattfindet. Setzt man somit in (69) z_1 statt z, während man z_2 unverändert lässt, so wird für z_1 $F(z_1, z_2, \varkappa)$ zu setzen sein, und sich daher

$$(75) \cdots\cdots z_1 = F\big(F(z_1, z_2, \varkappa), z_2, c\big)$$

ergeben. Nehmen wir wiederum an, die Function F sei in Bezug auf z_1 eine ganze Function, so kann, genau wie oben für die Gleichung (27) des § 8, geschlossen werden, dass die Gleichung (75) als eine in z_1 und z_2 identische, wie es sein müsste, nicht bestehen kann, wenn nicht der Grad in Bezug auf z_1 gleich 1 ist, und da dasselbe für z_2 behauptet werden kann, so folgt, *dass für Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function zweier nicht algebraischer particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten sein soll, diese Relation eine in z_1 und z_2 bilineare von der Gestalt*

$$z = m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m$$

ist, worin m_0, m_1, m_2, m im Allgemeinen algebraische Functionen von x sind.

Setzt man nun unter der Voraussetzung, dass die unabhängige Variable x nicht explicite in $F(z_1, z_2, c)$ vorkommen soll, also

m_0, m_1, m_2, m Constanten bedeuten, den eben gefundenen Werth

$$F(z_1, z_2, c) = m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m$$

in die Gleichung (71) ein, so folgt wegen

$$\frac{\partial F}{\partial c} = z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial c}, \quad \frac{\partial F}{\partial z_1} = m_0 z_2 + m_1,$$

wie man unmittelbar aus der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} dz_1 = \frac{m_0 z_2 + m_1}{\left(z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right)^2} \frac{\left(\frac{\partial m_1}{dc} \frac{\partial m_2}{\partial c} - \frac{\partial m_0}{\partial c} \frac{\partial m}{\partial c}\right)}{z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{dc}}$$

$$- \frac{m_1 \frac{\partial m_0}{\partial c} - m_0 \frac{\partial m_1}{\partial c}}{\left(z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right)^2} \log \left\{ z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial c} \right\}$$

schliesst, dass, weil $f(x, z_1)$ eine algebraische Function von z_1 sein soll, also das logarithmische Glied fortfallen muss, nothwendig

$$f(x, z_1) = L \frac{z_1 z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + z_1 \frac{\partial m_1}{\partial c} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial c} + \frac{\partial m}{\partial c}}{m_0 z_2 + m_1}$$

$$- f(x, z_2) \frac{\frac{\partial m_1}{\partial c} \frac{\partial m_2}{\partial c} - \frac{\partial m_0}{\partial c} \frac{\partial m}{\partial c}}{\left(z_2 \frac{\partial m_0}{\partial c} + \frac{\partial m_1}{\partial c}\right)^2}$$

ist, sich somit, wenn z_2 irgend einer numerischen Constanten gleich gesetzt wird,

$$f(x, z_1) = M z_1 + N$$

ergiebt, so dass die Differentialgleichung erster Ordnung in

$$\frac{dz}{dx} = Mz + N$$

übergeht, worin M und N noch unbestimmte algebraische Functionen von x sind, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function zweier particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten, nicht von der unabhängigen Variabeln abhängen, ist die der linearen, und zwar ist die Beziehung dann auch eine ganze lineare — und umgekehrt liefert jede lineare Differentialgleichung eine derartige Integralbeziehung.

Es mag schon hier eine Bemerkung hinzugefügt werden, die wir am Ende dieses Paragraphen wieder aufnehmen, und die sich auf das Abel'sche Theorem der durch eine beliebige lineare Differentialgleichung erster Ordnung definirten Function bezieht; wir wollen, da jede lineare Differentialgleichung erster Ordnung, wie oben gezeigt worden, die Eigenschaft hat, dass ihr allgemeines Integral sich als eine algebraische Function von zwei particulären Integralen und einer willkürlichen Constanten ausdrücken lässt, nunmehr zwei particuläre Integrale als wesentliche Elemente des für diese Gattung von Differentialgleichungen zu entwickelnden Abel'schen Theorems aufnehmen und finden somit, dass, weil für die Gleichung (66) sich

$$z_1 - z_2 = (c_1 - c_2)\, e^{-\int f(x)\,dx}$$

ergiebt, für den Fall, dass $\int f(x)\,dx$ ein Abel'sches Integral erster Gattung für das Geschlecht p ist, und die den willkürlichen Argumenten $x_1, x_2 \cdots x_\mu$ entsprechenden Werthe von z_1 und z_2 durch

$$z_1^{(1)},\ z_1^{(2)}, \cdots z_1^{(\mu)},\ z_2^{(1)},\ z_2^{(2)}, \cdots z_2^{(\mu)}$$

bezeichnet werden,

$$\left(z_1^{(1)} - z_2^{(1)}\right)\left(z_1^{(2)} - z_2^{(2)}\right) \cdots \left(z_1^{(\mu)} - z_2^{(\mu)}\right) =$$
$$= \left(c_1 - c_2\right)^{\mu} e^{-\int f(x_1)\,dx_1 - \int f(x_2)\,dx_2 - \cdots - \int f(x_\mu)\,dx_\mu};$$

setzt man nun nach dem Abel'schen Theorem für Quadraturen

$$\int f(x_1)\,dx_1 + \int f(x_2)\,dx_2 + \cdots + \int f(x_\mu)\,dx_\mu = \int f(X_1)\,dX_1 + \cdots + \int f(X_p)\,dX_p,$$

worin die X mit den x in der bekannten algebraischen Beziehung stehen, und bezeichnet die den Argumenten $X_1, \cdots X_p$ entsprechenden Werthe von z_1 und z_2 durch $Z_1^{(1)}, \cdots Z_1^{(p)},\ Z_2^{(1)}, \cdots Z_2^{(p)}$, so ergiebt sich offenbar *das Abel'sche Theorem einer jeden linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Form*

$$(76) \cdots\cdots \left(z_1^{(1)} - z_2^{(1)}\right)\left(z_1^{(2)} - z_2^{(2)}\right) \cdots \left(z_1^{(\mu)} - z_2^{(\mu)}\right) =$$
$$= \left(c_1 - c_2\right)^{\mu - p}\left(Z_1^{(1)} - Z_2^{(1)}\right) \cdots \left(Z_1^{(p)} - Z_2^{(p)}\right).$$

Es bedarf keiner weiteren Ausführung, wie das Abel'sche Theorem sich gestaltet, wenn $\int f(x)\,dx$ nicht ein Integral erster Gattung ist, indem nur algebraische Functionen oder Exponentialgrössen hinzutreten.

Kehren wir wieder zu der oben angestellten Untersuchung zurück und nehmen an, die Function F der Gleichung (69) sei eine rationale, so wird die Gleichung (75) — sowie es die Untersuchung der rationalen Beziehungen (33) und (34) ergab — als einzig möglichen Fall den der rationalen linearen Beziehung

$$z = \frac{A_0 z_1 + A_1}{B_0 z_1 + B_1}$$

liefern; da aber auch ebenso

$$z = \frac{a_0 z_2 + a_1}{b_0 z_2 + b_1}$$

sein müsste, und zwischen z_1 und z_2 keine algebraische Beziehung stattfinden darf, so wird z eine in z_1 und z_2 bilinear gebrochene Function sein müssen, und wir finden, *dass für Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rational gebrochene Function zweier nicht algebraischer particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkürlichen Constanten sein soll, diese Relation eine in* z_1 *und* z_2 *bilineare von der Gestalt*

$$\frac{m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m}{n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n}$$

ist, worin $m_0, m_1, m_2, m, n_0, n_1, n_2, n$ *im Allgemeinen algebraische Functionen von* x *sind.*

Setzt man nunmehr unter der Voraussetzung, dass die unabhängige Variable x nicht explicite in $F(z_1, z_2, c)$ vorkommen soll, also $m_0, m_1, m_2, m, n_0, n_1, n_2, n$ Constanten bedeuten, den eben gefundenen Werth

$$(77) \cdots\cdot z = F(z_1, z_2, c) = \frac{m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m}{n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n}$$

in die Gleichung (71) ein, so folgt wegen

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \Big[n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n) \left(\frac{\partial m_0}{\partial c} z_1 z_2 + \frac{\partial m_1}{\partial c} z_1 + \frac{\partial m_2}{\partial c} z_2 + \frac{\partial m}{\partial c} \right)$$

$$- (m_0 z_1 z_2 + m_1 z_1 + m_2 z_2 + m) \left(\frac{\partial n_0}{\partial c} z_1 z_2 + \frac{\partial n_1}{\partial c} z_1 + \frac{\partial n_2}{\partial c} z_2 + \frac{\partial n}{\partial c} \right) \Big] :$$

$$(n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n)^2$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{(n_2 z_2 + n)(m_0 z_2 + m_1) - (m_2 z_2 + m)(n_0 z_2 + n_1)}{(n_0 z_1 z_2 + n_1 z_1 + n_2 z_2 + n)^2},$$

dass

$$\int \frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} dz_1 = \frac{[(n_2 z_2 + n)(m_0 z_2 + m_1) - (m_2 z_2 + m)(n_0 z_2 + n_1)]}{\left[(n_0 z_2 + n_1) \left(\frac{\partial m_0}{\partial c} z_2 + \frac{\partial m_1}{\partial c} \right) - (m_0 z_2 + m_1) \left(\frac{\partial n_0}{\partial c} z_2 + \frac{\partial n_1}{\partial c} \right) \right]} \times$$

$$\frac{1}{a - b} \log \left\{ \frac{z_1 - a}{z_1 - b} \right\}$$

ist, worin die Grössen a und b als Wurzeln einer quadratischen Gleichung algebraisch aus z_2, den m, n und den Differentialquotienten dieser Grössen nach c genommen zusammengesetzt sind. Bezeichnet man der Kürze halber den gesammten Coefficienten des Logarithmus auf der rechten Seite der letzten Gleichung durch M, so wird

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\int \frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}}\, dz_1 = M \frac{(z_1 - a)\frac{\partial b}{\partial z_2} - (z_1 - b)\frac{\partial a}{\partial z_2}}{(z_1 - a)(z_1 - b)},$$

wenn wieder berücksichtigt wird, dass wegen des geforderten algebraischen Charakters der Function $f(x, z_1)$ die logarithmische Transcendente herausfallen muss, und es wird somit

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial z_1}}\int \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}}\right) dz_1 = \frac{(z_1 - a)\frac{\partial b}{\partial z_2} - (z_1 - b)\frac{\partial a}{\partial z_2}}{a - b}$$

sein, so dass sich, wenn wieder z_2 gleich einer numerischen Constanten gesetzt wird,

$$f(x, z_1) = \varphi(x)(Az_1^2 + Bz_1 + C) + \psi(x)(Dz_1 + E)$$

ergiebt, also die Differentialgleichung erster Ordnung in

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)(Az^2 + Bz + C) + \psi(x)(Dz + E)$$

übergeht, worin A, B, C, D, E Constanten, und $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ noch beliebige algebraische Functionen von x sind.

Setzen wir nun

$$A\varphi(x) = \Phi(x), \quad B\varphi(x) + D\psi(x) = \Psi(x),$$

worin wieder $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ beliebige algebraische Functionen von x sind, so wird

$$C\varphi(x) + E\psi(x) = a\,\Phi(x) + b\,\Psi(x),$$

wenn a und b willkürliche Constanten bedeuten, und es nimmt somit die Differentialgleichung erster Ordnung die Form an

$$(78) \;\cdots\; \frac{dz}{dx} = \Phi(x)\cdot z^2 + \Psi(x)\cdot z + a\,\Phi(x) + b\,\Psi(x),$$

für welche charakteristisch ist, dass das von der abhängigen Variabeln freie Glied eine lineare Zusammensetzung der Coefficienten von z^2 und z ist, und wir erhalten somit den Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine gebrochene rationale Function zweier particulärer Integrale sein kann, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten, nicht von der unabhängigen Variabeln abhängen, ist die durch die Gleichung (78) *dargestellte, und zwar ist die Beziehung dann eine bilineare von der Form* (77).

Stellt man nun für die Gleichung (78) in der Form

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 + a) + \Psi(x)(z + b)$$

die Gleichung (73) auf, so überzeugt man sich leicht, dass die Bedingung der Integrabilität dieser Differentialgleichung nur erfüllt ist, wenn $a = -b^2$, d. h. die obige Differentialgleichung von der Form ist

$$(79) \quad \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 - b^2) + \Psi(x)(z + b),$$

worin $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten. Umgekehrt sieht man aber auch sofort, dass, weil die Gleichung (79) durch die Substitution $z = \frac{1}{Z} - b$ in die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dZ}{dx} + \big(\Psi(x) - 2b\Phi(x)\big)Z + \Phi(x) = 0$$

übergeht, und diese nach den obigen Ausführungen die folgende Beziehung zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen liefert

$$Z = C(Z_1 - Z_2) + Z_1,$$

für die Differentialgleichung (79) die entsprechende Relation existirt

$$z = \frac{z_1 z_2 + b(C+1)z_1 - bCz_2}{(C+1)z_2 - Cz_1 + b},$$

und es folgt daher der Satz:

Die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine gebrochene rationale Function zweier particulärer Integrale sein soll, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten, nicht von der unabhängigen Variabeln abhängen, ist von der Form

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 - b^2) + \Psi(x)(z + b),$$

worin b eine willkürliche Constante bedeutet, und zwar existirt für alle diese Differentialgleichungen in der That eine solche Beziehung in der Form einer bilinearen Relation.

Was die allgemeinere quadratische Differentialgleichung erster Ordnung betrifft,

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x) z^2 + \Omega(x) z + \pi(x),$$

so geht dieselbe bekanntlich, wenn

$$z = -\frac{1}{\omega(x)} \frac{d \log u}{dx}$$

gesetzt wird, in

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0$$

über, worin

$$P = -\left(\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} + \Omega(x)\right), \quad Q = \omega(x) \cdot \pi(x)$$

ist, und seien zwei particuläre Integrale

$$z_1 = -\frac{1}{\omega(x)}\frac{\frac{du_1}{dx}}{u_1}, \quad z_2 = -\frac{1}{\omega(x)}\frac{\frac{du_2}{dx}}{u_2},$$

während das allgemeine Integral durch

$$z = -\frac{1}{\omega(x)}\frac{\frac{du_1}{dx} + c\frac{du_2}{dx}}{u_1 + c u_2}$$

dargestellt ist, so folgt

$$(80) \cdots\cdot z = \frac{u_1 z_1 + c u_2 z_2}{u_1 + c u_2};$$

bezeichnet man ferner ein dem Werthe der Constanten c_3 entsprechendes particuläres Integral durch z_3, so dass

$$(81) \cdots\cdot z_3 = \frac{u_1 z_1 + c_3 u_2 z_2}{u_1 + c_3 u_2}$$

wird, so folgt aus (80) und (81) durch Elimination von u_1 und u_2

$$(82) \cdots\cdot z = \frac{c_3 z_1 (z_2 - z_3) + c z_2 (z_3 - z_1)}{c_3 (z_2 - z_3) + c (z_3 - z_1)},$$

und *es ist somit für jede Differentialgleichung erster Ordnung von der Form*

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x) z^2 + \Omega(x) z + \pi(x),$$

worin $\omega(x)$, $\Omega(x)$, $\pi(x)$ beliebige Functionen von x bedeuten, das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function zweiten Grades von drei particulären Integralen mit constanten Coefficienten, die in Bezug auf jedes der drei particulären Integrale linear ist.

Zu den durch die Gleichung (79) charakterisirten Differentialgleichungen mag noch bemerkt werden, dass vermöge der Substitution

$$Z = \frac{1}{z + b}$$

und nach dem durch die Gleichung (76) dargestellten Abel'schen Theorem für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, wenn z_1 und z_2 zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung (79) bezeichnen,

$$x_1, x_2, \cdots\cdot x_\mu, z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \cdots z_1^{(\mu)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \cdots z_2^{(\mu)},$$

μ willkürliche Werthe der unabhängigen Variabeln und die dazu gehörigen Werthe jener beiden particulären Integrale bedeuten, endlich

$$X_1, X_2, \cdots X_p, \zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \cdots \zeta_1^{(p)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)}, \cdots \zeta_2^{(p)}$$

die nach dem Abel'schen Additionstheorem definirten unabhängigen Variabeln und die zugehörigen Werthe der beiden particulären Integrale vorstellen, *das erweiterte Abel'sche Theorem für die Differen-*

tialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = \Phi(x)(z^2 - b^2) + \Psi(x)(z + b)$$

die Form annimmt

$$\left(\frac{1}{z_1^{(1)}+b} - \frac{1}{z_2^{(1)}+b}\right)\left(\frac{1}{z_1^{(2)}+b} - \frac{1}{z_2^{(2)}+b}\right)\cdots\left(\frac{1}{z_1^{(\mu)}+b} - \frac{1}{z_2^{(\mu)}+b}\right)$$

$$= C\left(\frac{1}{\zeta_1^{(1)}+b} - \frac{1}{\zeta_2^{(1)}+b}\right)\cdots\left(\frac{1}{\zeta_1^{(p)}+b} - \frac{1}{\zeta_2^{(p)}+b}\right),$$

worin C eine Constante bedeutet.

Nachdem wir oben gefunden, dass nur solche in der Form (72) enthaltene Differentialgleichungen, welche durch eine lineare Substitution aus den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ableitbar sind, die Eigenschaft besitzen, dass das allgemeine Integral eine rationale Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constante ist, liegt es nahe, die Bedingung der Integrabilität der Differentialgleichung (73) überhaupt zu untersuchen, um die Möglichkeit von Beziehungen der Form (69) festzustellen. Die Integrabilitätsbedingung lautet, wenn wir der bequemeren Schreibweise wegen die Variabeln z, z_1, z_2 durch x, y, z und die Functionen φ_1 und ψ_1 durch φ und ψ ersetzen:

$$\begin{aligned}
&\left[\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi(x)\right]\left[\varphi'(y)\psi(z)-\varphi(z)\psi'(y)-\varphi(z)\psi'(x)+\varphi'(x)\psi(z)\right]\\
+&\left[\varphi(y)\psi(z)-\varphi(z)\psi(y)\right]\left[\varphi'(z)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(z)-\varphi(x)\psi'(y)+\varphi'(y)\psi(x)\right]\\
+&\left[\varphi(z)\psi(x)-\varphi(x)\psi(z)\right]\left[\varphi'(x)\psi(y)-\varphi(y)\psi'(x)-\varphi(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi(y)\right]=0
\end{aligned}$$

oder, wie leicht zu sehen,

$$\begin{aligned}
&\left[\varphi(x)\psi(z)-\varphi(z)\psi(x)\right]\left[\varphi'(y)\psi(y)-\psi'(y)\varphi(y)\right]\\
+&\left[\varphi(y)\psi(x)-\varphi(x)\psi(y)\right]\left[\varphi'(z)\psi(z)-\psi'(z)\varphi(z)\right]\\
+&\left[\varphi(z)\psi(y)-\varphi(y)\psi(z)\right]\left[\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)\right]=0,
\end{aligned}$$

oder endlich, indem wir diese Gleichung als Differentialgleichung in $\varphi(y)$ als Function von y auffassen, wobei x und z als Parameter zu betrachten sind,

$$\varphi'(y) - \varphi(y)\left[\frac{\psi'(y)}{\psi(y)} + \frac{P}{\psi(y)}\right] = Q,$$

worin

$$P = \frac{\psi(x)\left[\varphi'(z)\psi(z)-\psi'(z)\varphi(z)\right] - \psi(z)\left[\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)\right]}{\varphi(x)\psi(z)-\psi(x)\varphi(z)}$$

$$Q = \frac{\varphi(x)\left[\varphi'(z)\psi(z)-\psi'(z)\varphi(z)\right] - \varphi(z)\left[\varphi'(x)\psi(x)-\psi'(x)\varphi(x)\right]}{\varphi(x)\psi(z)-\psi(x)\varphi(z)}.$$

Die Integration der obigen Differentialgleichung liefert

$$\varphi(y) = R\psi(y)\, e^{P\int\frac{dy}{\psi(y)}} + Q\psi(y)\, e^{P\int\frac{dy}{\psi(y)}} \int e^{-P\int\frac{dy}{\psi(y)}} \frac{dy}{\psi(y)},$$

worin R eine willkürliche Function von x und z ist, oder

$$\varphi(y) = R\psi(y)\, e^{P\int\frac{dy}{\psi(y)}} - \frac{Q}{P}\psi(y).$$

Nun sollen aber $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ algebraische Functionen von y sein, es kann also entweder $R = 0$, also $\varphi(y) = T \cdot \psi(y)$ sein, oder es ist $e^{\int\frac{dy}{\psi(y)}}$ eine algebraische Function von y, d. h. es ist $\psi(y) = \frac{1}{\frac{d\log\chi(y)}{dy}}$, wenn $\chi(y)$ eine algebraische Function bedeutet, und daher

$$\varphi(y) = R\frac{\chi(y)^P}{\frac{d\log\chi(y)}{dy}} - \frac{Q}{P}\frac{1}{\frac{d\log\chi(y)}{dy}};$$

im ersten Falle geht die Differentialgleichung (72) in

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\, T\psi_1(z) + \psi(x)\,\psi_1(z),$$

d. h. in

$$(A) \cdots\cdot \frac{dz}{\psi_1(z)} = U(x)\, dx$$

über, worin U eine algebraische Function von x darstellt, im zweiten Falle nimmt jene Differentialgleichung die Form an

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\left[\frac{R\chi(z)^{P+1}}{\frac{d\chi(z)}{dz}} - \frac{Q}{P}\frac{\chi(z)}{\frac{d\chi(z)}{dz}}\right] + \frac{\psi(x)\,\chi(z)}{\frac{d\chi(z)}{dz}},$$

in welcher P wegen des algebraischen Charakters der vorher mit $\varphi(y)$ bezeichneten Function eine rationale constante Zahl sein muss, oder

$$(B) \cdots\cdot \frac{d\chi(z)}{dz}\frac{dz}{dx} = \Phi(x)\,\chi(z)^{P+1} + \Psi(x)\,\chi(z),$$

wenn $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ wieder algebraische Functionen von x bedeuten. Was nun die Gleichung (A) angeht, so liefert diese den schon früher behandelten Fall der Quadraturen, andererseits ist aus (B) unmittelbar zu erkennen, dass die Substitution $\chi(z) = Z$ dieselbe in

$$\frac{dZ}{dx} = \Phi(x)\, Z^{P+1} + \Psi(x)\, Z,$$

oder wenn $Z^{-P} = \zeta$ gesetzt wird, in

$$\frac{d\zeta}{dx} + P\Psi(x)\,\zeta = -P\Phi(x)$$

überführt, und da für die letztere, wenn ζ_1 und ζ_2 zwei particuläre

Integrale bedeuten, wie oben gezeigt worden,

$$\zeta = C(\zeta_1 - \zeta_2) + \zeta_1$$

ist, so wird dem entsprechend

$$Z^{-p} = C\left(Z_1^{-p} - Z_2^{-p}\right) + Z_1^{-p}$$

sein, und daher, da $\chi(z) = Z$ die algebraische Beziehung zwischen z und Z darstellte, die zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen der Gleichung (B) bestehende algebraische Beziehung

$$\chi(z)^{-p} = C\left[\chi(z_1)^{-p} - \chi(z_2)^{-p}\right] + \chi(z_1)^{-p}$$

sein; jedenfalls ist diese zweite Gattung von Differentialgleichungen aus der linearen erster Ordnung durch eine algebraische Substitution für die abhängige Variable, welche die unabhängige Variable nicht enthält, abgeleitet, und umgekehrt versteht es sich von selbst, dass zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen einer durch eine algebraische Substitution aus der linearen Differentialgleichung erster Ordnung abgeleiteten Differentialgleichung ein algebraischer Zusammenhang stattfinden wird, so dass wir den nachstehenden Satz erhalten:

Die einzige Klasse derjenigen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkürlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, ist die der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und der durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten.

Bevor wir nun zur Aufstellung der allgemeinen Form des erweiterten Abel'schen Theorems für beliebige homogene lineare Differentialgleichungen übergehen, mögen noch einige Bemerkungen über die Eigenschaft solcher Relationen vorausgeschickt werden.

Es ist bekannt, dass, während die elliptische Function $\sin\mathrm{am}\, u$ ein Additionstheorem besitzt, vermöge dessen sich $\sin\mathrm{am}\,(u + v)$ algebraisch durch $\sin\mathrm{am}\, u$ und $\sin\mathrm{am}\, v$ ausdrücken lässt, der Fundamentaltranscendenten der elliptischen Functionen, der ϑ-Function, kein solches Additionstheorem zukommt, und man kann die Unmöglichkeit des Bestehens eines solchen unmittelbar einsehen, da, wenn z. B.

$$\vartheta_1(u + v) = F\{\vartheta_1(u),\ \vartheta_1(v)\}$$

wäre, worin F eine algebraische Function bedeutet, die rechte Seite für alle Werthe von v, welche $\vartheta_1(v) = 0$ machen, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen könnte, während diese Werthe $v = m + n\tau$, worin τ den ϑ-Modul bedeutet, der linken Seite die unendlich vielen verschiedenen Werthe

$$\vartheta_1(u + m + n\tau) = (-1)^{m+n} e^{-n(2u+n\tau)\pi i}\, \vartheta_1(u)$$

geben würden.

Ebenso ist leicht einzusehen, wesshalb für Abel'sche Integrale erster Gattung, deren Geschlecht $p > 1$, sich nicht die Summe beliebig vieler mit willkürlichen Grenzen stets zu *einem* solchen Integrale vereinigen lässt, da, wenn

$$\int^{z_1} y\,dz + \int^{z_2} y\,dz + \int^{z_3} y\,dz + \cdots = \int^{Z} y\,dz$$

wäre, für fest angenommene Integrationswege auf der linken Seite der Gleichung diese ganze linke Seite einen fest bestimmten Werth haben würde, der jedoch für Z noch nichts bestimmen würde, da Z bekanntlich keine Function des Integralwerthes von endlicher Vieldeutigkeit ist. Vielmehr lässt sich eine beliebige Anzahl solcher Integrale stets zu p gleichartigen zusammenfassen, deren obere Grenzen Lösungen einer algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten rational aus den Grenzen der gegebenen Integrale und der zu ihnen gehörigen algebraischen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, und dieselbe Beziehung findet dann für jedes zu dieser algebraischen Irrationalität gehörige Integral erster Gattung statt. Ferner weiss man aber auch, dass, um als Beispiel die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung herauszugreifen, für die eindeutigen Umkehrungsfunctionen des Systems

$$\int^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = u_1$$

$$\int^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \int^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} = u_2$$

Additionstheoreme von der Form bestehen:

$$al_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = F_1 \{al_1(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(u_1, u_2), al_2(v_1, v_2)\}$$
$$al_2(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = F_2 \{al_1(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(u_1, u_2), al_2(v_1, v_2)\},$$

worin F_1 und F_2 algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und man kann unmittelbar einsehen, dass $al_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ sich nicht etwa nur durch *eine* Function für die beiden Argumentenpaare algebraisch wird ausdrücken lassen; denn wäre

$$al_1(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = f\{al_1(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2)\},$$

so würde man, ähnlich wie es oben für die ϑ-Function geschehen, nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe für die rechte Seite der Gleichung erhalten, wenn man $al_1(v_1, v_2) = a$ setzt, worin a eine fest gewählte Constante bedeutet, während die linke Seite wieder unendlich viele Werthe annimmt; es müssen somit in das Abel'sche Theorem zwei selbständige Functionen eintreten, wie wir es schon oben für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung gefunden haben.

Sehen wir nun von der Form des Abel'schen Theorems als einem Additionstheoreme ab und betrachten für zwei Functionen zweier Variabeln $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$ das Abel'sche Theorem in der Gestalt

$$(a) \cdots\cdot f_1\{\varphi_1(u_1, v_1), \psi_1(u_2, v_2)\} = F_1[f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_1(v_1, v_2), f_2(v_1, v_2)]$$

$$(b) \cdots\cdot f_2\{\varphi_2(u_1, v_1), \psi_2(u_2, v_2)\} = F_2[f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), f_1(v_1, v_2), f_2(v_1, v_2)],$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ algebraische Functionen bedeuten sollen, so folgt aus der ersten dieser beiden Gleichungen (a), wenn dieselbe nach u_1 und v_1 differentiirt und aus diesen so entstehenden Gleichungen $\frac{\partial f_1(\varphi_1, \psi_1)}{\partial \varphi_1}$ eliminirt wird, wobei v_1 und v_2 nunmehr als constante Parameter betrachtet werden sollen, eine Gleichung von der Form

$$(A) \cdots\cdot \Phi_1\left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0,$$

und ebenso, wenn jene erste Gleichung nach u_2 und v_2 differentiirt wird,

$$(B) \cdots\cdot \Psi_1\left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_2}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0;$$

genau so aus der Gleichung (b)

$$(C) \cdots\cdot \Phi_2\left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0$$

$$(D) \cdots\cdot \Psi_2\left\{\frac{\partial f_1(u_1, u_2)}{\partial u_2}, \frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_2}, f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2), u_1, u_2\right\} = 0.$$

Fasst man nun in den Gleichungen (A) und (C) die Grösse u_2 als Parameter auf, so wird man, nachdem jede derselben nach u_1 differentiirt ist, aus den so erhaltenen 4 Gleichungen die Grössen $f_2(u_1, u_2)$, $\frac{\partial f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 f_2(u_1, u_2)}{\partial u_1^2}$ eliminiren können und erhält somit *für die den Gleichungen des Abel'schen Theorems* (a) *und* (b) *unterworfene Function* $f_1(u_1, u_2)$ *das Resultat, dass dieselbe als Function von* u_1 *aufgefasst, einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen muss.* So folgen aus dem oben hingeschriebenen System hyperelliptischer Integrale unmittelbar die Beziehungen

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{\partial z_2}{\partial u_1}\frac{1}{\sqrt{R(z_2)}} = 1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{z_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{\partial z_2}{\partial u_1}\frac{z_2}{\sqrt{R(z_2)}} = 0$$

oder

$$\frac{\partial z_1}{\partial u_1} = \frac{z_2\sqrt{R(z_1)}}{z_2 - z_1}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial u_1} = \frac{z_1\sqrt{R(z_2)}}{z_1 - z_2},$$

und hieraus durch Differentiation der ersten Gleichung nach u_1 und Elimination von z_2 und $\frac{\partial z_2}{du_1}$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung für z_1 als Function von u_1 aufgefasst. Dass diese letztere die Variable u_1 nicht explicite enthält, sieht man unmittelbar aus der Form der Gleichungen, und es ist klar, dass dies stets der Fall sein wird, wenn in den Gleichungen (a) und (b) die Functionen $\varphi_1(u_1, v_1)$, $\varphi_2(u_1, v_1)$, $\psi_1(u_2, v_2)$, $\psi_2(u_2, v_2)$ lineare Functionen ihrer Variabeln sind, also das Abel'sche Theorem ein Additionstheorem ist, da nur die Differentialquotienten der φ- und ψ-Functionen, welche in diesem Falle Constanten sind, in die differentiirten Gleichungen (a) und (b) eintreten, wie es in der That oben bei den hyperelliptischen Functionen der Fall war. Schon aus diesem letzteren Umstande könnte man, wenn man die Umkehrungsfunctionen der particulären Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu Hülfe nehmen wollte, schliessen, *dass ein Abel'sches Theorem, welches zu $p = 2$ gehört, nie die lineare Form*

$$(\mathrm{m}) \cdots\cdot A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots = 0$$

haben kann, wenn $z_1, z_2, z_3, \cdots$ die Werthe ein und desselben particulären Integrales einer homogenen irreductibeln linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Coefficienten für die unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, x_3, \cdots$, Z_1 und Z_2 die Werthe desselben particulären Integrales für die Variabeln X_1 und X_2 bedeuten, welche algebraisch von $x_1, x_2, x_3, \cdots$ abhängen und endlich $a_0, a_1, a_2, \cdots A_1, A_2$ algebraische Functionen der Variabeln vorstellen, ein Abel'sches Theorem, wie es z. B. für Abel'sche Integrale erster Gattung, welche zum Geschlecht $p = 2$ gehören, in der That durch die Form

$$Z_1 + Z_2 - z_1 - z_2 - z_3 - \cdots = 0$$

gegeben ist. Man kann diesen Satz aber auch direct beweisen, doch wollen wir, da das Resultat nur ein negatives ist, den Gang des Beweises nur kurz skizziren: substituirt man nämlich in Gleichung (m) statt z_1 $\mu_1 z_1$, wo μ_1 eine willkürliche Constante bedeutet, so wird man nach dem Satze I des § 5 Z_1 durch $m_1 Z_1 + m_1' Z_1'$ und Z_2 durch $n_1 Z_2 + n_1' Z_2'$ zu ersetzen haben, wenn Z_1 und Z_1', Z_2 und Z_2' die Werthe der beiden particulären Fundamentalintegrale der gegebenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für die resp. Argumente X_1 und X_2 sind, und ähnlich, wenn z_2 durch $\mu_2 z_2$, und z_3 durch $\mu_3 z_3$ ersetzt werden, so dass man aus (m) die vier Beziehungen herleitet:

$$\begin{aligned}
0 \cdot A_1 Z_1' + 1 \cdot A_2 Z_2 + 0 \cdot A_2 Z_2' + (A_1 Z_1 + a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots) &= 0\\
m_1' A_1 Z_1' + n_1 A_2 Z_2 + n_1' A_2 Z_2' + (m_1 A_1 Z_1 + a_0 + \mu_1 a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots) &= 0\\
m_2' A_1 Z_1' + n_2 A_2 Z_2 + n_2' A_2 Z_2' + (m_2 A_1 Z_1 + a_0 + a_1 z_1 + \mu_2 a_2 z_2 + a_3 z_3 + \cdots) &= 0\\
m_3' A_1 Z_1' + n_3 A_2 Z_2 + n_3' A_2 Z_2' + (m_3 A_1 Z_1 + a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \mu_3 a_3 z_3 + \cdots) &= 0.
\end{aligned}$$

Betrachtet man dieselben als ein System linearer Gleichungen in den Grössen $A_1 Z_1'$, $A_2 Z_2$, $A_2 Z_2'$ und 1, so muss die Determinante verschwinden, und da diese wiederum eine lineare Function in Z_1, z_1, z_2, z_3, $\cdots$ sein würde, andererseits aber, wie vorher gezeigt worden, ein Abel'sches Theorem mit der festen Zahl $p = 1$ nicht existirt, so müssen die Coefficienten der einzelnen Grössen verschwinden, und somit,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & m_1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & m_2 \\ m_3' & n_3 & n_3' & m_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & \mu_1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & 1 \\ m_3' & n_3 & n_3' & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & 1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & \mu_2 \\ m_3' & n_3 & n_3' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & 1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & 1 \\ m_3' & n_3 & n_3' & \mu_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ m_1' & n_1 & n_1' & 1 \\ m_2' & n_2 & n_2' & 1 \\ m_3' & n_3 & n_3' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sein, woraus wiederum leicht vermöge der Willkürlichkeit von μ_1, μ_2, μ_3

$$\begin{vmatrix} m_1' & n_1 & n_1' \\ m_2' & n_2 & n_2' \\ m_3' & n_3 & n_3' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{matrix} m_2' n_3' - m_3' n_2' = 0 \\ m_1' n_3' - m_3' n_1' = 0 \\ m_1' n_2' - m_2' n_1' = 0 \end{matrix}$$

geschlossen wird. Bemerkt man nun, dass aus diesen Bedingungen folgt, dass $\frac{m_1'}{n_1'} = \frac{m_2'}{n_2'} = \frac{m_3'}{n_3'}$ von den Grössen μ_1, μ_2, μ_3 unabhängige numerische Constanten sind, und geht wieder zu den vier oben aufgestellten linearen Beziehungen zurück, so sieht man, wenn z. B. aus der zweiten und dritten Z_1 eliminirt und das Resultat mit einer der anderen beiden Gleichungen zusammengestellt wird, dass jene Gleichungen nicht mit der Annahme der Willkürlichkeit der Grössen μ_1, μ_2, μ_3 vereinbar sind.

Nachdem wir oben gesehen, dass schon bei den Differentialgleichungen erster Ordnung zwei particuläre Integrale in das Abel'sche Theorem eintraten, wollen wir nun zum Schlusse dieser Untersuchungen die Frage erörtern, welches die Form des Abel'schen Theorems für alle homogenen linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung sein muss oder welches die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen particulären Integralen derselben für algebraisch von einander abhängige Werthe der unabhängigen Variabeln ist.

Sei die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(83) \cdots \frac{d^m z}{dx^m} + y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + y_{m-1} \frac{dz}{dx} + y_m z = 0$$

vorgelegt, in welcher y_1, y_2, $\cdots y_m$ irreductible algebraische Functionen bedeuten sollen, seien ferner $z_1, z_2, \cdots z_m$ m particuläre Fundamentalintegrale derselben, und mögen die Werthe von z_ϱ für die Argumente $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa, X_1, X_2, \cdots X_p$ mit $z_{\varrho 1}, z_{\varrho 2}, \cdots z_{\varrho\varkappa}, Z_{\varrho 1}, Z_{\varrho 2}, \cdots Z_{\varrho p}$ bezeichnet werden, wobei $X_1, X_2, \cdots X_p$ algebraisch von $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa$ abhängen, so soll die Form einer algebraischen Beziehung, die zwischen den particulären Integralen für die angegebenen Argumente stattfindet,

$$(84) \cdots F(z_{11}, z_{21}, \cdots z_{m1}, Z_{11}, Z_{12}, \cdots Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdots Z_{2p}, \\ Z_{m1}, Z_{m2}, \cdots Z_{mp}) = 0,$$

in deren Bezeichnung wir die Werthe der Integrale für die unabhängigen Variabeln $x_2, x_3, \cdot\cdot x_\varkappa$ nicht aufgenommen haben, näher untersucht werden. Machen wir nun die Annahme, dass das Integral z_1 nicht schon einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} Genüge leistet, so folgt aus dem Satze I des § 5 von der Erhaltung der algebraischen Beziehung, dass, wenn statt z_{11} resp. $z_{21}, z_{31}, \cdots z_{m1}$ gesetzt werden, die Gleichung (84) bestehen bleibt, wenn man nur statt $Z_{\alpha\varrho}$ und $z_{\alpha 1}$ $a_{1\varrho} Z_{1\varrho} + a_{2\varrho} Z_{2\varrho} + \cdot\cdot + a_{m\varrho} Z_{m\varrho}$ und $b_{11} z_{11} + b_{21} z_{21} + \cdot\cdot + b_{m1} z_{m1}$ substituirt, so dass sich m Gleichungen ergeben, aus denen sich $z_{11}, z_{21}, \cdots z_{m1}$ in der Form darstellen lassen

$$(85) \begin{cases} z_{11} = \varphi_1(Z_{11}, Z_{12}, \cdot\cdot Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdot\cdot Z_{2p}, \cdot\cdot Z_{m1}, Z_{m2}, \cdot\cdot Z_{mp}) \\ z_{21} = \varphi_2(Z_{11}, Z_{12}, \cdot\cdot Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdot\cdot Z_{2p}, \cdot\cdot Z_{m1}, Z_{m2}, \cdot\cdot Z_{mp}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_{m1} = \varphi_m(Z_{11}, Z_{12}, \cdot\cdot Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdot\cdot Z_{2p}, \cdot\cdot Z_{m1}, Z_{m2}, \cdot\cdot Z_{mp}). \end{cases}$$

Setzt man in einer dieser Gleichungen

$$(86) \cdot\cdot\; z_{\varrho 1} = \varphi_\varrho(Z_{11}, Z_{12}, \cdot\cdot Z_{1p}, Z_{21}, Z_{22}, \cdot\cdot Z_{2p}, \cdot\cdot Z_{m1}, Z_{m2}, \cdot\cdot Z_{mp})$$

$\mu_\varrho z_{\varrho 1}$ statt $z_{\varrho 1}$, so wird man wieder statt $Z_{\alpha\beta}$

$$m_{1\beta}^{(\alpha)} Z_{1\beta} + m_{2\beta}^{(\alpha)} Z_{2\beta} + \cdots + m_{m\beta}^{(\alpha)} Z_{m\beta}$$

zu substituiren haben, und erhält somit

$$(87)\; \mu_\varrho z_{\varrho 1} = \varphi_\varrho\left(m_{11}^{(1)} Z_{11} + \cdot\cdot + m_{m1}^{(1)} Z_{m1}, \cdot\cdot m_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdot\cdot + m_{mp}^{(m)} Z_{mp}\right),$$

und daher aus (86) und (87) die Beziehung

$$(88)\; \varphi_\varrho\left(m_{11}^{(1)} Z_{11} + \cdots + m_{m1}^{(1)} Z_{m1}, \cdots m_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots + m_{mp}^{(m)} Z_{mp}\right) \\ = \mu_\varrho \varphi_\varrho(Z_{11}, \cdots Z_{1p}, \cdots Z_{m1}, \cdots Z_{mp}),$$

in welcher μ_ϱ eine willkürliche Constante und die Grössen $m_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$ von dieser abhängige Constanten bedeuten.

Nimmt man nun an, dass die der Untersuchung zu Grunde gelegte Gleichung (84) eine algebraische Beziehung zwischen den particulären Integralen der linearen Differentialgleichung *für die kleinste*

Anzahl $p+1$ *algebraisch von einander abhängiger Argumente* liefern soll, oder dass nicht schon zwischen den particulären Integralen für die Argumente $X_1, X_2, \cdots X_p$ eine algebraische Beziehung bestehen soll, so wird die Gleichung (88) eine identische sein müssen und daher für willkürliche Werthe der $Z_{\alpha\beta}$ und beliebige Werthe von μ_ϱ gültig sein. Bezeichnet man nun der Kürze halber die Argumente der auf der linken Seite der Gleichung (88) befindlichen φ-Function mit

$$I_1, II_1, \cdots M_1, I_2, II_2, \cdots M_2, \cdots I_p, II_p, \cdots M_p$$

und die zugehörige φ-Function durch Φ_ϱ, so folgt durch Differentiation der Gleichung (88) nach $Z_{11}, \cdots Z_{m1}, \cdots Z_{1p}, \cdots Z_{mp}$

$$(89) \cdots \begin{cases} m_{1\sigma}^{(1)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial I_\sigma} + m_{1\sigma}^{(2)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial II_\sigma} + \cdots + m_{1\sigma}^{(m)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial M_\sigma} = \mu_\varrho \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial Z_{1\sigma}} \\ m_{2\sigma}^{(1)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial I_\sigma} + m_{2\sigma}^{(2)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial II_\sigma} + \cdots + m_{2\sigma}^{(m)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial M_\sigma} = \mu_\varrho \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial Z_{2\sigma}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_{m\sigma}^{(1)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial I_\sigma} + m_{m\sigma}^{(2)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial II_\sigma} + \cdots + m_{m\sigma}^{(m)} \dfrac{\partial \Phi_\varrho}{\partial M_\sigma} = \mu_\varrho \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial Z_{m\sigma}}, \end{cases}$$

und wenn man (88) nach μ_ϱ differentiirt

$$(90) \cdots \sum_1^p{}_\sigma \left\{ \frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial I_\sigma} \left(Z_{1\sigma} \frac{d m_{1\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho} + Z_{2\sigma} \frac{d m_{2\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho} + \cdots + Z_{m\sigma} \frac{d m_{m\sigma}^{(1)}}{d\mu_\varrho} \right) \right.$$
$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\left. + \frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial M_\sigma} \left(Z_{1\sigma} \frac{d m_{1\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho} + Z_{2\sigma} \frac{d m_{2\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho} + \cdots + Z_{m\sigma} \frac{d m_{m\sigma}^{(m)}}{d\mu_\varrho} \right) \right\} = \varphi_\varrho.$$

Die aus dem Gleichungssystem (89) sich ergebenden Werthe für $\frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial I_\sigma}, \frac{\partial \Phi_\varrho}{\partial II_\sigma}, \cdots$ liefern in (90) eingesetzt die Beziehung

$$(91) \cdots \sum_1^p{}_\sigma \left\{ \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial Z_{1\sigma}} \left(a_{1\sigma}^{(1)} Z_{1\sigma} + a_{2\sigma}^{(1)} Z_{2\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(1)} Z_{m\sigma} \right) \right.$$
$$+ \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial Z_{2\sigma}} \left(a_{1\sigma}^{(2)} Z_{1\sigma} + a_{2\sigma}^{(2)} Z_{2\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(2)} Z_{m\sigma} \right)$$
$$+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\left. + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial Z_{m\sigma}} \left(a_{1\sigma}^{(m)} Z_{1\sigma} + a_{2\sigma}^{(m)} Z_{2\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(m)} Z_{m\sigma} \right) \right\} = \varphi_\varrho,$$

worin die a von μ_ϱ abhängige Constanten bedeuten, somit eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von φ_ϱ.

Bekanntlich reducirt sich die Integration dieser partiellen Differentialgleichung auf die Integration des Systems totaler Differentialgleichungen

$$(92) \ldots \frac{d\varphi_\varrho}{\varphi_\varrho} = \frac{dZ_{11}}{a_{11}^{(1)} Z_{11} + \cdots + a_{m1}^{(1)} Z_{m1}} = \cdots = \frac{dZ_{m1}}{a_{11}^{(m)} Z_{11} + \cdots + a_{m1}^{(m)} Z_{m1}}$$
$$= \frac{dZ_{12}}{a_{12}^{(1)} Z_{12} + \cdots + a_{m2}^{(1)} Z_{m2}} = \cdots = \frac{dZ_{m2}}{a_{12}^{(m)} Z_{12} + \cdots + a_{m2}^{(m)} Z_{m2}}$$
$$= \cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{dZ_{1p}}{a_{1p}^{(1)} Z_{1p} + \cdots + a_{mp}^{(1)} Z_{mp}} = \cdots = \frac{dZ_{mp}}{a_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots + a_{mp}^{(m)} Z_{mp}},$$

oder mit Hülfe einer Variabeln u auf das System

$$(93) \ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{dZ_{1\sigma}}{du} = a_{1\sigma}^{(1)} Z_{1\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(1)} Z_{m\sigma} \\ \cdots\cdots\cdots \qquad \sigma = 1, 2, \cdots p \\ \frac{dZ_{m\sigma}}{du} = a_{1\sigma}^{(m)} Z_{1\sigma} + \cdots + a_{m\sigma}^{(m)} Z_{m\sigma} \\ \frac{d\varphi_\varrho}{du} = \varphi_\varrho. \end{array}\right.$$

Bezeichnet man die Lösungen der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1\sigma}^{(1)} - \nu_\sigma & a_{2\sigma}^{(1)} & \cdots & a_{m\sigma}^{(1)} \\ a_{1\sigma}^{(2)} & a_{2\sigma}^{(2)} - \nu_\sigma & \cdots & a_{m\sigma}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\sigma}^{(m)} & a_{2\sigma}^{(m)} & \cdots & a_{m\sigma}^{(m)} - \nu_\sigma \end{vmatrix} = 0$$

mit $\nu_\sigma^{(1)}, \nu_\sigma^{(2)}, \cdots \nu_\sigma^{(m)}$, und bestimmt eine Reihe von Grössen A als Lösungen des Systems linearer Gleichungen

$$\left(a_{1\sigma}^{(1)} - \nu_\sigma^{(\varrho)}\right) A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(1)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(1)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} = 0$$
$$a_{1\sigma}^{(2)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + \left(a_{2\sigma}^{(2)} - \nu_\sigma^{(\varrho)}\right) A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + a_{m\sigma}^{(2)} A_{m\sigma}^{(\varrho)} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1\sigma}^{(m)} A_{1\sigma}^{(\varrho)} + a_{2\sigma}^{(m)} A_{2\sigma}^{(\varrho)} + \cdots + \left(a_{m\sigma}^{(m)} - \nu_\sigma^{(\varrho)}\right) A_{m\sigma}^{(\varrho)} = 0,$$

so ergeben sich bekanntlich für das System der Differentialgleichungen (93) die Integrale

$$Z_{1\sigma} = c_{1\sigma} A_{1\sigma}^{(1)} e^{\nu_\sigma^{(1)} u} + c_{2\sigma} A_{1\sigma}^{(2)} e^{\nu_\sigma^{(2)} u} + \cdots + c_{m\sigma} A_{1\sigma}^{(m)} e^{\nu_\sigma^{(m)} u}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Z_{m\sigma} = c_{1\sigma} A_{m\sigma}^{(1)} e^{\nu_\sigma^{(1)} u} + c_{2\sigma} A_{m\sigma}^{(2)} e^{\nu_\sigma^{(2)} u} + \cdots + c_{m\sigma} A_{m\sigma}^{(m)} e^{\nu_\sigma^{(m)} u}$$
$$\varphi_\varrho = c\, e^u,$$

oder

$$Z_{1\sigma} = c_{1\sigma} A_{1\sigma}^{(1)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(1)}} + c_{2\sigma} A_{1\sigma}^{(2)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(2)}} + \cdots + c_{m\sigma} A_{1\sigma}^{(m)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(m)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_{m\sigma} = c_{1\sigma} A_{m\sigma}^{(1)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(1)}} + c_{2\sigma} A_{m\sigma}^{(2)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(2)}} + \cdots + c_{m\sigma} A_{m\sigma}^{(m)} \left(\frac{\varphi_\varrho}{c}\right)^{\nu_\sigma^{(m)}}.$$

Da nun diese Gleichungen, nach den $c_{1\sigma}$ aufgelöst, Ausdrücke von der Form liefern

$$c_{\tau\sigma} = \varphi_\varrho^{-\nu_\sigma^{(\tau)}} \left\{ B_{1\sigma}^{(\tau)} Z_{1\sigma} + B_{2\sigma}^{(\tau)} Z_{2\sigma} + \cdots + B_{m\sigma}^{(\tau)} Z_{m\sigma} \right\},$$

worin die B wiederum Constanten bedeuten, so wird das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (91), wenn φ_ϱ der Gleichung (86) gemäss durch $z_{\varrho 1}$ ersetzt wird, durch die Beziehung gegeben sein

$$(94) \cdots\; F\Big\{ z_{\varrho 1}^{-\nu_1^{(1)}} \left(B_{11}^{(1)} Z_{11} + B_{21}^{(1)} Z_{21} + \cdots + B_{m1}^{(1)} Z_{m1}\right),$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_1^{(2)}} \left(B_{11}^{(2)} Z_{11} + B_{21}^{(2)} Z_{21} + \cdots + B_{m1}^{(2)} Z_{m1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_1^{(m)}} \left(B_{11}^{(m)} Z_{11} + \cdots\cdots\cdots + B_{m1}^{(m)} Z_{m1}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_p^{(1)}} \left(B_{1p}^{(1)} Z_{1p} + \cdots\cdots\cdots + B_{mp}^{(1)} Z_{mp}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{\varrho 1}^{-\nu_p^{(m)}} \left(B_{1p}^{(m)} Z_{1p} + \cdots\cdots\cdots + B_{mp}^{(m)} Z_{mp}\right)\Big\} = 0,$$

worin F eine willkürliche Function bezeichnet, und die Grössen B von den anderen unabhängigen Variabeln $x_2, \cdots x_\varkappa$ und den zugehörigen Integralen algebraisch abhängen. *Dies wird somit die allgemeinste Form der Gleichung* (86) *sein, welche den Gleichungen* (85) *gemäss ein Element des erweiterten Abel'schen Theorems für eine algebraische Beziehung zwischen den particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit algebraisch unter einander verbundenen Argumenten bildet.*

Gehen wir nun ein wenig näher auf die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein; es war im § 3 gezeigt worden, dass, wenn solche Differentialgleichungen reductibel sind, entweder zwischen zwei Fundamentalintegralen eine algebraische Beziehung stattfindet — worin der Fall, dass die Integrale selbst algebraisch sind, eingeschlossen ist — oder dass dieselben eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung als Integral besitzen, und zwar dann auch stets ein Integral von der Form

$$e^{\int \varphi(x)\,dx},$$

worin $\varphi(x)$ eine algebraische Function bedeutet; ist nun dieses letztere der Fall, so erkennt man sofort die Form des Abel'schen Theorems für zwei transcendente particuläre Fundamentalintegrale z_1 und z_2 der reductibeln Differentialgleichung zweiter Ordnung. Denn, da für zwei bestimmte constante Werthe a und b

$$a z_1 + b z_2 = e^{\int \varphi(x)\,dx}$$

ist, so folgt vermöge des Abel'schen Theorems der rechten Seite dieser Gleichung, wenn z. B. vorausgesetzt wird, dass $\int \varphi(x)\,dx$ ein Integral erster Gattung vom Geschlechte p ist, in bekannten Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\left(a z_1^{(1)} + b z_2^{(1)}\right)\left(a z_1^{(2)} + b z_2^{(2)}\right) \cdots \left(a z_1^{(\mu)} + b z_2^{(\mu)}\right) \\ = \left(a Z_1^{(1)} + b Z_2^{(1)}\right) \cdots \left(a Z_1^{(p)} + b Z_2^{(p)}\right);\end{aligned}$$

so hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} - (1 + P) z = 0,$$

in welcher P eine beliebige algebraische Function bedeutet, die beiden Fundamentalintegrale

$$z_1 = e^x \int e^{-\int (P+2)\,dx}\,dx \quad \text{und} \quad z_2 = -\, e^x \int e^{-\int (P+2)\,dx}\,dx + e^x,$$

und das für diese geltende Abel'sche Theorem lautet

$$\left(z_1^{(1)} + z_2^{(1)}\right)\left(z_1^{(2)} + z_2^{(2)}\right) \cdots \left(z_1^{(\mu)} + z_2^{(\mu)}\right) = Z_1 + Z_2,$$

wenn

$$X = x_1 + x_2 + \cdots + x_\mu$$

ist, da

$$z_1 + z_2 = e^x,$$

also e^x selbst ein Integral jener Differentialgleichung ist. Stehen dagegen zwei particuläre Fundamentalintegrale in algebraischer Relation

$$(95) \cdots\cdot \; z_2 = f(x, z_1),$$

so folgt einerseits aus der bekannten Beziehung

$$z_1^{\,2}\frac{d}{dx}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = c e^{-\int P\,dx}$$

die Gleichung

$$(96) \cdots\cdot \; z_1\frac{\partial f}{\partial x} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} - f\frac{dz_1}{dx} = c_1 e^{-\int P\,dx},$$

in welcher c_1 eine bestimmte, den in Frage stehenden z_1 und z_2 zugehörige Constante bedeutet, andererseits führt die Bedingung, dass

z_1 und z_2 durch die Beziehung (95) mit einander verbunden sind, wie schon aus der Gleichung (18) des § 3 gefolgert wurde, auf die Beziehung

$$(97) \cdots\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0;$$

da nun die beiden Gleichungen (96) und (97) zu gleicher Zeit stattfinden müssen, so wird man den Werth von $\frac{dz_1}{dx}$ aus (96) in (97) einsetzen können und auf diese Weise eine Gleichung erhalten

$$(98) \cdots\cdot F(x, z_1, c_1 e^{-\int P dx}) = 0.$$

Vor allem ist klar, dass diese Gleichung, vorausgesetzt, dass P nicht das logarithmische Differential einer algebraischen Function ist, nicht eine in der Transcendenten $e^{-\int P dx}$ identische Gleichung sein kann; denn es folgt, wie man durch Ausführung der Elimination unmittelbar sieht, dass das Verschwinden der Coefficienten von

$$e^{-2\int P dx} \quad \text{und} \quad e^{-\int P dx},$$

wenn z_1 selbst als nicht algebraisch vorausgesetzt wird, die Gleichungen nach sich zieht,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} = 0,$$

d. h. es wäre $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ eine Constante, und jene algebraische Relation von der Form

$$z_2 = Az_1 + B,$$

worin A eine Constante und B eine algebraische Function von x ist; dies kann aber nicht sein, da dann auch B ein Integral wäre, und die Differentialgleichung somit ein algebraisches Integral hätte, welcher Fall ausgeschlossen werden soll; es kann somit (98) keine in der Transcendenten identische Gleichung sein, sondern wird die Form annehmen

$$e^{-\int P dx} = F_1(x, z_1),$$

worin F_1 eine algebraische Function bedeutet, und hieraus folgt offenbar wieder ein Abel'sches Theorem von der Gestalt

$$F_1(x_1, z_1^{(1)})\, F_1(x_2, z_1^{(2)}) \cdot\cdot F_1(x_\mu, z_1^{(\mu)}) = F_1(X_1, Z_1^{(1)}) \cdot\cdot F_1(X_p, Z_1^{(p)}).$$

Es war nun oben die Annahme gemacht worden, dass P nicht das logarithmische Differential einer algebraischen Function $\varphi(x)$ sein sollte, in welchem Falle die Transcendente $e^{\int P dx} = \varphi(x)$ würde;

wäre dies der Fall, so ginge die Gleichung (96) in

$$(99) \cdots\cdot z_1 \frac{\partial f}{\partial x} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dx} - f \frac{dz_1}{dx} = c_1 \varphi(x)$$

über, und es fragt sich, was aus (98) und (99) für das Abel'sche Theorem gefolgert werden kann. Wir wollen jedoch bei dieser Gelegenheit die Frage allgemein erörtern, was man aus der Annahme, dass zwischen zwei particulären, nicht algebraischen Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine algebraische Beziehung stattfindet, schliessen kann — eine Untersuchung, welche die am Ende des § 3 angestellte ergänzt — und erst dann wieder auf das vorliegende Problem zurückkommen.

Nehmen wir also an, es bestehe zwischen z_1 und z_2 eine algebraische Gleichung

$$z_2 = f(x, z_1),$$

so dass z_1, wie oben gezeigt worden, der Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0,$$

so war früher bewiesen worden, dass, wenn eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, diese letztere ein algebraisches Integral der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung ist; denken wir uns also die obige Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf x und z_1 rational gemacht, so wird ein in Bezug auf $\frac{dz}{dx}$ algebraisch irreductibeler Factor, weil derselbe durch $z = z_1$ befriedigt wird, alle Integrale mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung gemein haben, alle seine Integrale werden also die Form haben

$$z = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2,$$

worin μ_1 und μ_2 von einer willkürlichen Constanten abhängige constante Parameter sind; da nun ferner zwischen einem Integrale z_2 der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und dem nicht algebraischen Integrale z_1 der in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichung erster Ordnung der oben angenommene algebraische Zusammenhang stattfindet, so muss derselbe nach dem Satze I des § 5 erhalten bleiben, wenn statt z_1 ein willkürliches Integral der Differentialgleichung erster Ordnung und statt z_2 ein passendes derjenigen zweiter Ordnung substituirt wird. Es folgt also die Beziehung

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = f(x, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$$

oder

$$f\big(x,\ \mu_1 z_1 + \mu_2 f(x,\ z_1)\big) = m_1 z_1 + m_2 f(x,\ z_1),$$

worin $\mu_1,\ \mu_2,\ m_1,\ m_2$ bestimmte Functionen einer willkürlichen Constanten λ sind. Die Differentiation dieser Gleichung nach z_1 und λ — und diese ist erlaubt, weil jene Gleichung z_1 nicht als algebraische Function von x der Voraussetzung nach ergeben darf, also in dieser Grösse z_1 identisch sein muss — liefert die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f\big(x,\ \mu_1 z_1 + \mu_2 f(x,\ z_1)\big)}{\partial\big(\mu_1 z_1 + \mu_2 f(x,\ z_1)\big)} \left(\mu_1 + \mu_2 \frac{\partial f(x,\ z_1)}{\partial z_1}\right) = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x,\ z_1)}{\partial z_1}$$

$$\frac{\partial f\big(x,\ \mu_1 z_1 + \mu_2 f(x,\ z_1)\big)}{\partial\big(\mu_1 z_1 + \mu_2 f(x,\ z_1)\big)} \left(z_1 \frac{d\mu_1}{d\lambda} + f(x,\ z_1) \frac{d\mu_2}{d\lambda}\right)$$

$$= z_1 \frac{dm_1}{d\lambda} + f(x,\ z_1) \frac{dm_2}{d\lambda},$$

woraus sich durch Division unmittelbar ergiebt

$$Af(x,\ z_1) \frac{\partial f(x,\ z_1)}{\partial z_1} + Bz_1 \frac{\partial f(x,\ z_1)}{\partial z_1} + Cf(x,\ z_1) + Dz_1 = 0,$$

worin $A,\ B,\ C,\ D$ Constanten bedeuten, und diese Gleichung kann, da sie für jedes z_1 bestehen muss, als eine Differentialgleichung in der unabhängigen Variabeln z_1 und der abhängigen $f(x,\ z_1) = Z_1$ von der Form aufgefasst werden

$$dZ_1(AZ_1 + Bz_1) + dz_1(CZ_1 + Dz_1) = 0,$$

worin jedoch Z_1 eine algebraische Function von z_1 sein soll.

Das Integral dieser homogenen Differentialgleichung erster Ordnung ist bekanntlich, wenn $Z_1 = z_1 u$ gesetzt wird,

$$\log z_1 + \int \frac{(Au + B)du}{Au^2 + (B + C)u + D} = c,$$

worin c eine von z_1 und u unabhängige, aber noch von x abhängige Grösse bedeutet, oder wie unmittelbar zu sehen,

$$\frac{(u - \alpha)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}}{(u - \beta)^{\frac{\nu}{\mu - \nu}}} = \frac{\varkappa}{z_1},$$

worin $\alpha,\ \beta,\ \mu,\ \nu$ Constanten, $\varkappa$ von x abhängig ist, oder endlich, da $u = \frac{Z_1}{z_1}$ und $Z_1 = f(x,\ z_1) = z_2$ ist,

$$(100) \ldots\ldots \frac{\left(\frac{Z_1}{z_1} - \alpha\right)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}}{\left(\frac{Z_1}{z_1} - \beta\right)^{\frac{\nu}{\mu - \nu}}} = \frac{\varkappa}{z_1}, \quad \text{d. h.} \ \frac{\left(\frac{z_2}{z_1} - \alpha\right)^{\frac{\mu}{\mu - \nu}}}{\left(\frac{z_2}{z_1} - \beta\right)^{\frac{\nu}{\mu - \nu}}} = \frac{\varkappa}{z_1}.$$

Ohne nun auf die Functionalgleichung zurückzugehen und weitere Bedingungen für die in der zuletzt gefundenen Form vorkommenden Constanten zu ermitteln, können wir unmittelbar folgern, dass, wenn wir statt von der Beziehung $z_2 = f(x, z_1)$ auszugehen, die inverse Beziehung $z_1 = F(x, z_2)$ zu Grunde gelegt hätten, wir zu dem Ausdrucke gelangt wären

$$\frac{\left(\frac{z_1}{z_2} - a\right)^{\frac{m}{m-n}}}{\left(\frac{z_1}{z_2} - b\right)^{\frac{n}{m-n}}} = \frac{k}{z_2},$$

worin wiederum a, b, m, n Constanten und k von x abhängig ist. Da nun aus der zweiten Gleichung folgt

$$(101) \ldots \quad \frac{\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{m-n}}}{\left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{1}{b}\right)^{\frac{n}{m-n}}} = -k\, \frac{b^{\frac{n}{m-n}}}{a^{\frac{m}{m-n}}}\, \frac{1}{z_1},$$

so wird diese Beziehung, da z_1 und z_2 nicht algebraische Functionen von x sein sollen, mit (100) identisch sein müssen, und es ergiebt sich somit

$$a = \frac{1}{\alpha}, \quad b = \frac{1}{\beta}, \quad m = \mu, \quad n = \nu, \quad k = -\varkappa\, \frac{\beta^{\frac{\nu}{\mu-\nu}}}{\alpha^{\frac{\mu}{\mu-\nu}}}.$$

Da die Beziehung zwischen z_2 und z_1 eine algebraische sein soll, so werden $\frac{\mu}{\mu-\nu}$ und $\frac{\nu}{\mu-\nu}$ rationale Zahlen sein müssen, wobei offenbar μ und ν als ganze Zahlen betrachtet werden können; da aber

$$\frac{\mu}{\mu-\nu} - \frac{\nu}{\mu-\nu} = 1,$$

so folgt, dass, wenn $\frac{\nu}{\mu-\nu} = \lambda$ gesetzt wird, die obige Beziehung in

$$\frac{\left(\frac{z_2}{z_1} - \alpha\right)^{\lambda+1}}{\left(\frac{z_2}{z_1} - \beta\right)^{\lambda}} = \frac{\varkappa}{z_1},$$

oder in

$$(102) \ldots \quad \frac{(z_2 - \alpha z_1)^{\lambda+1}}{(z_2 - \beta z_1)^{\lambda}} = \varkappa$$

übergeht, worin λ eine rationale Zahl und $\varkappa$ eine algebraische Function von x bedeutet. Hat die Gleichung $Au^2 + (B + C)u + D = 0$ zwei gleiche Lösungen, so überzeugt man sich unmittelbar, dass das

Integral der oben aufgestellten Differentialgleichung in x und u nur dann auf eine algebraische Beziehung führt, wenn $B = C$ ist, und dann lautet die gesuchte Beziehung zwischen z_1 und z_2

$$z_2 - \alpha z_1 = \varkappa$$

und wäre somit in der obigen für $\beta = \alpha$ enthalten. Ist endlich $A = 0$, so geht die obige Gleichung in

$$\log z_1 + \int \frac{B\,du}{(B+C)u + D} = c$$

über, welche somit, wie unmittelbar zu sehen, die Beziehung liefert

$$(z_2 + \alpha z_1)^{\varrho} = \varkappa z_1^{\varrho - 1},$$

worin wieder ϱ eine rationale Zahl und $\varkappa$ eine algebraische Function von x sein wird*); aber auch diese Beziehung kann man als in der Form (102) enthalten betrachten, wenn man in jener $\beta = \infty$, $\lambda + 1 = \varrho$ und $\varkappa$ statt $(-\beta)^{\varrho - 1}\varkappa$ setzt, — *so dass die Beziehung* (102) *die einzig mögliche algebraische Beziehung zwischen zwei particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert, vorausgesetzt, dass diese Integrale nicht selbst algebraische Functionen sind.*

Wir kehren nun nach Feststellung der allgemeinen algebraischen Relation (102) zwischen z_1 und z_2 wieder zur Herleitung des für diesen Fall einer reductibeln linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung geltenden Abel'schen Theorems zurück, das jedoch nur für den Fall noch zu entwickeln war, in welchem

$$P = \frac{d \log \varphi(x)}{dx}$$

und $\varphi(x)$ eine algebraische Function von x ist. Da aber in der Beziehung (102) die Grössen

$$z_2 - \alpha z_1 = Z_2, \quad z_2 - \beta z_1 = Z_1$$

wieder particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung sind, weil α und β Constanten bedeuten, jene Beziehung also in die Form gesetzt werden kann

$$\frac{Z_2^{\mu+\nu}}{Z_1^{\mu}} = \varkappa^{\nu},$$

*) Ist $A = 0$, $D = 0$, $B = -C$, so geht die Differentialgleichung zwischen z_1 und Z_1 in $z_1\,dZ_1 - Z_1\,dz_1 = 0$ über, deren Integral $Z_1 = \varkappa z_1$ ist, so dass die Beziehung zwischen den particulären Integralen die Form annimmt $z_2 = \varkappa z_1$, worin $\varkappa$ eine algebraische Function bedeutet, wie dies z. B. der Fall ist bei einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten, wenn die die Grösse m im particulären Integrale e^{mx} definirende quadratische Gleichung zwei gleiche Lösungen hat.

worin μ und ν ganze Zahlen, oder in

$$(103) \cdots\cdot \quad Z_2 = K Z_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}},$$

wenn K wiederum eine algebraische Function von x bedeutet, so wird die bekannte Beziehung

$$Z_1 \frac{dZ_2}{dx} - Z_2 \frac{dZ_1}{dx} = Ce^{-\int P dx} = \frac{C}{\varphi(x)}$$

wegen

$$\frac{dZ_2}{dx} = \frac{\mu}{\mu+\nu} K Z_1^{-\frac{\nu}{\mu+\nu}} \frac{dZ_1}{dx} + K' Z_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}}$$

in

$$-\frac{\nu}{\mu+\nu} K Z_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \frac{dZ_1}{dx} + K' Z_1^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}} = \frac{C}{\varphi(x)}$$

übergehen; setzt man nun

$$Z_1^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}} = t,$$

so folgt unmittelbar

$$\frac{dt}{dx} - \frac{2\mu+\nu}{\nu} \frac{d \log K}{dx} t = - \frac{C(2\mu+\nu)}{\nu} \frac{1}{K\varphi(x)},$$

d. h.

$$t = K^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}} \left(C_1 - \frac{C(2\mu+\nu)}{\nu} \int \frac{dx}{K^{\frac{2(\mu+\nu)}{\nu}} . \varphi(x)} \right),$$

worin C_1 eine Constante bedeutet; es ist somit

$$Z_1^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}} : K^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}$$

ein Abel'sches Integral, und daher, wenn wir wieder von hinzukommenden algebraisch-logarithmischen Theilen absehen, das Abel'sche Theorem für das Integral Z_1 jener Differentialgleichung oder für $z_2 - \beta z_1$ in der Form enthalten

$$\frac{\left(z_2^{(1)} - \beta z_1^{(1)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_1^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}} + \frac{\left(z_2^{(2)} - \beta z_1^{(2)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_2^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}} + \cdots + \frac{\left(z_2^{(\varrho)} - \beta z_1^{(\varrho)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_\varrho^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}}$$

$$= \frac{\left(z_2^{(I)} - \beta z_1^{(I)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_I^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}} + \cdots + \frac{\left(z_2^{(P)} - \beta z_1^{(P)}\right)^{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}}}{K_P^{\frac{2\mu+\nu}{\nu}}},$$

wenn p das Geschlecht jenes Abel'schen Integrales bedeutet.

Wir haben vorher gefunden, dass, wenn zwischen zwei particulären Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung und der unabhängigen Variabeln eine algebraische Beziehung stattfinden soll, dieselbe nothwendig von der

Form (102) sein müsse, dass dann aber auch immer zwei andere particuläre Integrale existiren, für welche diese Beziehung nothwendig die Form hat

$$(104) \cdots\cdot \; Z_2 = K Z_1^{\varrho},$$

worin K eine algebraische Function von x, und ϱ eine rationale Zahl bedeutet. Bildet man nun aus dieser Gleichung die Beziehungen für $\frac{dZ_2}{dx}$ und $\frac{d^2 Z_2}{dx^2}$ und setzt diese Werthe in die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(105) \cdots\cdot \; \frac{d^2 z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} + Qz = 0$$

ein, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass auch Z_1 eben dieser Differentialgleichung genügt,

$$(106) \cdots\cdot \; \left(\frac{dZ_1}{dx}\right)^2 + 2 \frac{\frac{dK}{dx}}{K} \frac{Z_1}{\varrho - 1} \frac{dZ_1}{dx}$$
$$= \frac{Z_1^{\,2}}{K\varrho(\varrho-1)} \left[QK(\varrho - 1) - P \frac{dK}{dx} - \frac{d^2 K}{dx^2} \right]$$

oder

$$(107) \cdots\cdot \; \frac{dZ_1}{dx} = LZ_1,$$

worin L eine algebraische Function von x bedeutet, und hieraus folgt für Z_2 die Gleichung

$$(108) \cdots\cdot \; \frac{dZ_2}{dx} = \left(\varrho L + \frac{\frac{dK}{dx}}{K} \right) Z_2;$$

es genügen somit die beiden particulären Integrale Z_1 und Z_2 zwei linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Da nun jedes andere particuläre Integral der Differentialgleichung (105) von der Form

$$(109) \cdots\cdot \; Z = m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

ist, so würde die Annahme, dass auch dieses einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\frac{dZ}{dx} = RZ$$

genügt, nach den Gleichungen (107) und (108) die Relation nach sich ziehen

$$m_1 (L - R) Z_1 = m_2 Z_1^{\varrho} K \left[R - \varrho L - \frac{\frac{dK}{dx}}{K} \right],$$

welche, da Z_1 nicht algebraisch sein durfte, in Bezug auf Z_1 identisch sein muss und daher $\varrho = 1$ liefert; es werden somit die anderen particulären Integrale nur dann ebenfalls homogenen linearen Differentialgleichungen genügen können, wenn die zwischen den beiden Fundamentalintegralen bestehende algebraische Beziehung

$$(110) \cdots\cdot \; Z_2 = KZ_1$$

lautet; in diesem Falle wird aber auch umgekehrt jedes particuläre Integral (109) einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen, indem, wie leicht zu sehen,

$$\frac{d(m_1 Z_1 + m_2 Z_2)}{dx} = \left(L + \frac{m_2 \frac{dK}{dx}}{m_1 + m_2 K} \right) (m_1 Z_1 + m_2 Z_2)$$

ist.

Fassen wir nunmehr die im § 3 und eben jetzt erhaltenen Resultate zusammen; dort war gezeigt worden, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht irreductibel ist, entweder zwei ihrer particulären Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen müssen, oder dass eines ihrer Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung Genüge leistet, welche ein algebraisches Integral der gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist; wir haben aber jetzt nachgewiesen, dass auch, wenn zwei particuläre Fundamentalintegrale und die unabhängige Variable algebraisch mit einander verbunden sind, nothwendig ein particuläres Integral der Differentialgleichung existirt, welches einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, und dass diese Eigenschaft nur dann für alle particulären Integrale statthat, wenn zwei Fundamentalintegrale durch die Gleichung (110) mit einander verbunden sind. Wir erhalten somit folgenden Satz:

Jede nicht irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt particuläre Integrale, welche einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leisten, oder hat eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung als Integral, oder auch, *wenn ein nicht algebraisches Integral derselben einer Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet, so giebt es jedenfalls auch andere particuläre Integrale, welche eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen.*

Um für *irreductible* Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu einem Abel'schen Theorem zu gelangen, wird man erst diejenigen Klassen dieser Differentialgleichungen zu untersuchen haben, für welche zwischen zwei particulären Integralen und einem Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung ein algebraischer Zusammenhang besteht — die Erweiterung des vorher betrachteten algebraischen Zusammenhanges zwischen zwei particulären Integralen unter einander — um dann mit Hülfe des für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellten Abel'schen Theorems dasjenige für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung abzuleiten. Die Untersuchung führt auf analoge Sätze zu denen des § 3, in denen nur die algebraische

Function durch das transcendente Integral der Differentialgleichung erster Ordnung ersetzt ist, doch stehen wir davon ab, auf weitere Einzelheiten näher einzugehen, da es uns nur darauf ankam, die Anwendbarkeit der oben aufgestellten Sätze und Methoden zu zeigen, und ziehen es vor, im Folgenden noch eine Reihe von Fragen, welche die linearen Differentialgleichungen betreffen, ausführlich zu behandeln, sowie einige schwierigere Punkte der Integralrechnung zu erörtern*).

---

*) Es mag hier nur noch einer Anwendung der im § 5 aufgestellten Sätze von der Erhaltung der algebraischen Relation kurz Erwähnung geschehen, welche die Ermittlung des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung zum Gegenstande hat, wenn man eine algebraische Beziehung kennt, welche ein particuläres Integral derselben mit einem particulären Integrale einer anderen Differentialgleichung derselben Ordnung verbindet, deren allgemeines Integral bekannt ist. Seien z. B. die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

und ein particuläres Integral z_1 der ersten mit einem particulären z_2 der zweiten durch die algebraische Beziehung verbunden

$$F(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{oder} \quad z_2 = \psi(x, z_1),$$

so wird bekanntlich, wenn z_1 ein nicht algebraisches Integral und die erste Differentialgleichung in Bezug auf $\frac{dz}{dx}$ algebraisch irreductibel ist, die algebraische Relation erhalten bleiben, wenn man für z_1 ein beliebiges anderes Integral der ersten Differentialgleichung setzt, vorausgesetzt, dass man für z_2 ein passendes Integral der zweiten substituirt; setzt man nun für z_1 das allgemeine Integral der zugehörigen Differentialgleichung, so wird z_2, weil es ein Integral der betreffenden Differentialgleichung bleibt und zugleich eine willkürliche Constante enthält, das allgemeine Integral der zweiten Differentialgleichung darstellen. So stehen die particulären Integrale

$$z_1 = x + x \log x \quad \text{und} \quad z_2 = x^2 + 2x^2 \log x + x^2 (\log x)^2 = (x + x \log x)^2$$

der respectiven Differentialgleichungen

$$x \frac{dz}{dx} - z = x \quad \text{und} \quad x^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - 4xz \frac{dz}{dx} = 4x^2 z - 4z^2$$

in der algebraischen Beziehung

$$z_2 = z_1^{\,2};$$

da nun das allgemeine Integral der ersten Differentialgleichung bekanntlich durch den Ausdruck gegeben ist

$$Z_1 = cx + x \log x,$$

worin c eine willkürliche Constante bedeutet, so liefert der Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung ein Mittel zur Auffindung des allgemeinen Integrales der zweiten Differentialgleichung in der Form

$$Z_2 = (cx + x \log x)^2.$$