

V. Abschnitt.  
Konfokale Flächen und Fokaleigenschaften.

I. Kapitel.  
Die konfokalen Systeme.

§ 118. Das System konfokaler Kegel.

1. Begriff des konfokalen Systems. Der elliptische Kegel § 54, (1):

$$(1') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0, \quad e^2 > d^2, \quad e^2 > a^2,$$

ist durch seine Scheitellinien (in der Hauptebene der größten Öffnung § 54, 5):

$$(2') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} = 0, \quad y = 0,$$

und seine Brennlilien  $f, f'$ :

$$(3') \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 0, \quad y = 0,$$

vollständig bestimmt. Denn die Verhältnisse  $a^2 : a^2 - d^2 : a^2 - e^2$ , von denen die Gleichung (1') abhängt, sind durch die Verhältnisse  $e^2 : a^2$  und  $d^2 : e^2$  der Gleichungen (2') und (3') gegeben.

*Konzentrische und koaxiale Kegel mit gleichen Brennlilien und verschiedenen Scheitellinien heißen konfokal (und konfokal liegend).<sup>98)</sup>*

Ein System konfokaler Kegel wird daher durch die Gleichung (1') bei veränderlichem  $a^2$  und festem  $e^2$  und  $d^2$  dargestellt.

2. Gleichung des konfokalen Systems. Der Symmetrie wegen setzen wir mit  $\alpha > \beta > \gamma, \alpha > \tau$ :

$$(4') \quad a^2 = \alpha - \tau, \quad d^2 = \alpha - \beta, \quad e^2 = \alpha - \gamma.$$

Die Gleichung des konfokalen Systems<sup>99)</sup> lautet dann (§ 32, (1)):

$$(1) \quad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0, \quad \alpha > \beta > \gamma,$$

wo bei festen  $\alpha, \beta, \gamma$  der veränderliche Parameter  $\tau$  zwischen den Grenzen:

$$\alpha > \tau > \gamma$$

sich bewegt (bei Hinzunahme imaginärer Kegel auch außerhalb dieser Grenzen).

Die *Scheitellinien* des einzelnen Kegels in der  $zx$ -Ebene sind:

$$(2) \quad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0, \quad y = 0,$$

die *gemeinsamen Brennlilien* aller Kegel:

$$(3) \quad \frac{x^2}{\alpha - \beta} + \frac{z^2}{\gamma - \beta} = 0, \quad y = 0.$$

**3. Unterscheidung der beiden Arten von Kegeln.** Alle Kegel (1) haben die  $zx$ -Ebene als *Hauptebene der größten Öffnung*. Dagegen kommt ihnen nach § 54, 4; 5 die aufrechte  $z$ -Achse oder die wagrechte  $x$ -Achse (§ 54, Fig. 125; 126) als *innere Achse* zu, je nachdem  $\gamma < \tau < \beta$  oder  $\beta < \tau < \alpha$ . Wir unterscheiden sie kurz als *aufrechte* und *liegende Kegel*. Um sie auch in der Bezeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihren Parameter bezüglich  $\tau = \mu$  und  $\tau = \nu$ . Danach zerfällt das System (1) in die beiden Reihen:

$$(4) \quad \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 0, \quad \gamma < \mu < \beta;$$

$$(5) \quad \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 0, \quad \beta < \nu < \alpha,$$

von denen die erste alle aufrechten, die zweite alle liegenden Kegel enthält.

**4. Grenzformen und Veränderung der konfokalen Kegel.** Für  $\mu = \gamma$  fallen oberer und unterer Mantel des *aufrechten* Kegels (4) in der  $xy$ -Ebene zusammen (Fig. 184 stellt einen Oktanten des Raumes dar). Mit wachsendem  $\mu$  heben sie sich aus dieser heraus und ziehen sich nach oben und unten immer mehr gegen die die  $z$ -Achse enthaltende Winkelfläche der Fokallinien in der  $zx$ -Ebene zusammen, in die sie für  $\mu = \beta$  hineinfliegen. Die die  $x$ -Achse enthaltende Winkelfläche der Fokallinien in der  $zx$ -Ebene stellt die Grenzform  $\nu = \beta$  des *liegenden* Kegels (5) dar, dessen beide Mäntel sich mit wachsendem  $\nu$  aus diesem Gebiet herausheben und für  $\nu = \alpha$  von beiden Seiten her in die  $yz$ -Ebene hineinfliegen.

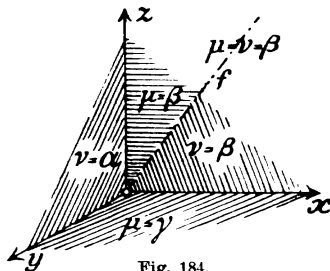


Fig. 184.

**5. Die durch einen Strahl des Bündels bestimmten Kegel.** In der Gleichung (1) können  $x, y, z$  statt als *Punktkoordinaten im Raume* auch als *homogene Strahlenkoordinaten im Bündel* des Punktes  $O$  (I § 49, 6) gelten. Um in dieser Auffassung die Kegel des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Strahl

$x:y:z$  des Bündels gehen, hat man die in  $\tau$  *quadratische* Gleichung (1) oder:

$$(6) \quad f(\tau) = (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 = 0$$

nach  $\tau$  aufzulösen.

Da nun:

$$f(\gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)z^2 > 0, \quad f(\beta) = -(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)y^2 < 0,$$

$$f(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)x^2 > 0,$$

so hat diese Gleichung stets zwei *reelle Wurzeln*, von denen die eine zwischen  $\gamma$  und  $\beta$  liegt und daher mit  $\mu$ , die andere zwischen  $\beta$  und  $\alpha$  liegt und daher mit  $\nu$  zu bezeichnen ist.

I. *Durch jeden Strahl des Bündels geht stets ein aufrechter und ein liegender Kegel des konfokalen Systems.*

Nur für einen jeden der beiden Fokalstrahlen fallen die beiden Wurzeln  $\mu$  und  $\nu$  in dem Werte  $\beta$  zusammen.

**6. Die durch zwei ungleichnamige Kegel bestimmten Strahlen.** Zwischen den Koordinaten  $x:y:z$  eines Strahles und den Parametern  $\mu, \nu$  der durch ihn gehenden Kegel besteht nach (6) die in  $\tau$  identische Gleichung:

$$(7) \quad (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 \\ = (x^2 + y^2 + z^2)(\tau - \mu)(\tau - \nu).$$

Hieraus folgt mit  $\tau = \alpha, \beta, \gamma$  und der Abkürzung:

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda:$$

$$(9) \quad x^2 = \lambda \frac{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad y^2 = \lambda \frac{(\beta - \mu)(\beta - \nu)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}, \quad z^2 = \lambda \frac{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Wenn daher  $\mu$  und  $\nu$  den Ungleichungen bei (4) und (5) entsprechend gegeben werden, so ergeben sich aus (9) vier nur in den Vorzeichen verschiedene *reelle* Wertssysteme  $x:y:z$ .

II. *Irgend zwei ungleichnamige Kegel des konfokalen Systems schneiden sich stets in vier symmetrisch gegen die Koordinatenebenen gelegenen Strahlen des Bündels.*

Da nach 5, I durch jeden Strahl stets zwei und nur zwei ungleichnamige Kegel gehen, so folgt:

III. *Zwei gleichnamige Kegel des konfokalen Systems haben keinen (reellen) Strahl gemein.*

**7. Orthogonaler Durchschnitt ungleichnamiger Kegel.** Ein gemeinsamer Strahl  $x, y, z$  der beiden ungleichnamigen Kegel  $\mu$  und  $\nu$

genügt den beiden Gleichungen (4) und (5), also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

$$(10) \quad (\mu - \nu) \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} \right\} = 0.$$

Diese bedeutet aber nach § 71, (3), daß die Tangentialebenen der beiden Kegel längs des Strahles zueinander senkrecht sind (I § 42, (5)), oder kurz:

IV. *Irgend zwei ungleichnamige Kegel des konfokalen Systems schneiden sich längs ihrer vier Schnittlinien senkrecht.*

### 8. Gleichung des konfokalen Systems in Ebenenkoordinaten.

Die Gleichung des Kegels (1) lautet nach § 71, (8) in laufenden Ebenenkoordinaten  $u, v, w$  im Bündel (I § 49, 5):

$$(11) \quad (\alpha - \tau)u^2 + (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 = 0$$

(für laufende Ebenenkoordinaten  $u, v, w, s$  im Raume kommt noch die zweite Gleichung  $s = 0$  hinzu, § 71, (9)), oder:

$$(12) \quad (\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - \tau(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Diese Gleichung setzt sich aus den Gleichungen zweier Kegel zweiter Klasse:

$$(13) \quad \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

von denen der zweite der § 84, (10) betrachtete imaginäre Kugelkegel ist, zusammen und ist in dem Parameter  $\tau$  linear. Hieraus folgt sofort:

V. *Eine gegebene Ebene  $u, v, w$  des Bündels wird immer von einem und nur von einem Kegel des konfokalen Systems berührt.*

Ausgenommen sind nur die vier imaginären Ebenen:

$$(14) \quad u^2 : v^2 : w^2 = \beta - \gamma : \gamma - \alpha : \alpha - \beta,$$

welche gemeinsame Tangentialebenen der beiden Flächen (13) und daher aller Flächen (11) sind.

*Alle Kegel des konfokalen Systems haben vier gemeinsame imaginäre Tangentialebenen.*

9. **Begriff der Kegelschar.** Sind überhaupt die Gleichungen zweier Kegel zweiter Klasse im Bündel (§ 80, (1')):

$$(15) \quad F(u, v, w) = 0, \quad G(u, v, w) = 0,$$

so nennt man die Gesamtheit aller Kegel:

$$(16) \quad F(u, v, w) - \tau G(u, v, w) = 0$$

eine *Kegelschar*. Alle Kegel der Schar berühren die vier gemeinsamen Tangentialebenen der beiden Grundkegel (15). Sonst wird jede Ebene des Bündels nur von einem Kegel der Schar berührt (§ 32, 8).

VI. *Das System konfokaler Kegel ist eine Kegelschar.*<sup>100)</sup>

**10. Die Strahlenpaare der Schar.** Die Schar (11) enthält, den Werten  $\tau = \alpha, \beta, \gamma$  entsprechend, drei *Strahlenpaare* (§ 80, 9):

$$(17) \quad (\beta - \alpha)v^2 + (\gamma - \alpha)w^2 = 0, \quad (\gamma - \beta)w^2 + (\alpha - \beta)u^2 = 0, \\ (\alpha - \gamma)u^2 + (\beta - \gamma)v^2 = 0,$$

von denen jedes in einer der drei Hauptebenen liegt, aber nur das *mittlere reell* ist.

Es ist das *Paar der Brennlinsen* (3), aber nicht wie dort in Punktbezüglich Strahlenkoordinaten, sondern *in Ebenenkoordinaten* im Bündel oder, unter Hinzufügung der Gleichung  $s = 0$ , im Raume dargestellt.

**11. Ort der Strahlen mit gleichen Parameterwerten  $\tau$ .** Die Diskriminante der in  $\tau$  quadratischen Gleichung (6):

$$D = \{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2\}^2 \\ - 4\{x^2 + y^2 + z^2\}\{\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2\}$$

zerfällt nach der Identität:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

in die Faktoren:

$$(18) \quad D = (\sqrt{\beta - \gamma}x + i\sqrt{\alpha - \gamma}y + \sqrt{\alpha - \beta}z) \\ \times (\sqrt{\beta - \gamma}x + i\sqrt{\alpha - \gamma}y - \sqrt{\alpha - \beta}z) \\ \times (\sqrt{\beta - \gamma}x - i\sqrt{\alpha - \gamma}y + \sqrt{\alpha - \beta}z) \\ \times (\sqrt{\beta - \gamma}x - i\sqrt{\alpha - \gamma}y - \sqrt{\alpha - \beta}z).$$

Der Ort der Strahlen, deren Parameterwerte  $\tau$  gleich werden, die *Schnittkurvenenveloppe* der Kegelschar (§ 32, 10), wird daher von den vier Ebenen (14) gebildet, die sich in den drei Strahlenpaaren (17) schneiden. Das eine dieser Strahlenpaare, das der Brennstrahlen, bildet den einzigen reellen Bestandteil der Enveloppe.

**12. Ort der Polstrahlen einer Ebene.** Der Polstrahl der Ebene:

$$(19) \quad ux + vy + wz = 0$$

des Bündels (I § 49, (7)) in bezug auf den Kegel zweiter Klasse (11) ist nach § 84, (8):

$$(20) \quad \varrho x = (\alpha - \tau)u, \quad \varrho y = (\beta - \tau)v, \quad \varrho z = (\gamma - \tau)w.$$

Durch Elimination von  $\tau$  (und  $\varrho$ ) folgt hieraus als Ort der Polstrahlen der Ebene (19) in bezug auf alle Kegel  $\tau$ :

$$(21) \quad \begin{vmatrix} x & \alpha u & u \\ y & \beta v & v \\ z & \gamma w & w \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)vwx + (\gamma - \alpha)wuy + (\alpha - \beta)uvz = 0,$$

also eine Ebene, die auf der Ebene (19) senkrecht steht (I § 42, (5)).

Ist  $\tau_0$  derjenige Kegel der Schar (11), der nach 8, V die Ebene (19) berührt, so ist der Berührungsstrahl der Polstrahl der Ebene (19) in bezug auf  $\tau_0$  (§ 80, 4) und daher dem Ort (21) angehörig. Es folgt also (§ 32, 12):

I. *Der Ort der Polstrahlen einer Ebene  $\Pi = u, v, w$  in bezug auf alle Kegel der Schar (11) ist eine Ebene  $\Pi'$ , die Normalebene der Ebene  $\Pi$  längs des Berührungsstrahles des von ihr berührten Kegels der Schar.*<sup>101)</sup>

**13. Senkrechte harmonische Polarebenen.** Zwei zueinander senkrechte harmonische Polarebenen  $u, v, w$  und  $u', v', w'$  des Kegels (11) haben nach § 84, (8) den beiden Gleichungen:

$$(22) \quad (\alpha - \tau)uu' + (\beta - \tau)vv' + (\gamma - \tau)ww' = 0,$$

$$(23) \quad uu' + vv' + ww' = 0$$

zu genügen. Diese liefern bei gegebenem  $u, v, w$ , unabhängig von  $\tau$ , für  $u', v', w'$  die Koeffizienten von (21).

II. *Eine Ebene  $\Pi$  des Bündels hat in bezug auf alle Kegel der Schar (11) dieselbe senkrechte harmonische Polarebene  $\Pi'$*  (§ 32, 13, II).

Es ist die unter 12, I bestimmte Ebene  $\Pi'$ .<sup>82)</sup>

### § 119. Das Hauptebenenproblem der Tangentialebenenpaare beim Kegel.

**1. Begriff der elliptischen Koordinaten.** Die Parameter  $\mu$  und  $\nu$  der beiden nach § 118, 5 durch einen Strahl  $x, y, z$  des Bündels gehenden Kegel des konfokalen Systems § 118, (1) heißen die *elliptischen Koordinaten des Strahles im Bündel*.<sup>103)</sup>

Sie sind bei gegebenen homogenen Koordinaten  $x, y, z$  des Strahles durch die quadratische Gleichung § 118, (6) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 118, (9) den Strahl  $x, y, z$  vierdeutig.

**2. Elliptische Koordinaten besonderer Strahlen.** Aus § 118, (6) oder § 118, 4 ergibt sich insbesondere:

Für alle Strahlen der Ebene  $x = 0$  ist:  $\gamma < \mu < \beta$ ,  $\nu = \alpha$ . Die Strahlen der Ebene  $y = 0$  zerfallen in solche, die durch die Fokallinien  $f, f'$  von der  $z$ -Achse, und solche, die durch  $f, f'$  von der  $x$ -Achse getrennt werden; für jene ist:  $\gamma < \mu < \beta$ ,  $\nu = \beta$ , für diese  $\mu = \beta$ ,  $\beta < \nu < \alpha$ . Für die *Fokalstrahlen*  $f, f'$  selbst ist:  $\mu = \beta$ ,  $\nu = \beta$  (Fig. 184). Für alle Strahlen der Ebene  $z = 0$  ist:  $\mu = \gamma$ ,  $\beta < \nu < \alpha$ .

Die  $x$ -Achse hat die Koordinaten:  $\mu = \gamma$ ,  $\nu = \beta$ , die  $y$ -Achse:  $\mu = \gamma$ ,  $\nu = \alpha$ , die  $z$ -Achse:  $\mu = \beta$ ,  $\nu = \alpha$ .

Die Fokalstrahlen sind die einzigen mit zwei *gleichen* elliptischen Koordinaten  $\mu = \nu = \beta$ .

**3. Identische Gleichungen zwischen homogenen und elliptischen Koordinaten.** Bezeichnen wir mit  $T$  die linke Seite der Gleichung § 118, (1), so ist nach der Definition der elliptischen Koordinaten mit Rücksicht auf § 118, (7):

$$(1) \quad T = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = \frac{\lambda(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)},$$

wo  $\lambda$  die Bedeutung § 118, (8) hat.

Die Gleichung (1) besteht zwischen den homogenen  $x:y:z$  und den elliptischen Koordinaten  $\mu, \nu$  des laufenden Strahles im Bündel identisch in  $\tau$ .

Mit  $\tau = \mu, \nu$  folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 0, \\ \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 0, \end{cases}$$

wie § 118, (4), (5).

Weiter ergibt sich durch Subtraktion jeder der beiden Gleichungen (2) von (1):

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)} \\ \quad \quad \quad = \frac{T}{\tau - \mu} = \frac{\lambda(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)} \\ \quad \quad \quad = \frac{T}{\tau - \nu} = \frac{\lambda(\tau - \mu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Glied dieser Identitäten bezüglich mit  $\tau = \mu$  und  $\tau = \nu$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(\alpha - \mu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)^2} = \frac{\lambda(\mu - \nu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} = \frac{1}{m^2}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \nu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \nu)^2} = \frac{\lambda(\nu - \mu)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} = \frac{1}{n^2}, \end{cases}$$

wo  $1:m^2$  und  $1:n^2$  als Abkürzungen je für die beiden gleichen Ausdrücke dienen.

Durch Subtraktion folgt ferner aus den beiden Identitäten (3):

$$(5) \quad \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} = \frac{T}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)},$$

und aus (3) und (4):

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)^2} = \frac{T}{(\tau - \mu)^2} - \frac{1}{m^2(\tau - \mu)}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)^2} = \frac{T}{(\tau - \nu)^2} - \frac{1}{n^2(\tau - \nu)}. \end{array} \right.$$

#### 4. Einführung eines neuen Koordinatensystems im Bündel.

Die Richtungskosinus irgendeines bestimmten Strahles  $\xi = x, y, z$  in bezug auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem  $Oxyz (= OXYZ)$  im Bündel sind:

$$(7) \quad \alpha_1 = lx, \quad \beta_1 = ly, \quad \gamma_1 = lz,$$

wo:

$$(8) \quad \frac{1}{l^2} = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda.$$

Die Tangentialebenen der beiden durch  $\xi$  gehenden Kegel  $\mu$  und  $\nu$  (§ 118, (4), (5)) längs  $\xi$  sind nach § 71, (3) in laufenden Strahlenkoordinaten  $X, Y, Z$ :

$$(9) \quad \frac{xX}{\alpha - \mu} + \frac{yY}{\beta - \mu} + \frac{zZ}{\gamma - \mu} = 0, \quad \frac{xX}{\alpha - \nu} + \frac{yY}{\beta - \nu} + \frac{zZ}{\gamma - \nu} = 0.$$

Die im Anfangspunkt  $O$  auf ihnen errichteten Normalen  $\eta$  und  $\zeta$  haben daher die Richtungskosinus:

$$(10) \quad \begin{array}{l} \alpha_2 = \frac{mx}{\alpha - \mu}, \quad \beta_2 = \frac{my}{\beta - \mu}, \quad \gamma_2 = \frac{mz}{\gamma - \mu}; \\ \alpha_3 = \frac{nx}{\alpha - \nu}, \quad \beta_3 = \frac{ny}{\beta - \nu}, \quad \gamma_3 = \frac{nz}{\gamma - \nu}, \end{array}$$

wo  $1 : m^2$  und  $1 : n^2$  die Bedeutung (4) haben.

Die drei Strahlen  $\xi, \eta, \zeta$  bilden ein neues rechtwinkliges Achsen-system im Bündel, dessen  $\xi\zeta$ - und  $\xi\eta$ -Ebene die Tangentialebenen der beiden durch den gegebenen Strahl  $\xi = x, y, z$  gehenden Kegel  $\mu$  und  $\nu$  des konfokalen Systems sind.

Zwischen den alten  $X, Y, Z$  und neuen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des laufenden Strahles bestehen die Transformationsformeln (I § 37, (2)):

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = x \left( l\xi + \frac{m\eta}{\alpha - \mu} + \frac{n\zeta}{\alpha - \nu} \right), \\ Y = y \left( l\xi + \frac{m\eta}{\beta - \mu} + \frac{n\zeta}{\beta - \nu} \right), \\ Z = z \left( l\xi + \frac{m\eta}{\gamma - \mu} + \frac{n\zeta}{\gamma - \nu} \right). \end{array} \right.$$

5. Tangentialebenenpaar durch einen Bündelstrahl an einen Kegel des konfokalen Systems. Das durch den Strahl  $x, y, z$  an den Kegel:

$$(12) \quad R = \frac{X^2}{\alpha - \tau} + \frac{Y^2}{\beta - \tau} + \frac{Z^2}{\gamma - \tau} = 0$$



gelegte Tangentialebenenpaar hat nach § 71, (14) in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  die Gleichung:

$$(13) \quad TR - S^2 = 0,$$

wo die Abkürzungen  $T$  und  $R$  in (1) und (12) bereits eingeführt sind,  $S$  aber die Bedeutung hat:

$$(14) \quad S = \frac{xX}{\alpha - \tau} + \frac{yY}{\beta - \tau} + \frac{zZ}{\gamma - \tau}.$$

### 6. Darstellung von $R$ und $S$ in den neuen Koordinaten.

Durch die Substitution (11) wird:

$$\begin{aligned} R &= \left( \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} \right) l^2 \xi^2 \\ &+ \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)^2} \right) m^2 \eta^2 \\ &+ \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)^2} + \dots \right) n^2 \xi^2 + \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \dots \right) 2mn\eta\xi \\ &+ \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \dots \right) 2nl\xi\xi + \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \dots \right) 2lm\xi\eta \end{aligned}$$

oder nach (1), (6), (5) und (3):

$$\begin{aligned} R &= T \left( l^2 \xi^2 + \frac{m^2 \eta^2}{(\tau - \mu)^2} + \frac{n^2 \xi^2}{(\tau - \nu)^2} \right) - \left( \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\xi^2}{\tau - \nu} \right) \\ &+ 2T \left( \frac{mn\eta\xi}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)} + \frac{nl\xi\xi}{\tau - \nu} + \frac{lm\xi\eta}{\tau - \mu} \right), \\ (15) \quad R &= T \left( l\xi + \frac{m\eta}{\tau - \mu} + \frac{n\xi}{\tau - \nu} \right)^2 - \left( \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\xi^2}{\tau - \nu} \right). \end{aligned}$$

Ebenso wird:

$$S = \left( \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \dots \right) l\xi + \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \dots \right) m\eta + \left( \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \dots \right) n\xi$$

oder nach (1) und (3):

$$(16) \quad S = T \left( l\xi + \frac{m\eta}{\tau - \mu} + \frac{n\xi}{\tau - \nu} \right).$$

**7. Die Hauptebenengleichung des durch einen Bündelstrahl an einen Kegel gelegten Tangentialebenenpaares.** Mit den Werten (15) und (16) nimmt die Gleichung (13) die Form an:

$$(17) \quad \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\xi^2}{\tau - \nu} = 0.$$

*Dies ist die Gleichung des durch den Strahl  $\mu, \nu$  an den Kegel  $\tau$  des konfokalen Systems gelegten Tangentialebenenpaares in bezug auf das neue Koordinatensystem  $O\xi\eta\xi$ .*

Die Form der Gleichung zeigt, daß die Ebenen  $\eta = 0$  und  $\xi = 0$ , die Tangentialebenen der beiden durch den Strahl  $\mu, \nu$  gehenden

Kegel längs des Strahles, zugleich die Hauptebenen (Winkelhalbierungsebenen) des durch den Strahl an einen beliebigen Kegel  $\tau$  des konfokalen Systems gelegten Tangentialebenenpaares sind, oder (§ 33, 8):

I. Die Winkel zwischen den beiden durch einen Strahl  $\mu, \nu$  des Bündels an den Kegel  $\tau$  gelegten Tangentialebenen werden von den Tangentialebenen der Kegel  $\mu, \nu$  längs des Strahles halbiert.<sup>102)</sup>

8. Das Fokalebenenpaar eines Strahles. Das Ebenenpaar (17) ist reell, wenn:

$$(18) \quad \mu < \tau < \nu.$$

Es ist reell für alle Strahlen  $\mu, \nu$ , wenn  $\tau = \beta$  ist, wo nach § 118, 10<sup>1)</sup> der Kegel  $\tau$  in das Fokalstrahlenpaar zerfällt, also das Tangentialebenenpaar:

$$(19) \quad \frac{\eta^2}{\beta - \mu} - \frac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0$$

aus den Verbindungsebenen des Strahles  $\mu, \nu$  mit den beiden Fokalstrahlen, den Fokalebene des Strahles  $\mu, \nu$ , besteht (§ 33, (20)).

II. Die Winkel zwischen den beiden Fokalebene eines Strahles  $\mu, \nu$  werden von den Tangentialebenen der Kegel  $\mu, \nu$  längs des Strahles halbiert.

Dieses Resultat kann, unabhängig vom konfokalen System, als eine Eigenschaft des einzelnen elliptischen Kegels so ausgesprochen werden:<sup>64)</sup>

III. Die Tangentialebene und die Normalebene längs einer Erzeugenden eines elliptischen Kegels halbieren die Winkel der „Fokalebene“ der Erzeugenden, ihrer Verbindungsebenen mit den Brennstrahlen des Kegels (§ 13, 4).

9. Eigenschaft der Brennstrahlen. Da somit an einer Erzeugenden des Kegels die beiden Fokalebene und Tangential- und Normalebene vier harmonische Ebenen bilden (I § 5, 8, II), so ergibt sich im Durchschnitt mit der  $zx$ -Ebene (I § 52, (23)):

Tangentialebene und Normalebene des elliptischen Kegels schneiden die Hauptebene der größten Öffnung in zwei zu den Brennstrahlen harmonischen Geraden (§ 20, 6).<sup>81)</sup>

Tangential- und Normalebene eines elliptischen Kegels sind nach § 118, 13, II; 12 I zugleich zwei senkrechte harmonische Polarebenen in bezug auf alle konfokalen Kegel.

10. Ort der Achsen rechtwinkliger Tangentialebenenpaare. Die beiden Ebenen des Paares (17) sind rechtwinklig, also die Gleichung (17) wird:

$$(20) \quad \eta^2 - \xi^2 = 0,$$

wenn:

$$(21) \quad \tau - \mu + \tau - \nu = 0.$$

Betrachten wir nun  $\tau$ , also den Kegel:

$$(22) \quad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0$$

als gegeben, so stellt die Gleichung (21) den Ort aller Strahlen  $\mu, \nu$  dar, durch die zwei rechtwinklige Tangentialebenen an den Kegel (22) gehen.

- Durch Gleichsetzen der Koeffizienten von  $-\tau$  in der in  $\tau$  identischen Gleichung § 118, (7) ergibt sich aber zwischen den gemeinen und elliptischen Koordinaten eines Strahles die Beziehung:

$$(23) \quad (\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\mu + \nu)$$

oder mit Einführung des festen Wertes von  $\tau$  aus (22):

$$\begin{aligned} (\beta - \tau + \gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau + \alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau + \beta - \tau)z^2 \\ = (x^2 + y^2 + z^2)(\mu - \tau + \nu - \tau). \end{aligned}$$

Der Ort (21) hat daher in gemeinen Koordinaten die Gleichung:

$$(24) \quad (\beta - \tau + \gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau + \alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau + \beta - \tau)z^2 = 0.$$

*Der Ort der Strahlen des Bündels, von denen an den Kegel (22) zwei rechtwinklige Tangentialebenen gehen, ist der Kegel (24).<sup>66</sup>*

**11. Die Brennstrahlen als Achsen von Involutionen rechtwinkliger harmonischer Polarebenen.** Die Gleichung (17) erhält die Form:

$$(25) \quad \eta^2 + \xi^2 = 0,$$

wenn  $\mu = \nu$ , also nach 2 für die Brennstrahlen.

I. *Die Involution harmonischer Polarebenen an einer Fokallinie und nur an einer solchen ist eine Involution rechtwinkliger Ebenen.*

Da nun eine Involution rechtwinkliger Ebenen von einer zur Achse senkrechten Ebene in einer Involution rechtwinkliger Strahlen geschnitten wird, so folgt (I § 52, (23)) mit Rücksicht auf § 77, 1; § 17, 1; § 20, 4, I:

II. *Jeder zu einer Fokallinie senkrechte ebene Schnitt eines elliptischen Kegels hat auf dieser Fokallinie einen Brennpunkt.<sup>185</sup>*

## § 120. Das System konfokaler Ellipsoide und Hyperboloide.

**1. Begriff des konfokalen Systems.** Die eigentliche Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung § 55, (1):

$$(1') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1, \quad e^2 > d^2,$$

ist durch ihre Scheitelpunkte  $x = \pm a$  und Hauptbrennpunkte  $x = \pm d$  und  $x = \pm e$  (§ 55, (5); (4)) vollständig bestimmt.

*Konzentrische koachsiale Mittelpunktsflächen mit denselben Hauptbrennpunkten und verschiedenen Scheitelpunkten heißen nach § 55, 10 konfokal (und konfokal gelegen).*

Durch die Gleichung (1') wird daher bei festen  $d^2$  und  $e^2$  und veränderlichem  $a^2$  ein System konfokaler Mittelpunktsflächen dargestellt.

**2. Gleichung des konfokalen Systems.** Der Symmetrie wegen setzen wir mit  $\alpha > \beta > \gamma$ :

$$(2') \quad a^2 = \alpha - \tau, \quad d^2 = \alpha - \beta, \quad e^2 = \alpha - \gamma; \quad f^2 = e^2 - d^2 = \beta - \gamma.$$

Die Gleichung des konfokalen Systems<sup>99)</sup> lautet dann:

$$(1) \quad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 1, \quad \alpha > \beta > \gamma,$$

wo bei festen  $\alpha, \beta, \gamma$  der Parameter  $\tau$  sich von  $-\infty$  bis  $\infty$  bewegt:

$$(2) \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Die gemeinsamen inneren, äußeren und zweiten (§ 55, (4')) Hauptbrennpunkte sind:

$$(3) \quad B_0, B_0' = \pm \sqrt{\alpha - \beta}, 0, 0; \quad C_0, C_0' = \pm \sqrt{\alpha - \gamma}, 0, 0;$$

$$C_1, C_1' = 0, \pm \sqrt{\beta - \gamma}, 0,$$

und die gemeinsamen Fokalkegelschnitte, Fokalellipse und Fokalhyperbel (§ 55, (9)):

$$(4) \quad \frac{x^2}{\alpha - \gamma} + \frac{y^2}{\beta - \gamma} = 1, \quad z = 0; \quad (5) \quad \frac{x^2}{\alpha - \beta} - \frac{z^2}{\beta - \gamma} = 1, \quad y = 0.$$

Die Scheitelpunkte der einzelnen Fläche sind:

$$(6) \quad A_0, A_0' = \pm \sqrt{\alpha - \tau}, 0, 0.$$

**3. Unterscheidung der drei Arten von Flächen.** Je nachdem (§ 55, (3)):  $-\infty < \tau < \gamma$  oder  $\gamma < \tau < \beta$  oder  $\beta < \tau < \alpha$  oder  $\alpha < \tau < +\infty$  ist die Fläche (1) ein Ellipsoid oder ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid oder ein imaginäres Ellipsoid.

Um die drei reellen Arten auch in der Bezeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihren Parameter bezüglich  $\tau = \lambda$ ,  $\tau = \mu$  und  $\tau = \nu$ . Danach zerfällt das System (1) in die drei Reihen:

$$(7) \quad \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} = 1, \quad -\infty < \lambda < \gamma,$$

$$(8) \quad \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1, \quad \gamma < \mu < \beta,$$

$$(9) \quad \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} = 1, \quad \beta < \nu < \alpha,$$

von denen die erste alle Ellipsoide, die zweite alle ein- und die dritte alle zweischaligen Hyperboloide des Systems enthält.

#### 4. Veränderlichkeit und Grenzformen des konfokalen Systems.

Während  $\lambda$  von  $-\infty$  bis  $\gamma$  sich bewegt (über  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  in Fig. 185), zieht sich das Ellipsoid (7) aus einer unendlich großen Kugel gegen die Fokalellipse  $c$ , die es nach § 55, 7 beständig einschließt, zusammen,

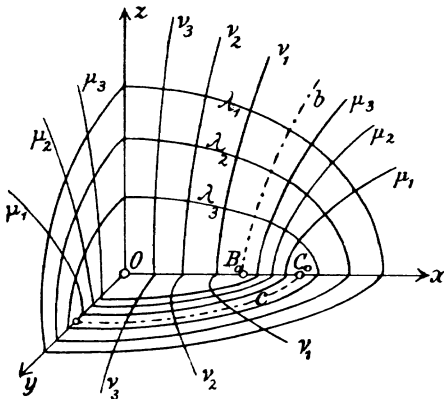


Fig. 185.

bis es für  $\lambda = \gamma$  in den innerhalb der Fokalellipse gelegenen Teil der Ebene  $z = 0$  hineinklappt. Der außerhalb der Fokalellipse gelegene Teil stellt das einschalige Hyperboloid  $\mu = \gamma$  dar. Dieses zieht sich bei zunehmendem  $\mu$  (über  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  in Fig. 185) gegen die Fokalhyperbel  $b$ , die es nach § 55, 7 immer einschließt, zusammen, bis es für  $\mu = \beta$  in den auf der konvexen Seite der Fokalhyperbel

gelegenen Teil der Ebene  $y = 0$  hineinfällt. Der auf der konkaven Seite der Fokalhyperbel gelegene stellt die beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloides  $\nu = \beta$  dar. Diese nähern sich bei wachsendem  $\nu$  (über  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  in Fig. 185) von beiden Seiten her der  $yz$ -Ebene, in der sie für  $\nu = \alpha$  zusammenfallen.

#### 5. Die durch einen Punkt des Raumes bestimmten Flächen.

Um diejenigen Flächen des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Punkt  $x, y, z$  des Raumes gehen, hat man die in  $\tau$  kubische Gleichung (1) oder:

$$(10) \quad f(\tau) = (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 - (\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau) = 0$$

nach  $\tau$  aufzulösen.

Da nun:

$$(11) \quad f(-\infty) = -\infty, \quad f(\gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)z^2 > 0, \\ f(\beta) = -(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)y^2 < 0, \quad f(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)x^2 > 0,$$

so hat die Gleichung (10) stets drei reelle Wurzeln, die zwischen den Grenzen  $-\infty$  und  $\gamma$ ,  $\gamma$  und  $\beta$ ,  $\beta$  und  $\alpha$  liegen und daher nach den Festsetzungen zu (7)–(9) bezüglich mit  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  zu bezeichnen sind.

I. *Durch jeden Punkt des Raumes gehen stets drei Flächen des konfokalen Systems, je ein Ellipsoid, ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid.*

**6. Die durch drei ungleichnamige Flächen bestimmten Punkte.** Zwischen den Koordinaten  $x, y, z$  eines Punktes und den Parametern  $\lambda, \mu, \nu$  der durch ihn gehenden Flächen besteht nach 5 die in  $\tau$  identische Gleichung:

$$(12) \quad (\beta - \tau)(\gamma - \tau)x^2 + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)y^2 + (\alpha - \tau)(\beta - \tau)z^2 \\ - (\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau) = (\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu).$$

Aus ihr folgt mit  $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ :

$$(13) \quad x^2 = \frac{(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, \quad y^2 = \frac{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}, \\ z^2 = \frac{(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Wenn daher  $\lambda, \mu, \nu$  den Ungleichungen bei (7)—(9) entsprechend gegeben werden, so ergeben sich aus (13) stets acht, nur in den Vorzeichen verschiedene, *reelle* Wertsysteme  $x, y, z$  (§ 32, 6).

II. *Irgend drei ungleichnamige Flächen des konfokalen Systems schneiden sich stets in acht symmetrisch gegen die Koordinatenebenen gelegenen Punkten.*

Da nach I durch einen Punkt stets drei und nur drei ungleichnamige Flächen gehen, so folgt:

III. *Zwei gleichnamige Flächen des konfokalen Systems haben keinen (reellen) Punkt gemein.*

**7. Orthogonaler Durchschnitt ungleichnamiger Flächen.** Ein gemeinsamer Punkt  $x, y, z$  der beiden Flächen  $\mu$  und  $\nu$  genügt den beiden Gleichungen (8) und (9), also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

$$(14) \quad (\mu - \nu) \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} \right\} = 0.$$

Diese bedeutet aber nach § 70, (3), daß die Tangentialebenen der beiden Flächen im Punkte  $x, y, z$  zueinander senkrecht sind oder kurz, da Gleiches mit  $\nu, \lambda$  und  $\lambda, \mu$  für  $\mu, \nu$  gilt (§ 32, 7):

IV. *Zwei ungleichnamige Flächen des konfokalen Systems schneiden sich längs ihrer Durchschnittslinie überall senkrecht.*

V. *Drei ungleichnamige Flächen schneiden sich in jedem ihrer acht Schnittpunkte (13) untereinander senkrecht; oder auch:*

Die Schnittkurve zweier ungleichnamiger Flächen wird von einer dritten ungleichnamigen Fläche senkrecht geschnitten.

Die Schnittkurve der ungleichnamigen Flächen  $\lambda = \gamma$  und  $\mu = \gamma$  ist nach 4 die Fokalellipse, der Flächen  $\mu = \beta$  und  $\nu = \beta$  die Fokalhyperbel. Hier folgt also:

VI. Die Fokalellipse wird von allen zweischaligen Hyperboloiden, die Fokalhyperbel von allen Ellipsoiden senkrecht geschnitten.

Die Schnittpunkte sind nach § 58, 7; § 60, 7 die Kreispunkte der Flächen.

8. Das konfokale System als Flächenschar. Sind:

$$(15) \quad F(u, v, w) = 0, \quad G(u, v, w) = 0$$

die Gleichungen zweier Flächen zweiter Klasse (§ 75, (1) mit  $s = 1$ ), so heißt die Gesamtheit aller durch die Gleichung:

$$(16) \quad F(u, v, w) - \tau G(u, v, w) = 0$$

mit dem Parameter  $\tau$  dargestellten Flächen eine Schar von Flächen zweiter Klasse. Die Flächen (15) werden als Grundflächen der Schar bezeichnet.

Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (10) in Ebenenkoordinaten:

$$(17) \quad (\alpha - \tau)u^2 + (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 = 1$$

oder:

$$(18) \quad (\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - 1) - \tau(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

I. Das System der konfokalen Flächen ist daher eine Flächenschar, von deren beiden Grundflächen<sup>100</sup>:

$$(19) \quad \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - 1 = 0, \quad (20) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

die eine der imaginäre Kugelkreis (§ 84, (9')) ist.

Jede gemeinsame Tangentialebene der beiden Grundflächen (19) und (20) ist nach (18) auch Tangentialebene aller Flächen der Schar. Solche Ebenen sind sämtlich imaginär.

Für jede andere Ebene gibt die Gleichung (18) einen bestimmten Wert von  $\tau$ , also:

II. Jede Ebene, die nicht gemeinsame Tangentialebene der beiden Grundflächen ist, wird von einer bestimmten Fläche der Schar berührt.

9. Kegelschnitte der Schar. Unter den Flächen der Schar (17) befinden sich außer dem Kugelkreis (20), der dem Werte  $\tau = \infty$  entspricht, drei weitere Kegelschnitte, entsprechend den Werten  $\tau = \alpha, \beta, \gamma$  (§ 53, (35)):

$$(21) \quad \begin{aligned} (\beta - \alpha)v^2 + (\gamma - \alpha)w^2 &= 1, & (\alpha - \beta)u^2 + (\gamma - \beta)w^2 &= 1, \\ (\alpha - \gamma)u^2 + (\beta - \gamma)v^2 &= 1. \end{aligned}$$

Die beiden letzteren von diesen sind die *Fokalhyperbel* und *Fokalellipse*, während die erste als *imaginäre Fokalellipse* bezeichnet sei.<sup>144)</sup>

*Die drei Fokalkegelschnitte sind hiernach die neben dem imaginären Kugelkreis in der Schar enthaltenen uneigentlichen Flächen zweiter Klasse.*

Bei der Darstellung des Systems in *Ebenenkoordinaten* treten also die *Fokalkurven selbst* als Grenzformen auf (§ 79, 5), während bei der Darstellung in *Punktkoordinaten* die von ihnen aus- und eingeschlossenen Stücke der *Hauptebenen*, bezüglich diese selbst als Grenzformen sich ergeben (§ 32, 11).

**10. Die Schnittkurvenenveloppe der Schar.** Diejenige *Raumkurve vierter Ordnung*, in der eine Fläche  $\tau$  der einfach unendlichen Flächenschar:

$$(22) \quad f(x, y, z, \tau) = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 = 0$$

von ihrer benachbarten  $\tau + d\tau$  im Momente des Zusammenfalls geschnitten wird, heißt die „*ausgezeichnete Kurve*“ der Fläche  $\tau$ . Sie ist durch die Gleichung (22) in Verbindung mit der Gleichung:

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{x^2}{(\alpha - \tau)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)^2} = 0$$

dargestellt.

Der Ort aller *ausgezeichneten Kurven* ist die „*Schnittkurvenenveloppe*“ der Schar. In jedem Punkte  $x, y, z$  der ausgezeichneten Kurve der Fläche  $\tau$  hat die Enveloppe jedesmal dieselbe Tangentialebene wie die Fläche  $\tau$  selbst, so daß die Koordinaten dieser Tangentialebene werden:

$$(24) \quad u = -\frac{x}{\alpha - \tau}, \quad v = -\frac{y}{\beta - \tau}, \quad w = -\frac{z}{\gamma - \tau}.$$

Man erhält daher die Bedingungen für die Tangentialebenen der Enveloppe längs der *ausgezeichneten Kurve* der Fläche  $\tau$ , indem man aus den fünf Gleichungen (22), (23), (24) die Koordinaten  $x, y, z$  des Berührungspunktes eliminiert. Nun folgt aus (24):

$$(25) \quad x = -(\alpha - \tau)u, \quad y = -(\beta - \tau)v, \quad z = -(\gamma - \tau)w$$

und damit aus (22) und (23):

$$(26) \quad (\alpha - \tau)u^2 + (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 - 1 = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Da diese beiden Bedingungen aber, *von  $\tau$  unabhängig werdend*, auf (19), (20) zurückkommen, so folgt (§ 32, 10):

*Die Schnittkurvenenveloppe der Flächenschar (17) wird von den gemeinsamen Tangentialebenen aller Flächen der Schar umhüllt.*

Als Umhüllungsgebilde von einfach unendlich vielen Ebenen ist sie aber eine *abwickelbare Linienfläche*.<sup>100)</sup>



Sie ist in *Ebenenkoordinaten* unmittelbar durch die beiden Gleichungen (19), (20) dargestellt. Um ihre Gleichung in *Punktkoordinaten* zu erhalten, ordnet man die in  $x, y, z, t$  homogen gemachte Gleichung (10) nach Potenzen von  $\tau$ :

$$(27) \quad f(\tau) = P\tau^3 + Q\tau^2 + R\tau + S = 0,$$

wo:

$$P = t^2,$$

$$Q = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha + \beta + \gamma)t^2,$$

$$R = -\{(\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2\} + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)t^2,$$

$$S = \beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2 - \alpha\beta\gamma t^2,$$

und bildet durch Elimination von  $\tau$  aus (27) und:

$$(28) \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = 3P\tau + 2Q + R = 0$$

die Gleichung (§ 32, (22)):

$$(29) \quad (9PS - QR)^2 - 4(3PR - Q^2)(3QS - R^2) = 0.$$

Sie ist, da  $P, Q, R, S$  vom zweiten Grade in  $x, y, z, t$  sind, ihrerseits vom achten Grade.

*Die Schnittkurvenenveloppe (29) der Schar (17) ist eine Fläche achter Ordnung.*

Sie ist, da die linke Seite von (29) die Diskriminante der kubischen Gleichung (10) darstellt, zugleich der Ort der Punkte, für welche zwei Wurzeln dieser Gleichung gleich sind. Die einzigen reellen Punkte dieser Art sind diejenigen der Fokalellipse  $\lambda = \mu = \gamma$  und der Fokalhyperbel  $\mu = \nu = \beta$  (§ 32, 10).<sup>144</sup>

**11. Der Ort der Pole einer Ebene.** Der Pol einer gegebenen Ebene:

$$(30) \quad ux + vy + wz + 1 = 0$$

in bezug auf die Fläche (17) hat nach § 82, (5') die Koordinaten:

$$(31) \quad x = -(\alpha - \tau)u, \quad y = -(\beta - \tau)v, \quad z = -(\gamma - \tau)w.$$

Diese Gleichungen stellen aber bei veränderlichem  $\tau$  eine gerade Linie dar, deren Richtungskosinus sich wie  $u:v:w$  verhalten (I § 43, (1)), die also auf (30) senkrecht steht. Auf ihr liegen die Pole der Ebene (30) in bezug auf die verschiedenen Flächen  $\tau$ , also auch der Berührungspunkt der Ebene (30) mit der sie berührenden Fläche  $\tau_0$  der Schar (8, II).

I. *Der Ort der Pole einer Ebene in bezug auf die Flächen der Schar (17) ist eine gerade Linie, die Normale der Ebene in ihrem Berührungspunkt mit der von ihr berührten Fläche der Schar (§ 32, 12).*<sup>101</sup>

Ausgenommen sind die drei Hauptebenen und die unendlich ferne Ebene, die in bezug auf *alle* Flächen der Schar *denselben* Pol haben.

**12. Der Achsenkomplex des konfokalen Systems.** Der Achsenkomplex der Fläche (1) wird nach § 85, (8) mit Rücksicht auf § 85, (7) unabhängig von  $\tau$ :

$$(32) \quad \alpha p_{23} p_{14} + \beta p_{31} p_{24} + \gamma p_{12} p_{34} = 0.$$

II. *Alle Flächen des konfokalen Systems haben denselben Achsenkomplex.*

Da die rechten Seiten der Gleichungen § 85, (5); (15); (16) nur die Differenzen der Halbachsenquadrate  $\alpha, \beta, \gamma$  enthalten, so werden sie für die Gleichung (1) unabhängig von  $\tau$ . Es folgt also:

III. *Eine Ebene hat in bezug auf alle Flächen des konfokalen Systems denselben konjugierten Normalstrahl* (§ 32, 13, II).

Er ist nach dem Begriff der Achse in § 85, 1 gerade der Ort der Pole der Ebene aus 11, I. Umgekehrt:

IV. *Eine dem Komplex (32) angehörige Achse hat in bezug auf alle Flächen des konfokalen Systems dieselbe konjugierte Normalebene, also auch denselben Fußpunkt* (§ 85, 5).

**13. Die Normalen des konfokalen Systems.** Dagegen ist der konjugierte Pol, den eine Fläche  $\tau$  des Systems der Achse  $p_{k1}$  zuordnet, nach § 85, (13):

$$(33) \quad x = -\frac{(\alpha - \tau) p_{23} p_{14}}{(\beta - \gamma) p_{24} p_{34}}, \quad y = -\frac{(\beta - \tau) p_{31} p_{24}}{(\gamma - \alpha) p_{34} p_{14}}, \quad z = -\frac{(\gamma - \tau) p_{12} p_{34}}{(\alpha - \beta) p_{14} p_{24}},$$

also von  $\tau$  abhängig. Die Bedingung, daß er in der konjugierten Normalebene § 85, (15) der Achse liegt (I § 45, (10)), wird in  $\tau$  linear. Es gibt also zu jeder Achse eine Fläche  $\tau$ , welche der Achse einen in ihrer konjugierten Normalebene liegenden konjugierten Pol zuordnet, so daß die Achse nach § 85, 7 Normale der Fläche in diesem Pole wird. Jede Achse ist also Normale einer Fläche  $\tau$  und jede Normale nach § 85, 7 eine Achse.

V. *Der Achsenkomplex einer jeden Fläche des konfokalen Systems besteht aus den Normalen sämtlicher Flächen des Systems.*

**14. Ebenes Polarsystem in den Hauptebenen.** Eine Ebene  $u, v, w$  schneidet die Koordinatenebene  $x=0$  in der Geraden  $v, w$  (I § 45, 1); der zur Ebene konjugierte Normalstrahl § 85, (5) schneidet die Ebene  $x=0$  in dem Punkte (I § 48, (9')):

$$(34) \quad y = \frac{p_{12}}{p_{14}} = (\alpha - \beta)v, \quad z = -\frac{p_{31}}{p_{14}} = (\alpha - \gamma)w.$$

Dieses ist aber nach § 20, (5') der Pol der Geraden  $v, w$  in bezug auf den ersten Kegelschnitt (21):

*Eine Ebene und ihr konjugierter Normalstrahl, insbesondere Tangentialebene und zugehörige Normale bei irgendeiner Fläche (1), schneiden eine jede der drei Hauptebenen in Polare und Pol des in ihr liegenden Fokalkegelschnittes (21) (§ 20, 6).<sup>81</sup>*

**15. Senkrechte harmonische Polarebenen.** Zwei zueinander senkrechte harmonische Polarebenen in bezug auf die Fläche (1) sind nach § 82, (7') durch die Bedingungen verbunden:

$$(35) \quad (\alpha - \tau)uu' + (\beta - \tau)vv' + (\gamma - \tau)ww' = 1,$$

$$(36) \quad uu' + vv' + ww' = 0,$$

von denen die erste infolge der zweiten von  $\tau$  unabhängig wird. Bei gegebener Ebene  $\Pi = u, v, w$  bilden die den Gleichungen (35), (36) entsprechenden Ebenen  $\Pi' = u', v', w'$  ein Büschel, dessen Achse (I § 48, (1'); (3')) die Koordinaten § 85, (5) hat.

*Eine beliebige Ebene  $\Pi$  hat in bezug auf alle Flächen des konfokalen Systems dieselben senkrechten harmonischen Polarebenen, die ein Büschel an dem konjugierten Normalstrahl der Ebene  $\Pi$  bilden (§ 32, 13, II).*

**16. Die Linienkoordinatengleichung des konfokalen Systems.** Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (23) in Linienkoordinaten:

$$(37) \quad \varphi(\tau) = (\alpha - \tau)p_{23}^2 + (\beta - \tau)p_{31}^2 + (\gamma - \tau)p_{12}^2 - (\beta - \tau)(\gamma - \tau)p_{14}^2 \\ - (\gamma - \tau)(\alpha - \tau)p_{24}^2 - (\alpha - \tau)(\beta - \tau)p_{34}^2 = 0.$$

Da die Gleichung in  $\tau$  quadratisch ist, so folgt:

*Eine gegebene Gerade wird von zwei Flächen des konfokalen Systems berührt (über ihre Realität s. § 122, 3).*

Ihre Art hängt davon ab, ob die Gerade  $p$  die  $xy$ -Ebene innerhalb oder außerhalb der Fokalellipse und die  $zx$ -Ebene innerhalb (auf der konkaven Seite) oder außerhalb der Fokalhyperbel schneidet. Es ist nämlich:

$$\varphi(\alpha) = -(\alpha - \beta)p_{31}^2 - (\alpha - \gamma)p_{12}^2 - (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)p_{14}^2 < 0,$$

$$\varphi(\beta) = (\alpha - \beta)p_{23}^2 - (\beta - \gamma)p_{12}^2 + (\beta - \gamma)(\alpha - \beta)p_{24}^2 \leq 0,$$

$$\varphi(\gamma) = (\alpha - \gamma)p_{23}^2 + (\beta - \gamma)p_{31}^2 - (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)p_{34}^2 \leq 0,$$

$$\varphi(-\infty) = -\infty < 0.$$

Nun sind aber (I § 48, (9'))  $p_{31}, -p_{23}, p_{34}$  die homogenen Koordinaten  $x, y, t$  des Schnittpunktes  $P'$  der Geraden  $p$  mit der  $xy$ -Ebene,

—  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{24}$  diejenigen  $x$ ,  $z$ ,  $t$  des Schnittpunktes  $P''$  mit der  $zx$ -Ebene. Mit Rücksicht auf (4) und (5) liegt daher  $P'$  innerhalb oder außerhalb der Fokalellipse, je nachdem  $\varphi(\gamma) < 0$  oder  $> 0$ , und  $P''$  innerhalb (auf der konkaven Seite) oder außerhalb der Fokalhyperbel, je nachdem  $\varphi(\beta) < 0$  oder  $> 0$ .

Liegt daher  $P'$  außerhalb der Fokalellipse und  $P''$  außerhalb der Fokalhyperbel, so daß  $\varphi(\gamma) > 0$  und  $\varphi(\beta) > 0$ , so hat die quadratische Gleichung (37) eine Wurzel  $\tau = \lambda$  und eine Wurzel  $\tau = \nu$ ; die Gerade wird von einem Ellipsoid und einem zweischaligen Hyperboloid berührt.

Liegt  $P'$  außerhalb und  $P''$  innerhalb, so daß  $\varphi(\gamma) > 0$ ,  $\varphi(\beta) < 0$ , so ergeben sich zwei Wurzeln  $\tau = \lambda$  und  $\tau = \mu$ , liegt  $P'$  innerhalb und  $P''$  außerhalb, zwei Wurzeln  $\tau = \mu$  und  $\tau = \nu$ .

Liegen dagegen  $P'$  und  $P''$  beide innerhalb, so daß  $\varphi(\alpha)$ ,  $\varphi(\beta)$ ,  $\varphi(\gamma)$ ,  $\varphi(-\infty)$  alle  $< 0$  sind, so müssen die beiden reellen Wurzeln zwischen  $\gamma$  und  $\beta$  liegen, also die Gerade von zwei einschaligen Hyperboloiden berührt werden, da zwei konfokale Ellipsoide oder zwei zweischalige Hyperboloide keine gemeinsame Tangente haben können.

## § 121. Das Hauptachsenproblem des Berührungskegels.

**1. Begriff der elliptischen Koordinaten.** Die Parameter  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  der drei nach § 120, 5 durch einen Punkt  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gehenden Flächen heißen die *elliptischen Koordinaten des Punktes*.<sup>103)</sup>

Sie sind bei gegebenen Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  des Punktes durch die kubische Gleichung § 120, (10) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 120, (13) den Punkt  $x$ ,  $y$ ,  $z$  achtdeutig.

**2. Elliptische Koordinaten besonderer Punkte.** Für die Punkte einer *Hauptebene* hat im allgemeinen eine elliptische Koordinate einen der Grenzwerte  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ : in der Ebene  $z = 0$  ist innerhalb der Fokalellipse  $\lambda = \gamma$ , außerhalb  $\mu = \gamma$ ; in der  $zx$ -Ebene auf der konvexen Seite der Fokalhyperbel  $\mu = \beta$ , auf der konkaven  $\nu = \beta$ ; in der  $yz$ -Ebene überall  $\nu = \alpha$  (Fig. 185).

Für die Punkte eines *Fokalkegelschnittes* und nur für diese sind zwei elliptische Koordinaten gleich, für die Ellipse  $\lambda = \gamma$ ,  $\mu = \gamma$ , für die Hyperbel  $\mu = \beta$ ,  $\nu = \beta$ .

Für die Punkte einer *Hauptachse* haben im allgemeinen zwei elliptische Koordinaten einen der Grenzwerte  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ : auf der  $x$ -Achse innerhalb  $B_0 B_0'$ :  $\lambda = \gamma$ ,  $\mu = \beta$ , zwischen  $B_0$  und  $C_0$ ,  $B_0'$  und  $C_0'$ :  $\lambda = \gamma$ ,  $\nu = \beta$ , außerhalb  $\mu = \gamma$ ,  $\nu = \beta$ ; auf der  $y$ -Achse innerhalb der Scheitel-

punkte  $C_1 C_1'$  der kleinen Achse der Fokalellipse:  $\lambda = \gamma$ ,  $\nu = \alpha$ , außerhalb  $\mu = \gamma$ ,  $\nu = \alpha$ ; auf der  $z$ -Achse  $\mu = \beta$ ,  $\nu = \alpha$ .

Die elliptischen Koordinaten des *Mittelpunktes* und der *Hauptbrennpunkte* sind:

$$O: \lambda = \gamma, \mu = \beta, \nu = \alpha; \quad B_0, B_0': \lambda = \gamma, \mu = \beta, \nu = \beta; \\ C_0, C_0': \lambda = \gamma, \mu = \gamma, \nu = \beta; \quad C_1, C_1': \lambda = \gamma, \mu = \gamma, \nu = \alpha.$$

**3. Identische Gleichungen zwischen gemeinen und elliptischen Koordinaten.** Bezeichnen wir mit  $T$  die linke Seite der Gleichung § 120, (1), so ist nach der Definition der elliptischen Koordinaten mit Rücksicht auf § 120, (12):

$$(1) \quad T = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den gemeinen  $x, y, z$  und den elliptischen Koordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  des laufenden Punktes identisch in  $\tau$ .

Mit  $\tau = \lambda, \mu, \nu$  folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} - 1 = 0, \\ \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} - 1 = 0, \\ \frac{x^2}{\alpha - \nu} + \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} - 1 = 0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) folgt nach Division mit den nicht identisch verschwindenden Faktoren  $\tau - \lambda$ ,  $\tau - \mu$ ,  $\tau - \nu$ .

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)} = \frac{T}{\tau - \lambda} = \frac{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)} = \frac{T}{\tau - \mu} = \frac{(\tau - \nu)(\tau - \lambda)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)} = \frac{T}{\tau - \nu} = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}; \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Gliede dieser Identitäten bezüglich mit  $\tau = \lambda, \mu, \nu$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(\alpha - \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)^2} = \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)} = \frac{1}{l^2}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \mu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)^2} = \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} = \frac{1}{m^2}, \\ \frac{x^2}{(\alpha - \nu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \nu)^2} = \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} = \frac{1}{n^2}, \end{cases}$$

wo  $1:l^2$ ,  $1:m^2$ ,  $1:n^2$  als Abkürzungen je für die beiden gleichen

Ausdrücke dienen; ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (3) mit  $\tau = \nu$  oder der dritten mit  $\tau = \mu$ :

$$(5) \quad \frac{x^2}{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} = 0, \dots,$$

Die Punkte deuten zwei weitere Formeln an, die durch zyklische Vertauschung von  $\lambda, \mu, \nu$  entstehen.

Durch Subtraktion je zweier Formeln (3) folgt:

$$(6) \quad \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} \\ = \frac{T}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}, \dots,$$

und aus der ersten dieser drei mit  $\tau = \lambda$ :

$$(7) \quad \frac{x^2}{(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} = 0.$$

Durch Subtraktion je entsprechender Gleichungen (3) und (4) ergibt sich:

$$(8) \quad \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)^2} = \frac{T}{(\tau - \lambda)^2} - \frac{1}{(\tau - \lambda)l^2}, \dots$$

(zyklische Vertauschung von  $\lambda, \mu, \nu$  und  $l, m, n$ ). Endlich gibt die Subtraktion der Gleichung (5) von der zweiten und dritten (4) die beiden folgenden und ihre zyklischen Vertauschungen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(\alpha - \mu)^2(\alpha - \nu)} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)^2(\gamma - \nu)} = \frac{1}{(\mu - \nu)m^2}, \dots \\ \frac{x^2}{(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)^2} = \frac{1}{(\nu - \mu)n^2}, \dots \end{array} \right.$$

**4. Das Achsensystem der drei Flächennormalen.** Die Tangentialebenen der drei durch einen bestimmten Punkt  $P = x, y, z$  des Raumes gehenden Flächen  $\lambda, \mu, \nu$  § 120, (7)—(9) sind nach § 70, (3) in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem  $Oxyz = OXYZ$ :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{xX}{\alpha - \lambda} + \frac{yY}{\beta - \lambda} + \frac{zZ}{\gamma - \lambda} - 1 = 0, \\ \frac{xX}{\alpha - \mu} + \frac{yY}{\beta - \mu} + \frac{zZ}{\gamma - \mu} - 1 = 0, \\ \frac{xX}{\alpha - \nu} + \frac{yY}{\beta - \nu} + \frac{zZ}{\gamma - \nu} - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Die Normalen  $\xi, \eta, \zeta$  dieser drei Ebenen im Punkte  $P$  haben die Richtungskosinus:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{lx}{\alpha - \lambda}, & \beta_1 = \frac{ly}{\beta - \lambda}, & \gamma_1 = \frac{lz}{\gamma - \lambda}, \\ \alpha_2 = \frac{mx}{\alpha - \mu}, & \beta_2 = \frac{my}{\beta - \mu}, & \gamma_2 = \frac{mz}{\gamma - \mu}, \\ \alpha_3 = \frac{nx}{\alpha - \nu}, & \beta_3 = \frac{ny}{\beta - \nu}, & \gamma_3 = \frac{nz}{\gamma - \nu}, \end{cases}$$

wo  $l^2, m^2, n^2$  die unter (4) eingeführten Werte haben und die positiven Wurzeln  $l, m, n$  die Längen der von  $O$  auf die Ebenen (10) gefällten Perpendikel bedeuten (I § 41, (13)).

Das neue Achsensystem  $P\xi\eta\zeta$  ist nach § 120, 7 ebenso wie das alte  $OXYZ$  *rechtwinklig*. Zwischen den alten  $X, Y, Z$  und neuen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des *laufenden* Punktes bestehen die Relationen (I § 37, (13)):

$$(12) \quad \begin{cases} X - x = x \left( \frac{l\xi}{\alpha - \lambda} + \frac{m\eta}{\alpha - \mu} + \frac{n\zeta}{\alpha - \nu} \right), \\ Y - y = y \left( \frac{l\xi}{\beta - \lambda} + \frac{m\eta}{\beta - \mu} + \frac{n\zeta}{\beta - \nu} \right), \\ Z - z = z \left( \frac{l\xi}{\gamma - \lambda} + \frac{m\eta}{\gamma - \mu} + \frac{n\zeta}{\gamma - \nu} \right). \end{cases}$$

### 5. Berührungskegel einer Fläche des konfokalen Systems.

Der von einem Punkte  $P = x, y, z$  an die Fläche:

$$(13) \quad \frac{X^2}{\alpha - \tau} + \frac{Y^2}{\beta - \tau} + \frac{Z^2}{\gamma - \tau} = 1$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 70, (11) in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  die Gleichung:

$$(14) \quad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15) \quad \begin{cases} R = \frac{(X-x)^2}{\alpha - \tau} + \frac{(Y-y)^2}{\beta - \tau} + \frac{(Z-z)^2}{\gamma - \tau}, \\ S = \frac{x(X-x)}{\alpha - \tau} + \frac{y(Y-y)}{\beta - \tau} + \frac{z(Z-z)}{\gamma - \tau}, \\ T = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} - 1 \quad (\text{wie in (1)}). \end{cases}$$

6. Darstellung von  $R$  und  $S$  in den neuen Koordinaten. Durch die Substitution (12) wird:

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)^2} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)^2} \right\} l^2 \xi^2 \\ &+ \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)^2} + \dots \right\} m^2 \eta^2 + \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)^2} + \dots \right\} n^2 \zeta^2 \\ &+ 2 \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)} + \dots \right\} mn\eta\zeta + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)(\alpha - \lambda)} + \dots \right\} nl\xi\zeta \\ &+ 2 \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)} + \dots \right\} lm\xi\eta \end{aligned}$$

oder nach (8) und (6):

$$R = \left\{ \frac{T}{(\tau - \lambda)^2} - \frac{1}{(\tau - \lambda)l^2} \right\} l^2 \xi^2 + \dots + \dots + 2 \frac{T}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)} mn\eta\xi + \dots + \dots$$

oder:

$$(16) \quad R = T \left\{ \frac{l\xi}{\tau - \lambda} + \frac{m\eta}{\tau - \mu} + \frac{n\xi}{\tau - \nu} \right\}^2 - \left\{ \frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} \right\}.$$

Ebenso wird:

$$S = \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)} + \dots \right\} l\xi + \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \dots \right\} m\eta + \left\{ \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \nu)} + \dots \right\} n\xi$$

und nach (3):

$$(17) \quad S = T \left\{ \frac{l\xi}{\tau - \lambda} + \frac{m\eta}{\tau - \mu} + \frac{n\xi}{\tau - \nu} \right\}.$$

**7. Die Hauptachsengleichung des Berührungskegels.** Mit den Werten (16) und (17) nimmt die Gleichung (14) die Form an:

$$(18) \quad \frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0.$$

*Dies ist die Gleichung des vom Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  an die Fläche  $\tau$  des konfokalen Systems gelegten Berührungskegels in bezug auf das neue Koordinatensystem  $P\xi\eta\xi$ .*

Die Form der Gleichung zeigt:

*Der von einem Punkte  $P$  des Raumes an eine Fläche  $\tau$  des konfokalen Systems gelegte Berührungskegel hat als Hauptachsen die Normalen  $\xi, \eta, \zeta$  der drei durch den Punkt  $P$  gehenden Flächen  $\lambda, \mu, \nu$  des Systems (§ 33, 8).<sup>102)</sup>*

Da die Fläche  $\tau$  in (13) als beliebige Mittelpunktsfläche gelten kann, durch die das konfokale System bestimmt wird, so ist damit das Hauptachsenproblem des Berührungskegels einer Mittelpunktsfläche allgemein gelöst.

**8. Die Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids.** Die Tangentialebene des einschaligen Hyperboloids:

$$(19) \quad \frac{X^2}{\alpha - \mu} + \frac{Y^2}{\beta - \mu} + \frac{Z^2}{\gamma - \mu} = 1,$$

das durch den Punkt  $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$  hindurchgeht, hat statt der zweiten (10) auch die Gleichung:

$$(20) \quad \frac{x(X-x)}{\alpha - \mu} + \frac{y(Y-y)}{\beta - \mu} + \frac{z(Z-z)}{\gamma - \mu} = 0,$$

wobei:

$$(21) \quad \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} = 1.$$



Der laufende Punkt  $X, Y, Z$  der beiden Erzeugenden des Hyperboloids  $\mu$ , die durch  $P = x, y, z$  hindurchgehen, genügt beiden Gleichungen (19) und (20) (§ 67, (28)). Infolge von (10) und (21) kann aber die Gleichung (19) auch in der Form:

$$(22) \quad \frac{(X-x)^2}{\alpha-\mu} + \frac{(Y-y)^2}{\beta-\mu} + \frac{(Z-z)^2}{\gamma-\mu} = 0$$

geschrieben werden, so daß die Erzeugenden durch (20) und (22) dargestellt sind.

**9. Die Hauptachsengleichung der Erzeugenden.** Durch die Transformation (12) wird nun aus (20) mit Rücksicht auf (5) und (4):

$$(23) \quad \eta = 0;$$

ferner aus (22):

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\lambda)^2} + \dots \right\} l^2 \xi^2 + \left\{ \frac{x^2}{(\alpha-\mu)^3} + \dots \right\} m^2 \eta^2 \\ & + \left\{ \frac{x^2}{(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)^2} + \dots \right\} n^2 \zeta^2 + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\alpha-\mu)^2(\alpha-\nu)} + \dots \right\} mn \eta \zeta \\ & + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)} + \dots \right\} nl \zeta \xi + 2 \left\{ \frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)^2} + \dots \right\} lm \xi \eta = 0 \end{aligned}$$

und nach (9) und (7), indem überdies  $\eta = 0$  gesetzt wird<sup>102)</sup>:

$$(24) \quad \frac{\xi^2}{\mu-\lambda} + \frac{\zeta^2}{\mu-\nu} = 0.$$

I. Dies ist die Gleichung der Erzeugenden des Hyperboloids  $\mu$  im Punkte  $\lambda, \mu, \nu$  in bezug auf die Normalen  $\xi$  und  $\zeta$  der beiden Flächen  $\lambda$  und  $\nu$ .

II. Diese Normalen sind also die Hauptachsen (Halbierungslinien) der Erzeugenden.

III. Ebenso sind die Normalen der Flächen  $\mu$  und  $\nu$  oder  $\lambda$  und  $\mu$  die Hauptachsen der imaginären Linienpaare, in denen das Ellipsoid  $\lambda$  oder das zweischalige Hyperboloid  $\nu$  von ihren Tangentialebenen im Punkte  $\lambda, \mu, \nu$  geschnitten werden.

**10. Das Hauptachsenproblem eines einer Tangentialebene parallelen Schnittes.** Für die Fläche:

$$(25) \quad 2g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

und die der Tangentialebene im Punkte  $P = x, y, z$  parallele Ebene:

$$(26) \quad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - s = 0$$

sind die mit:

$$(27) \quad u = g_1 = \frac{x}{a^2}, \quad v = g_2 = \frac{y}{b^2}, \quad w = g_3 = \frac{z}{c^2}, \quad s$$

geränderten Determinanten § 115, (4), (8), (9):

$$(28) \quad A_{44}^u = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2) = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2},$$

$$(29) \quad A_{44}^{u'} = A_{44}^u (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{a^2 b^2 c^2} \\ = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2} \{ (a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2) \},$$

$$(30) \quad A^u = -A_{44}^{u'} - \frac{s^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{1 - s^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Damit ist die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$  des ebenen Schnittes (25), (26) nach § 109, (11):

$$(31) \quad -G^2 \sigma^2 - A_{44}^{u'} \sigma + A_{44}^u = 0, \quad G^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

und die auf seine Hauptachsen  $\eta, \xi$  und seinen Mittelpunkt bezogene Gleichung des Schnittes (§ 112, (18)):

$$(32) \quad \sigma_1 \eta^2 + \sigma_2 \xi^2 = -\frac{A^u}{A_{44}^{u'}} = 1 - s^2.$$

Setzt man nun, um dies auf ein Ellipsoid  $\lambda$  des konfokalen Systems und die Tangentialebene im Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  anzuwenden:

$$a^2 = \alpha - \lambda, \quad b^2 = \beta - \lambda, \quad c^2 = \gamma - \lambda; \quad G^2 = \frac{1}{l^2} = \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)}$$

nach (4), und benutzt die erste der durch Gleichsetzen der beiderseitigen Koeffizienten aus der Identität § 120, (12) entstehenden Gleichungen:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + \beta + \gamma) - (x^2 + y^2 + z^2) = \lambda + \mu + \nu, \\ (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) - \{ (\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \alpha)y^2 + (\alpha + \beta)z^2 \} \\ \qquad \qquad \qquad = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu, \\ \alpha\beta\gamma - (\beta\gamma x^2 + \gamma\alpha y^2 + \alpha\beta z^2) = \lambda\mu\nu, \end{array} \right.$$

so erhält man:

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2) = \mu - \lambda + \nu - \lambda$$

und danach für die Gleichung (31):

$$\sigma^2 - \frac{(\mu - \lambda) + (\nu - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)} \sigma + \frac{1}{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)} = 0.$$

Daraus folgt aber:

$$(34) \quad \sigma_1 = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\nu - \lambda}.$$

Die Hauptachsen  $\eta$  und  $\xi$  sind dabei nach § 110, 6 parallel den gleichbezeichneten Halbierungslinien der imaginären Erzeugenden des Ellipsoides  $\lambda$  im Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  (9, III).

*Das Ellipsoid  $\lambda$  wird daher von der seiner Tangentialebene im Punkte  $\lambda, \mu, \nu$  parallelen Ebene:*

$$(35) \quad \frac{xX}{\alpha - \lambda} + \frac{yY}{\beta - \lambda} + \frac{zZ}{\gamma - \lambda} - s = 0$$

in der Kurve:

$$(36) \quad \frac{\eta^2}{\mu - \lambda} + \frac{\zeta^2}{\nu - \lambda} = 1 - s^2$$

geschnitten, wo die vom Mittelpunkt der Kurve ausgehenden Achsen  $\eta$  und  $\zeta$  die Richtung  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  in (11) haben.

Die Annahme  $s = 1$  oder  $0$  führt auf die Tangentialebene selbst, wie in (24), oder die parallele Diametralebene.

**11. Die Hauptkrümmungsmittelpunkte.** Die beiden *Hauptkrümmungsradien* des Ellipsoids  $\lambda$  im Punkte  $\lambda, \mu, \nu$  sind nach § 110, (23):

$$(37) \quad \varrho_1 = \frac{\lambda - \mu}{l}, \quad \varrho_2 = \frac{\lambda - \nu}{l},$$

positiv gerechnet nach § 110, (25) in der Richtung der  $\xi$ -Achse in (11). Für den zu  $\varrho_1$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt ist daher:

$$x_1 - x = \varrho_1 \alpha_1, \quad y_1 - y = \varrho_1 \beta_1, \quad z_1 - z = \varrho_1 \gamma_1$$

oder nach (11) und (37):

$$(38) \quad x_1 = \frac{\alpha - \mu}{\alpha - \lambda} x, \quad y_1 = \frac{\beta - \mu}{\beta - \lambda} y, \quad z_1 = \frac{\gamma - \mu}{\gamma - \lambda} z.$$

Dies ist aber der Pol der ersten Ebene (10) in bezug auf die Fläche (21) (§ 120, 11, I). Es folgt also:

*Die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte des Ellipsoides  $\lambda$  im Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  sind die Pole der Tangentialebene des Ellipsoides  $\lambda$  in  $P$  in bezug auf die beiden Hyperboloide  $\mu$  und  $\nu$ .<sup>181)</sup>*

## § 122. Tangentialkegel, Tangenten und Tangentialebenenpaare.

### 1. Das System konfokaler Berührungskegel an einem Punkte.

Der von einem Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  an die Fläche:

$$(1) \quad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 1$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 121, (18) die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\xi^2}{\lambda - \tau} + \frac{\eta^2}{\mu - \tau} + \frac{\zeta^2}{\nu - \tau} = 0,$$

während die Erzeugenden des Hyperboloids  $\mu$ , die durch  $P$  gehen, nach § 121, (23); (24) durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{\xi^2}{\lambda - \mu} + \frac{\zeta^2}{\nu - \mu} = 0, \quad \eta = 0$$

dargestellt sind.

Bei festem  $\lambda, \mu, \nu$  ( $\nu > \mu > \lambda$ ) und veränderlichem  $\tau$  bilden aber nach § 118, (1); (3) die Kegel (2) ein System konfokaler Kegel mit den Brennlinien (3).

Die von einem Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  an die Flächen  $\tau$  des konfokalen Systems (1) gelegten Berührungskegel (2) bilden ein System konfokaler Kegel, deren Hauptebenen die Tangentialebenen der drei durch  $P$  selbst gehenden Flächen  $\tau = \lambda, \mu, \nu$  des Systems (1) in  $P$  und deren Fokallinien die Erzeugenden der Fläche  $\tau = \mu$  in  $P$  sind.<sup>102)</sup>

## 2. Verschiedene Formen der Berührungskegel an einem Punkte.

Die Kegel (2) sind reell für  $\nu > \tau > \lambda$ . Es geht daher von  $P$  ein reeller Berührungskegel an jedes Ellipsoid und zweischalige Hyperboloid, außerhalb dessen  $P$  liegt (§ 120, 4), und an jedes einschalige Hyperboloid des konfokalen Systems (1).

Für das Hyperboloid  $\tau = \mu$  zerfällt der Kegel, als Ebenengebilde aufgefaßt, in ein reelles, für das Ellipsoid  $\tau = \lambda$  und Hyperboloid  $\tau = \nu$  in ein imaginäres Strahlenpaar (§ 118, (17)).

Für die Fokalkegelschnitte  $\tau = \gamma$  und  $\tau = \beta$  (§ 120, (21)) ist die Bedingung  $\nu > \tau > \lambda$  nach § 120, 3 erfüllt. Ihre Berührungskegel:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\xi^2}{\lambda - \gamma} + \frac{\eta^2}{\mu - \gamma} + \frac{\zeta^2}{\nu - \gamma} = 0, \\ \frac{\xi^2}{\lambda - \beta} + \frac{\eta^2}{\mu - \beta} + \frac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0 \end{cases}$$

sind die vom Punkte  $P$  über der Fokalellipse und Fokalhyperbel gerichteten Kegel. Sie heißen die beiden (reellen) *Fokalkegel des Punktes*  $P = \lambda, \mu, \nu$ .

**3. Zwei Flächen des konfokalen Systems, die eine gegebene Gerade berühren.** Zu jedem „Kegel  $\tau$ “ des Systems (2) gehört eine „Fläche  $\tau$ “ des Systems (1) und umgekehrt. Die *Erzeugenden des Kegels*  $\tau$  sind die durch den Punkt  $P$  gehenden *Tangenten der Fläche*  $\tau$ .

Jede gegebene Gerade  $p$  des Bündels bei  $P$  ist nach § 118, 5 Erzeugende zweier (ungleichnamiger) reeller Kegel  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$  des Systems (2), also auch Tangente der entsprechenden Flächen  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$ . Da aber jede gegebene Gerade  $p$  des Raumes als Bestandteil des Bündels an einem Punkte  $P$  auf ihr angesehen werden kann, so folgt allgemein:

I. *Jede Gerade des Raumes wird von zwei reellen Flächen des konfokalen Systems (1) berührt* (§ 120, 16).

Diese zwei Flächen sind nach § 118, 5 im allgemeinen verschieden und fallen nur dann zusammen, wenn  $\tau_1 = \tau_2 = \mu$  ist, also die Gerade Fokallinie des Kegels (1) und Erzeugende der Fläche  $\mu$  ist.

II. Wenn eine Gerade Erzeugende eines Hyperboloids  $\mu$  des Systems (1) ist, so fallen die beiden sie berührenden Flächen in dem Hyperboloid  $\mu$  zusammen.

4. Gerade an einem Punkte, die zwei gegebene Flächen berühren. An zwei gegebene Flächen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  des Systems (1) gehen nach (2) vom Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  die zwei Berühungskegel:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\xi^2}{\lambda - \tau_1} + \frac{\eta^2}{\mu - \tau_1} + \frac{\zeta^2}{\nu - \tau_1} = 0, \\ \frac{\xi^2}{\lambda - \tau_2} + \frac{\eta^2}{\mu - \tau_2} + \frac{\zeta^2}{\nu - \tau_2} = 0. \end{cases}$$

Da deren vier gemeinsame Erzeugende gemeinsame Tangenten der Flächen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  sind, so folgt<sup>186</sup>):

I. Durch einen Punkt  $P = \lambda, \mu, \nu$  des Raumes gehen an zwei gegebene Flächen des konfokalen Systems (1) vier gemeinsame Tangenten.

Sie sind nach § 118, 6, II reell, wenn die beiden Kegel (5) ungleichnamige Kegel des Systems (2) sind, also wenn:

$$(6) \quad \lambda < \tau_1 < \mu < \tau_2 < \nu.$$

Zwischen den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des laufenden Punktes  $Q$  der vier Tangenten und den Parametern  $\tau_1, \tau_2$  bestehen die Beziehungen § 118, (9) mit Verwandlung von  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, x, y, z$  in  $\nu, \mu, \lambda, \tau_1, \tau_2, \xi, \eta, \zeta$ . Setzt man also (I § 43, 1):

$$(7) \quad \sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = PQ$$

und nimmt als positive Richtung jeder der vier Tangenten diejenige, die mit der  $\xi$ -Achse, also nach § 121, (11) der äußeren Normale des Ellipsoides  $\lambda$  (§ 33, Fig. 86), einen spitzen Winkel bildet, so folgt:

II. Die vier gemeinsamen Tangenten, die vom Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  an die beiden Flächen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  des konfokalen Systems gelegt werden können, haben in bezug auf das Achsensystem der drei Normalen  $\xi, \eta, \zeta$  im Punkte  $P$  die Parameterdarstellung:

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{(\lambda - \tau_1)(\lambda - \tau_2)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}} \sigma, & \eta &= \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(\mu - \tau_1)(\mu - \tau_2)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}} \sigma, \\ \zeta &= \varepsilon_3 \sqrt{\frac{(\nu - \tau_1)(\nu - \tau_2)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}} \sigma, \end{aligned}$$

wo  $\varepsilon_2 = \pm 1, \varepsilon_3 = \pm 1, \sigma$  die relative Entfernung des laufenden Punktes  $Q$  der einzelnen Tangente von dem Ausgangspunkte  $P$ , und die Koeffizienten von  $\sigma$  die Richtungskosinus der letzteren sind.

Daher halbiert die  $\xi$ -Achse die Innenwinkel der Paare  $\varepsilon_2 \varepsilon_3 = ++$  und  $--$ ,  $+-$  und  $-+$ , die  $\eta$ -Achse die Außenwinkel der Paare

++ und −+, +− und −−, die  $\xi$ -Achse die Außenwinkel der Paare ++ und +−, −+ und −−, oder wie wir kurz sagen mögen:

III. Die Normalen der drei durch einen Punkt gehenden Flächen  $\lambda, \mu, \nu$  des konfokalen Systems halbieren die Winkel je zweier Paare der von dem Punkte an zwei andere Flächen  $\tau_1, \tau_2$  gehenden gemeinsamen Tangenten (§ 33, 8).

5. Die vier Fokalstrahlen eines Punktes. Die beiden Fokalkegel (4) sind, da die Bedingung (6) mit  $\tau_1 = \gamma$  und  $\tau_2 = \beta$  stets erfüllt ist, ungleichnamige Kegel des Systems (2). Sie schneiden sich also stets in vier reellen Strahlen.

Diese vier Strahlen, die gemeinsamen Transversalen der beiden Fokalkegelschnitte durch den Punkt  $P = \lambda, \mu, \nu$ , heißen die vier Fokalstrahlen des Punktes.

Ihre Parameterdarstellung ergibt sich aus (8) mit  $\tau_1 = \beta, \tau_2 = \gamma$ :

$$(9) \quad \xi = \sqrt{\frac{(\lambda - \gamma)(\lambda - \beta)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}} \sigma, \quad \eta = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{(\mu - \gamma)(\mu - \beta)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}} \sigma,$$

$$\zeta = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{(\nu - \gamma)(\nu - \beta)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}} \sigma.$$

6. Orthogonalität der scheinbaren Umrissse zweier konfokaler Flächen. Die Tangentialebenen des Kegels  $\tau$  sind die mit Rücksicht auf  $\mathfrak{B}$  durch den Punkt  $P$  gehenden Tangentialebenen der Fläche  $\tau$ . Der Berührungspunkt einer solchen Tangentialebene mit der Fläche  $\tau$  liegt auf ihrer Berührungsgeraden mit dem Kegel  $\tau$ , die in diesem Punkte Tangente der Fläche  $\tau$  ist.

Längs einer gemeinsamen Erzeugenden  $p$  der Kegel  $\tau_1$  und  $\tau_2$  in (5) sind nach § 118, 7 die Tangentialebenen der Kegel senkrecht zueinander. Da nun diese Ebenen zugleich die Tangentialebenen der Fläche  $\tau_1$  und  $\tau_2$  in den Berührungspunkten mit der gemeinsamen Tangente  $p$  sind, so folgt:

I. Die Tangentialebenen zweier Flächen des konfokalen Systems (1) in den Berührungspunkten mit einer gemeinsamen Tangente sind zueinander senkrecht.

II. Sind daher mit (6) die vier durch  $P$  gehenden gemeinsamen Tangenten der Flächen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  reell, so schneiden sich für ein in  $P$  befindliches Auge in der Richtung jeder dieser vier Tangenten die scheinbaren Umrissse der Flächen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  senkrecht.<sup>187)</sup>

Insbesondere folgt für  $\tau_1 = \gamma, \tau_2 = \beta$ :

III. *Die beiden Fokalkegelschnitte haben für einen beliebigen Augenpunkt im allgemeinen vier scheinbare Schnittpunkte mit senkrechtem Durchschnitt.*

**7. Das Hauptebenenproblem des durch eine Gerade gehenden Tangentialebenenpaares.** Die beiden Tangentialebenen der Fläche  $\tau$ , die durch eine gegebene Gerade  $p$  am Punkte  $P$  hindurchgehen, sind nach **6** zugleich die Tangentialebenen des Kegels  $\tau$ , die durch  $p$  gehen. Diese aber haben nach § 119, **7** als Hauptebenen die Tangentialebenen der beiden Kegel  $\tau_1$  und  $\tau_2$  des Systems (2), die durch  $p$  gehen und nach **6** zugleich die Tangentialebenen der Flächen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  des Systems (1) sind, die die Gerade  $p$  berühren. Da die durch  $P$  gehende Gerade als beliebige Gerade des Raumes gelten kann, so folgt:

*Das durch eine gegebene Gerade an eine bestimmte Fläche des konfokalen Systems (1) gelegte Tangentialebenenpaar hat als Hauptebenen die zueinander senkrechten Tangentialebenen derjenigen beiden Flächen des Systems (1), welche die Gerade berühren, in den bezüglichen Berührungspunkten.*

Damit ist (vgl. § 121, **7**) das *Hauptebenenproblem der Tangentialebenenpaare* für eine beliebige Mittelpunktsfläche gelöst.

**8. Berührungskegel, die Rotationskegel sind.** Bei festem  $\tau$  stellt die Gleichung (2) alle Berührungskegel dar, die mit wechselnder Spitze  $P = \lambda, \mu, \nu$  an eine bestimmte Fläche (1) gelegt sind. Der Kegel (2) ist immer dann und nur dann ein Rotationskegel, wenn zwei von den elliptischen Koordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  des Punktes  $P$  gleich sind. Dies tritt nach § 121, **2** nur ein für die Punkte der Fokalellipse, wo  $\lambda = \mu = \gamma$ , und der Fokalhyperbel, wo  $\mu = \nu = \beta$  ist.

I. *Die Fokalkegelschnitte eines Ellipsoids oder Hyperboloids sind der Ort der Spitzen derjenigen Berührungskegel der Fläche, die Rotationskegel sind.*

Bei einem Punkte  $P = \gamma, \gamma, \nu$  der Fokalellipse ist die  $\zeta$ -Achse die Rotationsachse des Kegels (2) und diese ist Normale des zweischaligen Hyperboloids  $\nu$  und Tangente der Fokalellipse in  $P$  (§ 120, **7**, VI).

II. *Die Rotationsachse des Kegels ist jedesmal die Tangente des Fokalkegelschnittes in der Spitze des Kegels.*

In dieser Tangente fallen die Fokallinien (**3**) zusammen. Sie ist Erzeugende des Hyperboloids  $\mu = \gamma$  oder  $\mu = \beta$ .

Insbesondere gilt der Satz:

III. *Jeder Fokalkegelschnitt ist der Ort der Spitzen der über dem andern errichteten Rotationskegel.*<sup>144)</sup>

**9. Gleichseitige und dual gleichseitige Berührungskegel.** Der Kegel (2) ist ein gleichseitiger, wenn (§ 71, (29)):

$$\frac{1}{\lambda - \tau} + \frac{1}{\mu - \tau} + \frac{1}{\nu - \tau} = 0.$$

Dafür kann man schreiben:

$$(\mu - \tau)(\nu - \tau) + (\nu - \tau)(\lambda - \tau) + (\lambda - \tau)(\mu - \tau) = 0$$

oder:

$$(10) \quad (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) - 2(\lambda + \mu + \nu)\tau + 3\tau^2 = 0,$$

und mit Rücksicht auf § 121, (33):

$$\begin{aligned} & \{ -(\beta + \gamma)x^2 - (\gamma + \alpha)y^2 - (\alpha + \beta)z^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta \} \\ & + 2\{x^2 + y^2 + z^2 - \alpha - \beta - \gamma\}\tau + 3\tau^2 = 0, \end{aligned}$$

oder auch:

$$(11) \quad \{(\beta - \tau) + (\gamma - \tau)\}x^2 + \{(\gamma - \tau) + (\alpha - \tau)\}y^2 + \{(\alpha - \tau) + (\beta - \tau)\}z^2 \\ = (\beta - \tau)(\gamma - \tau) + (\gamma - \tau)(\alpha - \tau) + (\alpha - \tau)(\beta - \tau).$$

*Der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel der Fläche:*

$$(12) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist daher (§ 100, (17)) die Fläche<sup>66</sup>:

$$(13) \quad (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

Der Kegel (2) ist ein dual gleichseitiger, wenn (§ 71, (30)):

$$(14) \quad \lambda - \tau + \mu - \tau + \nu - \tau = 0$$

oder:

$$\alpha + \beta + \gamma - \lambda - \mu - \nu = \alpha - \tau + \beta - \tau + \gamma - \tau,$$

und mit Rücksicht auf § 121, (33):

$$(15) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \alpha - \tau + \beta - \tau + \gamma - \tau.$$

*Der Ort der Spitzen dual gleichseitiger Berührungskegel der Fläche (12) ist daher (§ 100, (18)) die Kugel:*

$$(16) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

**10. Fokalachsen der Ellipsoide und Hyperboloide.** Ist  $P = \lambda, \mu, \nu$  irgendein Punkt einer Geraden  $p$ , so ist das durch  $p$  an die Fläche  $\tau$  des Systems (1) gelegte Tangentialebenenpaar dasselbe, wie das durch die Gerade  $p$  an den Kegel  $\tau$  des Systems (2) gelegte Tangentialebenenpaar. Dieses aber ist von der Form § 119, (25), wenn die Gerade Fokallinie des Systems (2) also nach 1 Erzeugende des Hyperboloids  $\mu$  ist.

*Diejenigen Geraden, an denen die von der Fläche (1) bestimmte Involution harmonischer Polarebenen eine Involution rechtwinkliger Ebenen*



ist, sind die Erzeugenden der zur Fläche (1) konfokalen einschaligen Hyperboloide.

Diese Geraden (§ 20, 4, I) heißen *Fokalachsen* der Fläche (1).

**11. Direkte Bestimmung der Fokalachsen der Mittelpunktsflächen.** Die Involution harmonischer Polarebenen, welche die Mittelpunktsfläche:

$$(17) \quad \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - s^2 = 0$$

an der Schnittlinie  $g$  der beiden Ebenen  $u_1, v_1, w_1, s_1$  und  $u_2, v_2, w_2, s_2$  bestimmt, hat nach § 77, (4) die Gleichung:

$$(18) \quad (\alpha u_1^2 + \beta v_1^2 + \gamma w_1^2 - s_1^2) + (\alpha u_1 u_2 + \beta v_1 v_2 + \gamma w_1 w_2 - s_1 s_2)(\lambda' + \lambda'') \\ - (\alpha u_2^2 + \beta v_2^2 + \gamma w_2^2 - s_2^2)\lambda' \lambda'' = 0.$$

Die beiden Ebenen  $u_1 + \lambda' u_2, v_1 + \lambda' v_2, w_1 + \lambda' w_2, s_1 + \lambda' s_2$  und  $u_1 + \lambda'' u_2, v_1 + \lambda'' v_2, w_1 + \lambda'' w_2, s_1 + \lambda'' s_2$  sind entsprechende Ebenen der Involution, wenn ihre Parameter  $\lambda'$  und  $\lambda''$  durch die Gleichung (18) verknüpft sind. Die Involution ist eine Involution *rechtwinkliger* Ebenen, wenn für zwei entsprechende Ebenen (I § 42, (5)):

$$(u_1 + \lambda' u_2)(u_1 + \lambda'' u_2) + (v_1 + \lambda' v_2)(v_1 + \lambda'' v_2) + (w_1 + \lambda' w_2)(w_1 + \lambda'' w_2) = 0,$$

oder:

$$(19) \quad (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)(\lambda' + \lambda'') \\ + (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\lambda' \lambda'' = 0.$$

Die Gleichung (18) hat die Form (19) immer dann und nur dann, wenn mit irgendeinem Faktor  $\tau$ :

$$\alpha u_1^2 + \beta v_1^2 + \gamma w_1^2 - s_1^2 = \tau(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2), \\ \alpha u_1 u_2 + \beta v_1 v_2 + \gamma w_1 w_2 - s_1 s_2 = \tau(u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2), \\ \alpha u_2^2 + \beta v_2^2 + \gamma w_2^2 - s_2^2 = \tau(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2),$$

oder auch, wenn wir zugleich  $s_1 = s_2 = 1$  nehmen:

$$(20) \quad \begin{cases} (\alpha - \tau)u_1^2 + (\beta - \tau)v_1^2 + (\gamma - \tau)w_1^2 - 1 = 0, \\ (\alpha - \tau)u_1 u_2 + (\beta - \tau)v_1 v_2 + (\gamma - \tau)w_1 w_2 - 1 = 0, \\ (\alpha - \tau)u_2^2 + (\beta - \tau)v_2^2 + (\gamma - \tau)w_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Dies sind aber nach § 82, (14'); (15') die Bedingungen dafür, daß die Gerade  $g$  eine Erzeugende der Fläche:

$$(21) \quad (\alpha - \tau)u^2 + (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 - 1 = 0$$

ist.

I. Die Fokalachsen einer Mittelpunktsfläche sind die Erzeugenden aller zu ihr konfokalen Flächen.<sup>171)</sup>

Zu diesen gehören auch die Tangenten der drei Fokalkegelschnitte für  $\tau = \alpha, \beta, \gamma$ , in (20). Denn zwei durch eine solche Tangente

gehende Ebenen  $u_1, v_1, w_1$  und  $u_2, v_2, w_2$  sind, wie die Gleichungen (20) verlangen, beide Tangentialebenen des Fokalkegelschnittes, und jede geht durch den Berührungspunkt der andern.

II. Durch einen Punkt des Raumes gehen nach § 120, 5, I im Allgemeinen sechs Fokalachsen, von denen zwei reell sind.

III. Die Fokalachsen der Fläche sind nach § 84, 5, II auch diejenigen Geraden, an denen die Fläche und der imaginäre Kugelkreis dieselbe Involution harmonischer Polarebenen bestimmen.

### § 123. Das System konfokaler Paraboloido.

1. Begriff des konfokalen Systems. Durch die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x' - p = 0$$

wird nach § 56, 10 bei festem  $e$  und veränderlichem  $p$  ein System konfokaler Paraboloido dargestellt.

Wir setzen der Symmetrie wegen mit  $\beta > \gamma$ :

$$(2') \quad p = \beta - \tau, \quad p - e = \gamma - \tau; \quad e = \beta - \gamma, \quad x' = x + \frac{\beta}{2}.$$

Die Gleichung des konfokalen Systems<sup>99)</sup> lautet dann:

$$(1) \quad \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0, \quad \beta > \gamma,$$

wo bei festem  $\beta, \gamma$  der Parameter  $\tau$  sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  bewegt:

$$(2) \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Der gemeinsame linke und rechte Hauptbrennpunkt aller Paraboloido (1) ist nach § 56, (3):

$$(3) \quad B_0 = -\frac{\beta}{2}, 0, 0; \quad C_0 = -\frac{\gamma}{2}, 0, 0,$$

und die gemeinsamen Fokalparabeln, die linke und rechte, sind nach § 56, (7):

$$(4) \quad \frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma = 0, \quad z = 0; \quad (5) \quad \frac{z^2}{\beta - \gamma} - 2x - \beta = 0, \quad y = 0.$$

Der Scheitelpunkt des einzelnen Paraboloido ist nach § 56, (4):

$$(6) \quad A_0 = -\frac{\tau}{2}, 0, 0.$$

2. Unterscheidung der drei Arten von Paraboloiden. Je nach  $-\infty < \tau < \gamma$  oder  $\gamma < \tau < \beta$  oder  $\beta < \tau < +\infty$  ist das Paraboloid (1) nach § 56, (2) ein linkes elliptisches oder ein hyperbolisches oder ein rechtes elliptisches. Um diese drei Arten auch in der Be-

zeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihren Parameter bezüglich  $\tau = \lambda$ ,  $\tau = \mu$  und  $\tau = \nu$ . Danach zerfällt das System (1) in die drei Reihen:

$$(7) \quad \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + 2x + \lambda = 0, \quad -\infty < \lambda < \gamma,$$

$$(8) \quad \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} + 2x + \mu = 0, \quad \gamma < \mu < \beta,$$

$$(9) \quad \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} + 2x + \nu = 0, \quad \beta < \nu < +\infty,$$

von denen die erste alle linken elliptischen, die zweite alle hyperbolischen und die dritte alle rechten elliptischen Paraboloiden des Systems enthält.

**3. Veränderlichkeit und Grenzformen des konfokalen Systems.**

Während  $\lambda$  von  $-\infty$  bis  $\gamma$  sich bewegt (über  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  in Fig. 186), zieht sich das linke elliptische Paraboloid (7) gegen die linke Fokalparabel  $c$ , die es nach § 56, 7

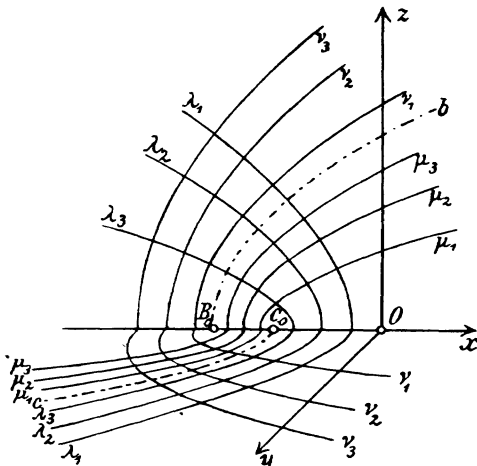


Fig. 186.

beständig einschließt, zusammen, bis es für  $\lambda = \gamma$  in das Innere dieser Parabel (4) in der Ebene  $z = 0$  zusammenklappt. Das Äußere der Parabel (4) stellt das hyperbolische Paraboloid  $\mu = \gamma$  dar. Dieses zieht sich bei zunehmendem  $\mu$  (über  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  in Fig. 186) gegen die rechte Fokalparabel  $b$  zusammen, bis es für  $\mu = \beta$  in das Äußere dieser Parabel (5) zusammenklappt. Das Innere der Parabel (5) stellt dann das rechte elliptische Paraboloid  $\nu = \beta$  dar, das sich bei zunehmendem  $\nu$  (über  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  in

Fig. 186) um die rechte Fokalparabel, die es beständig umschließt, weiter und weiter ausdehnt.

**4. Die durch einen Punkt des Raumes bestimmten Paraboloiden.**

Um diejenigen Flächen des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Punkt  $x, y, z$  des Raumes gehen, hat man die in  $\tau$  kubische Gleichung (1) oder:

$$(10) \quad f(\tau) = (\gamma - \tau)y^2 + (\beta - \tau)z^2 + (\beta - \tau)(\gamma - \tau)(2x + \tau) = 0$$

nach  $\tau$  aufzulösen.

Da nun:

$$(11) \quad f(-\infty) = -\infty, \quad f(\gamma) = (\beta - \gamma)z^2 > 0, \quad f(\beta) = -(\beta - \gamma)y^2 < 0, \\ f(+\infty) = +\infty,$$

so hat die Gleichung (10) stets *drei reelle Wurzeln*, die zwischen den Grenzen  $-\infty$  und  $\gamma$ ,  $\gamma$  und  $\beta$ ,  $\beta$  und  $+\infty$  liegen und daher nach den Festsetzungen zu (7)—(9) bezüglich mit  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  zu bezeichnen sind.

I. *Durch jeden Punkt des Raumes gehen stets drei Paraboloides des konfokalen Systems, je ein linkes elliptisches, ein hyperbolisches und ein rechtes elliptisches.*

5. *Die durch drei ungleichnamige Paraboloides bestimmten Punkte. Zwischen den Koordinaten  $x, y, z$  eines Punktes und den Parametern  $\lambda, \mu, \nu$  der durch ihn gehenden Paraboloides besteht nach 4 die in  $\tau$  identische Gleichung:*

$$(12) \quad (\gamma - \tau)y^2 + (\beta - \tau)z^2 + (\beta - \tau)(\gamma - \tau)(2x + \tau) \\ = (\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu).$$

Aus ihr folgt durch Vergleichung der Koeffizienten von  $\tau^2$  und mit  $\tau = \beta$  und  $\tau = \gamma$ :

$$(13) \quad x = \frac{\beta + \gamma - \lambda - \mu - \nu}{2}, \quad y^2 = -\frac{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)}{\beta - \gamma}, \\ z^2 = -\frac{(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)}{\gamma - \beta}.$$

Wenn daher  $\lambda, \mu, \nu$  den Ungleichungen bei (7)—(9) entsprechend gegeben werden, so folgen aus (13) stets vier, nur in den Vorzeichen von  $y$  und  $z$  verschiedene, reelle Wertsysteme  $x, y, z$ .

II. *Irgend drei ungleichnamige Paraboloides des konfokalen Systems schneiden sich stets in vier symmetrisch gegen die beiden Hauptebenen gelegenen Punkten.*

III. *Zwei gleichnamige Paraboloides des Systems haben keinen (reellen) Punkt gemein.*

6. *Orthogonaler Durchschnitt ungleichnamiger Paraboloides.* Ein gemeinsamer Punkt  $x, y, z$  der beiden Flächen  $\mu$  und  $\nu$  genügt den beiden Gleichungen (8) und (9), also auch der durch Subtraktion folgenden Gleichung:

$$(14) \quad (\mu - \nu) \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} + 1 \right\} = 0.$$

Diese bedeutet aber nach § 70, (26), daß die Tangentialebenen der beiden Flächen im Punkte  $x, y, z$  zueinander senkrecht sind. Dasselbe gilt mit zyklischer Vertauschung von  $\lambda, \mu, \nu$ :

IV. *Zwei ungleichnamige Paraboloides des konfokalen Systems schneiden sich längs ihrer Durchschnittslinie überall senkrecht.*

V. *Drei ungleichnamige Paraboloides schneiden sich in jedem ihrer vier Schnittpunkte (13) untereinander senkrecht.*

VI. *Die linke Fokalparabel wird von allen rechten, die rechte von allen linken elliptischen Paraboloiden senkrecht geschnitten.*

Die Schnittpunkte sind nach § 61, 7 die Kreispunkte der Paraboloides.

**7. Das konfokale System als Flächenschar.** Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (32) in Ebenenkoordinaten:

$$(15) \quad (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 + 2us - \tau u^2 = 0$$

oder:

$$(16) \quad (\beta v^2 + \gamma w^2 + 2us) - \tau(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

I. *Das System der konfokalen Flächen ist daher nach § 120, (16) eine Flächenschar, von deren beiden Grundflächen<sup>100)</sup>:*

$$(17) \quad \beta v^2 + \gamma w^2 + 2us = 0, \quad (18) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 0$$

*die eine der imaginäre Kugelkreis ist (§ 120, (20)).*

Jede *gemeinsame* Tangentialebene der beiden Grundflächen (17) und (18) ist nach (16) auch *gemeinsame* Tangentialebene *aller* Flächen der Schar. Solche Ebenen sind außer der unendlich fernen Ebene  $u = 0, v = 0, w = 0, s = 1$  sämtlich imaginär.

II. *Jede Ebene, die nicht gemeinsame Tangentialebene der beiden Grundflächen ist, wird von einer bestimmten Fläche der Schar berührt.*

**8. Kegelschnitte der Schar.** Unter den Flächen der Schar (15) befinden sich außer dem Kugelkreis (18), der doppelt zählend (§ 120, 9) dem Werte  $\tau = \infty$  entspricht, zwei weitere *Kegelschnitte*, entsprechend den Werten  $\tau = \beta, \gamma$ <sup>144)</sup>:

$$(19) \quad (\gamma - \beta)w^2 + 2us - \beta u^2 = 0, \quad (\beta - \gamma)v^2 + 2us - \gamma u^2 = 0.$$

Es sind die beiden *Fokalparabeln* (4), (5) als umhüllt von ihren Tangentialebenen gedacht (§ 13, (42); § 53, (35)).

**9. Die Schnittkurvenenveloppe der Schar.** Wie § 120, 10 ergibt sich auch hier, daß *die Schnittkurvenenveloppe der Schar* (15) *von deren gemeinsamen Tangentialebenen umhüllt wird* und in Ebenenkoordinaten durch die beiden Gleichungen (17), (18) dargestellt wird.

Um ihre Gleichung in *Punktkoordinaten* zu erhalten, ordnet man die in  $x, y, z, t$  homogen gemachte Gleichung (10) nach Potenzen von  $\tau$ :

$$(20) \quad f(\tau) = P\tau^3 + Q\tau^2 + R\tau + S = 0,$$

wo:

$$P = t^2, \quad Q = \{ -(\beta + \gamma)t + 2x \} t = Q't,$$

$$R = -(y^2 + z^2) + \beta\gamma t^2 - 2(\beta + \gamma)xt, \quad S = \gamma y^2 + \beta z^2 + 2\beta\gamma xt.$$

Damit wird die Gleichung § 120, (29):

$$(21) \quad \{ (9St - Q'R)^2 - 4(3R - Q'^2)(3QS - R^2) \} t^2 = 0.$$

Die Schnittkurvenenveloppe zerfällt also in eine Fläche sechster Ordnung und die doppelte unendlich ferne Ebene (§ 34, (21)).

**10. Der Ort der Pole einer Ebene.** Der Pol einer gegebenen Ebene:

$$(22) \quad ux + vy + wz + s = 0$$

in bezug auf die Fläche (15) hat nach § 83, (5') die Koordinaten:

$$(23) \quad x = \frac{s}{u} - \tau, \quad y = (\beta - \tau) \frac{v}{u}, \quad z = (\gamma - \tau) \frac{w}{u}.$$

Diese Gleichungen stellen aber bei veränderlichem  $\tau$  eine gerade Linie dar, deren Richtungskosinus sich wie  $u : v : w$  verhalten (I § 43, (1)), die also auf (22) senkrecht steht. Wie § 120, 11 folgt daher:

I. *Der Ort der Pole einer Ebene in bezug auf die Paraboloider Schar (15) ist eine gerade Linie, die Normale der Ebene in ihrem Berührungspunkt mit der von ihr berührten Fläche der Schar.*<sup>101)</sup>

Ausgenommen sind die zwei Hauptebenen und die unendlich ferne Ebene, die in bezug auf alle Flächen der Schar denselben Pol haben.

**11. Der Achsenkomplex des konfokalen Systems.** Der Achsenkomplex der Fläche (1) wird nach § 85, (39) unabhängig von  $\tau$ :

$$(24) \quad p_{23}p_{14} + (\beta - \gamma)p_{24}p_{34} = 0.$$

II. *Alle Flächen des konfokalen Systems haben denselben Achsenkomplex.*

Da beim Übergang von der Bezeichnung § 85, (34) zu der hier in (1) gebrauchten  $\beta, \gamma, a, \beta + a, \gamma + a$  durch  $\beta - \tau, \gamma - \tau, \tau, \beta, \gamma$  zu ersetzen sind, so werden die rechten Seiten der Formeln § 85, (38); (44) für die Gleichung (1) unabhängig von  $\tau$ .

Die Sätze § 120, 12, III und IV gelten also auch für das System konfokaler Paraboloider. Auch ergibt sich für dieses ebenso wie in § 120, 13:

V. *Der Achsenkomplex einer jeden Fläche des konfokalen Systems besteht aus den Normalen sämtlicher Flächen.*

Endlich folgt mit Rücksicht auf § 83, (7') der Satz § 120, 15.

**12. Ebenes Polarsystem in den Hauptebenen.** Eine Ebene  $u, v, w$  schneidet die Koordinatenebene  $z = 0$  in der Geraden  $u, v$  (I § 45, 1);

der zur Ebene konjugierte Normalstrahl § 85, (38) schneidet die Ebene  $z = 0$  in dem Punkte (I § 48, (9')):

$$(25) \quad x = \frac{p_{31}}{p_{34}} = -\left(\gamma - \frac{1}{u}\right), \quad y = -\frac{p_{23}}{p_{34}} = (\beta - \gamma) \frac{v}{u}.$$

Dieses ist aber nach § 20, (40') der Pol der Geraden  $u, v$  in bezug auf die zweite Parabel (19):

*Eine Ebene und ihr konjugierter Normalstrahl, insbesondere Tangentialebene und zugehörige Normale bei irgendeiner Fläche (1), schneiden eine jede der beiden Hauptebenen in Polare und Pol der in ihr liegenden Fokalparabel.<sup>81)</sup>*

### 13. Die Linienkoordinatengleichung des konfokalen Systems.

Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 70, (41) in Linienkoordinaten:

$$(26) \quad p_{23}^2 - 2(\gamma - \tau)p_{12}p_{24} + 2(\beta - \tau)p_{31}p_{34} - (\beta - \tau)(\gamma - \tau)p_{14}^2 \\ + (\gamma - \tau)\tau p_{24}^2 + (\beta - \tau)\tau p_{34}^2 = 0.$$

*Eine gegebene Gerade wird von zwei Flächen des konfokalen Systems berührt.*

## § 124. Das Hauptachsenproblem des Berührungskegels.

**1. Begriff der parabolischen Koordinaten.** Die Parameter  $\lambda, \mu, \nu$  der drei nach § 123, 4 durch einen Punkt  $x, y, z$  gehenden Paraboloiden heißen die *parabolischen Koordinaten des Punktes*.

Sie sind bei gegebenen Koordinaten  $x, y, z$  des Punktes durch die kubische Gleichung § 123, (10) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 123, (13) den Punkt  $x, y, z$  vierdeutig.

**2. Parabolische Koordinaten besonderer Punkte.** Für die Punkte einer *Hauptebene* hat im allgemeinen eine parabolische Koordinate einen der Grenzwerte  $\beta, \gamma$ : in der Ebene  $z = 0$  ist innerhalb der linken Fokalparabel  $\lambda = \gamma$ , außerhalb  $\mu = \gamma$ ; in der Ebene  $y = 0$  außerhalb der rechten Fokalparabel  $\mu = \beta$ , innerhalb  $\nu = \beta$  (Fig. 186).

Für die Punkte einer *Fokalparabel* und nur für diese sind zwei parabolische Koordinaten gleich, für die linke  $\lambda = \gamma, \mu = \gamma$ , für die rechte  $\mu = \beta, \nu = \beta$ .

Für die Punkte der *Hauptachse* ist links von  $B_0$ :  $\lambda = \gamma, \mu = \beta$ ; zwischen  $B_0$  und  $C_0$ :  $\lambda = \gamma, \nu = \beta$ ; rechts von  $C_0$ :  $\mu = \gamma, \nu = \beta$ .

Für die Hauptbrennpunkte selbst ist:

$$B_0: \lambda = \gamma, \mu = \beta, \nu = \beta; \quad C_0: \lambda = \gamma, \mu = \gamma, \nu = \beta.$$

**3. Identische Gleichungen zwischen gemeinen und parabolischen Koordinaten.** Bezeichnen wir mit  $T$  die linke Seite der

Gleichung § 123, (1), so ist nach der Definition der parabolischen Koordinaten mit Rücksicht auf § 123, (12):

$$(1) \quad T = \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den gemeinen  $x, y, z$  und den parabolischen Koordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  des laufenden Punktes identisch in  $\tau$ .

Mit  $\tau = \lambda, \mu, \nu$  folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{\beta - \lambda} + \frac{z^2}{\gamma - \lambda} + 2x + \lambda = 0, \\ \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} + 2x + \mu = 0, \\ \frac{y^2}{\beta - \nu} + \frac{z^2}{\gamma - \nu} + 2x + \nu = 0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) folgt nach Division mit den nicht identisch verschwindenden Faktoren  $\tau - \lambda, \tau - \mu, \tau - \nu$ :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)} + 1 = \frac{T}{\tau - \lambda} = \frac{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)} + 1 = \frac{T}{\tau - \mu} = \frac{(\tau - \nu)(\tau - \lambda)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \nu)} + 1 = \frac{T}{\tau - \nu} = \frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)}{(\beta - \tau)(\gamma - \tau)}; \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Gliede dieser Identitäten bezüglich mit  $\tau = \lambda, \mu, \nu$ :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)^2} + 1 = \frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)}{(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)} = \frac{1}{l^2}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)^2} + 1 = \frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)}{(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} = \frac{1}{m^2}, \\ \frac{y^2}{(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \nu)^2} + 1 = \frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)}{(\beta - \nu)(\gamma - \nu)} = \frac{1}{n^2}, \end{cases}$$

wo  $1:l^2, 1:m^2, 1:n^2$  als Abkürzungen je für die beiden gleichen Ausdrücke dienen; ebenso folgt aus der zweiten Gleichung (3) mit  $\tau = \nu$  oder der dritten mit  $\tau = \mu$ :

$$(5) \quad \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} + 1 = 0, \dots, \dots$$

Die Punkte deuten, wie auch im Folgenden, die zyklische Vertauschung von  $\lambda, \mu, \nu$ , bezüglich auch von  $l^2, m^2, n^2$  an.

Durch Subtraktion je zweier Formeln (3) folgt:

$$(6) \quad \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} = \frac{T}{(\tau - \mu)(\tau - \nu)}, \dots, \dots$$



und aus der ersten dieser drei mit  $\tau = \lambda$ :

$$(7) \quad \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)} = 0.$$

Durch Subtraktion je zweier entsprechender Gleichungen (3) und (4) ergibt sich:

$$(8) \quad \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \tau)(\gamma - \lambda)^2} = \frac{T}{(\tau - \lambda)^2} - \frac{1}{(\tau - \lambda)l^2}, \dots, \dots$$

Endlich gibt die Subtraktion der Gleichung (5) von der zweiten und dritten (4) die beiden folgenden und ihre zyklischen Vertauschungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2(\beta - \nu)} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)^2(\gamma - \nu)} = \frac{1}{(\mu - \nu)m^2}, \dots, \dots, \\ \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)^2} + \frac{z^2}{(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)^2} = \frac{1}{(\nu - \mu)n^2}, \dots, \dots \end{cases}$$

**4. Das Achsensystem der drei Flächennormalen.** Die *Tangentialebenen* der drei durch einen bestimmten Punkt  $P = x, y, z$  des Raumes gehenden Paraboloiden  $\lambda, \mu, \nu$  § 123, (7)–(9) sind nach § 70, (26) in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem  $Oxyz = OXYZ$ :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{yY}{\beta - \lambda} + \frac{zZ}{\gamma - \lambda} + X + x + \lambda = 0, \\ \frac{yY}{\beta - \mu} + \frac{zZ}{\gamma - \mu} + X + x + \mu = 0, \\ \frac{yY}{\beta - \nu} + \frac{zZ}{\gamma - \nu} + X + x + \nu = 0. \end{cases}$$

Die *Normalen*  $\xi, \eta, \zeta$  dieser drei Ebenen im Punkte  $P$  haben die Richtungskosinus:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_1 = l, & \beta_1 = \frac{ly}{\beta - \lambda}, & \gamma_1 = \frac{lz}{\gamma - \lambda}, \\ \alpha_2 = m, & \beta_2 = \frac{my}{\beta - \mu}, & \gamma_2 = \frac{mz}{\gamma - \mu}, \\ \alpha_3 = n, & \beta_3 = \frac{ny}{\beta - \nu}, & \gamma_3 = \frac{nz}{\gamma - \nu}, \end{cases}$$

wo  $l^2, m^2, n^2$  die unter (4) eingeführten Werte haben und  $l, m, n$  die positiven Wurzeln bedeuten mögen.

Das neue Achsensystem  $P\xi\eta\zeta$  ist nach § 123, 6 ebenso wie das alte  $OXYZ$  *rechtwinklig*. Zwischen den alten  $X, Y, Z$  und den neuen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  des laufenden Punktes bestehen die Relationen (I § 37, (13)):

$$(12) \quad \begin{cases} X-x = l\xi + m\eta + n\xi, \\ Y-y = y \left( \frac{l\xi}{\beta-\lambda} + \frac{m\eta}{\beta-\mu} + \frac{n\xi}{\beta-\nu} \right), \\ Z-z = z \left( \frac{l\xi}{\gamma-\lambda} + \frac{m\eta}{\gamma-\mu} + \frac{n\xi}{\gamma-\nu} \right). \end{cases}$$

**5. Berührungskegel eines Paraboloids des konfokalen Systems.**

Der von einem Punkte  $P = x, y, z$  an die Fläche:

$$(13) \quad \frac{Y^2}{\beta-\tau} + \frac{Z^2}{\gamma-\tau} + 2X + \tau = 0$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 70, (33) in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  die Gleichung:

$$(14) \quad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15) \quad \begin{cases} R = \frac{(Y-y)^2}{\beta-\tau} + \frac{(Z-z)^2}{\gamma-\tau}, \\ S = \frac{y(Y-y)}{\beta-\tau} + \frac{z(Z-z)}{\gamma-\tau} + (X-x), \\ T = \frac{y^2}{\beta-\tau} + \frac{z^2}{\gamma-\tau} + 2x + \tau \quad (\text{wie in (1)}). \end{cases}$$

**6. Darstellung von  $R$  und  $S$  in den neuen Koordinaten.**

Durch die Substitution (12) wird:

$$R = \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)^2} \right\} l^2 \xi^2 + \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)^2} + \dots \right\} m^2 \eta^2 \\ + \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)^2} + \dots \right\} n^2 \xi^2 + 2 \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)(\beta-\nu)} + \dots \right\} mn\eta\xi \\ + 2 \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\nu)(\beta-\lambda)} + \dots \right\} nl\xi\xi + 2 \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} \dots \right\} lm\xi\eta$$

oder nach (8) und (6):

$$R = \left\{ \frac{T}{(\tau-\lambda)^2} - \frac{1}{(\tau-\lambda)l^2} \right\} l^2 \xi^2 + \dots + \dots + 2 \frac{T}{(\tau-\mu)(\tau-\nu)} mn\eta\xi + \dots + \dots$$

oder:

$$(16) \quad R = T \left\{ \frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu} + \frac{n\xi}{\tau-\nu} \right\}^2 - \left\{ \frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu} + \frac{\xi^2}{\tau-\nu} \right\}.$$

Ebenso wird:

$$S = \left\{ \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)} + \frac{z^2}{(\gamma-\tau)(\gamma-\lambda)} + 1 \right\} l\xi + \dots + \dots$$

oder nach (3):

$$(17) \quad S = T \left\{ \frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu} + \frac{n\xi}{\tau-\nu} \right\}.$$

**7. Die Hauptachsengleichung des Berührungskegels.** Mit den Werten (16) und (17) nimmt die Gleichung (14) die Form an:

$$(18) \quad \frac{\xi^2}{\tau - \lambda} + \frac{\eta^2}{\tau - \mu} + \frac{\zeta^2}{\tau - \nu} = 0.$$

Dies ist die Gleichung des vom Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  an die Fläche  $\tau$  des konfokalen Systems gelegten Berührungskegels in bezug auf das neue Koordinatensystem  $P\xi\eta\zeta$ .

*Der von einem Punkte  $P$  des Raumes an eine Fläche  $\tau$  des konfokalen Systems gelegte Berührungskegel hat als Hauptachsen die Normalen  $\xi, \eta, \zeta$  der drei durch den Punkt  $P$  gehenden Paraboloiden  $\lambda, \mu, \nu$  des Systems.<sup>102)</sup>*

**8. Die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids.** Die Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloids:

$$(19) \quad \frac{Y^2}{\beta - \mu} + \frac{Z^2}{\gamma - \mu} + 2X + \mu = 0,$$

das durch den Punkt  $P = x, y, z = \lambda, \mu, \nu$  hindurchgeht, hat statt der zweiten (10) auch die Gleichung:

$$(20) \quad \frac{y(Y - y)}{\beta - \mu} + \frac{z(Z - z)}{\gamma - \mu} + (X - x) = 0,$$

wobei:

$$(21) \quad \frac{y^2}{\beta - \mu} + \frac{z^2}{\gamma - \mu} + 2x + \mu = 0.$$

Der laufende Punkt  $X, Y, Z$  der beiden Erzeugenden des Paraboloids  $\mu$ , die durch  $P = x, y, z$  hindurchgehen, genügt (§ 67, (28)) den beiden Gleichungen (19) und (20). Infolge von (10) und (21) kann aber die Gleichung (19) auch in der Form:

$$(22) \quad \frac{(Y - y)^2}{\beta - \mu} + \frac{(Z - z)^2}{\gamma - \mu} = 0$$

geschrieben werden, so daß die Erzeugenden durch (20) und (22) dargestellt sind.

**9. Die Hauptachsengleichung der Erzeugenden.** Durch die Transformation (12) wird nun aus (20) mit Rücksicht auf (5) und (4):

$$(23) \quad \eta = 0$$

und aus (22):

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \lambda)^2} + \dots \right\} l^2 \xi^2 + \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \mu)^3} + \dots \right\} m^2 \eta^2 + \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \mu)(\beta - \nu)^2} + \dots \right\} n^2 \zeta^2 \\ & + 2 \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \mu)^2(\beta - \nu)} + \dots \right\} m n \eta \zeta + 2 \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)} + \dots \right\} n l \zeta \xi \\ & + 2 \left\{ \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)^2} + \dots \right\} l m \xi \eta = 0 \end{aligned}$$

und nach (9) und (7), indem überdies  $\eta = 0$  gesetzt wird:

$$(24) \quad \frac{\xi^2}{\mu - \lambda} + \frac{\zeta^2}{\mu - \nu} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids  $\mu$  im Punkte  $\lambda, \mu, \nu$  in bezug auf die Normalen der beiden Flächen  $\lambda$  und  $\nu$ .

Diese Normalen sind also die *Hauptachsen* (Halbierungslinien) der Erzeugenden.

Ebenso sind die Normalen der Flächen  $\mu$  und  $\nu$  oder  $\lambda$  und  $\mu$  die Hauptachsen der *imaginären Linienpaare*, in denen die *elliptischen* Paraboloiden  $\lambda$  oder  $\nu$  von ihren Tangentialebenen im Punkte  $\lambda, \mu, \nu$  geschnitten werden.

Ebene Schnitte, die zu einer solchen Tangentialebene parallel sind, haben nach § 110, 6 dieselben Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten (§ 121, (36)).

### § 125. Tangentialkegel, Tangenten und Tangentialebenenpaare.

#### 1. Das System konfokaler Berührungskegel an einem Punkte.

Der von einem Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  an die Fläche:

$$(1) \quad \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + 2x + \tau = 0$$

gelegte Berührungskegel hat nach § 124, (18) die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\xi^2}{\lambda - \tau} + \frac{\eta^2}{\mu - \tau} + \frac{\zeta^2}{\nu - \tau} = 0,$$

während die Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids  $\mu$ , die durch  $P$  gehen, nach § 124, (23); (24) durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{\xi^2}{\lambda - \mu} + \frac{\zeta^2}{\nu - \mu} = 0, \quad \eta = 0$$

dargestellt sind.

Daher gilt auch hier der Satz § 122, 1.

Der Kegel (2) ist reell für  $\nu > \tau > \lambda$ . Es geht daher von  $P$  ein reeller Berührungskegel an jedes linke und rechte Paraboloid, außerhalb dessen  $P$  liegt (§ 123, 3), und an jedes hyperbolische Paraboloid des Systems (1).

Für das hyperbolische Paraboloid  $\tau = \mu$  zerfällt der Kegel (§ 122, 2) in ein reelles, für die elliptischen Paraboloiden  $\tau = \lambda$  und  $\nu$  in ein imaginäres Strahlenpaar.

Die durch die beiden Gleichungen § 122, (4) im vorliegenden Falle dargestellten *Fokalkegel des Punktes*  $P = \lambda, \mu, \nu$  sind die über den beiden Fokalparabeln errichteten Kegel.

**2. Die vier Fokalstrahlen eines Punktes.** Die in § 122, 3—4 abgeleiteten Sätze gelten auch für das konfokale System der Paraboloiden, nur daß an Stelle des einschaligen Hyperboloids  $\mu$  in dem Satze § 122, 3, II das hyperbolische Paraboloid eintritt.

Die Gleichungen der vier gemeinsamen Transversalen der beiden Fokalparabeln können statt in der Form § 122, (9) nach § 124, (4) auch in der Form:

$$(4) \quad \xi = l\sigma, \quad \eta = \varepsilon_2 m\sigma, \quad \zeta = \varepsilon_3 n\sigma$$

dargestellt werden. Entsprechend § 122, 4 ist auch hier als positive Richtung jeder der vier Transversalen diejenige genommen, die mit der  $\xi$ -Achse, also nach § 124, (11) der äußeren Normale des linken elliptischen Paraboloides  $\lambda$  (§ 35, Fig. 88), einen spitzen Winkel bildet.

Da aber nach § 124, (11)  $l, m, n$  die Richtungskosinus der  $x$ -Achse gegen  $P\xi\eta\zeta$  sind, so ergibt sich, daß *die eine der vier gemeinsamen Transversalen* ( $\varepsilon_2, \varepsilon_3 = 1$ ) *stets der  $x$ -Achse parallel und gleichgerichtet ist.* Es ist diejenige die von  $P$  nach dem gemeinsamen unendlich fernen Punkt der beiden Fokalparabeln läuft.

Von dieser Transversale abgesehen, sind also noch *drei Fokalstrahlen*  $\varepsilon_2, \varepsilon_3 = +, -; -+; --$  dem Punkte  $P$  eigentümlich.

Die übrigen Sätze § 122, 4—8 und 10 übertragen sich auch auf die konfokalen Paraboloiden.

**3. Gleichseitige und dual gleichseitige Berührungskegel.** Die Bedingung § 122, (10) für einen gleichseitigen Kegel (2) wird, mit Rücksicht auf die aus der Identität § 123, (12) folgenden Formeln:

$$(5) \quad \begin{cases} \beta + \gamma - 2x = \lambda + \mu + \nu, \\ \beta\gamma - 2(\beta + \gamma)x - y^2 - z^2 = \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu, \\ -2\beta\gamma x - \gamma y^2 - \beta z^2 = \lambda\mu\nu: \end{cases}$$

$$\{-y^2 - z^2 + \beta\gamma - 2(\beta + \gamma)x\} + 2(2x - \beta - \gamma)\tau + 3\tau^2 = 0$$

oder auch:

$$(6) \quad y^2 + z^2 + \{(\beta - \tau) + (\gamma - \tau)\}(2x + \tau) - (\beta - \tau)(\gamma - \tau) = 0.$$

*Der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel des Paraboloids:*

$$(7) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

ist daher (§ 100, (21)) *das Rotationsparaboloid*<sup>66</sup>:

$$(8) \quad y^2 + z^2 + 2(b^2 + c^2)x - b^2c^2 = 0.$$

Die Bedingung § 122, (14) wird nach (5):

$$(9) \quad (\beta - \tau) + (\gamma - \tau) - (2x + \tau) = 0.$$

Der Ort der Spitzen dual gleichseitiger Berührungskegel des Paraboloids (7) ist daher (§ 100, (22)) die Ebene:

$$(10) \quad b^2 + c^2 - 2x = 0.$$

**4. Die Fokalachsen der Paraboloid.** Die Involution harmonischer Polarebenen, welche das Paraboloid:

$$(11) \quad \beta v^2 + \gamma w^2 + 2us = 0$$

an der Schnittlinie  $g$  der beiden Ebenen  $u_1, v_1, w_1, s_1$  und  $u_2, v_2, w_2, s_2$  bestimmt, hat nach § 77, (4) die Gleichung:

$$(\beta v_1^2 + \gamma w_1^2 + 2u_1 s_1) + (\beta v_1 v_2 + \gamma w_1 w_2 + u_1 s_2 + u_2 s_1)(\lambda' + \lambda'') + (\beta v_2^2 + \gamma w_2^2 + 2u_2 s_2)\lambda' \lambda'' = 0.$$

Der Vergleich mit § 122, (19) gibt für eine Involution rechtwinkliger Ebenen die Bedingungen:

$$(12) \quad \begin{cases} (\beta - \tau)v_1^2 + (\gamma - \tau)w_1^2 + 2u_1 s_1 - \tau u_1^2 = 0, \\ (\beta - \tau)v_1 v_2 + (\gamma - \tau)w_1 w_2 + u_1 s_2 + u_2 s_1 - \tau u_1 u_2 = 0, \\ (\beta - \tau)v_2^2 + (\gamma - \tau)w_2^2 + 2u_2 s_2 - \tau u_2^2 = 0. \end{cases}$$

Dies sind aber nach § 83, (13'); (14') die Bedingungen dafür, daß die Gerade  $g$  eine Erzeugende der Fläche:

$$(13) \quad (\beta - \tau)v^2 + (\gamma - \tau)w^2 + 2us - \tau u^2 = 0$$

ist, also nach § 123, (15):

*Die Fokalachsen eines Paraboloids sind die Erzeugenden aller zu ihm konfokalen Paraboloid.*

## II. Kapitel.

### Die Amiot- Mac Cullagh'schen und Jacobischen Fokaleigenschaften.

#### § 126. Schräge Abstände und Abstandsprodukte.

##### 1. Der schräge Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Eine zur  $z$ -Achse des rechtwinkligen Systems  $Oxyz$  parallele Gerade  $p$  sei durch die Gleichungen:

$$(1) \quad x = x_1, \quad y = y_1$$

gegeben und ein durch die  $x$ -Achse (Fig. 187) oder  $y$ -Achse gehendes Ebenenpaar bezüglich durch die Gleichungen:

$$(2) \quad \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0, \quad (2') \quad \alpha^2 x^2 - \gamma^2 z^2 = 0.$$

Die Richtungskosinus der Normale einer Ebene des Paares verhalten sich wie:

$$(3) \quad 0 : \beta : \pm \gamma, \quad (3') \quad \alpha : 0 : \pm \gamma.$$

Ist nun  $x_1, y_1, z_1$  der Endpunkt des schrägen Abstandes  $s$  eines Punktes  $P = x, y, z$  von der Geraden (1), parallel einer der beiden Ebenen (2)

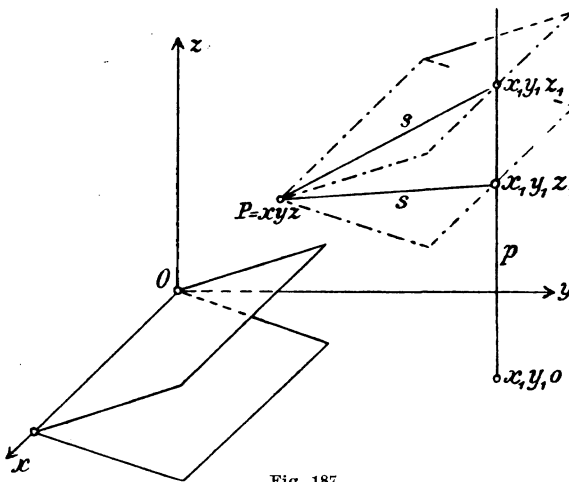


Fig. 187.

(Fig. 187), bezüglich (2') gemessen, so wird:

$$(4) \quad s^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

während  $z_1$  durch die Bedingung bestimmt ist, daß  $s$  zur Richtung (3) oder (3') senkrecht ist, also:

$$(5) \quad \beta(y - y_1) \pm \gamma(z - z_1) = 0,$$

$$(5') \quad \alpha(x - x_1) \pm \gamma(z - z_1) = 0.$$

Eliminiert man mittels (5) oder (5')  $z - z_1$  aus (4), so folgt unabhängig von der Wahl des Vorzeichens in (5), (5'):

$$(6) \quad s^2 = (x - x_1)^2 + \left(1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)(y - y_1)^2, \quad (6') \quad s^2 = \left(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Das Quadrat der beiden einander gleichen schrägen Abstände  $s$  eines Punktes  $x, y, z$  von der Geraden (1), gemessen parallel den beiden Ebenen (2) (Fig. 187) oder (2') hat bezüglich den Wert (6) oder (6').

## 2. Deutung eines gegebenen Ausdruckes als schrägen Abstand.

Ist umgekehrt ein Ausdruck von der Form:

$$(7) \quad N^2 = l^2(x - x_1)^2 + m^2(y - y_1)^2$$

gegeben, so muß man zum Vergleich mit (6) und (6') die beiden Fälle unterscheiden:

$$(8) \quad m^2 > l^2 \quad \text{oder} \quad l^2 > m^2.$$

Setzt man dementsprechend:

$$(9) \quad N^2 = l^2 \left\{ (x - x_1)^2 + \frac{m^2}{l^2} (y - y_1)^2 \right\}, \quad (9') \quad N^2 = m^2 \left\{ \frac{l^2}{m^2} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \right\},$$

so gehen die eingeklammerten Ausdrücke (9) und (9') in (6) und (6') über mit:

$$\frac{m^2}{l^2} = 1 + \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \quad \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{m^2 - l^2}{l^2}; \quad \frac{l^2}{m^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \quad \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{l^2 - m^2}{m^2}.$$

Der Ausdruck (7) ist also bis auf einen konstanten Faktor das Quadrat des schrägen Abstandes  $s$  des Punktes  $x, y, z$  von der zur  $z$ -Achse parallelen Geraden (1), und zwar wird, je nachdem  $m^2 > l^2$  oder  $l^2 > m^2$  ist:

$$(10) \quad l^2(x - x_1)^2 + m^2(y - y_1)^2 = l^2 s^2 \quad \text{oder} \quad m^2 s^2,$$

wo  $s$  bezüglich parallel dem Ebenenpaar:

$$(11) \quad (m^2 - l^2)y^2 - l^2z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (l^2 - m^2)x^2 - m^2z^2 = 0$$

gemessen ist.

Mit Vertauschung von  $y$  und  $z$  folgt ebenso:

Der Ausdruck:

$$(12) \quad l^2(x - x_1)^2 + n^2(z - z_1)^2$$

ist bis auf einen konstanten Faktor das Quadrat des schrägen Abstandes  $s$  des Punktes  $x, y, z$  von der zur  $y$ -Achse parallelen Geraden:

$$(13) \quad x = x_1, \quad z = z_1,$$

und zwar wird, je nachdem  $n^2 > l^2$  oder  $l^2 > n^2$  ist:

$$(14) \quad l^2(x - x_1)^2 + n^2(z - z_1)^2 = l^2s^2 \quad \text{oder} \quad n^2s^2,$$

wo  $s$  bezüglich parallel dem Ebenenpaar:

$$(15) \quad (n^2 - l^2)z^2 - l^2y^2 = 0 \quad \text{oder} \quad (l^2 - n^2)x^2 - n^2y^2 = 0$$

gemessen ist.

**3. Anwendung auf den elliptischen Zylinder.** Setzt man in (7), (10) und (11):

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad l^2 = \frac{1}{a^2}, \quad m^2 = \frac{1}{b^2}; \quad a^2 > b^2,$$

so nehmen die Gleichungen (10) und (11) die Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{s^2}{a^2}, \quad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \frac{1}{a^2}z^2 = 0.$$

Bedeutet daher  $s$  den schrägen Abstand des laufenden Punktes  $x, y, z$  von der  $z$ -Achse, parallel zu einer der beiden Ebenen:

$$(16) \quad (a^2 - b^2)y^2 - b^2z^2 = 0, \quad a^2 > b^2,$$

gemessen, so besteht identisch in  $x, y, z$  die Gleichung:

$$(17) \quad a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = s^2 - a^2.$$

Aus dieser Identität folgt:

Der elliptische Zylinder:

$$(18) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2,$$

ist der Ort der Punkte, deren schräger Abstand  $s$  von der  $z$ -Achse, parallel zu einer der Ebenen (16) gemessen, den festen Wert  $a$  hat.

Die den Ebenen (16) parallelen Ebenen bilden die zwei Scharen von Kreisschnittebenen des elliptischen Zylinders (§ 59, (26)).

**4. Das Produkt der Abstände eines Punktes von zwei Ebenen.**

Ein Paar von Ebenen, die der  $z$ -Achse parallel sind (Fig. 188), sei durch die Gleichung:

$$(19) \quad \alpha^2(x - x_1)^2 - \beta^2(y - y_1)^2 = 0$$



gegeben. Die senkrechten Abstände  $r_1$  und  $r_2$  eines Punktes  $P = x, y, z$  von ihnen sind alsdann (I § 41, (6)):

$$r_1 = \frac{\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1)}{\varepsilon_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad r_2 = \frac{\alpha(x - x_1) - \beta(y - y_1)}{\varepsilon_2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

wo  $\varepsilon_1 = \pm 1$ ,  $\varepsilon_2 = \pm 1$  ist.

Das Produkt der senkrechten Abstände  $r_1, r_2$  eines Punktes  $x, y, z$  von den beiden Ebenen (19) ist:

$$(20) \quad r_1 r_2 = \frac{\alpha^2(x - x_1)^2 - \beta^2(y - y_1)^2}{\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Für das Vorzeichen von  $\varepsilon$  kann:

$$(21) \quad \varepsilon = \text{sign}(\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 y_1^2)$$

gewählt werden, womit das Produkt in dem die  $z$ -Achse ( $x = 0, y = 0$ ) enthaltenden Winkelraume der Ebenen positiv ist.

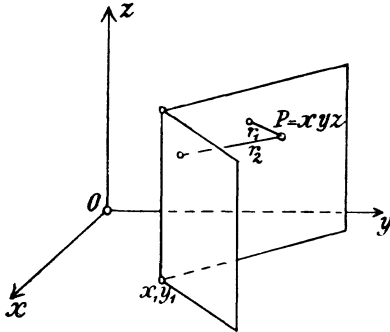


Fig. 188.

### 5. Deutung eines gegebenen Ausdruckes als Abstandsprodukt.

Ist umgekehrt ein Ausdruck von der Form:

$$(22) \quad N^2 = l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2$$

gegeben, so ergibt sich aus (20):

Der Ausdruck (22) ist bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der Abstände  $r_1$  und  $r_2$  des Punktes  $x, y, z$  von den durch die Achse:

$$(23) \quad x = x_1, \quad y = y_1$$

gehenden Ebenen:

$$(24) \quad l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = 0,$$

und zwar wird:

$$(25) \quad l^2(x - x_1)^2 - m^2(y - y_1)^2 = \varepsilon(l^2 + m^2)r_1 r_2.$$

Hier ist:

$$(26) \quad \varepsilon = \text{sign}\{l^2(x_0 - x_1)^2 - m(y_0 - y_1)^2\},$$

wenn das Produkt in dem eine gegebene Gerade  $x = x_0, y = y_0$  enthaltenden Winkelraume der Ebenen (24) positiv gilt.

Mit Vertauschung von  $y$  und  $z$  folgt ebenso:

Der Ausdruck:

$$(27) \quad l^2(x - x_1)^2 - n^2(z - z_1)^2$$

ist bis auf einen konstanten Faktor das Produkt der Abstände  $r_1$  und  $r_2$  des Punktes  $x, y, z$  von den durch die Achse:

$$(28) \quad x = x_1, \quad z = z_1$$

gehenden Ebenen:

$$(29) \quad l^2(x - x_1)^2 - n^2(z - z_1)^2 = 0,$$

und zwar wird:

$$(30) \quad l^2(x - x_1)^2 - n^2(z - z_1)^2 = \varepsilon(l^2 + n^2)r_1 r_2.$$

Hier ist:

$$(31) \quad \varepsilon = \text{sign}\{l^2(x_0 - x_1)^2 - n^2(z_0 - z_1)^2\},$$

wenn das Produkt in dem die Gerade  $x = x_0, z = z_0$  enthaltenden Winkelraume der Ebenen (29) positiv gilt.

**6. Anwendung auf den hyperbolischen Zylinder.** Setzt man in (23), (24), (25):

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad l^2 = \frac{1}{a^2}, \quad m^2 = \frac{1}{b^2},$$

so nehmen die Gleichungen (25) und (24) die Form an:

$$(32) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)r_1 r_2, \quad (33) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

wobei das Produkt  $r_1 r_2$  in dem die Ebene  $y = 0$  enthaltenden Winkelraum positiv gilt.

Aus der Identität:

$$(34) \quad \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right\} = r_1 r_2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

folgt alsdann:

*Der hyperbolische Zylinder:*

$$(35) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist der Ort eines Punktes, für den das Produkt der Abstände  $r_1, r_2$  von zwei festen Ebenen (33) den konstanten Wert  $a^2 b^2 : a^2 + b^2$  hat (§ 1, 11).

Die Ebenen (33) sind die *Asymptotenebenen* des Zylinders (§ 53, (31)).

## § 127. Brennpunkt-Direktrix-Eigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide.

**1. Eine auf zwei konfokale Flächen mit Mittelpunkt bezügliche Identität.** Die beiden Flächen:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a^2 > b^2 > c^2), \quad (2) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1 (a'^2 > b'^2 > c'^2)$$

sollen konfokal sein, sodaß (§ 55, (24)):

$$(3) \quad a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2,$$

wo  $h^2$  den gemeinsamen Wert der drei Differenzen bezeichnet.

Sind nun  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  irgend zwei Punkte des Raumes, so ist:

$$h^2 \left\{ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - \left( \frac{x_0^2}{a'^2} + \frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} - 1 \right) \right\} \\ = (a^2 - a'^2) \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a'^2} \right) + (b^2 - b'^2) \left( \frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2} \right) + (c^2 - c'^2) \left( \frac{z^2}{c^2} - \frac{z_0^2}{c'^2} \right).$$

Da aber:

$$(a^2 - a'^2) \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a'^2} \right) = (x - x_0)^2 - \left( \frac{a'}{a} x - \frac{a}{a'} x_0 \right)^2,$$

so folgt:

I. Sind die Flächen (1) und (2) konfokal und bezeichnet  $h^2$  den gemeinsamen Wert der drei Differenzen (3), so besteht identisch in  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  die Gleichung:

$$(4) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - \left( \frac{x_0^2}{a'^2} + \frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} - 1 \right) \right\} \\ = \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \} \\ - \left\{ \left( \frac{a'}{a} x - \frac{a}{a'} x_0 \right)^2 + \left( \frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0 \right)^2 + \left( \frac{c'}{c} z - \frac{c}{c'} z_0 \right)^2 \right\}.$$

Wird  $c^2$  durch  $-c^2$  ersetzt, also  $c$  durch  $ci$ , so ändert sich auf der rechten Seite der Identität (4) das Vorzeichen des dritten Quadrats in der zweiten Klammer. Wird aber gleichzeitig  $c^2$  durch  $-c^2$  und  $c'^2$  durch  $-c'^2$  ersetzt, so ändert sich die rechte Seite von (4) nicht. Entsprechendes gilt für  $b^2$  und  $b'^2$ .

2. Die Identität des Amiot-Mac Cullagh'schen Satzes. Ordnet man dem Punkte  $P_0 = x_0, y_0, z_0$  durch die Beziehung:

$$(5) \quad \frac{x_1}{a^2} = \frac{x_0}{a'^2}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{y_0}{b'^2}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z_0}{c'^2}$$

einen Punkt  $P_1 = x_1, y_1, z_1$  als *entsprechenden Punkt* zu, so nimmt (4) die Form an:

$$(6) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - \left( \frac{x_0^2}{a'^2} + \frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} - 1 \right) \right\} \\ = \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \} \\ - \left\{ \frac{a'^2}{a^2} (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} (y - y_1)^2 + \frac{c'^2}{c^2} (z - z_1)^2 \right\}.$$

Ist endlich  $P_0 = x_0, y_0, z_0$  ein Punkt des Hauptschnittes:

$$(7) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1, \quad z = 0 \quad \text{oder} \quad (7') \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1, \quad y = 0,$$

der Fläche (2), so ergibt sich:

II. Ist  $P_0 = x_0, y_0, 0$  oder  $P_0 = x_0, 0, z_0$  ein Punkt des Hauptschnittes  $z = 0$  oder  $y = 0$  der Fläche (2) und wird ein entsprechender Punkt  $P_1 = x_1, y_1, 0$  oder  $P_1 = x_1, 0, z_1$  der Hauptebene definiert durch:

$$(8) \quad x_1 = \frac{a^2}{a'^2} x_0, \quad y_1 = \frac{b^2}{b'^2} y_0 \quad \text{oder} \quad (8') \quad x_1 = \frac{a^2}{a'^2} x_0, \quad z_1 = \frac{c^2}{c'^2} z_0,$$

so ist identisch in  $x, y, z$ :

$$(9) \quad h^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \\ = \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \} - \left\{ \frac{a'^2}{a^2} (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} (y - y_1)^2 + \frac{c'^2}{c^2} z^2 \right\},$$

$$(9') \quad h^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \\ = \{ (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 \} - \left\{ \frac{a'^2}{a^2} (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} y^2 + \frac{c'^2}{c^2} (z - z_1)^2 \right\}.$$

**3. Ausartung der zweiten Fläche.** Mit  $c'^2 = 0$  oder  $b'^2 = 0$  (§ 120, 4) wird nach (3):

$h^2 = c^2$ ,  $a'^2 = a^2 - c^2$ ,  $b'^2 = b^2 - c^2$  oder  $h^2 = b^2$ ,  $a'^2 = a^2 - b^2$ ,  $c'^2 = c^2 - b^2$ ,  
und die Hauptschnitte (7), (7') gehen in die Fokalellipse oder Fokalhyperbel (§ 55, (10)):

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0$$

der Fläche (1) über. Setzt man alsdann noch (§ 55, (6)):

$$b^2 = a^2 - d^2, \quad c^2 = a^2 - e^2,$$

und damit bezüglich:

$$h^2 = a^2 - e^2, \quad a'^2 = e^2, \quad b'^2 = e^2 - d^2 \quad \text{oder} \quad h^2 = a^2 - d^2, \quad a'^2 = d^2, \quad c'^2 = d^2 - e^2,$$

so ergibt sich als Sonderfall von II:

III. Ist  $P_0 = x_0, y_0, 0$  oder  $P_0 = x_0, 0, z_0$  ein Punkt der Fokalellipse, bezüglich Fokalhyperbel:

$$(10) \quad \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1, \quad z = 0, \quad (10') \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 1, \quad y = 0$$

der Fläche:

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1,$$

und wird ihm ein entsprechender Punkt  $P_1 = x_1, y_1, 0$  oder  $P_1 = x_1, 0, z_1$  in der Ebene des Fokalkegelschnittes durch die Formeln:

$$(12) \quad x_1 = \frac{a^2}{e^2} x_0, \quad y_1 = \frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2} y_0 \quad \text{oder} \quad (12') \quad x_1 = \frac{a^2}{d^2} x_0, \quad z_1 = \frac{a^2 - e^2}{d^2 - e^2} z_0$$

zugeordnet, so ist identisch in  $x, y, z$  (§ 4, (27)):

$$(13) \quad (a^2 - e^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1 \right\} \\ = \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \} - \left\{ \frac{e^2}{a^2} (x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2} (y - y_1)^2 \right\}.$$

$$(13') \quad (a^2 - d^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1 \right\} \\ = \{ (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 \} - \left\{ \frac{d^2}{a^2} (x - x_1)^2 + \frac{d^2 - e^2}{a^2 - e^2} (z - z_1)^2 \right\}.$$

**4. Abhängigkeit des Punktes  $P_1$  von  $P_0$ .** Die Gleichungen des ersten und zweiten Hauptschnittes der Fläche (11) lauten:

$$(14) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} = 1, \quad (14') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Die Polare irgend eines Punktes  $x_1, y_1$  oder  $x_1, z_1$  in bezug auf diesen ist nach § 20, (6):

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{a^2 - d^2} = 1, \quad \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{z_1 z}{a^2 - e^2} = 1.$$

Die Polare des Punktes (12) oder (12') wird folglich:

$$(15) \quad \frac{x_0 x}{e^2} + \frac{y_0 y}{e^2 - d^2} = 1, \quad (15') \quad \frac{x_0 x}{d^2} + \frac{z_0 z}{d^2 - e^2} = 1.$$

Dies ist aber nach § 13, (3) die Tangente im Punkte  $x_0, y_0$  der Fokalellipse (10) oder im Punkte  $x_0, z_0$  der Fokalhyperbel (10'). Somit ergibt sich auch umgekehrt (§ 18, 4):

I. *Der Punkt  $P_1$  in (12) oder (12') ist der Pol der im Punkte  $P_0 = x_0, y_0$  oder  $x_0, z_0$  an die Fokalellipse (Fig. 189) oder Fokalhyperbel gelegten Tangente in bezug auf den zugehörigen Hauptschnitt der Fläche.*

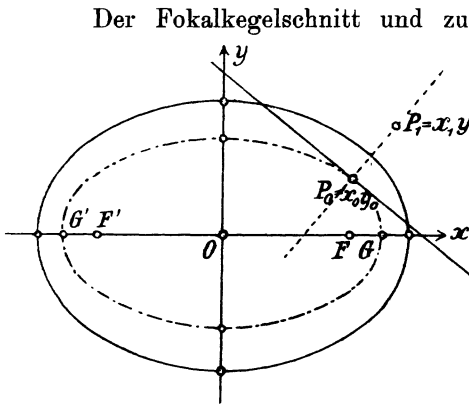


Fig. 189.

§ 55, 7 konfokal, der Ort der Pole einer Geraden aber in bezug auf ein System konfokaler Kegelschnitte ist nach § 32, 12 die Normale der Geraden in ihrem Berührungspunkt mit dem von ihr berührten Kegelschnitt des konfokalen Systems. Daraus folgt:

II. *Die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte  $P_0$  und  $P_1$  steht in  $P_0$  auf der Tangente der Fokalellipse (Fig. 189), beziehungsweise Fokalhyperbel senkrecht.*

**5. Brennpunkt und Direktrix.** Die im Punkte (12) auf der  $xy$ -Ebene oder die im Punkte (12') auf der  $xz$ -Ebene errichtete Senkrechte mit den Gleichungen:

$$(16) \quad x = x_1 = \frac{a^2}{e^2} x_0, \quad y = y_1 = \frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2} y_0,$$

$$(16') \quad x = x_1 = \frac{a^2}{d^2} x_0, \quad z = z_1 = \frac{a^2 - e^2}{d^2 - e^2} z_0$$

heißt die dem Brennpunkte  $P_0 = x_0, y_0$  oder  $x_0, z_0$  (§ 55, 6, 3. Absatz) entsprechende Direktrix.<sup>14)</sup>

Die einem Punkte  $P_0$  eines Fokalkegelschnittes entsprechende Direktrix ist die auf der Ebene des letzteren errichtete Senkrechte  $p_0$  (Fig. 190), deren Fußpunkt  $P_1$  der Pol der Tangente des Fokalkegelschnittes in  $P_0$  mit Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist.

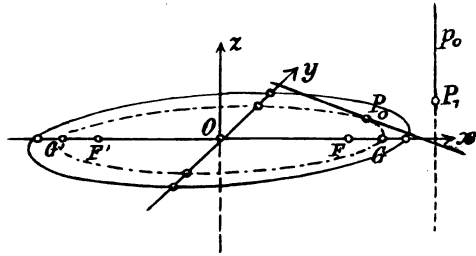


Fig. 190.

Zu den Scheitelpunkten:

$$(17) \quad G, G' = \pm e, 0, 0;$$

$$H, H' = 0, \pm \sqrt{e^2 - d^2}, 0;$$

$$F, F' = \pm d, 0, 0$$

der Fokalellipse und Fokalhyperbel gehören nach (16); (16') die Direktrizen:

$$(18) \quad x = \pm \frac{a^2}{e}, y = 0; \quad x = 0, y = \pm \frac{a^2 - d^2}{\sqrt{e^2 - d^2}}; \quad x = \pm \frac{a^2}{d}, z = 0,$$

also die Direktrizen der drei Hauptschnitte  $y = 0, x = 0, z = 0$  der Fläche (11) im Sinne von § 4, (24).

Da die Brennpunkte  $x_0, y_0, 0$  und  $x_0, 0, z_0$  den Gleichungen (10) und (10') genügen, so erfüllen die Punkte der Geraden (16) und (16') die Gleichungen:

$$(19) \quad \frac{e^2 x^2}{a^4} + \frac{e^2 - d^2}{(a^2 - d^2)^2} y^2 = 1; \quad (19') \quad \frac{d^2 x^2}{a^4} + \frac{d^2 - e^2}{(a^2 - e^2)^2} z^2 = 1.$$

Der Ort der Direktrizen aller Punkte der Fokalellipse oder Fokalhyperbel ist der elliptische Zylinder (19) oder der hyperbolische (19').

Die Strahlenkoordinaten  $p_{ki}$  der Tangente (15) oder (15') sind (I § 48, (3)):

$$0, 0, 1, \frac{y_0}{e^2 - d^2}, -\frac{x_0}{e^2}, 0; \quad 0, 1, 0, -\frac{z_0}{d^2 - e^2}, 0, \frac{x_0}{d^2},$$

und die Strahlenkoordinaten  $p'_{ki}$  der Direktrix (16) oder (16'):

$$-\frac{a^2 - d^2}{e^2 - d^2} y_0, \frac{a^2}{e^2} x_0, 0, 0, 0, 1; \quad \frac{a^2 - e^2}{e^2 - d^2} z_0, 0, \frac{a^2}{d^2} x_0, 0, -1, 0.$$

Sie entsprechen nach § 82, (10) den Beziehungen reziproker Polaren der Fläche (11):

$$\begin{aligned} \varrho p'_{23} &= -\frac{p_{14}}{a^2}, & \varrho p'_{31} &= -\frac{p_{24}}{a^2 - d^2}, & \varrho p'_{12} &= -\frac{p_{34}}{a^2 - e^2}, \\ \varrho p'_{14} &= \frac{p_{23}}{(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)}, & \varrho p'_{24} &= \frac{p_{31}}{a^2(a^2 - e^2)}, & \varrho p'_{34} &= \frac{p_{12}}{a^2(a^2 - d^2)}. \end{aligned}$$

Die Direktrix eines Punktes  $P_0$  der Fokalellipse oder Fokalhyperbel ist die reziproke Polare der Tangente des Fokalkegelschnittes in ihm.

Da beide reziproken Polaren aufeinander senkrecht stehen, gehören sie nach § 85, 6; 8 dem Achsenkomplex der Fläche an.

**6. Die Unterscheidung der Amiot-Mac Cullagh'schen Fokaleigenschaften.** Das erste Glied auf der rechten Seite der Identitäten (13) und (13') ist das Quadrat des Abstandes  $r = \overline{PP_0}$  des laufenden Punktes  $P = x, y, z$  von dem Brennpunkt  $P_0 = x_0, y_0, 0$  oder  $P_0 = x_0, 0, z_0$ . Das zweite Glied dagegen ist nach § 126, 2; 5 bis auf einen konstanten Faktor  $m$  entweder das Quadrat des schrägen Abstandes  $s$  des Punktes  $P$  von der Direktrix  $p_0$  oder das Produkt der Abstände  $r_1$  und  $r_2$  von zwei durch  $p_0$  gehenden Ebenen. Infolgedessen hat die Gleichung (11) eine der beiden Bedeutungen:

$$r^2 = m^2 s^2 \quad \text{oder} \quad r^2 = m^2 r_1 r_2,$$

welche die *Mac Cullagh'sche* oder *Amiot'sche Fokaleigenschaft* enthalten.

Welche von den beiden Bedeutungen zutrifft, hängt von den Vorzeichen der Koeffizienten in den zweiten Gliedern der rechten Seiten von (13) und (13') ab und ist daher für die verschiedenen Arten der Mittelpunktsflächen verschieden.

**7. Das Ellipsoid.** Unter der Voraussetzung:

$$a^2 > e^2 > d^2$$

folgt mit:

$$l^2 = \frac{e^2}{a^2}, \quad m^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}; \quad l^2 - m^2 = \frac{d^2(a^2 - e^2)}{a^2(a^2 - d^2)}, \quad l^2 > m^2,$$

aus § 126, (10):

$$\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}(y - y_1)^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2} s^2;$$

und mit:

$$l^2 = \frac{d^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - e^2}; \quad l^2 + n^2 = \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)},$$

aus § 126, (30):

$$\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{d^2 - e^2}{a^2 - e^2}(z - z_1)^2 = \varepsilon \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)} r_1 r_2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') die Identitäten (§ 4, (28)):

$$(20) \quad \begin{cases} (a^2 - e^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1 \right\} = r^2 - \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2} s^2, \\ (a^2 - d^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1 \right\} = r^2 - \varepsilon \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(a^2 - e^2)} r_1 r_2, \end{cases}$$

wo  $r$  den Abstand des laufenden Raumpunktes  $P = x, y, z$  von einem festen Punkte  $P_0 = x_0, y_0, 0$  der Fokalellipse, bezüglich  $P_0 = x_0, 0, z_0$  der Fokalhyperbel;  $s$  den schrägen Abstand des Punktes  $P$  von der Direktrix des Punktes  $P_0$ , parallel den Ebenen (§ 126, (11)):

$$(21) \quad d^2 \frac{x^2}{a^2} - (e^2 - d^2) \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0$$

gemessen; und  $r_1, r_2$  die senkrechten Abstände von den beiden durch die Direktrix gehenden Ebenen (§ 126, (29)):

$$(22) \quad d^2 \frac{(x-x_1)^2}{a^2} - (e^2 - d^2) \frac{(z-z_1)^2}{a^2 - e^2} = 0$$

bedeuten.

Die Ebenen (21) sind nach § 58, (21') die Hauptkreisschnittebenen; die Ebenen (22) sind diesen parallel.

I. Für jeden Punkt des Ellipsoides (11) mit  $a^2 > e^2 > d^2$  ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte  $P_0$  der Fokalellipse und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich  $\sqrt{e^2 - d^2} : \sqrt{a^2 - d^2}$ , also auch unabhängig von  $P_0$ .

II. Für jeden Punkt des Ellipsoides (1) ist das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte der Fokalhyperbel und des Rechteckes aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreisschnittebenen konstant, gleich  $e^2(a^2 - d^2) : a^2(a^2 - e^2)$ .

Der erste Satz enthält die *Mac Cullaghsche*, der zweite die *Amiotsche Fokaleigenschaft*.<sup>16)</sup>

Wählt man als Punkt  $P_0$  den Scheitelpunkt  $H$  oder  $H'$  der kleinen Achse der Fokalellipse in (17), so liegt die entsprechende Direktrix (18) in der  $yz$ -Ebene parallel der  $z$ -Achse. Für die Punkte  $P$  des Hauptschnittes:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1$$

geht daher der den Hauptkreisschnittebenen, also der  $y$ -Achse parallele Abstand  $s$  in den senkrechten Abstand von der Direktrix über. In dem Satze I ist also die Brennpunkt-Direktrix-eigenschaft § 4, 6 des genannten Hauptschnittes unmittelbar enthalten.

8. Das einschalige Hyperboloid. Unter der Voraussetzung:

$$e^2 > a^2 > d^2$$

folgt mit:

$$l^2 = \frac{e^2}{a^2}, \quad m^2 = \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}; \quad m^2 - l^2 = \frac{d^2(e^2 - a^2)}{a^2(a^2 - d^2)}, \quad m^2 > l^2,$$

aus § 126, (10):

$$\frac{e^2}{a^2}(x-x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}(y-y_1)^2 = \frac{e^2}{a^2}s^2;$$

und mit:

$$l^2 = \frac{d^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2}; \quad n^2 - l^2 = \frac{e^2(a^2 - d^2)}{a^2(e^2 - a^2)} > 0, \quad n^2 > l^2,$$



aus § 126, (14):

$$\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2}(z - z_1)^2 = \frac{d^2}{a^2} s^2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') die *Identitäten*:

$$(23) \quad \begin{cases} (a^2 - e^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} - 1 \right\} = r^2 - \frac{e^2}{a^2} s^2, \\ (a^2 - d^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} - 1 \right\} = r^2 - \frac{d^2}{a^2} s^2, \end{cases}$$

wo  $r$  den Abstand des laufenden Punktes  $P = x, y, z$  von einem festen Punkte  $P_0 = x_0, y_0, 0$  der Fokalellipse, bezüglich  $P_0 = x_0, 0, z_0$  der Fokalhyperbel, und  $s$  den schrägen Abstand des Punktes  $P$  von der Direktrix des Punktes  $P_0$ , parallel den Ebenen:

$$(24) \quad d^2 \frac{y^2}{a^2 - d^2} - e^2 \frac{z^2}{e^2 - a^2} = 0$$

gemessen, bedeuten.

Die Ebenen (24) sind nach § 59, (21') die Hauptkreisschnittebenen.

Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist daher das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte der Fokalellipse oder Fokalhyperbel und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich  $e:a$  bezüglich  $d:a$ .

Beide Sätze enthalten die *Mac Cullaghsche* Fokaleigenschaft; die *Amiotsche* fehlt.

**9. Das zweischalige Hyperboloid.** Unter der Voraussetzung:

$$e^2 > d^2 > a^2$$

folgt mit:

$$l^2 = \frac{e^2}{a^2}, \quad m^2 = \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}; \quad l^2 + m^2 = \frac{d^2(e^2 - a^2)}{a^2(d^2 - a^2)},$$

aus § 126, (25):

$$\frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 - \frac{e^2 - d^2}{d^2 - a^2}(y - y_1)^2 = \varepsilon \frac{d^2(e^2 - a^2)}{a^2(d^2 - a^2)} r_1 r_2;$$

und mit:

$$l^2 = \frac{d^2}{a^2}, \quad n^2 = \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2}; \quad l^2 - n^2 = \frac{e^2(d^2 - a^2)}{a^2(e^2 - a^2)}, \quad l^2 > n^2,$$

aus § 126, (14):

$$\frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2}(z - z_1)^2 = \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2} s^2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') die *Identitäten*:

$$(25) \quad \begin{cases} (a^2 - e^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2 - a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} - 1 \right\} = r^2 - \varepsilon \frac{d^2(e^2 - a^2)}{a^2(d^2 - a^2)} r_1 r_2, \\ (a^2 - d^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{d^2 - a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} - 1 \right\} = r^2 - \frac{e^2 - d^2}{e^2 - a^2} s^2, \end{cases}$$

wo  $r$  den Abstand des laufenden Punktes  $x, y, z$  von einem festen Punkte  $P_0 = x_0, y_0, 0$  der Fokalellipse, bezüglich  $P_0 = x_0, 0, z_0$  der Fokalhyperbel;  $r_1, r_2$  die senkrechten Abstände von den beiden durch die Direktrix des Punktes  $P_0$  gehenden Ebenen:

$$(26) \quad e^2 \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - (e^2 - d^2) \frac{(y-y_1)^2}{d^2 - a^2} = 0;$$

$s$  den schrägen Abstand des Punktes  $P$  von der Direktrix des Punktes  $P_0$ , parallel den Ebenen:

$$(27) \quad e^2 \frac{x^2}{a^2} - (e^2 - d^2) \frac{y^2}{d^2 - a^2} = 0$$

gemessen, bedeuten.

Die Ebenen (27) sind nach § 60, (21') die Hauptkreisschnittebenen, die Ebenen (26) diesen parallel.

I. Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist daher das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte der Fokalellipse und des Rechteckes aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreisschnittebenen konstant, gleich  $d^2(e^2 - a^2) : a^2(d^2 - a^2)$ .

II. Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte der Fokalhyperbel und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich  $\sqrt{e^2 - d^2} : \sqrt{e^2 - a^2}$ .

Der erste Satz enthält die *Amiotsche*, der zweite die *Mac Cullaghsche* Fokaleigenschaft.

**10. Ebene Schnitte durch Brennpunkt und Direktrix.** Sei  $II$  die durch den Brennpunkt  $P_0$  und die Direktrix  $p_0$  gelegte Ebene, die Normalebene im Punkte  $P_0$  der Fokalkurve (Fig. 189), und  $S$  ein Punkt der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene  $II$ .

Dann liegt die Entfernung  $r$  der Punkte  $S$  und  $P_0$  in der Ebene  $II$ ; ebenso aber die schräge Entfernung  $s$  des Punktes  $S$  von der Direktrix  $p_0$ . Sie fällt in die Schnittlinie der Ebene  $II$  mit einer durch  $S$  gelegten Kreisschnittebene. Daher sind die *schrägen* Entfernungen  $s$  aller Punkte  $S$  von  $p_0$  untereinander parallel und somit den *senkrechten* Entfernungen  $s_0$  von  $p_0$  proportional. Ferner aber ist jede der beiden senkrechten Entfernungen  $r_1$  und  $r_2$  des Punktes  $S$  von den durch die Direktrix gehenden Ebenen proportional der in der Ebene  $II$  liegenden senkrechten Entfernung  $s_0$  von der Direktrix selbst, also das Produkt  $r_1 r_2$  proportional  $s_0^2$ .

Die Schnittkurve ist folglich der Ort eines Punktes  $S$ , für den

das Verhältnis der Entfernung  $r$  von  $P_0$  und der senkrechten Entfernung  $s_0$  von  $p_0$  konstant ist. Es folgt daher nach § 4, 5: <sup>185)</sup>

*Ist  $P_0$  für das Ellipsoid oder das ein- oder zweischalige Hyperboloid ein Punkt der Fokalellipse oder Fokalhyperbel, so schneidet die in  $P_0$  errichtete Normalebene der Fokalkurve die Fläche in einem Kegelschnitt, für den  $P_0$  ein Brennpunkt ist.*

**11. Allgemeine Grundlage der Brennpunkt-Direktrix-Eigenschaft.** Setzt man den in der Identität (13) oder (13') in der zweiten Klammer rechts stehenden Ausdruck gleich Null, also:

$$(28) \quad \frac{e^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2}(y - y_1)^2 = 0, \quad \frac{d^2}{a^2}(x - x_1)^2 + \frac{d^2 - e^2}{a^2 - e^2}(z - z_1)^2 = 0,$$

so erhält man beidemal die Gleichung eines reellen oder imaginären Ebenenpaares, dessen Achse die dem Brennpunkte  $P_0$  entsprechende Direktrix (16) oder (16') ist und dessen Ebenen *die dem Brennpunkte  $P_0$  entsprechenden Direktrixebenen* heißen. <sup>14)</sup>

Die Identitäten (13) und (13') sind demnach von der allgemeinen Form: <sup>21)</sup>

$$(29) \quad f = k - UV,$$

wo  $f = 0$  die Fläche selbst,  $k = 0$  ein Kugelkegel (§ 69, (19)) mit dem Scheitel-(Mittel-)Punkt  $P_0$  und  $U = 0$ ,  $V = 0$  die Direktrixebenen sind. Mit Rücksicht auf 6 folgt daher:

I. *Je nachdem die dem Brennpunkte  $P_0$  entsprechenden Direktrixebenen imaginär oder reell sind, gilt als Deutung der Identität (29) die Mac Cullaghsche oder Amiotsche Fokaleigenschaft.*

Infolge von (29) liegt ferner die Schnittkurve der Fläche  $f = 0$  mit der Ebene  $U = 0$  oder  $V = 0$  auf dem Kugelkegel  $k = 0$  und ist daher ein Kreis, also mit Rücksicht auf (28):

II. *Die einem Brennpunkte der Fläche zweiter Ordnung entsprechenden Direktrixebenen sind stets zwei derselben Hauptachse parallele Kreisschnittebenen.*

In der Tat sind die Ebenenpaare (28), sowie auch ein drittes, einem Punkte  $P_0$  der imaginären Fokalellipse § 120, 9 entsprechendes, den in § 117, (17) dargestellten drei Ebenenpaaren, mit  $b^2 = a^2 - d^2$ ,  $c^2 = a^2 - e^2$  parallel.

Infolge von (29) liegen endlich die beiden Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , in der der Kugelkegel  $k = 0$  von dem Ebenenpaar  $UV = 0$  geschnitten wird, auf der Fläche  $f = 0$ . Die beiden Flächen  $f = 0$  und  $k = 0$  berühren sich daher in jedem ihrer beiden gemeinsamen Schnittpunkte mit der Direktrix, da sie hier die Tangenten der beiden Kreise  $K_1$

und  $K_2$  ebenfalls als Tangenten und damit auch die Tangentialebene (§ 67, 4) gemein haben. Es folgt also:<sup>144</sup>)

III. Jeder Brennpunkt  $P_0$  der Fläche zweiter Ordnung (Punkt der drei Fokalkurven § 120, 9) ist der Scheitelpunkt eines Kugelkegels, der die Fläche in ihren Schnittpunkten mit der entsprechenden Direktrix  $p_0$  doppelt berührt.

Dieser Satz entspricht dem nach § 13, 8, II und § 20, 3 (zweitem Absatz) geltenden:<sup>2</sup>)

IV. Jeder Brennpunkt eines Kegelschnittes ist der Scheitelpunkt eines Kreisstrahlenpaares, das den Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit der entsprechenden Direktrix doppelt berührt.

**12. Anwendung auf ebene Schnitte.** Wenn die beiden Flächen  $f = 0$  und  $k = 0$  sich in den Schnittpunkten mit der Direktrix  $p_0$  berühren, so gilt dies auch von ihren Schnittkurven mit einer durch die Direktrix gehenden Ebene. Der Kugelkegel  $k = 0$  wird aber von einer Ebene durch seinen Scheitelpunkt  $P_0$  in einem Kreisstrahlenpaare geschnitten (§ 69, 9; § 12, 8). Legt man daher eine Ebene  $\Pi$  durch  $P_0$  und  $p_0$ , so schneidet sie die Fläche  $f = 0$  in einem Kegelschnitt, für den  $P_0$  der Scheitel eines Kreisstrahlenpaares ist, das den Kegelschnitt in seinen Schnittpunkten mit  $p_0$  doppelt berührt. Daher muß  $P_0$  ein Brennpunkt des Kegelschnittes sein. Damit ist wieder der Satz unter 10 aus einem allgemeineren Gesichtspunkt gewonnen.

Um diesen Gedankengang in Formeln zu verwirklichen, transformiert man die aus der Identität (13) folgende Gleichung der Fläche zweiter Ordnung:

$$(30) \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \} - \left\{ \frac{e^2}{a^2} (x - x_1)^2 + \frac{e^2 - d^2}{a^2 - d^2} (y - y_1)^2 \right\} = 0$$

durch die Substitution:

$$(31) \quad x = x_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta, \quad y = y_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta, \quad z = \zeta$$

auf ein neues rechtwinkliges System  $P_0 \xi \eta \zeta$ , dessen  $\xi$ -Achse mit:

$$(32) \quad \alpha_1 = \frac{qx_0}{e^2}, \quad \beta_1 = \frac{qy_0}{e^2 - d^2}; \quad \frac{1}{q^2} = \frac{x_0^2}{e^4} + \frac{y_0^2}{(e^2 - d^2)^2}$$

die Normale und dessen  $\zeta\xi$ -Ebene die Normalebene  $\Pi$  der Fokalellipse (10) im Punkte  $P_0$  ist. Setzt man in der so transformierten Gleichung (30) alsdann  $\eta = 0$ , so erhält man als Gleichung der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene  $\Pi$ :

$$(33) \quad (\xi^2 + \zeta^2) - \left( \frac{x_0^2}{a^2 e^2} + \frac{y_0^2}{(a^2 - d^2)(e^2 - d^2)} \right) q^2 \left( \xi - \frac{a^2 - e^2}{q} \right)^2 = 0.$$

Sie ist also nach § 4, (11) in der Tat ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkt  $P_0$ . Das zweite Glied in (33) muß hierbei ein vollstän-

diges Quadrat eines in  $\xi$  linearen Ausdruckes werden, weil es, für sich gleich Null gesetzt, das Schnittpaar der Ebene  $\eta = 0$  mit dem Direktrixebenenpaar darstellt und dieses, da die Ebene  $\eta = 0$  durch die Direktrix geht, eine *Doppellinie* wird.<sup>185)</sup>

### § 128. Brönnpunkt-Direktrix-Eigenschaft der Paraboloid.

**1. Eine auf zwei konfokale Paraboloid bezügliche Identität.**  
Die beiden Flächen:

$$(1) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 = 0 \quad (b^2 > c^2),$$

$$(2) \quad \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} + 2x - b'^2 = 0 \quad (b'^2 > c'^2)$$

sollen konfokal (und konfokal liegend) sein, so daß (§ 56, 10):

$$(3) \quad b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2,$$

wo  $h^2$  den gemeinsamen Wert der beiden Differenzen bezeichnet.

Sind nun  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  irgend zwei Punkte des Raumes, so ist:

$$\begin{aligned} & h^2 \left\{ \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left( \frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 \right) \right\} \\ &= 2h^2(x - x_0) - h^4 + (b^2 - b'^2) \left( \frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2} \right) + (c^2 - c'^2) \left( \frac{z^2}{c^2} - \frac{z_0^2}{c'^2} \right). \end{aligned}$$

Da aber:

$$(b^2 - b'^2) \left( \frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0^2}{b'^2} \right) = (y - y_0)^2 - \left( \frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0 \right)^2,$$

so folgt:

I. Sind die beiden Flächen (1) und (2) konfokal und bezeichnet  $h$  den gemeinsamen Wert der beiden Differenzen (3), so besteht identisch in  $x, y, z$  und  $x_0, y_0, z_0$  die Gleichung:

$$\begin{aligned} & h^2 \left\{ \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left( \frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 \right) \right\} \\ (4) \quad &= \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \} \\ &- \left\{ (x - x_0 - h^2)^2 + \left( \frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0 \right)^2 + \left( \frac{c'}{c} z - \frac{c}{c'} z_0 \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Über die Änderung der Formel beim Übergang von  $c$  oder  $c'$  in  $ic$  oder  $ic'$  gilt dasselbe, wie § 127, 1.

**2. Die Identität des Amiot-Mac Cullagh'schen Satzes.** Ordnet man dem Punkte  $P_0 = x_0, y_0, z_0$  durch die Beziehung:

$$(5) \quad x_1 = x_0 + h^2, \quad \frac{y_1}{b^2} = -\frac{y_0}{b'^2}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z_0}{c'^2}$$

einen Punkt  $P_1 = x_1, y_1, z_1$  als entsprechenden Punkt zu, so nimmt (4) die Form an:

$$(6) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left( \frac{y_0^2}{b'^2} + \frac{z_0^2}{c'^2} + 2x_0 - b'^2 \right) \right\} \\ = \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \} \\ - \left\{ (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} (y - y_1)^2 + \frac{c'^2}{c^2} (z - z_1)^2 \right\}.$$

Ist endlich  $P_0 = x_0, y_0, z_0$  ein Punkt des Hauptschnittes:

$$(7) \quad \frac{y^2}{b'^2} + 2x - b'^2 = 0, \quad z = 0 \quad \text{oder} \quad (7') \quad \frac{z^2}{c'^2} + 2x - b'^2 = 0, \quad y = 0,$$

des Paraboloides (2), so ergibt sich:

II. Ist  $P_0 = x_0, y_0, 0$  oder  $P_0 = x_0, 0, z_0$  ein Punkt des Hauptschnittes  $z = 0$  oder  $y = 0$  des Paraboloides (2) und wird ein entsprechender Punkt  $P_1 = x_1, y_1, 0$  oder  $P_1 = x_1, 0, z_1$  der Hauptebene definiert durch:

$$(8) \quad x_1 = x_0 + h^2, \quad y_1 = \frac{b^2}{b'^2} y_0, \quad (8') \quad x_1 = x_0 + h^2, \quad z_1 = \frac{c^2}{c'^2} z_0,$$

so ist identisch in  $x, y, z$ :

$$(9) \quad h^2 \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) \\ = \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \} - \left\{ (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} (y - y_1)^2 + \frac{c'^2}{c^2} z^2 \right\},$$

$$(9') \quad h^2 \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) \\ = \{ (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 \} - \left\{ (x - x_1)^2 + \frac{b'^2}{b^2} y^2 + \frac{c'^2}{c^2} (z - z_1)^2 \right\}.$$

3. Ausartung des zweiten Paraboloides. Mit  $c'^2 = 0$  oder  $b'^2 = 0$  (§ 123, 3) wird nach (3):

$$h^2 = c^2, \quad b'^2 = b^2 - c^2 \quad \text{oder:} \quad h^2 = b^2, \quad c'^2 = c^2 - b^2,$$

und die Hauptschnitte (7), (7') gehen in die linke oder rechte Fokalparabel (§ 56, (7)) des Paraboloides (1):

$$\frac{y^2}{b^2 - c^2} + 2x - (b^2 - c^2) = 0, \quad z = 0 \quad \frac{z^2}{c^2 - b^2} + 2x = 0, \quad y = 0$$

über. Setzt man alsdann noch:

$$b^2 = p, \quad c^2 = p - e$$

und daher bezüglich:

$$h^2 = p - e, \quad b'^2 = e \quad \text{oder} \quad h^2 = p, \quad c'^2 = -e,$$

so ergibt sich als Sonderfall von II:

III. Ist  $P_0 = x_0, y_0, 0$  oder  $P_0 = x_0, 0, z_0$  ein Punkt der linken, bezüglich rechten Fokalparabel:

$$(10) \quad \frac{y^2}{e} + 2x - e = 0, \quad z = 0, \quad (10') \quad -\frac{z^2}{e} + 2x = 0, \quad y = 0$$

des Paraboloides:

$$(11) \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0,$$

und wird ihm ein entsprechender Punkt  $P_1 = x_1, y_1, 0$  oder  $P_1 = x_1, 0, z_1$  in der Ebene der Fokalparabel durch die Formeln:

$$(12) \quad x_1 = x_0 + p - e, \quad y_1 = \frac{p}{e} y_0 \quad \text{oder} \quad (12') \quad x_1 = x_0 + p, \quad z_1 = -\frac{p-e}{e} z_0$$

zugeordnet, so ist identisch in  $x, y, z$ :

$$(13) \quad (p-e) \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p \right\} \\ = \{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \} - \left\{ (x-x_1)^2 + \frac{e}{p} (y-y_1)^2 \right\},$$

$$(13') \quad p \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p \right\} \\ = \{ (x-x_0)^2 + y^2 + (z-z_0)^2 \} - \left\{ (x-x_1)^2 - \frac{e}{p-e} (z-z_1)^2 \right\}.$$

**4. Abhängigkeit des Punktes  $P_1$  vom Punkte  $P_0$ .** Die Gleichung des Hauptschnittes des Paraboloides (11) in der Ebene  $z = 0$  oder  $y = 0$  lautet:

$$(14) \quad \frac{y^2}{p} + 2x - p = 0, \quad (14') \quad \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0.$$

Die Polare irgend eines Punktes  $x_1, y_1$  oder  $x_1, z_1$  in bezug auf diesen ist nach § 20, (41):

$$\frac{y_1 y}{p} + x + x_1 - p = 0, \quad \frac{z_1 z}{p-e} + x + x_1 - p = 0.$$

Die Polare des Punktes (12) oder (12') wird folglich:

$$(15) \quad \frac{y_0 y}{e} + x + x_0 - e = 0, \quad (15') \quad -\frac{z_0 z}{e} + x + x_0 = 0.$$

Dies ist aber nach § 13, (35) die Tangente im Punkte  $x_0, y_0$  der linken Fokalparabel (10) oder im Punkte  $x_0, z_0$  der rechten Fokalparabel (10'). Somit folgt auch umgekehrt (§ 18, 4):

I. Der Punkt  $P_1$  in (12) oder (12') ist der Pol der im Punkte  $P_0 = x_0, y_0$  oder  $P_0 = x_0, z_0$  an die linke oder rechte Fokalparabel gelegten Tangente in bezug auf den zugehörigen Hauptschnitt der Fläche.

Mit Rücksicht auf § 56, 7 und § 34, 11 folgt ebenso, wie in § 127, 4:

II. Die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte  $P_0$  und  $P_1$  steht in  $P_0$  auf der Tangente der Fokalparabel senkrecht.

**5. Brennpunkt und Direktrix.** Die im Punkte (12) auf der  $xy$ -Ebene oder die im Punkte (12') auf der  $xz$ -Ebene errichtete Senkrechte mit den Gleichungen:

$$(16) \quad x = x_0 + p - e, y = \frac{p}{e} y_0 \quad \text{oder} \quad (16') \quad x = x_0 + p, z = -\frac{p-e}{e} z_0$$

heißt die dem Brennpunkte  $P_0 = x_0, y_0, 0$  oder  $P_0 = x_0, 0, z_0$  entsprechende Direktrix.<sup>14)</sup>

Die einem Punkte  $P_0$  einer Fokalparabel entsprechende Direktrix ist die auf der Ebene der letzteren errichtete Senkrechte  $p_0$ , deren Fußpunkt  $P_1$  der Pol der Tangente der Fokalparabel in  $P_0$  mit Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist.

Zu den Scheitelpunkten:

$$(17) \quad G = \frac{e}{2}, 0, 0; \quad F = 0, 0, 0$$

der linken und rechten Fokalparabel gehören nach (16), (16') die Direktrizen:

$$(18) \quad x = p - \frac{e}{2}, y = 0; \quad x = p, z = 0,$$

also die Direktrizen der Hauptschnittparabeln (14') und (14) im Sinne von § 2, (20).

Da  $x_0, y_0$ , bezüglich  $x_0, z_0$  den Gleichungen (10) und (10') genügen, so erfüllen die Punkte der Geraden (16) und (16') die Gleichungen:

$$(19) \quad \frac{ey^2}{p^2} + 2(x-p) + e = 0; \quad (19') \quad \frac{ez^2}{(e-p)^2} - 2(x-p) = 0.$$

Der Ort der Direktrizen aller Punkte einer Fokalparabel ist ein parabolischer Zylinder, der zur Ebene der Fokalparabel senkrecht steht.

Die Strahlenkoordinaten  $p_{ki}$  der Tangente (15) oder (15') sind:

$$0, 0, e - x_0, \frac{y_0}{e}, -1, 0; \quad 0, -x_0, 0, \frac{z_0}{e}, 0, 1$$

und die Strahlenkoordinaten  $p'_{ki}$  der Direktrizen (16) oder (16'):

$$-\frac{py_0}{e}, x_0 + p - e, 0, 0, 0, 1; \quad \frac{p-e}{e} z_0, 0, x_0 + p, 0, -1, 0.$$

Sie entsprechen nach § 83, (9) den Beziehungen reziproker Polaren des Paraboloides (11):

$$qp'_{23} = -p_{14}, \quad qp'_{31} = -\frac{p_{12}}{p} - p_{24}, \quad qp'_{12} = \frac{p_{31}}{p-e} - p \frac{p_{34}}{p-e},$$

$$qp'_{14} = \frac{p_{23}}{p(p-e)}, \quad qp'_{24} = \frac{p_{34}}{p-e}, \quad qp'_{34} = -\frac{p_{24}}{p}.$$

Die Direktrix eines Punktes  $P_0$  einer Fokalparabel ist die reziproke Polare der Tangente der Fokalparabel in ihm.

**6. Das (linke) elliptische Paraboloid.** Unter der Voraussetzung:

$$\infty > p > e$$



folgt mit:

$$l^2 = 1, \quad m^2 = \frac{e}{p}, \quad l^2 - m^2 = \frac{p-e}{p}, \quad l^2 > m^2,$$

aus § 126, (10):

$$(x - x_1)^2 + \frac{e}{p} (y - y_1)^2 = \frac{e}{p} s^2$$

und mit:

$$l^2 = 1, \quad n^2 = \frac{e}{p-e}; \quad l^2 + n^2 = \frac{p}{p-e},$$

aus § 126, (30):

$$(x - x_1)^2 - \frac{e}{p-e} (z - z_1)^2 = \varepsilon \frac{p}{p-e} r_1 r_2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') die *Identitäten*:

$$(20) \quad \begin{cases} (p - e) \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p \right\} = r^2 - \frac{e}{p} s^2, \\ p \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p \right\} = r^2 - \frac{p}{p-e} r_1 r_2, \end{cases}$$

wo  $r$  den Abstand des laufenden Punktes  $P = x, y, z$  von einem festen Punkte  $P_0 = x_0, y_0, 0$  der linken, bezüglich  $P_0 = x_0, 0, z_0$  der rechten Fokalparabel;  $s$  den schrägen Abstand des Punktes  $P$  von der Direktrix des Punktes  $P_0$ , parallel den Ebenen:

$$(21) \quad (p - e)x^2 - ez^2 = 0$$

gemessen, und  $r_1, r_2$  die senkrechten Abstände von den beiden durch die Direktrix gehenden Ebenen:

$$(22) \quad (p - e)(x - x_1)^2 - e(z - z_1)^2 = 0.$$

bedeuten.

Die Ebenen (21) sind nach § 61, (15) die Hauptkreisschnittebenen, die Ebenen (22) sind diesen parallel.

I. Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte der inneren Fokalparabel und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich  $\sqrt{e} : \sqrt{p}$ .

II. Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte der äußeren Fokalparabel und des Rechteckes aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreisschnittebenen konstant, gleich  $p : p - e$ .

Der erste Satz enthält die *Mac Cullaghsche*, der zweite die *Amiotsche* Fokaleigenschaft.<sup>16)</sup> Die Voraussetzung:

$$0 > p > -\infty,$$

die dem rechten elliptischen Paraboloid entspricht, gibt dieselben Sätze wieder.

**7. Das hyperbolische Paraboloid.** Unter der Voraussetzung:

$$e > p > 0$$

folgt mit:

$$l^2 = 1, \quad m^2 = \frac{e}{p}; \quad m^2 - l^2 = \frac{e-p}{p}, \quad m^2 > l^2,$$

aus § 126, (10):

$$(x - x_1)^2 + \frac{e}{p} (y - y_1)^2 = s^2$$

und mit:

$$l^2 = 1, \quad n^2 = \frac{e}{e-p}; \quad n^2 - l^2 = \frac{p}{e-p}, \quad n^2 > l^2,$$

aus § 126, (14):

$$(x - x_1)^2 + \frac{e}{e-p} (z - z_1)^2 = s^2.$$

Daher gelten nach (13) und (13') die *Identitäten*:

$$(23) \quad \begin{cases} (p - e) \left\{ \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} + 2x - p \right\} = r^2 - s^2, \\ p \left\{ \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} + 2x - p \right\} = r^2 - s^2, \end{cases}$$

wo  $r$  den Abstand des laufenden Punktes  $P = x, y, z$  von einem festen Punkte  $P_0 = x_0, y_0, 0$  der linken, bezüglich  $P_0 = x_0, 0, z_0$  der rechten Fokalparabel und  $s$  den schrägen Abstand des Punktes  $P$  von der Direktrix des Punktes  $P_0$ , parallel den Ebenen:

$$(24) \quad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} = 0$$

gemessen, bedeuten.

Die Ebenen (24) sind nach § 62, (13) die durch den Scheitelpunkt gehenden Ebenen der geradlinigen Schnitte, die Asymptoten-ebenen (§ 62, 3).

*Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids ist daher der Abstand von einem Brennpunkt gleich dem schrägen, parallel den Ebenen der geradlinigen Schnitte gemessenen Abstand von der zugehörigen Direktrix.*

Es ist die *Mac Cullaghsche* Fokaleigenschaft der Fläche.

Wählt man als Punkt  $P_0$  den Scheitelpunkt der rechten Fokalparabel  $F$  in (17), so liegt die entsprechende Direktrix (18) in der  $xy$ -Ebene, parallel der  $y$ -Achse. Für die Punkte  $P$  des Hauptschnittes  $z = 0$  liegt dann  $r = FP$  auch in der Ebene  $z = 0$  und geht der *schräge* Abstand  $s$ , da er dem Ebenenpaar (24) parallel sein soll, der  $x$ -Achse parallel werdend, in den *senkrechten* Abstand über. *In dem Mac Cullaghschen Satze ist daher die Fokaleigenschaft der Parabel § 2, (7) enthalten.*

**8. Ebene Schnitte durch Brennpunkt und Direktrix.** Wie in § 127, 10; 12 ergibt sich:<sup>185)</sup>

Ist  $P_0$  für das elliptische oder für das hyperbolische Paraboloid ein Punkt einer der beiden Fokalparabeln, so schneidet die in  $P_0$  errichtete Normalebene der Fokalparabel die Fläche in einem Kegelschnitt, für den  $P_0$  ein Brennpunkt ist.

**9. Brennstrahl-Direktrixebenen-Eigenschaft des Kegels.** Für den elliptischen Kegel:

$$(25) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0, \quad e^2 > a^2 > d^2,$$

haben die beiden Brennlinien nach § 54, (11) die Gleichungen:

$$(26) \quad x : y : z = \frac{d}{e} : 0 : \frac{\varepsilon \sqrt{e^2 - d^2}}{e}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Ihre Polarebenen, welche die Direktrixebenen<sup>14)</sup> des Kegels heißen mögen, sind nach § 84, (3) oder (7) in der Hesseschen Normalform:

$$(27) \quad \frac{d(a^2 - e^2)x + \varepsilon a^2 \sqrt{e^2 - d^2}z}{e \sqrt{a^2(a^2 - d^2) + (e^2 - a^2)d^2}} = 0.$$

Das Quadrat des Abstandes  $\varrho$  eines beliebigen Raumpunktes  $P = x, y, z$  vom Brennstrahl (26) ist (I § 43, (20)):

$$(28) \quad \varrho^2 = \frac{e^2 - d^2}{e^2} y^2 + \left( \frac{\varepsilon \sqrt{e^2 - d^2}}{e} x - \frac{d}{e} z \right)^2 + \frac{d^2}{e^2} y^2,$$

und das Quadrat des Abstandes  $\delta$  von der zugehörigen Direktrixebene:

$$(29) \quad \delta^2 = \frac{\left\{ d(a^2 - e^2)x + \varepsilon a^2 \sqrt{e^2 - d^2}z \right\}^2}{e^2 \{ a^2(a^2 - d^2) + (e^2 - a^2)d^2 \}}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$(30) \quad x^2 = \frac{a^2(a^2 - d^2) + (e^2 - a^2)d^2}{a^2(e^2 - a^2)},$$

so wird:

$$\varrho^2 - x^2 \delta^2 = \left\{ y^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2} x^2 + \frac{d^2}{e^2} z^2 \right\} - \left\{ \frac{(e^2 - a^2)d^2}{a^2 e^2} x^2 + \frac{a^2(e^2 - d^2)}{e^2(e^2 - a^2)} z^2 \right\}.$$

Daher besteht identisch in  $x, y, z$  die Gleichung:<sup>21)</sup>

$$(31) \quad (a^2 - d^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} \right\} = \varrho^2 - x^2 \delta^2$$

oder mit der Bezeichnung § 53, (13):

$$(32) \quad b^2 \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right\} = \varrho^2 - x^2 \delta^2, \quad a^2 > b^2,$$

wo nunmehr:

$$(33) \quad x^2 = \frac{a^2 b^2 + (a^2 - b^2) c^2}{a^2 c^2}.$$

Der elliptische Kegel ist der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von dem Brennstrahl und der zugehörigen Leitebene das konstante Verhältnis  $\kappa$  haben.<sup>16)</sup>

Für den Kegel  $a^2 = c^2$  in § 54, 8 wird nach (33)  $\kappa^2 = 1$ .

§ 129. Das Ivorysche Theorem und die Jacobischen Fokaleigenschaften.

1. Die Identität des Ivoryschen Theorems für die Mittelpunktsflächen. Wenn die beiden Mittelpunktsflächen:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

konfokal sind und:

$$(3) \quad a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2$$

gesetzt wird, so besteht nach § 127, (4) *identisch in  $x, y, z$  und  $x_0', y_0', z_0'$*  die Gleichung:

$$(4) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - \left( \frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} - 1 \right) \right\} \\ = \{ (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2 \} \\ - \left\{ \left( \frac{a'}{a} x - \frac{a}{a'} x_0' \right)^2 + \left( \frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0' \right)^2 + \left( \frac{c'}{c} z - \frac{c}{c'} z_0' \right)^2 \right\}.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß die beiden Flächen (1) und (2) *gleichartige*, also beide Ellipsoide oder, mit Umkehr der Vorzeichen von  $c^2$  und  $c'^2$ , beide einschalige Hyperboloide oder, mit Umkehr der Vorzeichen von  $b^2, c^2$  und  $b'^2, c'^2$ , beide zweischalige Hyperboloide seien.

Wir nehmen nun zwischen den Punkten des Raumes die *affine Verwandtschaft*:

$$(5) \quad \frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}$$

an, vermöge welcher jedem reellen Punkte  $P = x, y, z$  ein reeller  $P' = x', y', z'$  entspricht, da auch bei Umkehr der Vorzeichen von  $b^2$  und  $b'^2$  oder  $c^2$  und  $c'^2$  die Formeln (5) reell bleiben.

Hiernach kann aber der Inhalt der Gleichung (4) in folgender Weise gefaßt werden:

I. Sind  $P = x, y, z, P' = x', y', z'$  und  $P_0 = x_0, y_0, z_0, P_0' = x_0', y_0', z_0'$  zwei Paare entsprechender Punkte in der Affinität (5), so besteht *identisch in  $x, y, z$  und  $x_0', y_0', z_0'$*  die Gleichung:

$$(6) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) - \left( \frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} - 1 \right) \right\} \\ = \{ (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2 \} - \{ (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 \}.$$

**2. Das Ivorysche Theorem für die Mittelpunktsflächen.** Für zwei entsprechende Punkte  $P$  und  $P'$  folgt aus (5):

$$(7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} - 1.$$

Liegt daher  $P$  auf der Fläche (1), so liegt  $P'$  auf der Fläche (2) und umgekehrt.

II. Vermöge der Affinität (5) entspricht jedem Punkte der einen der beiden Flächen (1) und (2) ein Punkt der andern.

Ist nun  $P = x, y, z$  irgendein Punkt der Fläche (1) und  $P_0' = x_0', y_0', z_0'$  irgendein Punkt der Fläche (2), so daß auf der linken Seite von (6) die beiden runden Klammern verschwinden, so bleibt:

$$(8) \quad 0 = \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2\} \\ - \{(x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2\}$$

oder:

$$(9) \quad \overline{PP_0'} = \overline{P'P_0}.$$

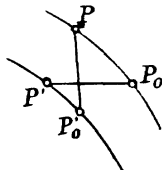


Fig. 191.

III. Die Entfernung irgend zweier Punkte  $P$  und  $P_0'$  der beiden gleichartigen konfokalen Mittelpunktsflächen (1) und (2) ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte  $P'$  und  $P_0$  der jedesmal andern Fläche (Fig. 191).<sup>104)</sup>

**3. Die Identität des Ivoryschen Theorems für die Paraboloido.** Wenn die beiden Paraboloido:

$$(10) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 = 0, \quad (11) \quad \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} + 2x - b'^2 = 0$$

konfokal sind und:

$$(12) \quad b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = h^2$$

gesetzt wird, so besteht nach § 128, (4) identisch in  $x, y, z$  und  $x_0', y_0', z_0'$  die Gleichung:

$$(13) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left( \frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} + 2x_0' - b'^2 \right) \right\} \\ = \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2\} \\ - \left\{ (x - x_0' - h^2)^2 + \left( \frac{b'}{b} y - \frac{b}{b'} y_0' \right)^2 + \left( \frac{c'}{c} z - \frac{c}{c'} z_0' \right)^2 \right\}.$$

Wir setzen voraus, daß die beiden Paraboloido (10) und (11) gleichartige, also beide linke elliptische, beide hyperbolische oder beide rechte elliptische sind.

Wir nehmen alsdann zwischen den Punkten des Raumes die affine Verwandtschaft:

$$(14) \quad x = x' + \frac{h^2}{2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}$$

an, vermöge welcher jedem reellen Punkte  $P = x, y, z$  ein reeller Punkt  $P' = x', y', z'$  entspricht.

Hiermit aber ergibt sich aus (13):

I'. Sind  $P = x, y, z, P' = x', y', z'$  und  $P_0 = x_0, y_0, z_0, P'_0 = x'_0, y'_0, z'_0$  zwei Paare entsprechender Punkte in der Affinität (14), so besteht identisch in  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  die Gleichung:

$$(15) \quad h^2 \left\{ \left( \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 \right) - \left( \frac{y_0'^2}{b'^2} + \frac{z_0'^2}{c'^2} + 2x_0' - b'^2 \right) \right\} \\ = \{ (x - x_0')^2 + (y - y_0')^2 + (z - z_0')^2 \} - \{ (x' - x_0')^2 + (y' - y_0')^2 + (z' - z_0')^2 \}.$$

4. Das Ivorysche Theorem für die Paraboloid. Für zwei entsprechende Punkte  $P$  und  $P'$  folgt aus (14) und (12):

$$(16) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x - b^2 = \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} + 2x' - b'^2.$$

Liegt daher  $P$  auf (10), so liegt  $P'$  auf (11) und umgekehrt.

II'. Vermöge der Affinität (14) entspricht jedem Punkte der einen der beiden Flächen (10) und (11) ein Punkt der andern.

Ist nun  $P = x, y, z$  irgendein Punkt des Paraboloides (10) und  $P'_0 = x'_0, y'_0, z'_0$  irgendein Punkt des Paraboloides (11), so daß auf der linken Seite von (15) die beiden runden Klammern verschwinden, so bleibt die Gleichung (8) oder die gleichbedeutende (9).

III'. Die Entfernung irgend zweier Punkte  $P$  und  $P'_0$  der beiden gleichartigen konfokalen Paraboloid (10) und (11) ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte  $P'$  und  $P_0$  der jedesmal andern Fläche.

5. Feste Längen auf den Erzeugenden beim einschaligen Hyperboloid. Wir denken uns in (1) und (2)  $c^2$  und  $c'^2$  negativ, so daß wir zwei konfokale einschalige Hyperboloide vor uns haben. Zwei Punkte  $P_1 = x_1, y_1, z_1$  und  $P_2 = x_2, y_2, z_2$  einer Erzeugenden der Fläche (1) sind nach § 82, (14); (15) durch die Gleichung verbunden:

$$(17) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1.$$

Sind nun  $P'_1 = x'_1, y'_1, z'_1$  und  $P'_2 = x'_2, y'_2, z'_2$  die nach 2, II entsprechenden Punkte der Fläche (2), so geht nach (5) aus (17) hervor:

$$(18) \quad \frac{x_1'^2}{a'^2} + \frac{y_1'^2}{b'^2} + \frac{z_1'^2}{c'^2} = 1, \quad \frac{x_1' x_2'}{a'^2} + \frac{y_1' y_2'}{b'^2} + \frac{z_1' z_2'}{c'^2} = 1, \quad \frac{x_2'^2}{a'^2} + \frac{y_2'^2}{b'^2} + \frac{z_2'^2}{c'^2} = 1,$$

also:

IV. Zwei Punkten  $P_1, P_2$  einer Erzeugenden der einen Fläche (1) entsprechen stets zwei Punkte  $P'_1, P'_2$  einer Erzeugenden der andern Fläche (2).

Multipliziert man nun die aus (17) folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2 = 0$$

mit  $h^2$ , so folgt mit Rücksicht auf (3):

$$(a^2 - a'^2) \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{a}\right)^2 + (b^2 - b'^2) \left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + (c^2 - c'^2) \left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2 = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} a^2 \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{a}\right)^2 + b^2 \left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + c^2 \left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2 \\ = a'^2 \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{a}\right)^2 + b'^2 \left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + c'^2 \left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2 \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man rechts nach (5) die Koordinaten von  $P_1', P_2'$  einführt und mit  $a^2, b^2, c^2, a'^2, b'^2, c'^2$  kürzt:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2,$$

also:

$$(19) \quad \overline{P_1 P_2} = \overline{P_1' P_2'}$$

V. Die Länge einer Strecke  $P_1 P_2$  auf einer Erzeugenden der einen von zwei konfokalen Hyperboloiden ist gleich der Länge der entsprechenden Strecke  $P_1' P_2'$  auf einer Erzeugenden der andern (§ 63, 11; 12).

VI. Jedes aus Erzeugenden gebildete Vierseit des einen Hyperboloides überträgt sich mit unveränderten Seitenlängen auf das andere, also überhaupt auf jedes konfokale Hyperboloid.<sup>160)</sup>

**6. Feste Längen auf den Erzeugenden beim hyperbolischen Paraboloid.** Wir denken uns in (10) und (11)  $c^2$  und  $c'^2$  negativ, so daß wir zwei konfokale *hyperbolische Paraboloid*e vor uns haben. Zwei Punkte  $P_1 = x_1, y_1, z_1$  und  $P_2 = x_2, y_2, z_2$  einer Erzeugenden der Fläche (10) sind nach § 83, (13); (14) durch die Gleichungen verbunden:

$$(20) \quad \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} + 2x_1 - b^2 = 0, \quad \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} + x_1 + x_2 - b^2 = 0, \\ \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} + 2x_2 - b^2 = 0.$$

Sind nun  $P_1' = x_1', y_1', z_1'$  und  $P_2' = x_2', y_2', z_2'$  die nach 4, II' entsprechenden Punkte der Fläche (11), so geht nach (14) aus (20) hervor:

$$(21) \quad \frac{y_1'^2}{b'^2} + \frac{z_1'^2}{c'^2} + 2x_1' - b'^2 = 0, \quad \frac{y_1' y_2'}{b'^2} + \frac{z_1' z_2'}{c'^2} + x_1' + x_2' - b'^2 = 0, \\ \frac{y_2'^2}{b'^2} + \frac{z_2'^2}{c'^2} + 2x_2' - b'^2 = 0,$$

so daß Satz 5, IV auch für das hyperbolische Paraboloid gilt.

Multipliziert man nun die aus (20) folgende Gleichung:

$$\left(\frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c}\right)^2 = 0$$

mit  $h^2$ , so geht mit Rücksicht auf (12) hervor:

$$(b^2 - b'^2) \left( \frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b} \right)^2 + (c^2 - c'^2) \left( \frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c} \right)^2 = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 + b^2 \left( \frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b} \right)^2 + c^2 \left( \frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c} \right)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + b'^2 \left( \frac{y_1}{b} - \frac{y_2}{b} \right)^2 + c'^2 \left( \frac{z_1}{c} - \frac{z_2}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man rechts nach (14) die Koordinaten von  $P_1'$ ,  $P_2'$  einführt:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2,$$

also die Beziehung (19).

*Die Sätze 5, V und VI gelten also auch für das hyperbolische Paraboloid (§ 65, 14).*

**7. Lage entsprechender Punkte bei den Ellipsoiden und Hyperboloiden.** Geht man für die Flächen (1) und (2) zur Bezeichnung von § 120, (1) über und setzt unter Annahme zweier Ellipsoide: (22)  $a^2 = \alpha - \lambda$ ,  $b^2 = \beta - \lambda$ ,  $c^2 = \gamma - \lambda$ ;  $a'^2 = \alpha - \lambda'$ ,  $b'^2 = \beta - \lambda'$ ,  $c'^2 = \gamma - \lambda'$ , so lauten die quadrierten Gleichungen (5) in den elliptischen Koordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  und  $\lambda', \mu', \nu'$  der beiden Punkte  $P$  und  $P'$  nach § 120, (13):

$$\begin{aligned} (\alpha - \mu)(\alpha - \nu) &= (\alpha - \mu')(\alpha - \nu'), & (\beta - \mu)(\beta - \nu) &= (\beta - \mu')(\beta - \nu'), \\ & & (\gamma - \mu)(\gamma - \nu) &= (\gamma - \mu')(\gamma - \nu'), \end{aligned}$$

woraus  $\mu + \nu = \mu' + \nu'$ ,  $\mu\nu = \mu'\nu'$  und mit Rücksicht auf die Ungleichungen § 120, (8); (9):  $\mu = \mu'$ ,  $\nu = \nu'$  folgt.

*Entsprechende Punkte zweier konfokaler Ellipsoide  $\lambda$  und  $\lambda'$  haben gleiche elliptische Koordinaten  $\mu$  und  $\nu$ ; oder*

*Entsprechende Punkte zweier konfokaler Ellipsoide werden von den Schnittkurven der konfokalen ein- und zweischaligen Hyperboloide ausgeschnitten, den orthogonalen Trajektorien der konfokalen Ellipsoide.*

Zur vollständigen Bestimmung (§ 121, 1) ist nur zu beachten, daß sie nach (5) in gleichen Oktanten liegen.

*Das Analoge gilt von entsprechenden Punkten zweier konfokaler Hyperboloide der einen oder andern Art.*

**8. Lage entsprechender Punkte bei den Paraboloiden.** Geht man für die Flächen (10) und (11) zur Bezeichnung § 123, (1) über und setzt unter Annahme zweier linker elliptischer Paraboloiden nach § 123, (2'):

$$(23) \quad b^2 = \beta - \lambda, \quad c^2 = \gamma - \lambda, \quad x = x + \frac{\beta}{2}; \quad b'^2 = \beta - \lambda', \quad c'^2 = \gamma - \lambda', \quad x = x + \frac{\beta}{2},$$



so geben die Gleichungen (14), nach § 123, (13), in den parabolischen Koordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  und  $\lambda', \mu', \nu'$  der beiden Punkte  $P$  und  $P'$  dargestellt, da nach (12) und (23)  $h^2 = \lambda' - \lambda$  wird:

$$\frac{\beta + \gamma - \lambda - \mu - \nu}{2} = \frac{\beta + \gamma - \lambda' - \mu' - \nu'}{2} + \frac{\lambda' - \lambda}{2},$$

$(\beta - \mu)(\beta - \nu) = (\beta - \mu')(\beta - \nu')$ ,  $(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) = (\gamma - \mu')(\gamma - \nu')$   
und damit  $\mu = \mu'$ ,  $\nu = \nu'$ .

*Entsprechende Punkte zweier konfokaler linker elliptischer Paraboloiden werden von den Schnittkurven der konfokalen hyperbolischen und rechten elliptischen Paraboloiden, den orthogonalen Trajektorien der konfokalen linken elliptischen Paraboloiden, ausgeschnitten.*

Sie liegen überdies nach (12) in demselben Quadranten des von der  $xy$ - und  $xz$ -Ebene geteilten Raumes.

*Das Analoge gilt von entsprechenden Punkten zweier konfokaler hyperbolischer oder zweier rechter elliptischer Paraboloiden.*

**9. Die Jacobische Fokaleigenschaft.** Wählt man als Fläche (1) ein beliebiges Ellipsoid  $\lambda$  des konfokalen Systems und als Fläche (2) das in das Innere der Fokalellipse zusammengeklappte Ellipsoid  $\lambda = \gamma$  (§ 120, 4), so entspricht nach 7, in elliptischen Koordinaten angegeben, einem beliebigen Punkte  $P = \lambda, \mu, \nu$  des ersteren ein bestimmter Punkt  $P' = \gamma, \mu, \nu$  des letzteren, ferner entsprechen drei Punkten  $A_1 = \lambda, \gamma, \nu_1$ ,  $A_2 = \lambda, \gamma, \nu_2$ ,  $A_3 = \lambda, \gamma, \nu_3$  des ersten Hauptschnittes der Fläche  $\lambda$  (§ 121, 2) drei Punkte  $F_1 = \gamma, \gamma, \nu_1$ ,  $F_2 = \gamma, \gamma, \nu_2$ ,  $F_3 = \gamma, \gamma, \nu_3$  der Fokalellipse. Nach (9) ist dann:

$$(24) \quad \overline{PF_1} = \overline{P'A_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{P'A_2}, \quad \overline{PF_3} = \overline{P'A_3}.$$

I. *Die Abstände eines Punktes  $P$  des Ellipsoides von drei festen Punkten  $F_1, F_2, F_3$  der Fokalellipse (drei Brennpunkten) sind gleich den Abständen des entsprechenden Punktes  $P'$  im Inneren der Fokalellipse von drei festen, den Punkten  $F_1, F_2, F_3$  entsprechenden Punkten  $A_1, A_2, A_3$  des ersten Hauptschnittes des Ellipsoides (drei Scheitelpunkten) (§ 36, 6, I).*

Da ein Punkt  $P'$  der ersten Hauptebene schon durch seine Abstände von zwei festen Punkten  $A_2$  und  $A_3$  dieser Ebene zweideutig als Schnittpunkt zweier Kreise bestimmt ist, so ist der Abstand von einem dritten Punkte  $A_1$  derselben Ebene durch eine bestimmte Relation mit jenen beiden Abständen verbunden. Die Abstände eines Raumpunktes  $P$  von drei festen Punkten  $F_1, F_2, F_3$  sind im allgemeinen unabhängig voneinander und bestimmen den Punkt  $P$  zweideutig als Schnittpunkt dreier Kugeln. Ist aber  $P$  ein Punkt des

Ellipsoides  $\lambda$ , so sind die drei Abstände  $PF_1, PF_2, PF_3$  nach (24) derjenigen Relation unterworfen, durch die  $P'A_1, P'A_2, P'A_3$  verbunden sind. Daher spricht man den vorigen Satz auch so aus:

II. Das Ellipsoid ist der Ort eines Punktes  $P$ , dessen Entfernungen von drei festen Punkten  $F_1, F_2, F_3$  der Fokalellipse durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen eines Punktes  $P'$  der Ebene der Fokalellipse von den drei entsprechenden festen Punkten  $A_1, A_2, A_3$  des ersten Hauptschnittes verbindet (§ 36, 6, II).<sup>105</sup>

Denkt man sich die Entfernungen irgendeines Punktes  $P'$  im Innern der Fokalellipse von den Punkten  $A_1, A_2, A_3$  als feste Stangen, die um  $P'$  drehbar sind, so hat man diese nur mit ihren Endpunkten  $A_1, A_2, A_3$  nach  $F_1, F_2, F_3$  zu verstellen, um den zugehörigen Punkt  $P$  im Raum zu erhalten.

Dieselbe Eigenschaft gilt, wie für das Ellipsoid  $\lambda$  und den gleichartigen Fokalkegelschnitt  $\lambda = \gamma$  (§ 120, 4), in analoger Weise für Hyperboloide und Paraboloid.

**10. Allgemeine Darstellung der Jacobischen Fokaleigenschaft.**

Das Volumen  $V$  eines Tetraeders drückt sich durch die Längen  $e_k$ , der sechs Kanten in der Weise aus (§ 36, (24)):<sup>105</sup>

$$(25) \quad 288 V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & e_{12}^2 & e_{13}^2 & e_{14}^2 \\ 1 & e_{21}^2 & 0 & e_{23}^2 & e_{24}^2 \\ 1 & e_{31}^2 & e_{32}^2 & 0 & e_{34}^2 \\ 1 & e_{41}^2 & e_{42}^2 & e_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Indem man die eine Ecke in die gegenüberliegende Seitenebene fallen läßt, gehen die sechs Kanten in die sechs gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten der Ebene über. Die Bedingung  $V = 0$  ist also die zwischen diesen sechs Entfernungen bestehende Relation. Sie lautet, wenn man in Anlehnung an die Bezeichnung (24) setzt (Fig. 192):

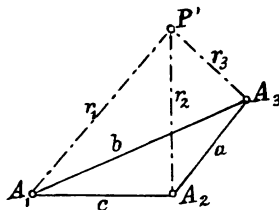


Fig. 192.

$$(26) \quad \begin{cases} e_{23} = \overline{A_2 A_3} = a, & e_{31} = \overline{A_3 A_1} = b, & e_{12} = \overline{A_1 A_2} = c, \\ e_{14} = \overline{A_1 P'} = r_1, & e_{24} = \overline{A_2 P'} = r_2, & e_{34} = \overline{A_3 P'} = r_3, \end{cases}$$

entwickelt:

$$(27) \quad a^2(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2) + b^2(r_2^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_1^2) + c^2(r_3^2 - r_1^2)(r_3^2 - r_2^2) - a^2(b^2 + c^2 - a^2)r_1^2 - b^2(c^2 + a^2 - b^2)r_2^2 - c^2(a^2 + b^2 - c^2)r_3^2 + a^2 b^2 c^2 = 0.$$

I. Dies ist also die Relation, welche die Entfernungen  $r_1, r_2, r_3$  eines Punktes  $P'$  der Ebene von drei festen Punkten  $A_1, A_2, A_3$  dieser Ebene verbindet.

Unterwirft man nun die Entfernungen eines Raumpunktes  $P=x, y, z$  von drei festen Raumpunkten  $F_1=x_1, y_1, z_1, F_2=x_2, y_2, z_2, F_3=x_3, y_3, z_3$  dieser Relation, setzt also:

$$(28) \quad r_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

$i = 1, 2, 3$ , so erhält man in (27) eine Gleichung zweiten Grades in  $x, y, z$ . Somit folgt (§ 36, 7, II):

II. Der Ort eines Punktes  $P$  im Raume, dessen Entfernungen von drei festen Punkten  $F_1, F_2, F_3$  durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen der Ecken eines Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  von einem Punkte  $P'$  ihrer Ebene verbindet, ist eine Fläche zweiter Ordnung.

### § 130. Die Brennlinieneigenschaft des Kegels zweiter Ordnung.

#### 1. Definition eines Ortes im Strahlbündel oder auf der Kugel.

In einem Strahlbündel mit dem Mittelpunkt  $O$  soll der Ort eines laufenden Strahles  $p$  untersucht werden, dessen Winkel  $\varrho$  und  $\varrho'$  gegen zwei feste Strahlen  $f$  und  $f'$  eine unveränderliche Summe oder Differenz vom Werte  $\pm 2\alpha$  haben.

Um die Bedeutung der Winkel  $\varrho = fp, \varrho' = f'p$  (Fig. 193) festzulegen, geben wir den Strahlen  $f, f', p$  bestimmte Pfeilspitzen, worauf wir (I § 32, 1):

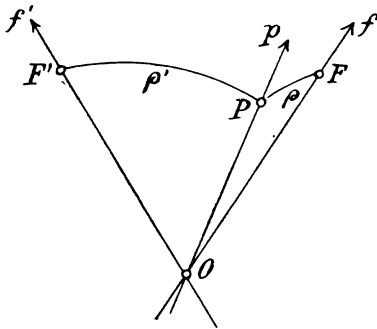


Fig. 193.

$$(1) \quad 0 < \varrho < \pi, \quad 0 < \varrho' < \pi$$

nehmen. Dann ist für die Summe und den absoluten Wert der Differenz:

$$(2) \quad 0 < \varrho + \varrho' < 2\pi, \quad 0 < |\varrho - \varrho'| < \pi.$$

Ist daher  $\alpha$  ein spitzer Winkel:

$$(3) \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi,$$

so kann für  $\varrho + \varrho'$  der Wert  $2\alpha$  oder  $2\pi - 2\alpha$ , für  $\varrho - \varrho'$  der Wert  $2\alpha$  oder

$-2\alpha$  gefordert werden.

Die vier Möglichkeiten:

$$(4) \quad \varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho + \varrho' = 2\pi - 2\alpha, \quad \varrho - \varrho' = \pm 2\alpha$$

sind aber auch durch die Gleichungen:

$$\sin \frac{\varrho + \varrho'}{2} = \pm \sin \alpha, \quad \sin \frac{\varrho - \varrho'}{2} = \pm \sin \alpha$$

dargestellt, die, von Vielfachen von  $2\pi$  abgesehen, zunächst auf:

$$\frac{e + e'}{2} = \pm \alpha, \quad \pi \mp \alpha, \quad \frac{e - e'}{2} = \pm \alpha, \quad \pi \mp \alpha$$

und daher mit Rücksicht auf (2), (3) wieder auf (4) zurückkommen.

Der gesuchte Ort ist daher schließlich durch die Gleichung:

$$(5) \quad \left(\sin \frac{e+e'}{2} + \sin \alpha\right) \left(\sin \frac{e+e'}{2} - \sin \alpha\right) \left(\sin \frac{e-e'}{2} + \sin \alpha\right) \left(\sin \frac{e-e'}{2} - \sin \alpha\right) = 0$$

bezeichnet (§ 1, (4)).

Nennt man die Schnittpunkte der positiven Halbstrahlen  $f, f', p$  mit der um  $O$  beschriebenen Einheitskugel (I § 49, 9)  $F, F', P$ , so entspricht der Bewegung des Strahles  $p$  eine solche des Punktes  $P$  auf der Kugel (Fig. 193). Summe oder Differenz der auf größten Kreisen gemessenen (kürzesten) Abstände  $\rho$  und  $\rho'$  des Punktes  $P$  von zwei festen Punkten  $F$  und  $F'$  bleibt dabei unveränderlich.

**2. Einführung eines Koordinatensystems.** Wir nehmen  $O$  als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $Oxyz$ , dessen  $zx$ -Ebene die Ebene der Geraden  $f, f'$  ist, und dessen positive  $z$ -Achse den Winkel  $2\varepsilon$  von  $f$  und  $f'$  halbiert (Fig. 194).

Die Richtungskosinus der Strahlen  $f, f'$  (I § 33, 2) sind dann:

$$(6) \quad f: \sin \varepsilon, 0, \cos \varepsilon; \quad f': -\sin \varepsilon, 0, \cos \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Zur Deutung der Konstanten  $\alpha$  in (3) nehmen wir in der  $zx$ -Ebene zwei weitere gerichtete Strahlen  $g, g'$  ( $OA, OA'$ , Fig. 194) an, die mit der  $z$ -Achse je den Winkel  $\alpha$  bilden und die Richtungskosinus haben:

$$(7) \quad g: \sin \alpha, 0, \cos \alpha; \\ g': -\sin \alpha, 0, \cos \alpha.$$

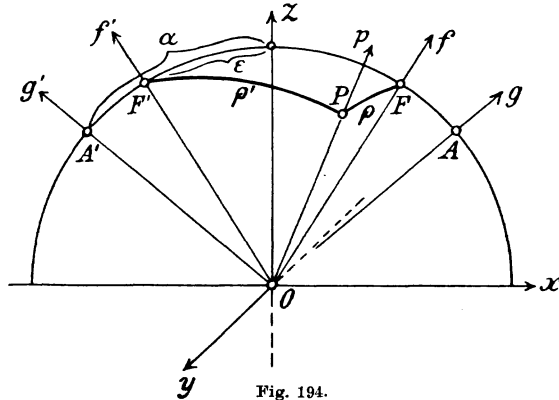


Fig. 194.

Die Richtungskosinus des laufenden Strahles  $p(OP)$  seien:

$$(8) \quad p: \lambda, \mu, \nu; \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

An Stelle der Winkel  $\alpha$  und  $\varepsilon$  führen wir durch die Gleichungen:

$$(9) \quad \sin \alpha = \frac{a}{e}; \quad \sin \varepsilon = \frac{d}{e}$$

die Verhältnisse von drei neuen positiven Konstanten  $a, d, e$  ein, die den Bedingungen entsprechen sollen:

$$(10) \quad 0 < a < e; \quad 0 < d < e.$$

Für die Winkel  $\varrho$  und  $\varrho'$  des Strahles  $p$  gegen  $f$  und  $f'$  ist nach (8) und (6) (I § 35, (1)):

$$\cos \varrho = \sin \varepsilon \cdot \lambda + \cos \varepsilon \cdot \nu, \quad \cos \varrho' = -\sin \varepsilon \cdot \lambda + \cos \varepsilon \cdot \nu$$

und damit:

$$\frac{\cos \varrho - \cos \varrho'}{2} = \sin \varepsilon \cdot \lambda, \quad \cos \varrho \cos \varrho' = -\sin^2 \varepsilon \cdot \lambda^2 + \cos^2 \varepsilon \cdot \nu^2$$

oder nach (9):

$$(11) \quad \frac{\cos \varrho - \cos \varrho'}{2} = \frac{d}{e} \lambda, \quad \cos \varrho \cos \varrho' = -\frac{d^2}{e^2} \lambda^2 + \frac{e^2 - d^2}{e^2} \nu^2.$$

**3. Eine identische Gleichung.** Der die linke Seite von (5) bildende Ausdruck:

$$(12) \quad S = \left( \sin^2 \frac{\varrho + \varrho'}{2} - \sin^2 \alpha \right) \left( \sin^2 \frac{\varrho - \varrho'}{2} - \sin^2 \alpha \right)$$

oder:

$$S = \sin^2 \frac{\varrho + \varrho'}{2} \sin^2 \frac{\varrho - \varrho'}{2} - \left( \sin^2 \frac{\varrho + \varrho'}{2} + \sin^2 \frac{\varrho - \varrho'}{2} \right) \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$$

nimmt infolge der trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varrho + \varrho'}{2} \sin \frac{\varrho - \varrho'}{2} &= -\frac{\cos \varrho - \cos \varrho'}{2}, \\ \sin^2 \frac{\varrho + \varrho'}{2} + \sin^2 \frac{\varrho - \varrho'}{2} &= \frac{1 - \cos(\varrho + \varrho')}{2} + \frac{1 - \cos(\varrho - \varrho')}{2} \\ &= 1 - \frac{\cos(\varrho + \varrho') + \cos(\varrho - \varrho')}{2} = 1 - \cos \varrho \cos \varrho' \end{aligned}$$

die Form an:

$$S = \left( \frac{\cos \varrho - \cos \varrho'}{2} \right)^2 - (1 - \cos \varrho \cos \varrho') \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha.$$

Daraus aber wird nach (11) und (9):

$$S = \frac{d^2}{e^2} \lambda^2 - \left( 1 + \frac{d^2}{e^2} \lambda^2 - \frac{e^2 - d^2}{e^2} \nu^2 \right) \frac{a^2}{e^2} + \frac{a^4}{e^4}$$

und nach (8):

$$\begin{aligned} e^4 S &= -d^2(a^2 - e^2)\lambda^2 + a^2(e^2 - d^2)\nu^2 + a^2(a^2 - e^2)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\ &= (a^2 - d^2)(a^2 - e^2)\lambda^2 + a^2(a^2 - e^2)\mu^2 + a^2(a^2 - d^2)\nu^2. \end{aligned}$$

Sind daher  $\varrho$  und  $\varrho'$  die Winkel, die ein laufender Strahl  $p = \lambda, \mu, \nu$  des Bündels (Fig. 194) mit den beiden festen Strahlen  $f$  und  $f'$  einschließt, so ist mit den Beziehungen (9) identisch:

$$(13) \quad \begin{cases} a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2) \left( \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{a^2 - d^2} + \frac{\nu^2}{a^2 - e^2} \right) \\ = e^4 \left( \sin^2 \frac{\varrho + \varrho'}{2} - \sin^2 \alpha \right) \left( \sin^2 \frac{\varrho - \varrho'}{2} - \sin^2 \alpha \right). \end{cases}$$

Sind  $x, y, z$  die Koordinaten und  $r$  der Leitstrahl eines Punktes auf dem Strahle  $\lambda, \mu, \nu$ , so ist (I § 33, (14)):

$$x = r\lambda, \quad y = r\mu, \quad z = r\nu; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Demnach gilt für jeden Punkt  $x, y, z$  des laufenden Strahles  $p$  die Identität:<sup>4)</sup>

$$(14) \quad \begin{cases} a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} \right) \\ = e^4(x^2 + y^2 + z^2) \left( \sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varrho + \varrho'}{2} \right) \left( \sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\varrho - \varrho'}{2} \right). \end{cases}$$

**4. Fokaleigenschaft des elliptischen Kegels und des sphärischen Kegelschnittes.** Die beiden festen Strahlen  $f$  und  $f'$  haben nach (6) in laufenden Punktkoordinaten die Gleichungen:

$$(15) \quad x : y : z = \pm \sin \varepsilon : 0 : \cos \varepsilon$$

oder nach (9):

$$(16) \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 0, \quad y = 0.$$

Infolge der Identität (14) ergibt sich nun (Fig. 194), daß die Gleichung (5) und die Gleichung:

$$(17) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0$$

sich gegenseitig bedingen. Dabei können  $x, y, z$  (I § 49, 6) sowohl Koordinaten des Strahles im Bündel als des Punktes im Raume bedeuten. Mit Rücksicht auf § 54, (1); (11) folgt daher:

*Der Ort eines Strahles  $p$  im Bündel, für den die Summe oder Differenz der Winkel, die er mit zwei festen Strahlen  $f$  und  $f'$  bildet, den festen Wert  $\pm 2\alpha$  behält, ist ein elliptischer Kegel mit den Brennstahlen  $f$  und  $f'$ .*

*Bei jedem elliptischen Kegel ist die Summe oder Differenz der Winkel der laufenden Erzeugenden gegen die beiden Brennlilien unveränderlich.<sup>5)</sup>*

Für den Durchschnitt des Kegels (17) mit der Einheitskugel:

$$(18) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

unter  $x, y, z$  Punktkoordinaten im Raume gedacht, lauten dieselben Sätze:

*Der Ort eines Punktes  $P$  der Kugel, für den die Summe oder Differenz der sphärischen Entfernungen von zwei festen Punkten  $F, F'$*

(Fig. 194) konstant bleibt, ist ein sphärischer Kegelschnitt (eine sphärische Ellipse).

Bei jeder sphärischen Ellipse ist die Summe oder Differenz der sphärischen Entfernungen des laufenden Punktes von den Brennpunkten konstant.<sup>5)</sup>

### 5. Verschiedene Lage des Kegels gegen das Achsensystem.

Bei festem Winkel  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  nach (6)) kann über den Winkel  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nach (3)) auf doppelte Weise verfügt werden, nämlich entweder (vgl. (9)):

$$(19) \quad \frac{\pi}{2} > \alpha > \varepsilon; \sin \alpha > \sin \varepsilon; e^2 > a^2 > d^2$$

oder:

$$(19') \quad \varepsilon > \alpha > 0; \sin \varepsilon > \sin \alpha; d^2 > a^2 > 0.$$

Dementsprechend ist der Kegel (17) nach § 54, 4 ein aufrechter Kegel mit oberem und unterem Mantel oder ein liegender mit rechtem und linkem Mantel.

**6. Verteilung der Brennpunkteigenschaften auf die beiden Kegel.** Der sphärische Kegelschnitt  $k$ , in dem der Kegel (17); (19) die Einheitskugel (18) schneidet, besteht, den beiden Mänteln des Kegels entsprechend, aus einem *oberen*  $ABA'B'$  und einem *unteren* *Zweig*  $A_1B_1A_1'B_1'$ , die beide durch die  $xy$ -Ebene getrennt sind (§ 54, Fig. 127); der sphärische Kegelschnitt (17); (19') ebenso aus einem *rechten*  $ACA_1'C'$  und einem *linken* *Zweig*  $A_1C_1A_1'C_1'$ , die beide durch die  $yz$ -Ebene getrennt sind (§ 54, Fig. 128).

Da die größten Kreisbogen  $2\varepsilon = FF'$ ,  $\varrho = FP$ ,  $\varrho' = F'P$ ,  $\pi - \varrho = F_1P$ ,  $\pi - \varrho' = F_1'P$  je  $< \pi$  und kürzeste Entfernungen ihrer Endpunkte auf der Kugel sind, so ist in den Dreiecken  $FPF'$  und  $F_1PF_1'$  (Fig. 128 und Fig. 194):

$$2\varepsilon < \varrho + \varrho', \quad 2\varepsilon < (\pi - \varrho) + (\pi - \varrho'); \quad \varrho' < 2\varepsilon + \varrho, \quad \varrho < 2\varepsilon + \varrho'$$

oder:

$$(20) \quad 2\varepsilon < \varrho + \varrho' < 2\pi - 2\varepsilon; \quad (20') \quad 0 < |\varrho - \varrho'| < 2\varepsilon.$$

Ist nun mit (19):  $2\varepsilon < 2\alpha < \pi$ , so ist nach (20'):  $|\varrho - \varrho'| = 2\alpha$  unmöglich. Ist aber mit (19'):  $0 < 2\alpha < 2\varepsilon$  und  $2\pi - 2\varepsilon < 2\pi - 2\alpha$ , so ist nach (20):  $\varrho + \varrho' = 2\alpha$  und  $2\pi - 2\alpha$  unmöglich (§ 1, 4).

Von den vier Möglichkeiten (4), von denen nach der Identität (14) wenigstens eine statthaben muß, bleiben daher für den Kegel (17); (19) und (17); (19') bezüglich nur übrig:

$$(21) \quad \varrho + \varrho' = 2\alpha \text{ oder } 2\pi - 2\alpha, \quad (21') \quad \varrho - \varrho' = 2\alpha \text{ oder } -2\alpha.$$

Für den größten Wert  $\frac{\pi}{2}$  von  $\alpha$  (vgl. (19)),  $a = e$  nach (9), fallen von dem Kegelschnitt (17), (18), (19) der obere und untere Zweig in den *größten Kreis der  $xy$ -Ebene* hinein, und zugleich vereinigen sich die beiden Möglichkeiten (21) in die eine:

$$(22) \quad \varrho + \varrho' = \pi,$$

die somit für diesen Kreis gelten muß. Bei abnehmendem  $\alpha$  fällt daher die erste Möglichkeit (21) dem oberen, die zweite dem unteren Zweige zu.

Da andererseits für Punkte  $P$  links von der  $yz$ -Ebene  $\varrho' < \varrho$  und rechts  $\varrho' > \varrho$  ist, so kommt dem linken Zweig des Kegelschnittes (17), (18), (19') die erste Möglichkeit (21'), dem rechten die zweite zu.

*Die vier Möglichkeiten (4):*

$$(23) \quad \varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho + \varrho' = 2\pi - 2\alpha; \quad \varrho - \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho' - \varrho = 2\alpha,$$

die sich auf die *sphärischen Abstände  $\varrho$  und  $\varrho'$  des laufenden Punktes  $P$  von dem rechten und linken oberen Brennpunkt  $F$  und  $F'$  beziehen, kommen also bezüglich dem oberen und unteren Zweig des sphärischen Kegelschnittes (19) und dem linken und rechten Zweig von (19') zu.*

Bezeichnen indessen (§ 54, Fig. 127):

$$\varrho_1 = \pi - \varrho, \quad \varrho_1' = \pi - \varrho'$$

die Abstände des Punktes  $P$  von dem unteren linken und rechten Brennpunkt  $F_1$  und  $F_1'$ , so können die vier Eigenschaften (23) alle in der *Summenform*, und zwar:

$$(24) \quad \varrho + \varrho' = 2\alpha, \quad \varrho_1 + \varrho_1' = 2\alpha; \quad \varrho_1 + \varrho' = \pi - 2\alpha, \quad \varrho + \varrho_1' = \pi - 2\alpha$$

geschrieben werden.

*Jeder Zweig eines sphärischen Kegelschnittes hat daher die Eigenschaft, daß die Summe der sphärischen Abstände seines laufenden Punktes von seinen beiden inneren Brennpunkten gleich seinem größten sphärischen Durchmesser ist. Er kann somit, wie die Ellipse in der Ebene, mittels eines in den Brennpunkten befestigten und auf der Kugel gespannten Fadens beschrieben werden.<sup>11)</sup>*

### III. Kapitel.

#### Die Theorie der gebrochenen Fokaldistanzen.

##### § 131. Fokaleigenschaften konjugierter Fokalkegelschnitte.

**1. Die konjugierten Fokalkegelschnitte.** Die in der Ebene  $z = 0$  liegende Ellipse:

$$(1) \quad \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1$$



und die in der Ebene  $y = 0$  liegende Hyperbel:

$$(2) \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1$$

haben, wenn zwischen ihren Konstanten die Beziehung:

$$(3) \quad d^2 - e^2 + f^2 = 0$$

besteht, die Eigenschaft, daß die Scheitelpunkte  $C_0, C_0'$  der Ellipse (Fig. 195) die Brennpunkte der Hyperbel und die Scheitelpunkte  $B_0, B_0'$  der Hyperbel die Brennpunkte der Ellipse sind.

Der eine der beiden „konjugierten Kegelschnitte“ ist durch den andern bestimmt.<sup>188)</sup>

Sie sind zugleich die Fokalkegelschnitte § 55, (9) der Mittelpunktsfläche § 55, (1), die Fokalellipse und Fokalhyperbel.

**2. Entfernung zweier Punkte der konjugierten Fokalkegelschnitte.** Sind  $C = x_0, y_0, 0$  und  $B = x_1, 0, z_1$  zwei Punkte der Kegelschnitte (1) und (2), also:

$$(4) \quad \frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{d^2} - \frac{z_1^2}{f^2} = 1,$$

so ist für ihre Entfernung  $\varrho$  mit Rücksicht auf (3):

$$\begin{aligned} \varrho^2 = \overline{BC}^2 &= (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_1^2 = (x_1 - x_0)^2 + f^2 - \frac{f^2}{e^2} x_0^2 + \frac{f^2}{d^2} x_1^2 - f^2 \\ &= \frac{e^2 - f^2}{e^2} x_0^2 + \frac{d^2 + f^2}{d^2} x_1^2 - 2x_0 x_1 = \frac{d^2 x_0^2}{e^2} + \frac{e^2 x_1^2}{d^2} - 2x_0 x_1 \\ &= \left( \frac{dx_0}{e} - \frac{ex_1}{d} \right)^2 \end{aligned}$$

und somit:

$$(5) \quad \varrho = \overline{BC} = \pm \left( \frac{dx_0}{e} - \frac{ex_1}{d} \right).$$

Nach (3) und (4) ist:

$$(6) \quad d < e, \quad |x_0| \leq e, \quad |x_1| \geq d$$

und daher:

$$(7) \quad \left| d \frac{x_0}{e} \right| < d < e < \left| e \frac{x_1}{d} \right|.$$

Somit gilt in (5) das positive oder negative Zeichen, je nachdem  $x_1 < 0$  oder  $> 0$ .

Die absolute Entfernung eines Punktes  $C = x_0, y_0, 0$  der Ellipse und eines Punktes  $B = x_1, 0, z_1$  der Hyperbel ist.<sup>22)</sup>

$$(8) \quad \varrho = \overline{BC} = \frac{ex_1}{d} - \frac{dx_0}{e} \quad \text{oder} \quad \varrho = \overline{BC} = -\frac{ex_1}{d} + \frac{dx_0}{e},$$

je nachdem  $B$  auf dem rechten (Fig. 195) oder auf dem linken Zweig der Hyperbel liegt (vgl. § 4, (35)).

**3. Winkel der Strecke  $CB$  gegen die Tangente der Ellipse.**  
Die Richtungskosinus der Strecke  $CB$  (Fig. 195) sind (I § 34, (7)):

$$\frac{x_1 - x_0}{e}, \quad -\frac{y_0}{e}, \quad \frac{z_1}{e}$$

und die der Tangente der Ellipse (1) im Punkte  $C$  nach § 13, (5); (6):

$$(9) \quad -q \frac{y_0}{f^2}, \quad q \frac{x_0}{e^2}, \quad 0; \quad q = 1: \sqrt{\frac{x_0^2}{e^4} + \frac{y_0^2}{f^4}},$$

wobei die Tangente so gerichtet ist, daß sie den Punkt  $O$  zur Linken läßt (I § 17, (5)).

Daher ist für den Winkel  $\gamma$  zwischen der Strecke  $CB$  und der Tangente (I § 35, (1)):

$$\cos \gamma = -\frac{q y_0}{e} \left( \frac{x_1 - x_0}{f^2} + \frac{x_0}{e^2} \right) = -\frac{q y_0}{f^2 e} \left( x_1 - \frac{d^2}{e^2} x_0 \right) = -\frac{d}{e} \frac{q y_0}{f^2 e} \left( \frac{e}{d} x_1 - \frac{d}{e} x_0 \right)$$

und nach (8):

$$(10) \quad \cos \gamma = -\frac{d}{e} \frac{q y_0}{f^2} \quad \text{oder} \quad \cos \gamma = \frac{d}{e} \frac{q y_0}{f^2},$$

je nachdem  $B$  auf dem rechten (Fig. 195, wo  $y_0 < 0$ , also  $\gamma$  spitz) oder auf dem linken Zweig der Hyperbel liegt. Da die Ausdrücke (10)  $x_1, z_1$  nicht enthalten, folgt:

*Der Winkel  $\gamma$ , den die Strecke  $CB$  (Fig. 195) mit der Tangente der Ellipse im Punkte  $C$  bildet, ist von der Lage des Punktes  $B$  auf demselben Hyperbelzweig unabhängig und geht nur in  $\pi - \gamma$  über, wenn  $B$  auf den anderen Hyperbelzweig übergeht; oder, was dasselbe ist:*

*Der von einem beliebigen Punkte  $C$  der Ellipse über der konjugierten Hyperbel errichtete*

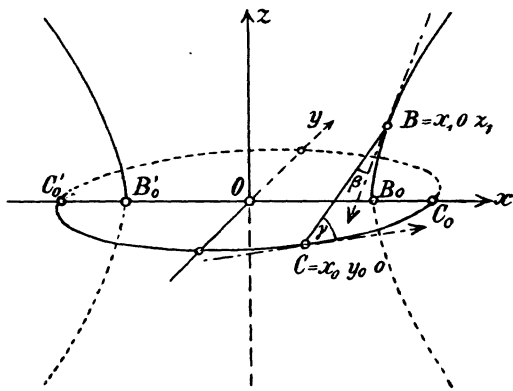


Fig. 195.

*Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Rotationsachse die Tangente der Ellipse in  $C$  ist; die beiden Zweige der Hyperbel gehören verschiedenen Mänteln des Kegels an (§ 122, 8, III).*

**4. Winkel der Strecke  $BC$  gegen die Tangente der Hyperbel.**  
Die Richtungskosinus der Strecke  $BC$  (Fig. 195) sind:

$$\frac{x_0 - x_1}{e}, \quad \frac{y_0}{e}, \quad -\frac{z_1}{e}$$

und die der Tangente der Hyperbel (2) im Punkte  $B$  nach § 13, (5); (6):

$$(11) \quad -\varepsilon p \frac{z_1}{f^2}, \quad 0, \quad -\varepsilon p \frac{x_1}{d^2}; \quad p = 1 : \sqrt{\frac{x_1^2}{d^4} + \frac{z_1^2}{f^4}}; \quad \varepsilon = \text{sign. } x_1,$$

wobei die Tangente nach abwärts gerichtet ( $-\varepsilon p \frac{x_1}{d^2} < 0$ ) ist.

Daher ist für den Winkel  $\beta$  zwischen der Strecke  $BC$  und der Tangente:

$$\cos \beta = -\frac{\varepsilon p z_1}{e} \left( \frac{x_0 - x_1}{f^2} - \frac{x_1}{d^2} \right) = -\frac{\varepsilon p z_1}{f^2 e} \left( x_0 - \frac{e^2}{d^2} x_1 \right) = \varepsilon \frac{e p z_1}{f^2 e} \left( \frac{e}{d} x_1 - \frac{d}{e} x_0 \right)$$

und nach (8), wo für  $\varepsilon = 1$  die erste, für  $\varepsilon = -1$  die zweite Formel gilt:

$$(12) \quad \cos \beta = \frac{e p z_1}{d f^2}$$

(Fig. 195, wo mit  $z_1 > 0$   $\beta$  spitz ist). Da der Ausdruck (12) die Koordinaten  $x_0, y_0$  nicht enthält, folgt:

*Der Winkel  $\beta$ , den die Strecke  $BC$  (Fig. 195) mit der Tangente der Hyperbel im Punkte  $B$  bildet, ist von der Lage des Punktes  $C$  auf der Ellipse unabhängig; oder, was dasselbe ist:*

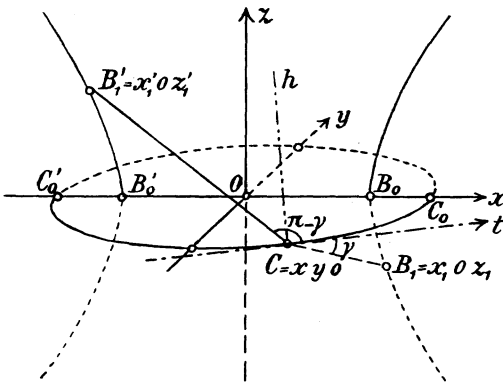


Fig. 196.

**Hyperbel.** Sind (Fig. 196)  $B_1 = x_1, 0, z_1$  und  $B_1' = x_1', 0, z_1'$  zwei feste Punkte der Hyperbel, bezüglich auf dem rechten und linken Zweig (ungleichseitig) gelegen, und  $C = x, y, 0$  ein laufender Punkt der Ellipse, so ist nach (8):

$$\overline{B_1 C} = \frac{e x_1}{d} - \frac{d x}{e}, \quad \overline{B_1' C} = -\frac{e x_1'}{d} + \frac{d x}{e}$$

und danach:

$$(13) \quad \overline{B_1 C} + \overline{B_1' C} = \frac{e(x_1 - x_1')}{d}$$

unabhängig von  $x, y$ .

Der von einem beliebigen Punkte  $B$  der Hyperbel über der konjugierten Ellipse errichtete Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Rotationsachse die Tangente der Hyperbel in  $B$  ist; die Ellipse gehört dem einen Mantel des Kegels an.

**5. Fokaleigenschaft der Ellipse in bezug auf zwei ungleichseitige Punkte der**

**Hyperbel.**

Sind (Fig. 196)  $B_1 = x_1, 0, z_1$  und  $B_1' = x_1', 0, z_1'$  zwei feste Punkte der Hyperbel, bezüglich auf dem rechten und linken Zweig (ungleichseitig) gelegen, und  $C = x, y, 0$  ein laufender Punkt der Ellipse, so ist nach (8):

$$\overline{B_1 C} = \frac{e x_1}{d} - \frac{d x}{e}, \quad \overline{B_1' C} = -\frac{e x_1'}{d} + \frac{d x}{e}$$

und danach:

$$(13) \quad \overline{B_1 C} + \overline{B_1' C} = \frac{e(x_1 - x_1')}{d}$$

unabhängig von  $x, y$ .

I. Die Summe der Entfernungen des laufenden Punktes  $C$  der Ellipse von zwei festen ungleichseitigen Punkten  $B_1$  und  $B_1'$  der Hyperbel (Fig. 196) ist unveränderlich.<sup>188)</sup>

Die Winkel der Strecken  $CB_1$  und  $CB_1'$  gegen die Tangente der Ellipse in  $C$  haben nach (10) entgegengesetzte Kosinus; ist der eine  $\gamma$ , so ist der andere  $\pi - \gamma$ .

Man kann dies noch anders ausdrücken. Sind  $a_1, b_1, c_1$  und  $a_2, b_2, c_2$  die Richtungskosinus der beiden Strecken und  $\lambda, \mu, \nu$  die der Tangente, so ist nach (10):

$$a_1\lambda + b_1\mu + c_1\nu = -(a_2\lambda + b_2\mu + c_2\nu),$$

woraus folgt (I § 35, (9)):

I. Die innere Halbierungslinie  $h$  des Winkels der Strecken  $CB_1$  und  $CB_1'$  steht auf der Tangente  $t$  der Ellipse in  $C$  senkrecht (Fig. 196).

Mit  $x_1 = d, x_1' = -d$  geht aus (13) die Fokaleigenschaft der Ellipse § 1, (9):

$$(13') \quad \overline{B_0C} + \overline{B_0'C} = 2e$$

(Fig. 196) und aus I die Winkelbeziehung der Brennstrahlen  $CB_0, CB_0'$  zur Tangente § 13, 4 hervor.

6. Fokaleigenschaft der Ellipse in bezug auf zwei gleichseitige Punkte der Hyperbel. Sind (Fig. 197)  $B_1 = x_1, 0, z_1$  und  $B_2 = x_2, 0, z_2$  zwei feste Punkte auf demselben (rechten) Zweig der Hyperbel und  $C = x, y, 0$  ein laufender Punkt der Ellipse, so ist nach (8):

$$\overline{B_1C} = \frac{ex_1}{d} - \frac{dx}{e}, \quad \overline{B_2C} = \frac{ex_2}{d} - \frac{dx}{e}$$

und danach:

$$(14) \quad \overline{B_1C} - \overline{B_2C} = \frac{e(x_1 - x_2)}{d}$$

unabhängig von  $x, y$ .

II. Die Differenz der Entfernungen des laufenden Punktes  $C$  der Ellipse von zwei festen gleichseitigen Punkten  $B_1$  und  $B_2$  der Hyperbel (Fig. 197) ist unveränderlich.

Die Strecken  $CB_1$  und  $CB_2$  bilden nach (10) mit der Tangente der Ellipse in  $C$  gleiche Winkel  $\gamma$ .

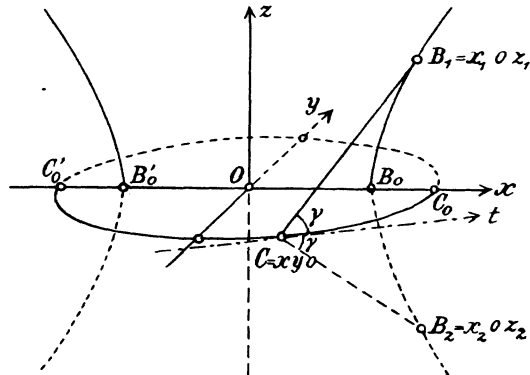


Fig. 197.

7. **Fokaleigenschaft der Hyperbel in bezug auf zwei Punkte der Ellipse.** Sind (Fig. 198)  $C_1 = x_1, y_1, 0$  und  $C_2 = x_2, y_2, 0$  zwei feste Punkte der Ellipse und  $B = x, 0, z$  ein laufender Punkt der

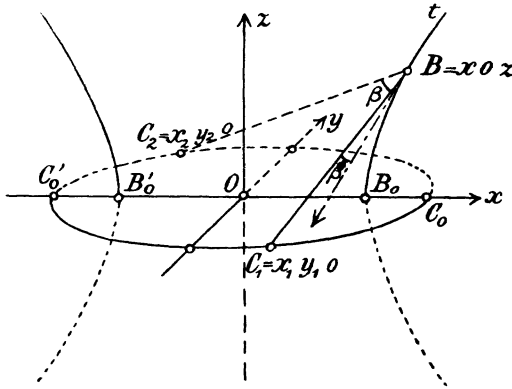


Fig. 198.

Hyperbel (des rechten Zweiges), so ist nach (8):

$$\overline{C_1 B} = \frac{ex}{d} - \frac{dx_1}{e},$$

$$\overline{C_2 B} = \frac{ex}{d} - \frac{dx_2}{e}$$

und somit:

$$(15) \quad \overline{C_1 B} - \overline{C_2 B} = \frac{d(x_2 - x_1)}{e}.$$

III. *Die Differenz der Entfernungen des laufenden Punktes B der Hyperbel von zwei festen Punkten  $C_1$  und  $C_2$  der Ellipse (Fig. 198) ist unveränderlich.*

Die Strecken  $BC_1$  und  $BC_2$  bilden nach (12) mit der Tangente der Hyperbel in B gleiche Winkel  $\beta$ .

Für  $x_1 = -e, x_2 = e$  geht aus (15) die Fokaleigenschaft der Hyperbel § 1, (10):

$$(15') \quad \overline{C'_0 B} - \overline{C_0 B} = 2d$$

hervor.

8. **Gebrochene Entfernungen.** Der Satz (13) kann auch in der Form ausgedrückt werden:

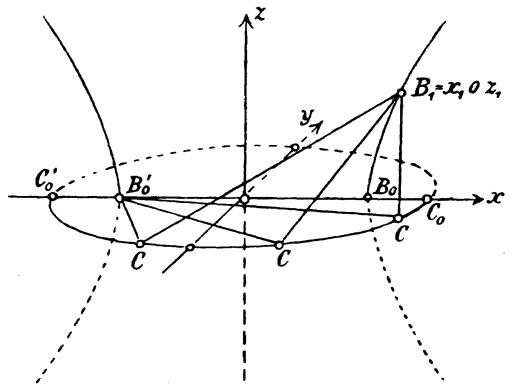


Fig. 199.

*Die gebrochene Entfernung  $B_1CB_1'$  zweier ungleichseitiger Punkte  $B_1$  und  $B_1'$  der Fokalhyperbel über die Fokalellipse ist unveränderlich (Fig. 196).*

Denkt man sich Ellipse und Hyperbel aus dünnem glatten Draht hergestellt und durch ein geradliniges Drahtstück  $C_0B_0B_0'C_0'$  mit einander fest verbunden und denkt man sich die gebrochene Linie  $B_1CB_1'$  als unausdehnbaren

Faden, der in  $B_1$  und  $B_1'$  befestigt ist und in C frei über die Ellipse gleitet, so ist der Faden, da die Resultante der Spannungen der

Stücke  $CB_1$  und  $CB_1'$  nach 5,  $I'$  in die auf  $t$  senkrechte Halbierungslinie  $h$  fällt, im indifferenten Gleichgewicht, und der Gleitpunkt  $C$  längs der Ellipse verschiebbar (wenigstens auf der vorderen Hälfte der Ellipse; der Übergang auf die hintere wird durch das Drahtgestell verhindert).

Insbesondere folgt mit  $B_1' = B_0'$  ( $x_1' = -d$ ) aus (13):

Die gebrochene Entfernung  $B_1CB_0'$  eines beliebigen Punktes  $B_1 = x_1, 0, z_1$  ( $x_1 > 0$ ) der Hyperbel von dem ungleichseitigen Scheitel  $B_0' = -d, 0, 0$  der Hyperbel, über die Ellipse hinweg (Fig. 199), ist von unveränderlicher Länge:

$$(16) \quad B_1CB_0' = \frac{ex_1}{d} + e.$$

**9. Zusammengesetzte Fokaleigenschaft der Ellipse und Hyperbel.** Die Punkte  $B_0'$  und  $C_0$  haben die Koordinaten:  $-d, 0, 0$  und  $e, 0, 0$ . Ist nun  $C = x_0, y_0, 0$  ein Punkt der Ellipse,  $B = x_1, 0, z_1$  ein Punkt des rechten und  $B' = x_1', 0, z_1'$  ein Punkt des linken Hyperbelzweiges (Fig. 200 und 201), so ist nach (8):

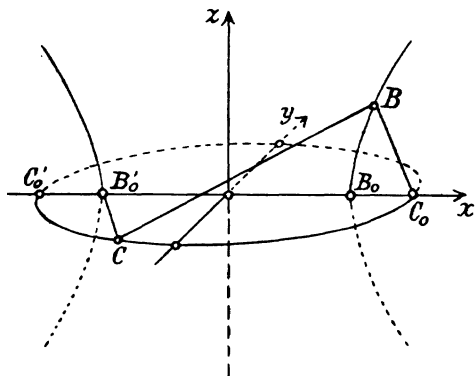


Fig. 200.

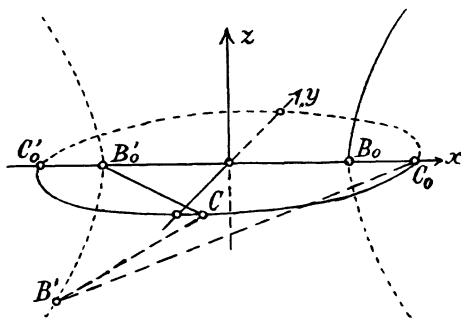


Fig. 201.

$$\begin{aligned} \overline{B_0'C} &= e + \frac{dx_0}{e}, & \overline{B_0'C} &= e + \frac{dx_0}{e}, \\ \overline{CB} &= \frac{ex_1}{d} - \frac{dx_0}{e}, & \overline{CB'} &= -\frac{ex_1'}{d} + \frac{dx_0}{e}, \\ \overline{BC_0} &= \frac{ex_1}{d} - d, & \overline{B'C_0} &= -\frac{ex_1'}{d} + d \end{aligned}$$

und somit *unabhängig von der Lage der Punkte C, B, B' bezüglich auf der Ellipse, auf dem rechten und linken Zweige der Hyperbel:*

$$(17) \quad \overline{B_0'C} + \overline{CB} - \overline{BC_0} = d + e, \quad \overline{B_0'C} - \overline{CB'} + \overline{B'C_0} = d + e.$$

Ebenso ist mit  $B_0$  und  $C_0'$  statt mit  $B_0'$  und  $C_0$  endigend:

$$(18) \quad \overline{B_0C} + \overline{CB'} - \overline{B'C_0'} = d + e, \quad \overline{B_0C} - \overline{CB} + \overline{BC_0'} = d + e.$$

### § 132. Die gebrochenen Fokaldistanzen über die Fokalellipse.

**1. Die beiden Fokalkegel eines Punktes.** Die von einem Punkte  $P = x, y, z$  des Raumes über dem einen oder andern der beiden Fokalkegelschnitte § 131, (1); (2) errichteten Kegel zweiter Ordnung heißen nach § 122, 2 *die beiden Fokalkegel des Punktes P*.

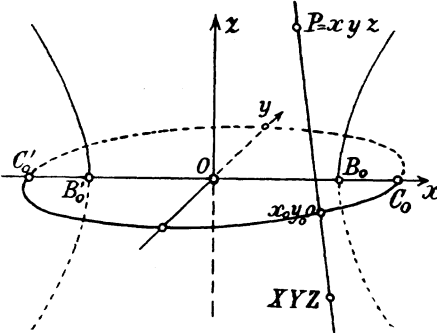


Fig. 202.

Sie können als Spezialfälle des Berührungskegels von  $P$  an eine Fläche zweiter Ordnung (§ 70, 4) betrachtet werden, da die Fokalkegelschnitte selbst nach § 120, 4 als Flächen zweiter Ordnung mit einer verschwindenden Halbachse entstehen. Indem man daher die Gleichung § 70, (22) des Berührungskegels an die Fläche § 70, (1) mit  $a^2, b^2, c^2 = e^2, f^2, 0$  und  $d^2, 0,$

$-f^2$  auf die Grenzflächen § 131, (1); (2) anwendet, ergibt sich:

Die Gleichungen der beiden Fokalkegel des Punktes  $P = x, y, z$  lauten in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$  (Fig. 202):

$$(1) \quad \frac{(xZ - zX)^2}{e^2} + \frac{(yZ - zY)^2}{f^2} - (Z - z)^2 = 0,$$

$$(2) \quad \frac{(xY - yX)^2}{d^2} - \frac{(zY - yZ)^2}{f^2} - (Y - y)^2 = 0.$$

**2. Bedingung der Rotationskegel.** Für den Kegel (1) ist in der Bezeichnung von § 100, 3:

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11} = \frac{z^2}{e^2}, & a_{22} = \frac{z^2}{f^2}, & a_{33} = \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{f^2} - 1, \\ a_{23} = -\frac{yz}{f^2}, & a_{31} = -\frac{zx}{e^2}, & a_{12} = 0. \end{cases}$$

Sieht man also von dem Falle  $z = 0$  ab, wo der Kegel in die Doppelsebene  $Z^2 = 0$  zerfällt, ist er nach § 100, (7) ein Rotationskegel immer dann und nur dann, wenn entweder:

$$(4) \quad x = 0, \quad \left(\frac{z^2}{e^2} - \frac{z^2}{f^2}\right) \left(\frac{z^2}{e^2} - \frac{y^2}{f^2} + 1\right) - \frac{y^2 z^2}{f^4} = -\frac{d^2 z^2}{e^2 f^2} \left(\frac{y^2}{d^2} + \frac{z^2}{e^2} + 1\right) = 0,$$

oder:

$$(5) \quad y = 0, \quad \left(\frac{z^2}{f^2} - \frac{x^2}{e^2} + 1\right) \left(\frac{z^2}{f^2} - \frac{z^2}{e^2}\right) - \frac{z^2 x^2}{e^4} = -\frac{d^2 z^2}{e^2 f^2} \left(\frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{f^2} - 1\right) = 0.$$

Der Kegel über der Fokalellipse § 131, (1) ist daher ein Rotationskegel, wenn der Punkt  $P = x, y, z$  auf der Fokalhyperbel § 131, (2) oder auf der imaginären Fokalellipse der  $yz$ -Ebene § 120, (21) liegt.<sup>144)</sup>

Entsprechendes gilt für den Kegel (2). Indem wir die imaginäre Fokalellipse ausscheiden, heben wir nur hervor, wie schon § 122, 8, III und § 131, 3; 4 bewiesen wurde:

*Der von einem Punkte der Fokalhyperbel über der Fokalellipse und der von einem Punkte der Fokalellipse über der Fokalhyperbel errichtete Kegel ist ein Rotationskegel.*

**3. Die Fokallinien.** Eine gemeinsame Transversale (Trefflinie) der beiden Fokalkegelschnitte § 131, (1), (2), wie  $BC$  in Fig. 195, soll ein *Fokalstrahl* oder eine *Fokallinie* genannt werden.

Durch einen Punkt  $P$  des Raumes gehen im allgemeinen vier Fokallinien, nämlich die nach § 122, 5 stets reellen Schnittlinien der beiden Fokalkegel des Punktes.

Liegt jedoch der Punkt  $P$  selbst auf einem Fokalkegelschnitt, so gehen durch ihn ausnahmsweise  $\infty^1$  Fokallinien, seine Verbindungslinien mit dem andern Fokalkegelschnitt, die nach 2 einen Rotationskegel bilden.

Im allgemeinen Falle (Fig. 203) seien die Schnittpunkte der vier Fokallinien  $f_1, f_2, f_3, f_4$  des Punktes  $P$  mit der Fokalellipse  $C_1, C_2, C_3, C_4$  und mit der Fokalhyperbel  $B_1, B_2, B_3, B_4$ .

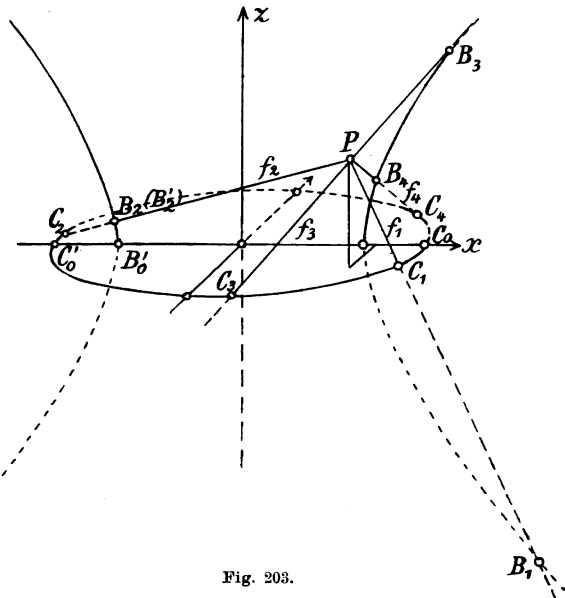


Fig. 203.

**4. Gebrochene Entfernungen über die Fokalellipse.** Die gebrochene Entfernung  $B'CB_0$  oder (Fig. 199)  $BCB'_0$  eines Punktes  $B$

des linken oder eines Punktes  $B$  des rechten Zweiges der Fokalhyperbel von dem ungleichseitigen Brennpunkt  $B_0$  oder  $B'_0$  der Fokalellipse, über diese hinweg, ist nach § 131, 8 für alle Lagen des Knickpunktes  $C$  dieselbe. Sie ist die *indifferente Gleichgewichtslage* eines in  $C$  über die Ellipse gleitenden und in den Endpunkten  $B'B_0$  oder  $BB'_0$  festgehaltenen Fadens.



Die gebrochene Entfernung:

$$(6) \quad r = PCB_0 \quad \text{oder} \quad r' = PCB'_0$$

eines beliebigen Punktes  $P = x, y, z$  des Raumes von einem Brennpunkte:

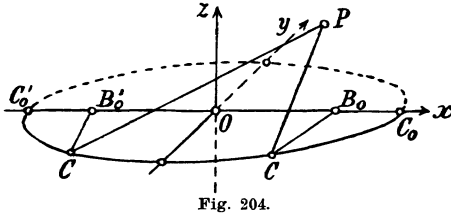


Fig. 204.

$B_0 = d, 0, 0$  oder  $B'_0 = -d, 0, 0$  (Fig. 204) der Fokalellipse § 131, (1), über diese hinweg, wird im allgemeinen von dem Knickpunkt  $C = x_0, y_0, 0$  abhängig sein.

In Formeln drückt sich diese

Abhängigkeit in folgender Weise aus:

$$(7) \quad r = \overline{PC} + \overline{CB}_0 = \varrho + \tau, \quad r' = \overline{PC'} + \overline{C'B}'_0 = \varrho' + \tau',$$

wobei:

$$(8) \quad \varrho = \overline{PC} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

$$(9) \quad \tau = \overline{CB}_0 = \sqrt{(x_0 - d)^2 + y_0^2}, \quad \tau' = \overline{C'B}'_0 = \sqrt{(x_0 + d)^2 + y_0^2},$$

während gleichzeitig:

$$(10) \quad \frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1; \quad (11) \quad d^2 - e^2 + f^2 = 0.$$

Nach § 4, (35) ist auch:

$$(12) \quad \tau = e - \frac{d}{e} x_0, \quad \tau' = e + \frac{d}{e} x_0.$$

Dabei sind die beiden voneinander unabhängigen Knickpunkte von  $r$  und  $r'$  in der Bezeichnung  $C = x_0, y_0, 0$  nicht besonders unterschieden.

**5. Größte und kleinste Werte der gebrochenen Entfernung.** Während der Knickpunkt  $C$  die ganze Ellipse (10) durchläuft, bleibt die gebrochene Entfernung  $r$  in (7), die Summe der absoluten Entfernungen  $\varrho$  und  $\tau$  immer endlich und größer als Null. Sie muß also wenigstens einmal einen kleinsten und einmal einen größten Wert erhalten.

Die gebrochene Entfernung  $r = PCB_0$  und ebenso  $r' = PCB'_0$  hat je wenigstens ein Minimum und ein Maximum.

**6. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Minima und Maxima.** Um die extremen Werte zu bestimmen, betrachten wir  $r$  als Funktion der unabhängigen Veränderlichen  $x_0$ , während wir  $y_0$  durch (10) von  $x_0$  abhängig gemacht denken. Dann ist der erste und zweite Differentialquotient von  $y_0$  nach  $x_0$ :

$$(13) \quad \frac{dy_0}{dx_0} = -\frac{f^2 x_0}{e^2 y_0}, \quad \frac{d^2 y_0}{dx_0^2} = -\frac{f^4}{e^2 y_0^3}$$

und zugleich mit Rücksicht auf (10) und (11):

$$(14) \quad 1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + y_0 \frac{d^2 y_0}{dx_0^2} = \frac{d^2}{e^2}.$$

Ferner ist nach (8) für den ersten und zweiten Differentialquotienten von  $\varrho$  nach  $x_0$ :

$$(15) \quad \varrho \frac{d\varrho}{dx_0} = (x_0 - x) + (y_0 - y) \frac{dy_0}{dx_0} = (x_0 - x) - \frac{f^2 x_0}{e^2 y_0} (y_0 - y),$$

$$\varrho \frac{d^2 \varrho}{dx_0^2} + \left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + (y_0 - y) \frac{d^2 y_0}{dx_0^2},$$

oder mit Rücksicht auf (14) und (13):

$$(16) \quad \varrho \frac{d^2 \varrho}{dx_0^2} = -\left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 + \frac{d^2}{e^2} + \frac{f^4 y}{e^2 y_0^3}.$$

Der erste und zweite Differentialquotient von  $r$  nach  $x_0$  wird nach (7) mit Benutzung der Darstellung (12) von  $\tau$  und der Formel (15):

$$(17) \quad \frac{dr}{dx_0} = \frac{d\varrho}{dx_0} - \frac{d}{e} = \frac{x_0 - x}{\varrho} - \frac{f^2 x_0 y_0 - y}{e^2 y_0 \varrho} - \frac{d}{e},$$

$$(18) \quad \frac{d^2 r}{dx_0^2} = \frac{d^2 \varrho}{dx_0^2}.$$

Mit Benutzung der Darstellung (9) von  $\tau$  und der Formel (15) kann man den ersteren auch in der Form annehmen:

$$(19) \quad \frac{dr}{dx_0} = \left(\frac{x_0 - x}{\varrho} + \frac{x_0 - d}{\tau}\right) - \frac{f^2 x_0}{e^2 y_0} \left(\frac{y_0 - y}{\varrho} + \frac{y_0}{\tau}\right).$$

Die Werte von  $x_0$ , für die ein extremer Wert von  $r$  eintritt, müssen nun der Gleichung:

$$\frac{dr}{dx_0} = 0$$

genügen. Für einen solchen Wert von  $x_0$  ist aber nach (17):

$$\frac{d\varrho}{dx_0} = \frac{d}{e}$$

und daher nach (18) und (16):

$$(20) \quad \frac{d^2 r}{dx_0^2} = \frac{1}{\varrho} \frac{f^4}{e^2 y_0^2} \cdot \frac{y}{y_0}.$$

Hiernach tritt bei reellen  $x_0, y_0$  im allgemeinen ( $y \neq 0, y_0 \neq 0$ ) auch wirklich ein Minimum oder Maximum ein und zwar jenes oder dieses, je nachdem  $y_0$  und  $y$  gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Die entsprechenden Formeln für  $r'$  gehen nach (9) und (12) durch Umkehr des Vorzeichens von  $d$  hervor.

*Die gebrochene Entfernung  $r$  oder  $r'$  in (6), (7) hat immer dann*

und nur dann einen extremen Wert, wenn der Knickpunkt  $C = x_0, y_0, 0$  neben (10) der Bedingung genügt:

$$(21) \quad \frac{dr}{dx_0} = 0 \quad \text{oder} \quad (21') \quad \frac{dr'}{dx_0} = 0,$$

und zwar ist sie dann ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem  $C$  in bezug auf die  $zx$ -Ebene mit  $P$  gleichseitig oder ungleichseitig liegt.

**7. Geometrische Bedeutung der Bedingung (21).** Die Bedingung (21) wird mit Einsetzung von (19):

$$(22) \quad -\frac{y_0}{f^2} \left( \frac{x-x_0}{e} + \frac{d-x_0}{\tau} \right) + \frac{x_0}{e^2} \left( \frac{y-y_0}{e} + \frac{0-y_0}{\tau} \right) = 0.$$

Da nun nach § 131, (9):

$$-q \frac{y_0}{f^2}, q \frac{x_0}{e^2}, 0; \quad \frac{x-x_0}{e}, \frac{y-y_0}{e}, \frac{z}{e}; \quad \frac{d-x_0}{\tau}, \frac{0-y_0}{\tau}, 0$$

bezüglich die Richtungskosinus der Tangente der Ellipse § 131, (1) in  $C = x_0, y_0, 0$  und der Strecken  $CP$  und  $CB_0$  (I § 34, (7)) sind, so bedeutet die Gleichung (22) (I § 35, (9)):

Die gebrochene Entfernung  $r$  oder  $r'$  in (6) hat für solche Lagen des Knickpunktes  $C$  auf der Fokalellipse einen extremen Wert, wo die innere Halbierungslinie der Strecken  $CP$  und  $CB_0$  oder  $CB_0'$  auf der Tangente der Ellipse in  $C$  senkrecht steht oder, was dasselbe ist, die Winkel der beiden Strecken gegen die gerichtete Tangente sich zu  $\pi$  ergänzen (Fig. 196).

Die gebrochene Entfernung bildet dann zugleich die Gleichgewichtslage eines Fadens, der in  $C$  über die Ellipse gleitet und in  $P$  und  $B_0$  oder  $B_0'$  festgehalten wird, und zwar eine stabile für ein Minimum und eine labile für ein Maximum (eine indifferente für den in 4, 1. Absatz, erwähnten Ausnahmefall  $P = B'$  bei  $r$  und  $P = B$  bei  $r'$ ).

### 8. Die Anfangsstücke der Maxima und Minima als Fokallinien.

Bildet die Strecke  $CB_0$  eines extremen Wertes der gebrochenen Entfernung  $r = PCB_0$  mit der gerichteten Tangente der Fokalellipse in  $C$  einen Winkel  $\gamma$ , so bildet nach 7 die Strecke  $CP$  mit dieser Tangente den Winkel  $\pi - \gamma$ .

Da aber die erstere Strecke den Punkt  $B_0$  enthält, gehört sie nach 2 dem einen Mantel des von  $C$  über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegels an. Dieser Mantel ist daher der Ort aller von  $C$  ausgehenden Halbstrahlen, die den Winkel  $\gamma$  mit der Tangente bilden, während der andere Mantel ebenso der Ort aller Halbstrahlen mit dem Winkel  $\pi - \gamma$  ist. Somit gehört die Strecke  $CP$  diesem andern Mantel an, die unbegrenzte Gerade  $PC$  aber überhaupt dem

von  $C$  über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegel. Sie ist daher nach **3** eine Fokallinie des Punktes  $P$ .

Die gebrochene Entfernung  $r = PCB_0$  oder  $r' = PCB'_0$  ist ein Maximum oder Minimum, wenn ihr Anfangsstück  $PC$  in eine der vier Fokallinien des Punktes  $P$  fällt und die Strecken  $CP$  und  $CB_0$  oder  $CB'_0$  verschiedenen Mänteln des von  $C$  über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegels angehören.

### 9. Das zu einer Fokallinie gehörige Maximum oder Minimum.

Umgekehrt gibt jede der vier Fokallinien des Punktes  $P$  immer entweder ein Maximum oder ein Minimum von  $r$  oder von  $r'$ . Denn ist  $C$  ihr Schnittpunkt mit der Fokalellipse, so gehört die Strecke  $CP$  nach **3** dem einen Mantel des von  $C$  über der Fokalhyperbel errichteten Kegels an, dessen erzeugende Halbstrahlen etwa den Winkel  $\gamma$  mit der Tangente der Ellipse in  $C$  bilden mögen. Die Strecken  $CB_0$  und  $CB'_0$  gehören verschiedenen Mänteln desselben Kegels an, so daß die eine den Winkel  $\gamma$ , die andere den Winkel  $\pi - \gamma$  mit der Tangente bildet. Eine von beiden gibt also, an  $PC$  angesetzt, eine gebrochene Entfernung, die der Bedingung (22) entspricht. Also:

Zu jeder der vier Fokallinien des Punktes  $P$  gehört entweder ein Maximum oder ein Minimum der gebrochenen Entfernung  $r$  oder  $r'$  in (6).

### 10. Die vier gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes.

Da aber nach **5**  $r$  und  $r'$  wenigstens je ein Maximum und ein Minimum haben, so muß zu jeder der vier Fokallinien je ein solches gehören, und kann es nicht mehr als je eines für  $r$  und für  $r'$  geben.

Jede der beiden gebrochenen Entfernungen  $r = PCB_0$  und  $r' = PCB'_0$  des Punktes  $P$  von einem Brennpunkt  $B_0$  oder  $B'_0$  der Fokalellipse über diese hinweg (Fig. 204) hat ein Minimum  $r_1^*$  und  $r_1'$  und ein Maximum  $r_2$  und  $r_2'$ , und zwar ist (Fig. 205):

$$(23) \quad r_1 = PC_1B_0, \quad r_2 = PC_2B_0; \quad r_1' = PC_3B'_0, \quad r_2' = PC_4B'_0,$$

wo  $C_1, C_2, C_3, C_4$  die Schnittpunkte der vier Fokallinien des Punktes  $P$  mit der Fokalellipse in bestimmter Anordnung (vgl. **11**) bedeuten.

Wir nennen  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  die vier gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes  $P$  über die Fokalellipse.<sup>3)</sup>

### 11. Lage der Punkte $B_i, C_i$ auf der Fokallinie $f_i$ .

Nach **6** liegen in bezug auf die Ebene der Fokalhyperbel  $C_1$  und  $C_3$ , die Knickpunkte der Minima, mit  $P$  gleichseitig, dagegen  $C_2$  und  $C_4$ , die Knickpunkte der Maxima, ungleichseitig. Da aber der Schnittpunkt einer Fokallinie mit der  $zx$ -Ebene zugleich ihr Schnittpunkt mit der

Fokalhyperbel sein muß, so folgt: Ist  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) der Schnittpunkt der Fokallinie  $PC_i$  mit der Fokalhyperbel, so liegen  $B_1$  und  $B_3$  außerhalb der Strecken  $PC_1$  und  $PC_3$ , dagegen  $B_2$  und  $B_4$  innerhalb der Strecken  $PC_2$  und  $PC_4$  (Fig. 205).

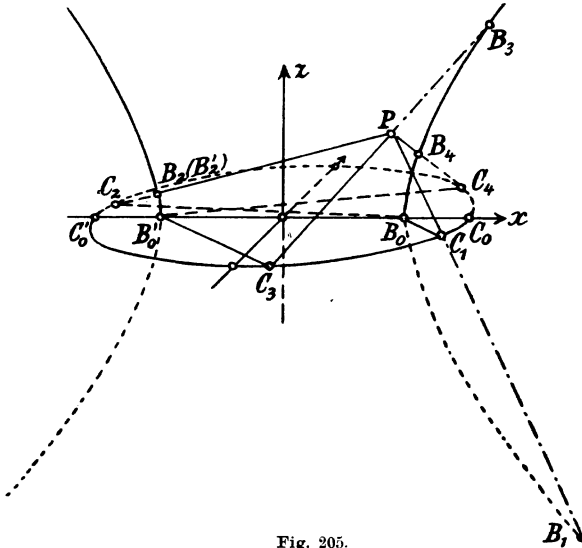


Fig. 205.

Die beiden Strecken  $C_1P$  und  $C_1B_0$  von  $r_1$  gehören nach 8 verschiedenen Mänteln des von  $C_1$  über der Fokalhyperbel errichteten Kegels an, die eine dem linken, auf dem der linke Hyperbelzweig liegt, die andere dem rechten. Dasselbe gilt von den beiden Strecken  $C_2P$  und  $C_2B_0$ ,  $C_3P$  und  $C_3B_0'$ ,  $C_4P$  und  $C_4B_0'$ .

$B_1$  liegt außerhalb der Strecke  $PC_1$ , so daß die

Folge der drei Punkte  $PC_1B_1$  (Fig. 205) oder  $B_1PC_1$  ist. Da nun  $C_1B_0$  dem rechten Mantel des von  $C_1$  über der Fokalhyperbel errichteten Kegels angehört, gehört  $C_1P$  dem linken an. Daher muß  $B_1$  bei der Folge  $PC_1B_1$  auf dem rechten, bei der Folge  $B_1PC_1$  auf dem linken Hyperbelzweig liegen.

$B_2$  liegt innerhalb der Strecke  $PC_2$ . Da nun  $C_2B_0$  in  $B_0$  den rechten Hyperbelzweig trifft, muß  $B_2$  auf dem linken liegen.

Entsprechendes gilt für  $B_3$  und  $B_4$ . Bezeichnen wir daher allgemein Punkte des rechten Hyperbelzweiges mit  $B$ , des linken mit  $B'$ , so ergibt sich:

Die Lage der Schnittpunkte der vier Fokallinien des Punktes  $P$  mit der Fokalellipse und Fokalhyperbel ist durch die Folgen bezeichnet (Fig. 203):

$$(24) \quad \begin{cases} f_1 = PC_1B_1 \text{ oder } B_1'PC_1, & f_2 = PB_2'C_2, \\ f_3 = PC_3B_3' \text{ oder } B_3PC_3, & f_4 = PB_4C_4. \end{cases}$$

Dadurch ist auch die Benennung der vier Fokallinien mit  $f_1, f_2, f_3, f_4$  und die Verteilung der Minima und Maxima (23) auf sie bestimmt.

**12. Ungleichung für die gebrochenen Fokaldistanzen.** Infolge

der in 10 eingeführten Bezeichnung der größten und kleinsten Werte ist zunächst:

$$(25) \quad r_2 > r_1, \quad r_2' > r_1'.$$

Ferner ist in dem räumlichen Viereck  $C_1PC_3B_0'C_1$  (Fig. 205) die Summe von drei Seiten größer als die vierte (in Fig. 205 nicht ausdrücklich gezeichnete), also:

$$\overline{C_1P} + \overline{PC_3} + \overline{C_3B_0'} > \overline{C_1B_0'}.$$

Addiert man zu dieser Ungleichung die aus der Fokaleigenschaft der Ellipse § 1, (9) folgende Gleichung:

$$\overline{C_1B_0} + \overline{C_1B_0'} = 2e,$$

so ergibt sich mit Weghebung von  $\overline{C_1B_0'}$ :

$$\overline{PC_1} + \overline{C_1B_0} + \overline{PC_3} + \overline{C_3B_0'} > 2e$$

oder nach (23):

$$r_1 + r_1' > 2e.$$

Schreibt man diese Ungleichung in der Form:

$$2(r_1 + r_1') - 4e > 0$$

und addiert beiderseits  $r_2 + r_2' - r_1 - r_1'$ , so folgt:

$$(26) \quad r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1'.$$

Endlich ist die Summe der beiden nach (25) positiven Größen  $r_2 - r_1$  und  $r_2' - r_1'$  größer als der absolute Wert ihrer Differenz:

$$(27) \quad (r_2 - r_1) + (r_2' - r_1') > |(r_2 - r_1) - (r_2' - r_1')|.$$

Durch Verbindung von (26) und (27) folgt daher:

*Zwischen den vier gebrochenen Fokaldistanzen (23) eines beliebigen Punktes P bestehen die Ungleichungen:*

$$(28) \quad r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1' > |r_2 - r_2' - r_1 + r_1'|,$$

wo der Einschluß des dritten Ausdruckes in Vertikalstriche dessen absoluten Wert bezeichnet.

### § 133. Gebrochene Distanzen über Fokalellipse und Fokalhyperbel.

**1. Distanzdifferenzen über die Fokalellipse.** Wenn man statt der extremen Werte der Summen § 132, (7) die extremen Werte der Differenzen:

$$(1) \quad m = -\overline{PC} + \overline{CB_0} = -\varrho + \tau, \quad m' = -\overline{PC} + \overline{CB_0'} = -\varrho + \tau'$$

sucht, so hat man die Entwicklungen § 132, 6—10 im wesentlichen zu wiederholen, nur mit umgekehrtem Vorzeichen von  $\varrho$ .

Die Gleichung § 132, (22) gibt mit dieser Änderung den Satz (I § 35, (9)):

*Die Differenz  $m$  oder  $m'$  hat für solche Lagen des Knickpunktes  $C$  auf der Fokalellipse einen extremen Wert, wo die äußere Halbierungslinie der Strecken  $CP$  und  $CB_0$  oder  $CB'_0$  auf der Tangente in  $C$  senkrecht steht oder, was dasselbe ist, die Winkel der beiden Strecken gegen die gerichtete Tangente gleich sind (§ 132, 7).*

Hieran schließt sich, wie § 132, 8 die weitere Folgerung:

*Die Differenz  $m$  oder  $m'$  ist ein Maximum oder Minimum, wenn das Anfangsstück  $PC$  in eine der vier Fokallinien des Punktes  $P$  fällt und die Strecken  $CP$  und  $CB_0$  oder  $CB'_0$  demselben Mantel des von  $C$  über der Fokalhyperbel errichteten Drehungskegels angehören.*

Die Differenz  $m$  hat daher, wie in § 132, 9—10, ein Minimum  $m_1$  und ein Maximum  $m_2$  und die Differenz  $m'$  ein Minimum  $m'_1$  und ein Maximum  $m'_2$ , und zu jeder Fokallinie gehört einer der extremen Werte  $m_1, m_2, m'_1, m'_2$ .

**2. Beziehung zwischen den extremen Werten der Differenz und der Summe.** Für alle Punkte  $C$  der Fokalellipse § 131, (1) ist nach § 1, (9):

$$(2) \quad \overline{CB_0} + \overline{CB'_0} = 2e$$

und daher auch bei beliebigem  $P$ :

$$(3) \quad \begin{cases} (\overline{PC} + \overline{CB_0}) + (-\overline{PC} + \overline{CB'_0}) = r + m' = 2e, \\ (\overline{PC} + \overline{CB'_0}) + (-\overline{PC} + \overline{CB_0}) = r' + m = 2e. \end{cases}$$

Für einen Punkt  $C$ , für den  $r$  oder  $r'$  (vgl. § 132, (7)) ein Minimum ist, ist daher  $m'$  oder  $m$  ein Maximum und umgekehrt. Während daher nach § 132, (23):

$$(4) \quad \begin{cases} r_1 = \overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}, & r_2 = \overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}, \\ r'_1 = \overline{PC_3} + \overline{C_3B'_0}, & r'_2 = \overline{PC_4} + \overline{C_4B'_0}, \end{cases}$$

ist gegenwärtig (Fig. 205):

$$(5) \quad \begin{cases} m_1 = -\overline{PC_4} + \overline{C_4B_0}, & m_2 = -\overline{PC_3} + \overline{C_3B_0}, \\ m'_1 = -\overline{PC_2} + \overline{C_2B'_0}, & m'_2 = -\overline{PC_1} + \overline{C_1B'_0}. \end{cases}$$

*Ferner stehen die extremen Werte der Summen und die der Differenzen in der Beziehung:*

$$(6) \quad r_1 + m'_2 = r_3 + m'_1 = r'_1 + m_2 = r'_2 + m_1 = 2e.$$

**3. Distanzsummen und Distanzdifferenzen über die Fokalhyperbel.** Für die Summen § 132, (7) und die Differenzen § 133, (1)

war der Anfangspunkt  $P$  ein beliebiger fester Punkt des Raumes, der Endpunkt  $B_0, B_0'$  ein Brennpunkt der *Fokalellipse* und der Knickpunkt  $C$  ein laufender Punkt der *Fokalellipse*.

Wir betrachten jetzt die Summen:

$$(7) \quad s = \overline{PB} + \overline{BC_0}, \quad s' = \overline{PB} + \overline{BC_0'}$$

und die Differenzen:

$$(8) \quad n = -\overline{PB} + \overline{BC_0}, \quad n' = -\overline{PB} + \overline{BC_0'}$$

wo der Anfangspunkt  $P$  derselbe feste Punkt wie vorhin, der Endpunkt  $C_0, C_0'$  ein Brennpunkt der *Fokalhyperbel* und der Knickpunkt  $B$  ein laufender Punkt der *Fokalhyperbel* ist, und suchen wieder die Maxima und Minima der vier Größen (7) und (8).

Wir haben dann in den Entwicklungen § 132, 6—10  $e$  und  $d$ ,  $y$  und  $z$ ,  $f^2$  und  $-f^2$  zu vertauschen (§ 131, (1); (2)) und erhalten als Bedeutung der danach veränderten Gleichung § 132, (22) entsprechend § 132, 8 und § 133, 1:

*Die Summe  $s(s')$  und die Differenz  $n(n')$  ist ein Maximum oder Minimum, wenn das Anfangsstück  $PB$  in eine der vier Fokallinien des Punktes  $P$  fällt, und die Strecken  $BP$  und  $BC_0(BC_0')$  für die Summe verschiedenen Mänteln, für die Differenz demselben Mantel des von  $B$  über der Fokalellipse errichteten Drehungskegels angehören.*

**4. Anzahl und Verteilung der extremen Werte.** Die Summen  $r, r'$  und die Differenzen  $m, m'$  mit auf der *Fokalellipse* laufendem Knickpunkt  $C$  hatten im Ganzen acht extreme Werte (4); (5), von denen zu jeder Fokallinie je ein extremer Summenwert und ein extremer Differenzwert gehörte.

Auch die Summen  $s, s'$  und die Differenzen  $n, n'$  mit auf der *Fokalhyperbel* laufendem Knickpunkt  $B$  haben im Ganzen acht extreme Werte, da jede der vier Fokallinien, in die die Anfangsstücke  $PB$  der extremen Werte fallen müssen (§ 132, Fig. 203), von  $B$  nach  $C_0$  oder  $C_0'$  fortgesetzt werden kann, und jede solche Fortsetzung einen extremen Wert entweder von  $s, s'$  oder  $n, n'$  ergibt.

Es wird sich nun zeigen, daß hier, anders wie bei der Ellipse, zu zwei Fokallinien je zwei extreme Summenwerte und zu den zwei andern Fokallinien je zwei extreme Differenzwerte gehören.

Der Grund für diesen Unterschied liegt in der Verschiedenheit der Fokaleigenschaft der Ellipse, die in der Formel (2) ausgesprochen ist, und der der Hyperbel, die in die Formeln (§ 1, 8):

$$(9) \quad \overline{BC_0'} - \overline{BC_0} = 2d, \quad \overline{B'C_0} - \overline{B'C_0'} = 2d$$



zerfällt, wenn  $B$  den laufenden Punkt des rechten und  $B'$  den des linken Hyperbelzweiges bezeichnet. Infolge hiervon ist bei beliebigem  $P$ :

$$(10) \quad \begin{cases} (\overline{PB} + \overline{BC'_0}) - (\overline{PB} + \overline{BC_0}) = 2d, \\ (\overline{PB'} + \overline{B'C_0}) - (\overline{PB'} + \overline{B'C'_0}) = 2d, \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} (-\overline{PB} + \overline{BC'_0}) - (-\overline{PB} + \overline{BC_0}) = 2d, \\ (-\overline{PB'} + \overline{B'C_0}) - (-\overline{PB'} + \overline{B'C'_0}) = 2d. \end{cases}$$

**5. Minima der Distanzsummen über die Fokalhyperbel.** Je zwei der vier Summen auf den linken Seiten von (10) haben also gleichzeitig kleinste und gleichzeitig größte Werte. Sie können aber solche nur haben, wenn (Fig. 203) die Anfangsstücke in eine der beiden Fokallinien  $f_2 = PB_2'C_2$  oder  $f_4 = PB_4C_4$  fallen, da dann die Strecken  $B_2'P$  und  $B_2'C_0$  oder  $B_2'C'_0$ , bezüglich  $B_4P$  und  $B_4C_0$  oder  $B_4C'_0$  verschiedenen Mänteln des von  $B_2'$ , bezüglich  $B_4$  über der Fokalellipse errichteten Drehungskegels angehören, während Entsprechendes bei  $f_1$  und  $f_3$  (§ 132, (24)) nicht der Fall ist. Da überdies (§ 132, (24))  $P$  und  $B_2'$ , wie  $P$  und  $B_4$ , auf gleicher Seite der  $xy$ -Ebene liegen, so handelt es sich nach § 132, 6 (in Formel (20) daselbst  $e$  und  $d$ ,  $y$  und  $z$ ,  $f^2$  und  $-f^2$  vertauscht) um Minima.

*Es gibt daher in:*

$$(12) \quad \begin{cases} s_1 = \overline{PB_4} + \overline{B_4C_0}, & s_2 = \overline{PB_2'} + \overline{B_2'C_0}, \\ s_1' = \overline{PB_2'} + \overline{B_2'C'_0}, & s_2' = \overline{PB_4} + \overline{B_4C'_0} \end{cases}$$

(Fig. 203) bezüglich ein Minimum der gebrochenen Entfernung des Punktes  $P$  von dem rechten und linken Brennpunkt der Hyperbel, je entweder über den gleichnamigen ( $s_1, s_1'$ ) oder über den ungleichnamigen Zweig ( $s_2, s_2'$ ) derselben hinweg. Zugleich ist:

$$(13) \quad s_2 - s_1' = s_2' - s_1 = 2d.$$

**6. Maxima und Minima der Distanzdifferenzen über die Fokalhyperbel.** Je zwei der vier Differenzen in (11) haben ebenfalls gleichzeitig kleinste und gleichzeitig größte Werte. Ihre Anfangsstücke fallen alsdann in die beiden noch übrigen Fokallinien  $f_1$  und  $f_3$ . Da Formel § 132, (20) hier mit Vertauschung von  $e$  und  $d$ ,  $y$  und  $z$ ,  $f^2$  und  $-f^2$  und mit umgekehrtem Vorzeichen von  $\varrho$  anzuwenden ist, findet ein Minimum oder ein Maximum statt, je nachdem der Knickpunkt  $B_1(B_1')$  oder  $B_3(B_3')$  in bezug auf die  $xy$ -Ebene mit  $P$  ungleichseitig oder gleichseitig liegt.

Daher sind für  $f_1 = PC_1B_1$  (§ 132, (24)) die Differenzen  $-\overline{PB_1} + \overline{B_1C_0}$  und  $-\overline{PB_1} + \overline{B_1C'_0}$  und für  $f_3 = PC_3B_3'$  die Differenzen

–  $\overline{PB'_3} + \overline{B'_3C_0}$  und  $-\overline{PB'_3} + \overline{B'_3C_0}$  sämtlich Minima; für  $f_1 = B_1PC_1$  die Differenzen  $-\overline{PB'_1} + \overline{B'_1C_0}$  und  $-\overline{PB_1} + \overline{B_1C'_0}$  und für  $f_3 = B_3PC_3$  die Differenzen  $-\overline{PB_3} + \overline{B_3C_0}$  und  $-\overline{PB_3} + \overline{B_3C'_0}$  sämtlich Maxima.

Um nun eine für alle Fälle gültige Abzählung der Maxima und Minima von  $n$  und  $n'$  zu erreichen, ersetzen wir die Definitionen (8) durch die Doppeldefinitionen:

$$(14) \quad n = \begin{cases} \overline{PB} - \overline{BC_0}, \\ -\overline{PB'} + \overline{B'C_0}, \end{cases} \quad n' = \begin{cases} \overline{PB'} - \overline{B'C'_0}, \\ -\overline{PB} + \overline{BC'_0}, \end{cases}$$

Geht nämlich der Knickpunkt  $B$  durch das Unendliche hindurch von einem Hyperbelzweig auf den andern über, so wechselt die Differenz  $n$  in (8) ihr Vorzeichen. Denn entfernt sich (Fig. 206, gezeichnet in der Ebene der beiden durch  $P$  und  $C_0$  zu der betreffenden Asymptote der Fokalhyperbel gezogenen Parallelen)  $B$  auf dem rechten Zweige als  $B_\infty$  unendlich weit nach oben, so werden die Strecken  $PB$  und  $BC_0$  parallel und wird die Differenz  $-\overline{PB_\infty} + \overline{B_\infty C_0} = \overline{C_0Q}$ , wenn  $Q$  der Fußpunkt des von  $P$  auf die zweite Strecke gefällten Perpendikels ist. Erscheint dagegen  $B$  auf dem linken Zweig unten als  $B'_\infty$ , so wird  $-\overline{PB'_\infty} + \overline{B'_\infty C_0} = -\overline{PD_0} = -\overline{C_0Q}$ , wenn  $D_0$  der Fußpunkt des von  $C_0$  auf die erste Strecke gefällten Perpendikels ist. Beim Übergang des Knickpunktes von dem rechten Zweig ( $B$ ) auf den linken ( $B'$ ) geht also die Differenz  $\overline{PB} - \overline{BC_0}$  stetig in  $-\overline{PB'} + \overline{B'C_0}$  über. Die durch die Doppelformeln (14) definierten Differenzen  $n$  und  $n'$  bleiben daher, während  $B, B'$  die ganze Fokalhyperbel durchläuft, immer endlich und stetig und haben daher je ein Minimum  $n_1$  und  $n_1'$  und je ein Maximum  $n_2$  und  $n_2'$ .

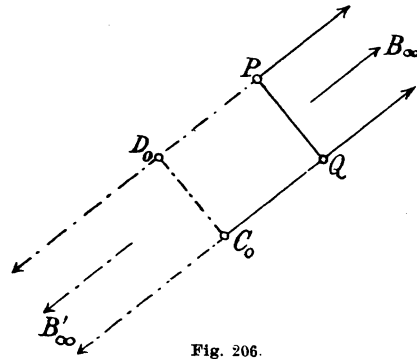


Fig. 206.

Diese Minima und Maxima sind aber nach der eben gegebenen Bestimmung der Minima und Maxima von (8) die folgenden:

$$(15) \quad \begin{cases} \text{für } f_1 = PC_1B_1: n_1' = -\overline{PB_1} + \overline{B_1C'_0}, & n_2 = \overline{PB_1} - \overline{B_1C_0}; \\ \text{für } f_1 = B_1'PC_1: n_1' = \overline{PB_1'} - \overline{B_1'C_0}, & n_2 = -\overline{PB_1'} + \overline{B_1'C'_0}; \\ \text{für } f_3 = PC_3B_3': n_1 = -\overline{PB_3'} + \overline{B_3'C_0}, & n_2' = \overline{PB_3'} - \overline{B_3'C'_0}; \\ \text{für } f_3 = B_3PC_3: n_1 = \overline{PB_3} - \overline{B_3C_0}, & n_2' = -\overline{PB_3} + \overline{B_3C'_0}. \end{cases}$$

Danach gehört zu  $f_1$  stets das Minimum von  $n'$  und das Maximum von  $n$ , zu  $f_3$  stets das Minimum von  $n$  und das Maximum von  $n'$ .

Dabei ist mit Rücksicht auf (11) immer:

$$(16) \quad n_1 + n_2' = n_1' + n_2 = 2d.$$

7. Beziehung der gebrochenen Distanzen über die Hyperbel zu denen über die Ellipse. Zwischen den Strecken auf den einzelnen Fokallinien gelten mit Rücksicht auf § 132, (24) die Beziehungen:

$$(17) \quad \begin{cases} \text{für } f_1 = PC_1B_1: \overline{B_1C_1} = \overline{PB_1} - \overline{PC_1}, \\ \text{für } f_1 = B_1'PC_1: \overline{B_1'C_1} = \overline{PB_1'} + \overline{PC_1}; \\ \text{für } f_2 = PB_2'C_2: \overline{B_2'C_2} = \overline{PC_2} - \overline{PB_2'}; \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \text{für } f_3 = PC_3B_3': \overline{B_3'C_3} = \overline{PB_3'} - \overline{PC_3}, \\ \text{für } f_3 = B_3PC_3: \overline{B_3C_3} = \overline{PB_3} + \overline{PC_3}; \\ \text{für } f_4 = PB_4C_4: \overline{B_4C_4} = \overline{PC_4} - \overline{PB_4}. \end{cases}$$

Setzt man nun für  $\overline{BC}$  und  $\overline{B'C}$  in § 131, (18) die Werte (17) und in § 131, (17) die Werte (18) hier, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overline{B_0C_1} - \overline{PB_1} + \overline{PC_1} + \overline{B_1C_0'} &= d + e, & \overline{B_0C_1} + \overline{PB_1'} + \overline{PC_1} - \overline{B_1'C_0'} &= d + e; \\ \overline{B_0C_2} + \overline{PC_2} - \overline{PB_2'} - \overline{B_2'C_0'} &= d + e; \\ \overline{B_0'C_3} - \overline{PB_3'} + \overline{PC_3} + \overline{B_3C_0} &= d + e, & \overline{B_0'C_3} + \overline{PB_3} + \overline{PC_3} - \overline{B_3C_0} &= d + e; \\ \overline{B_0'C_4} + \overline{PC_4} - \overline{PB_4} - \overline{B_4C_0} &= d + e. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber mit den Bezeichnungen (4), (12), (15):

Die gebrochenen Distanzen  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  über die Fokalellipse stehen zu den gebrochenen Distanzen  $s_1, s_1', n_1, n_1'$  über die Fokalhyperbel in der Beziehung:

$$(19) \quad r_1 + n_1' = r_2 - s_1' = r_1' + n_1 = r_2' - s_1 = d + e.$$

Zuzüglich der Formeln (6), (13), (16) sind damit alle sechzehn extremen Werte gebrochener Distanzen über Ellipse und Hyperbel auf  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  zurückgeführt. Man kann die Beziehungen folgendermaßen zusammenfassen:

$$(20) \quad \begin{cases} \text{auf } f_1: r_1 - e = e - m_2' = d - n_1' = n_2 - d; \\ \text{auf } f_2: r_2 - e = e - m_1' = d + s_1' = s_2 - d; \\ \text{auf } f_3: e - r_1' = m_2 - e = n_1 - d = d - n_2'; \\ \text{auf } f_4: e - r_2' = m_1 - e = -d - s_1 = d - s_2'. \end{cases}$$

8. Die vier gebrochenen Haupt-Fokaldistanzen eines Punktes.

Unter den vier gebrochenen Fokaldistanzen in bezug auf die Fokal-

ellipse (§ 132, (23)) sind  $r_1$  und  $r_1'$  *Minima* und  $r_2$  und  $r_2'$  *Maxima*. Die letzteren kann man nach (19) durch die Formeln:

$$(21) \quad r_2 = s_1' + d + e, \quad r_2' = s_1 + d + e$$

auf zwei gebrochene Fokaldistanzen in bezug auf die *Fokalhyperbel* zurückführen, die nach (12) ebenfalls *Minima* sind.

Es sind dann (Fig. 207):

$$(22) \quad r_1 = PC_1B_0 \quad \text{und} \quad r_1' = PC_3B_0'$$

die kürzesten Entfernungen des Punktes  $P$  von dem rechten und linken Brennpunkt der Fokalellipse über die Fokalellipse und:

$$(23) \quad s_1 = PB_4C_0 \quad \text{und} \quad s_1' = PB_2'C_0'$$

die kürzesten Entfernungen von dem rechten und linken Brennpunkt der Fokalhyperbel je über den gleichnamigen Zweig der Fokalhyperbel.

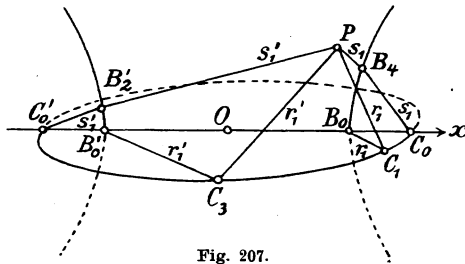


Fig. 207.

Sie sind alle vier *stabile Gleichgewichtslagen eines Fadens*, der in dem betreffenden Brennpunkt befestigt ist, über den entsprechenden Fokalkegelschnitt frei gleitet und im Punkte  $P$  gespannt gehalten wird. Sie heißen *Hauptfokaldistanzen*.

**9. Symmetrie in bezug auf die  $yz$ -Ebene.** Aus der Symmetrie der Fokalkegelschnitte in bezug auf die  $yz$ -Ebene folgt: Ist von zwei Punkten,  $P = x, y, z$  und  $P = -x, y, z$ , der eine das Spiegelbild des andern in bezug auf die  $yz$ -Ebene, so sind die in  $B_0$  und  $C_0$  endigenden Hauptfokaldistanzen der einen auch die Spiegelbilder der in  $B_0'$  und  $C_0'$  endigenden der andern, also auch entsprechend gleich groß.

Für einen Punkt *der  $yz$ -Ebene selbst* ist:

$$(24) \quad r_1 = r_1' \quad s_1 = s_1'.$$

Liegt  $P$  rechts von der  $yz$ -Ebene, so ist die kürzeste Entfernung  $r_1$  von dem näheren Brennpunkt  $B_0$  kleiner als die kürzeste Entfernung  $r_1'$  von dem fernerem  $B_0'$ , ebenso  $s_1 < s_1'$ . Allgemein ist daher:

$$(25) \quad r_1 < r_1', \quad s_1 < s_1' \quad \text{oder} \quad r_1 > r_1', \quad s_1 > s_1',$$

beziehungsweise nach (21):

$$(26) \quad r_1 < r_1', \quad r_2' < r_2 \quad \text{oder} \quad r_1 > r_1', \quad r_2' > r_2,$$

jenachdem  $P$  rechts oder links von der  $yz$ -Ebene liegt.

## § 134. Die Fokaleigenschaften der Mittelpunktsflächen.

1. Gleichungen der Knickpunkte der gebrochenen Fokaldistanzen. Die Bestimmung der vier Fokallinien eines Punktes  $P$  führt algebraisch auf eine *biquadratische Gleichung*. Denn entweder hat man die vier Schnittlinien zweier Kegel zweiter Ordnung (§ 132, (1), (2)) zu ermitteln oder die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, nämlich die Schnittpunkte  $B_i$  der Fokalhyperbel mit der Zentralprojektion der Fokalellipse von  $P$  auf die  $zx$ -Ebene oder die Schnittpunkte  $C_i$  der Fokalellipse mit der Zentralprojektion der Fokalhyperbel von  $P$  auf die  $xy$ -Ebene (Fig. 203).<sup>186)</sup>

Die Punkte  $C_i = x_0, y_0, 0$  sind nach § 132, 10 zugleich die *Knickpunkte der vier gebrochenen Fokaldistanzen*  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  über die Fokalellipse, also diejenigen, für welche die gebrochenen Entfernungen (§ 132, (7); (12); (8)):

$$(1) \quad r = \varrho + e - \frac{dx_0}{e} \quad \text{oder} \quad (1') \quad r' = \varrho + e + \frac{dx_0}{e}$$

mit:

$$(2) \quad \varrho = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

einen extremen Wert erhalten. Nach § 132, (10); (21), (21') und (17) genügen diese Knickpunkte den Bedingungen:

$$(3) \quad \frac{x_0^2}{e^2} + \frac{y_0^2}{f^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x_0^2 - \frac{d^2}{e^2} x_0^2 + y_0^2 = f^2$$

und:

$$(4) \quad -e^2 y_0 (x_0 - x) + f^2 x_0 (y_0 - y) + de y_0 \varrho = 0,$$

$$(4') \quad -e^2 y_0 (x_0 - x) + f^2 x_0 (y_0 - y) - de y_0 \varrho = 0.$$

Macht man die Gleichungen (4) und (4') durch Multiplikation rational und setzt den Wert (2) für  $\varrho^2$  ein, so vereinigen sie sich zu:

$\{-e^2 y_0 (x_0 - x) + f^2 x_0 (y_0 - y)\}^2 - d^2 e^2 y_0^2 \{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2\} = 0$ ,  
eine Gleichung, die sich unter Benutzung von (3) und § 132, (11) auf die Form bringen läßt:

$$e^2 f^2 \{y_0 (x_0 - x) - x_0 (y_0 - y)\}^2 - d^2 e^2 f^2 (y_0 - y)^2 - d^2 e^2 y_0^2 z^2 = 0$$

oder:

$$(5) \quad \frac{(x y_0 - y x_0)^2}{d^2} - \frac{z^2 y_0^2}{f^2} - (y_0 - y)^2 = 0.$$

Diese Gleichung, die mit  $X = x_0, Y = y_0, Z = 0$  aus § 132, (2) hervorgeht, stellt daher in der Tat die *Zentralprojektion der Fokalhyperbel* von  $P = x, y, z$  auf die Ebene der Fokalellipse in laufenden Koordinaten  $x_0, y_0$  dar. Aus (3) und (5) wären die vier Punkte  $C_i = x_0, y_0, 0$  zu bestimmen.

Die Gleichungen sind überdies vom Vorzeichen von  $\varrho$  unabhängig, wie denn die Maxima und Minima der *Differenzen*  $m, m'$  in § 133, (1) dieselben Knickpunkte haben, wie die *Summen*  $r, r'$ .

**2. Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen.** Mit der Bestimmung der vier Punkte  $C_i = x_0, y_0, 0$  sind auch die entsprechenden Werte von  $r$  und  $r'$ , also  $r_1, r_2$  und  $r'_1, r'_2$  in § 132, (23) bestimmt. Man hat nur die Werte  $x_0, y_0$ , jenachdem sie der Gleichung (4) oder (4') genügen, in (1) oder (1') einzusetzen. Es sind ferner auch die vier Fokallinien  $f_i = PC_i$  und deren Schnittpunkte  $B_i$  mit der Ebene  $y = 0$  durch die Punkte  $C_i$  bestimmt.

Statt indessen auf diese Weise alle unbekanntnen Bestandteile der gebrochenen Fokaldistanzen auf die *biquadratische Gleichung der Schnittpunkte der Kegelschnitte* (3) und (5) zurückzuführen, wollen wir unmittelbar eine Gleichung für  $r, r_2, r'_1, r'_2$  selbst herstellen und auf diese die übrigen Unbekanntnen zurückführen.<sup>190</sup> Die herzustellende Gleichung ist ebenfalls vom vierten Grade. Wir nennen sie die *biquadratische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen*. Um sie zu erhalten, eliminieren wir  $x_0, y_0$  aus (1), (3), (4) und aus (1'), (3), (4').

**3. Ableitung der biquadratischen Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen.** Nach § 132, (11) kann man die Gleichungen (4) in der Form schreiben:

$$(6) \quad e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 + d e y_0 \varrho = 0,$$

$$(6') \quad e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 - d e y_0 \varrho = 0.$$

Durch Elimination von  $\varrho$  aus (1) und (6) folgt nun:

$$e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 + d e y_0 \left( r - e + \frac{d x_0}{e} \right) = 0,$$

$$e^2 y_0 x - f^2 x_0 y - d^2 x_0 y_0 - d e y_0 \left( r' - e - \frac{d x_0}{e} \right) = 0,$$

oder:

$$(7) \quad \{d(r-e) + ex\} \frac{y_0}{f} - f y \frac{x_0}{e} = 0, \quad (7') \quad \{d(e-r') + ex\} \frac{y_0}{f} - f y \frac{x_0}{e} = 0.$$

Führt man jetzt für  $r - e$  und  $e - r'$  die gemeinsame Bezeichnung  $4t$  ein:

$$(8) \quad t = \frac{r-e}{4}, \quad \frac{e-r'}{4},$$

so laufen die Gleichungen (7) und (7') in die eine zusammen:

$$(9) \quad (4dt + ex) \frac{y_0}{f} - f y \frac{x_0}{e} = 0,$$

während (1) und (1') die Form erhalten:

$$(10) \quad 4t + \frac{d x_0}{e} - \varrho = 0, \quad (10') \quad 4t + \frac{d x_0}{e} + \varrho = 0,$$

oder zusammengefaßt und mit Einsetzung des Wertes (2):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 - \left(4t + \frac{dx_0}{e}\right)^2 = 0.$$

Die Entwicklung dieser Gleichung gibt mit Rücksicht auf (3):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + f^2 - 16t^2 - 8\frac{dtx_0}{e} = 0.$$

Mit Hinzunahme von (9) hat man daher zwei lineare Gleichungen für  $x_0$  und  $y_0$ :

$$(11) \quad \begin{cases} (4dt + ex)\frac{x_0}{e} + fy\frac{y_0}{f} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8t^2, \\ fy\frac{x_0}{e} - (4dt + ex)\frac{y_0}{f} = 0, \end{cases}$$

deren Auflösungen nach  $x_0$  und  $y_0$  werden:

$$(12) \quad \begin{cases} \{(4dt + ex)^2 + f^2y^2\}\frac{x_0}{e} = (4dt + ex)\left\{\frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8t^2\right\}, \\ \{(4dt + ex)^2 + f^2y^2\}\frac{y_0}{f} = fy\left\{\frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8t^2\right\}. \end{cases}$$

Durch Quadrieren und Addieren geht hieraus hervor mit Rücksicht auf (3):

$$(4dt + ex)^2 + f^2y^2 = \left\{\frac{x^2 + y^2 + z^2 + f^2}{2} - 8t^2\right\}^2$$

oder:

$$64t^4 - 8(x^2 + y^2 + z^2 + f^2 + 2d^2)t^2 - 8dext + \frac{1}{4}\{(x^2 + y^2 + z^2 + f^2)^2 - 4e^2x^2 - 4f^2y^2\} = 0.$$

Mit Hinblick auf (8) folgt daher:

Sind  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  die vier gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes  $P = x, y, z$  über die Fokalellipse, so genügen die Differenzen:

$$(13) \quad t_1 = \frac{r_1 - e}{4}, \quad t_2 = \frac{r_2 - e}{4}, \quad t_1' = \frac{e - r_1'}{4}, \quad t_2' = \frac{e - r_2'}{4}$$

der „biquadratischen Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen“:

$$(14) \quad t^4 - \frac{1}{8}(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2)t^2 - \frac{1}{8}dext + \frac{1}{256}\{(x^2 + y^2 + z^2 + f^2)^2 - 4e^2x^2 - 4f^2y^2\} = 0.$$

4. Andere Wurzeln der Gleichung (14). Da die Gleichungen (10) und (10') zusammengefaßt wurden, hängt die Gleichung (14) nicht vom Vorzeichen von  $q$  ab, wie ihr denn auch nach § 133, (20) die Differenzen:

$$\frac{m_1 - e}{4}, \quad \frac{m_2 - e}{4}, \quad \frac{e - m_1'}{4}, \quad \frac{e - m_2'}{4}$$

genügen.

Die Gleichung (14) bleibt ungeändert bei Vertauschung von  $d$  und  $e$ ,  $y$  und  $z$ ,  $f^2$  und  $-f^2$ . Sie gehört also in gleicher Weise zur

*Fokalhyperbel wie zur Fokalellipse* § 131, (1); (2). In der Tat genügen ihr nach § 133, (20) auch die mit den gebrochenen Fokaldistanzen über die *Fokalhyperbel* gebildeten Differenzen:

$$-\frac{d+s_1}{4} = \frac{d-s_2'}{4}, \quad \frac{d+s_1'}{4} = \frac{s_2-d}{4}, \quad \frac{d-n_1'}{4} = \frac{n_2-d}{4}, \quad \frac{n_1-d}{4} = \frac{d-n_2'}{4}.$$

**5. Summen je zweier gebrochenen Fokaldistanzen.** Da in der Gleichung (14) das Glied  $t^3$  fehlt, ist die Summe der vier Wurzeln Null, also nach (13):

*Zwischen den vier gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes über die Fokalellipse besteht stets die Beziehung:*

$$(15) \quad r_1 + r_2 - r_1' - r_2' = 0.$$

**6. Die Resolvente der biquadratischen Gleichung (14).** Die Resolvente der biquadratischen Gleichung:

$$t^4 + lt^2 + mt + n = 0$$

ist die Gleichung sechsten Grades:<sup>189)</sup>

$$T^6 + 8lT^4 + 16(l^2 - 4n)T^2 - 64m^2 = 0,$$

und die sechs Wurzeln:  $\pm T_1, \pm T_2, \pm T_3$  dieser stehen mit den vier Wurzeln  $t_1, t_2, t_1', t_2'$  jener in der Beziehung:

$$(16) \quad T_1 = t_1 + t_2 - t_1' - t_2', \quad T_2 = -t_1 + t_2 + t_1' - t_2', \quad T_3 = -t_1 + t_2 - t_1' + t_2'.$$

Nimmt man, um diesen Satz auf die Gleichung (14) anzuwenden:

$$l = -\frac{1}{8}(x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2), \quad m = -\frac{1}{8}dex, \\ n = \frac{1}{256}\{(x^2 + y^2 + z^2 + f^2)^2 - 4e^2x^2 - 4f^2y^2\},$$

so erhält man als Resolvente der Gleichung (14) mit Benutzung von § 132, (11):

$$T^6 - (x^2 + y^2 + z^2 + d^2 + e^2)T^4 \\ + \{(d^2 + e^2)x^2 + e^2y^2 + d^2z^2 + d^2e^2\}T^2 - d^2e^2x^2 = 0.$$

oder auch:

$$-(T^2 - d^2)(T^2 - e^2)x^2 - T^2(T^2 - e^2)y^2 - T^2(T^2 - d^2)z^2 \\ + T^2(T^2 - d^2)(T^2 - e^2) = 0.$$

Indem wir die Unbekannte  $T$  mit  $a$  bezeichnen und die Summen (16) mittels (13) ausdrücken, ergibt sich:

*Die biquadratische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  irgendeines Punktes  $P = x, y, z$  über die Fokalellipse hat als Resolvente sechsten Grades mit den Wurzeln:*

$$(17) \quad \pm \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}, \quad \pm \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}, \quad \pm \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}$$



die folgende Gleichung:

$$(18) \quad -a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1 \right\} = 0.$$

Es besteht daher die in  $a$ , sowie in  $x, y, z$  identische Gleichung (§ 1, (6)):<sup>4</sup>

$$(19) \quad \begin{cases} -a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2) \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1 \right\} \\ = \left( a + \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} \right) \left( a - \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} \right) \\ \times \left( a + \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} \right) \left( a - \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} \right) \\ \times \left( a + \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4} \right) \left( a - \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4} \right). \end{cases}$$

7. **Realität der sechs Wurzeln der Resolvente.** Da für die Funktion:

$$f(a^2) = -(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)x^2 - a^2(a^2 - e^2)y^2 - a^2(a^2 - d^2)z^2 + a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2),$$

der Veränderlichen  $a^2$ , wie § 120, 5:

$$f(0) = -d^2e^2x^2, \quad f(d^2) = d^2(e^2 - d^2)y^2, \quad f(e^2) = -e^2(e^2 - d^2)z^2, \quad f(+\infty) = +\infty,$$

und nach § 132, (11)  $e^2 > d^2$ , so folgt:

Die in  $a^2$  kubische Gleichung (18) hat drei positive reelle Wurzeln  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$ , die zwischen den Grenzen liegen:

$$(20) \quad 0 < a_3^2 < d^2 < a_2^2 < e^2 < a_1^2 < +\infty,$$

wobei die Grenzen selbst zulässig sind.

Bezeichnen wir die positiven Werte der Quadratwurzeln aus  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$  mit  $a_1, a_2, a_3$ , so ist ebenfalls:

$$(21) \quad 0 < a_3 < d < a_2 < e < a_1 < +\infty,$$

und  $\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3$  sind die sechs reellen Wurzeln der Resolvente (18).

8. **Realität der vier gebrochenen Fokaldistanzen.** Da aber dieselben sechs Wurzeln durch die Ausdrücke (17) vorgestellt werden, und da diese letzteren, mit dem  $+$ -Zeichen genommen, den Ungleichungen § 132, (28) entsprechen, so müssen die beiderlei Bezeichnungen in der Beziehung stehen:

$$(22) \quad \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} = a_1, \quad \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} = a_2, \quad \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4} = \varepsilon a_3,$$

wo nach § 133, (26)  $\varepsilon = +1$  oder  $-1$  ist, je nachdem  $P$  rechts oder links von der  $yz$ -Ebene liegt. Dazu kommt die Gleichung (15).

Die vier gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  eines Punktes  $P = x, y, z$  über die Fokalellipse drücken sich daher durch die drei positiven reellen Wurzeln  $a_1, a_2, a_3$  der Resolvente (18) in der Weise aus:

$$(23) \quad \begin{cases} r_1 = a_1 - a_2 - \varepsilon a_3 + e, \\ r_2 = a_1 + a_2 + \varepsilon a_3 + e, \\ r_1' = a_1 - a_2 + \varepsilon a_3 + e, \\ r_2' = a_1 + a_2 - \varepsilon a_3 + e, \end{cases}$$

und genügen den Ungleichungen:

$$(24) \quad 0 < \left| \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4} \right| < d < \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4} \\ < e < \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4} < +\infty.$$

Die vier gebrochenen Fokaldistanzen sind daher stets reell.

In der Bezeichnung § 120, (2') sind die Wurzeln  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$  der Gleichung (18) in Rücksicht auf (20) mit  $\alpha - \lambda, \alpha - \mu, \alpha - \nu$  gleichbedeutend, wo  $\lambda, \mu, \nu$  die Wurzeln der Gleichung § 120, (10) sind. Daher folgt (§ 133, (21)) neben (23):<sup>103)</sup>

Durch die elliptischen Koordinaten  $\lambda, \mu, \nu$  des Punktes  $P$  drücken sich die vier gebrochenen Hauptfokaldistanzen in folgender Weise aus (§ 33, (10)):

$$(23') \quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \gamma}, \\ s_1' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \beta}, \\ r_1' = \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \gamma}, \\ s_1 = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \beta}. \end{cases}$$

**9. Bestimmung der Knickpunkte.** Zu jeder der vier gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, r_2, r_1', r_2'$ , beziehungsweise dem nach (13) entsprechenden Werte von  $t$ , geben die Gleichungen (12) den zugehörigen Knickpunkt  $C_i = x_0, y_0, 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).<sup>190)</sup> Daher sind auch die vier Punkte  $C_i$  und damit die vier Fokallinien  $f_i$  des Punktes  $P$ , sowie deren Schnittpunkte  $B_i$  mit der  $zx$ -Ebene sämtlich reell (§ 132, 3).

**10. Die Identität der Fokaleigenschaften.** Die Identität (19) gilt in  $a$  einerseits und in  $P = x, y, z$  andererseits identisch, wobei  $r_1, r_2, r_1', r_2'$  die gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes  $P$  über die Fokalellipse sind. Bei fest gedachtem  $a$  ist daher die Bedingung, daß der Punkt  $P$  auf der Fläche:

$$(25) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1$$

liegt, vollkommen gleichbedeutend mit der Bedingung, daß seine gebrochenen Fokaldistanzen mit  $a$  in der Beziehung stehen (§ 1, (4)):

$$(26) \left(a + \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}\right) \left(a - \frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}\right) \left(a + \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}\right) \\ \times \left(a - \frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}\right) \left(a + \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right) \left(a - \frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right) = 0.$$

Die in der Gleichung (26) ausgesprochene Eigenschaft kommt also jedem Punkte der Fläche (25) und keinem anderen Punkte des Raumes zu.

**11. Verteilung auf die einzelnen Flächen.** Ist nun  $+\infty > a > e$ , so ist die Fläche (25) ein Ellipsoid (§ 55, (3)) und von den sechs Faktoren (26) kann nach (24) nur der zweite verschwinden. Ist die Fläche (25) mit  $e > a > d$  ein einschaliges Hyperboloid, so kann nach (24) nur der vierte, und ist sie mit  $d > a > 0$  ein zweischaliges Hyperboloid, so können nach (24) nur die beiden letzten Faktoren (26) verschwinden (§ 1, 4).

*Daher hat die Fläche (25), je nachdem sie ein Ellipsoid oder ein einschaliges Hyperboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid ist, beziehungsweise die Fokaleigenschaft:*

$$(27) \quad r_2 + r_2' + r_1 + r_1' = 4a + 4e,$$

$$(28) \quad r_2 + r_2' - r_1 - r_1' = 4a,$$

$$(29) \quad r_2 - r_2' - r_1 + r_1' = 4\varepsilon a,$$

wo in (29)  $\varepsilon = +1$  für die rechte und  $\varepsilon = -1$  für die linke Schale des zweischaligen Hyperboloides gilt.

**12. Einführung der Hauptfokaldistanzen.** Vermöge der Gleichung (15) kann jede der Gleichungen (27)—(29) in je zwei kürzeren Formen geschrieben werden (§ 1, (9); (10)):

$$(30) \quad r_2 + r_1 = 2a + 2e, \quad r_2' + r_1' = 2a + 2e;$$

$$(31) \quad r_2 - r_1' = 2a, \quad r_2' - r_1 = 2a;$$

$$(32) \quad r_2 - r_2' = 2\varepsilon a, \quad r_1' - r_1 = 2\varepsilon a,$$

oder mit Einführung der vier Hauptfokaldistanzen nach § 133, (21):

$$(33) \quad r_1 + s_1' = s_1 + r_1' = 2a + e - d,$$

$$(34) \quad s_1' - r_1' = s_1 - r_1 = 2a - e - d,$$

$$(35) \quad s_1' - s_1 = r_1' - r_1 = 2\varepsilon a.$$

Nennt man also die über die *Fokalellipse* laufenden Hauptfokaldistanzen  $r_1, r_1'$  *ungleichnamig* mit denen über die *Fokalhyperbel*  $s_1, s_1'$  und die in den *rechten* Hauptbrennpunkten endigenden  $r_1, s_1$  *ungleichseitig* mit den in den *linken* Hauptbrennpunkten endigenden  $r_1', s_1'$ , so lauten die erhaltenen Sätze (Fig. 207):

I. Für jeden Punkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der

großen Hauptachsenlänge, vermehrt um die halbe Differenz der beiden Hauptbrennweiten.

II. Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der großen Hauptachsenlänge, vermindert um die halbe Summe der beiden Hauptbrennweiten.

III. Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der reellen Hauptachsenlänge.<sup>9)</sup>

**13. Die Halbierungslinien der Winkel.** Die Anfangsstücke der vier gebrochenen Hauptfokaldistanzen  $r_1, s_1', r_1', s_1$  eines Punktes  $P = x, y, z$  (Fig. 207) fallen nach § 133, 8 bezüglich in die vier Fokallinien  $f_1, f_2, f_3, f_4$  des Punktes hinein (Fig. 203). Die Winkel dieser Fokallinien werden aber nach § 122, 4; 5 von den Normalen der drei durch den Punkt  $P$  gehenden Flächen des konfokalen Systems halbiert, welches die Gleichung (25) bei veränderlichem  $a^2$  darstellt (§ 120, (1'); 5, I). Diese drei Flächen sind ein Ellipsoid, ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid. Die Normale des Ellipsoides halbiert, wenn wir die Fokallinien im Sinne  $PC_i$  (umgekehrt, wie § 122, 4) richten (Fig. 203), den Innenwinkel sowohl von  $f_1$  und  $f_2$  als auch von  $f_3$  und  $f_4$ ; die Normale des einschaligen Hyperboloides den Außenwinkel sowohl von  $f_2$  und  $f_3$  als auch von  $f_1$  und  $f_4$ ; die Normale des zweischaligen Hyperboloides den Außenwinkel sowohl von  $f_3$  und  $f_1$  als auch von  $f_2$  und  $f_4$ . Daher treten zu den Sätzen 12, I—III die folgenden Zusätze im Sinne von § 13, 4:<sup>64)</sup>

I. In jedem Punkte des Ellipsoides halbiert die Normale den Innenwinkel je zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen.

II. In jedem Punkte des einschaligen Hyperboloides halbiert die Normale den Außenwinkel je zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen.

III. In jedem Punkte des zweischaligen Hyperboloides halbiert die Normale den Außenwinkel je zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen.

**14. Die Fadenkonstruktion des Ellipsoides.** Seien die beiden Fokalkegelschnitte, wie § 131, 8 von dünnem glatten Draht gebildet und durch ein geradliniges Drahtstück  $C_0'B_0'B_0C_0$  (Fig. 207) miteinander fest verbunden. Man befestige dann einen Faden von der Länge  $2a + e - d$  mit seinen beiden Enden in den beiden ungleichseitigen

ungleichnamigen Brennpunkten  $B_0'$  und  $C_0$  und bringe ihn in die Lage  $B_0'C_3PB_4C_0$  (Fig. 207) derart, daß der Punkt  $P$  in dem Raumquadranten oberhalb der  $xy$ -Ebene und vor der  $zx$ -Ebene liegt, der Faden bei  $C_3$  unter der Fokalellipse und bei  $B_4$  hinter der Fokalhyperbel und bei  $P$  über ein mit der Hand gehaltenes Häkchen, überall frei gleitend, hinwegläuft. *Alsdann beschreibt der Punkt  $P$ , indem das Häkchen, den Faden beständig spannend, bewegt wird, infolge von 12, I und 13, I' den in dem genannten Quadranten liegenden Teil der Oberfläche des Ellipsoides (25).<sup>11)</sup>*

Kommt insbesondere  $P$  in die  $xy$ -Ebene zu liegen, so legt sich das Fadenstück  $C_0B_4$  in  $C_0B_0 = e - d$  von selbst fest,  $r_1'$  wird bei  $C_3$  gestreckt, und man erhält *den Hauptschnitt des Ellipsoides mit den Brennpunkten  $B_0'$ ,  $B_0$*  mittels der noch beweglichen Fadenlänge  $2a$  auf Grund von § 1, 9. Kommt  $P$  in die  $zx$ -Ebene zu liegen, so legt sich das Fadenstück  $B_0'C_3$  in  $B_0'C_0' = e - d$  fest,  $s_1$  wird in  $B_4$  gestreckt, und man erhält *den zweiten Hauptschnitt des Ellipsoides mit den Brennpunkten  $C_0'$ ,  $C_0$*  mittels der noch beweglichen Fadenlänge  $2a$  auf Grund von § 1, 9.

*Die Fadenkonstruktion des Ellipsoides schließt also die der Ellipse als besonderen Fall in sich ein.*

### § 135. Fokaleigenschaften konjugierter Fokalparabeln.

**1. Die konjugierten Fokalparabeln.** Die in der Ebene  $z = 0$  liegende nach links offene (linke) Parabel:

$$(1) \quad y^2 + 2ex - e^2 = 0$$

und die in der Ebene  $y = 0$  liegende nach rechts offene (rechte) Parabel:

$$(2) \quad z^2 - 2ex = 0$$

haben die Eigenschaft, daß *der Scheitel  $C_0$  der linken (Fig. 208) der Brennpunkt der rechten und der Scheitel  $O$  der rechten der Brennpunkt der linken ist.*

Die eine der beiden „konjugierten Parabeln“ ist durch die andere bestimmt. Sie sind zugleich die *Fokalparabeln* § 56, (7) des Paraboloides § 56, (1).<sup>188)</sup>

### 2. Entfernung zweier Punkte der konjugierten Fokalparabeln.

Sind  $C = x_0, y_0, 0$  und  $B = x_1, 0, z_1$  zwei Punkte der Kegelschnitte

(1) und (2), also:

$$(3) \quad y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0, \quad z_1^2 - 2ex_1 = 0,$$

so ist für ihre Entfernung  $\varrho$ :

$$\begin{aligned} \varrho^2 = \overline{BC}^2 &= (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_1^2 = (x_1 - x_0)^2 - 2ex_0 + e^2 + 2ex_1 \\ &= (x_1 - x_0 + e)^2. \end{aligned}$$

Da aber nach (3):

$$\frac{e}{2} - x_0 > 0, \quad x_1 > 0,$$

so folgt:

Die absolute Entfernung eines Punktes  $C = x_0, y_0, 0$  der linken und eines Punktes  $B = x_1, 0, z_1$  der rechten Parabel (Fig 208) ist:

$$(4) \quad \varrho = \overline{BC} = x_1 - x_0 + e.$$

**3. Winkel der Strecke  $CB$  gegen die Tangente der Parabel in  $C$  oder  $B$ .** Die Richtungskosinus der Strecke  $CB$  (Fig. 208) sind (I § 34, (7)):

$$\frac{x_1 - x_0}{\varrho}, \quad -\frac{y_0}{\varrho}, \quad \frac{z_1}{\varrho},$$

die Gleichungen der Tangenten der Parabeln (1) und (2) in  $C$  und  $B$  nach § 13, (35):

$$ex + y_0y - e(e - x_0) = 0, \quad -ex + z_1z - ex_1 = 0,$$

also ihre Richtungskosinus:

$$(5) \quad -qy_0, \quad qe, \quad 0; \quad q = 1: \sqrt{e^2 + y_0^2}, \quad -pz_1, \quad 0, \quad -pe; \quad p = 1: \sqrt{e^2 + z_1^2}.$$

Daher ist für die Winkel  $\gamma$  der Strecke  $CB$  gegen die Tangente in  $C$  und  $\beta$  der Strecke  $BC$  gegen die Tangente in  $B$ :

$$\cos \gamma = -\frac{qy_0}{\varrho} (x_1 - x_0 + e), \quad \cos \beta = \frac{pz_1}{\varrho} (x_1 - x_0 + e),$$

und nach (4):

$$(6) \quad \cos \gamma = -qy_0, \quad \cos \beta = pz_1.$$

Diese Werte sind bezüglich von  $x_1, z_1$  und von  $x_0, y_0$  unabhängig, also:

Der Winkel  $\gamma$ , den die Strecke  $CB$  (Fig. 208) mit der Tangente der linken Parabel im Punkte  $C$  bildet, ist von der Lage des Punktes  $B$  auf der rechten Parabel, der Winkel  $\beta$ , den die Strecke  $BC$  mit der Tangente der rechten Parabel im Punkte  $B$  bildet, ist von der Lage des Punktes  $C$  auf der linken Parabel unabhängig; oder, was dasselbe ist:

Der von einem beliebigen Punkte der einen Parabel über der an-

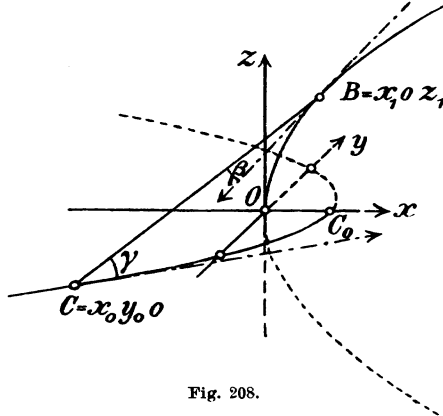


Fig. 208.

deren errichtete Kegel ist ein Rotationskegel, dessen Rotationsachse die Tangente der ersteren in dem Punkte ist.

4. **Fokaleigenschaft der einen Parabel in bezug auf zwei Punkte der andern.** Sind (Fig. 209)  $B_1 = x_1, 0, z_1$  und  $B_2 = x_2, 0, z_2$  zwei feste Punkte der rechten und  $C = x, y, 0$  ein laufender Punkt der linken Parabel, so ist nach (4):

$$\overline{B_1 C} = x_1 - x + e, \quad \overline{B_2 C} = x_2 - x + e.$$

Daher ist:

$$(7) \quad \overline{B_1 C} - \overline{B_2 C} = x_1 - x_2$$

unabhängig von  $C = x, y, 0$ . Somit folgt mit gleichzeitiger Rücksicht auf (6):

I. Die Differenz der Entfernungen des laufenden Punktes  $C$  der linken von zwei festen Punkten  $B_1$  und  $B_2$  der rechten Parabel (Fig. 209) ist unveränderlich.<sup>188)</sup>

I'. Die Strecken  $CB_1$  und  $CB_2$  bilden mit der Tangente der linken Parabel in  $C$  gleiche Winkel  $\gamma$ .

Der entsprechende Satz gilt für einen laufenden Punkt  $B$  der rechten und zwei feste Punkt der linken Parabel.

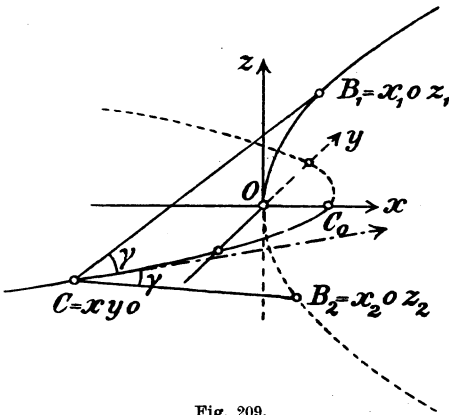


Fig. 209.

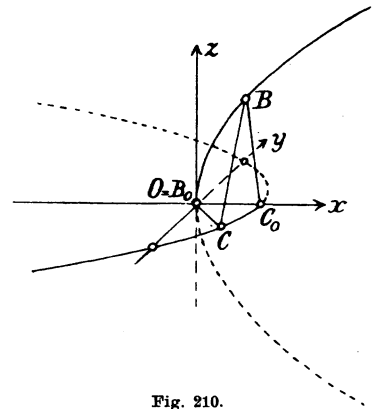


Fig. 210.

5. **Zusammengesetzte Fokaleigenschaft beider Parabeln.** Die Brennpunkte  $B_0$  und  $C_0$  der beiden Parabeln haben die Koordinaten  $0, 0, 0$  und  $\frac{e}{2}, 0, 0$ . Sind nun  $C = x_0, y_0, 0$  und  $B = x_1, 0, z_1$  zwei beliebige Punkte der linken und rechten Parabel (Fig. 210), so ist nach (4):

$$(7') \quad \overline{B_0 C} = -x_0 + e, \quad \overline{CB} = x_1 - x_0 + e, \quad \overline{B C_0} = x_1 + \frac{e}{2},$$

und somit *unabhängig von der Lage der Punkte B und C auf der rechten und linken Parabel:*

$$(8) \quad \overline{B_0C} - \overline{CB} + \overline{BC_0} = \frac{e}{2}.$$

### § 136. Die gebrochenen Fokaldistanzen über die Fokalparabeln.

**1. Die beiden Fokalkegel eines Punktes.** Die von einem Punkte  $P = x, y, z$  des Raumes über der einen oder anderen der beiden Fokalparabeln § 135, (1); (2) errichteten Kegel zweiter Ordnung heißen nach § 125, 1 *die beiden Fokalkegel des Punktes P*. Wie § 132, 1 erhält man die Gleichungen der beiden Kegel aus § 70, (40) mit  $b^2, c^2, a = e, 0, -e$  oder  $0, e, 0$  ( $-x$  für  $x$ ):

*Die Gleichungen der beiden Fokalkegel des Punktes  $P = x, y, z$  lauten in laufenden Koordinaten  $X, Y, Z$ :*

$$(1) \quad (yZ - zY)^2 + 2e(xZ - zX)(Z - z) - e^2(Z - z)^2 = 0,$$

$$(2) \quad (zY - yZ)^2 - 2e(xY - yX)(Y - y) = 0.$$

**2. Bedingungen der Rotationskegel.** Für den Kegel (1) ist in der Bezeichnung von § 100, 3:

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = z^2, \quad a_{33} = y^2 + 2ex - e^2,$$

$$a_{23} = -yz, \quad a_{31} = -ez, \quad a_{12} = 0.$$

Sieht man also von dem Falle  $z = 0$  ab, wo der Kegel in die Doppelsebene  $Z^2 = 0$  zerfällt, ist er nach § 100, (7) ein Rotationskegel immer dann und nur dann, wenn:

$$(3) \quad y = 0, \quad (z^2 - 2ex + e^2)z^2 - e^2z^2 = z^2(z^2 - 2ex) = 0.$$

Ebenso ist der Kegel (2), vom Falle  $y = 0$  abgesehen, ein Rotationskegel für:

$$(4) \quad z = 0, \quad y^2(y^2 + 2ex) - e^2y^2 = y^2(y^2 + 2ex - e^2) = 0.$$

*Der von einem Punkte der einen Fokalparabel über der andern errichte Kegel ist ein Rotationskegel (§ 135, 3).<sup>144</sup>*

**3. Die Fokallinien.** Eine gemeinsame Transversale der beiden Fokalparabeln § 135, (1); (2), wie  $BC$  in Fig. 208, soll ein *Fokalstrahl* oder eine *Fokallinie* genannt werden (§ 125, 2).

*Die durch einen Punkt P des Raumes gehenden Fokallinien sind die vier gemeinsamen Erzeugenden der beiden konzentrischen Kegel zweiter Ordnung (1) und (2).*

Da aber die beiden Fokalparabeln § 135, (1); (2) den unendlich fernen Punkt der  $x$ -Achse gemein haben, so ist *die eine der vier*



Fokallinien,  $f_4$ , die durch den Punkt  $P$  gehende Parallele zur  $x$ -Achse (§ 125, 2). Die Schnittpunkte der drei andern Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  (Fig. 211) mit der linken Fokalparabel seien  $C_1, C_2, C_3$ , die mit der rechten  $B_1, B_2, B_3$ .

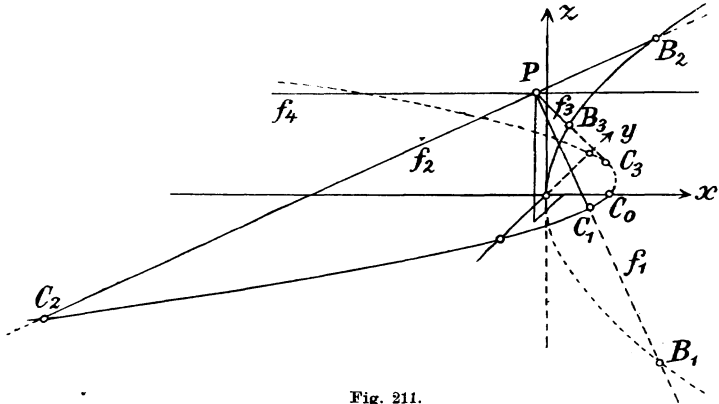


Fig. 211.

Liegt jedoch der Punkt  $P$  selbst auf einer Fokalparabel, so gehen durch ihn ausnahmsweise  $\infty^1$  Fokallinien, seine Verbindungslinien mit der andern Fokalparabel, die nach 2 einen Rotationskegel bilden.

4. Gebrochene Entfernungen über die linke Fokalparabel. Die gebrochene Entfernung:

$$(5) \quad r = PCB_0 = \overline{PC} + \overline{CB_0}$$

eines beliebigen Punktes  $P = x, y, z$  des Raumes (Fig. 212) von dem Brennpunkt  $B_0 = 0, 0, 0$  der linken Parabel § 135, (1) über diese hinweg, ist von der Lage des Knickpunktes  $C = x_0, y_0, 0$  auf der linken Parabel abhängig. Dasselbe wird im allgemeinen von der Differenz:

$$(6) \quad m = -\overline{PC} + \overline{CB_0}$$

gelten, welche jedoch in dem besonderen Falle, daß  $P$  ein Punkt  $B$  der rechten Parabel § 135, (2) ist, nach § 135, 4 von dem Knickpunkt  $C$  unabhängig ist.

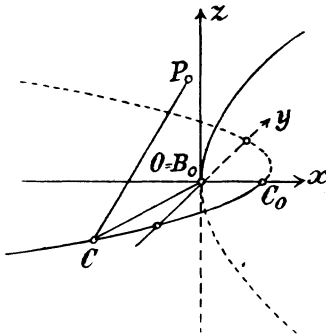


Fig. 212.

Wir setzen:

$$(7) \quad r = \overline{PC} + \overline{CB_0} = \varrho + \tau, \quad m = -\overline{PC} + \overline{CB_0} = -\varrho + \tau,$$

wobei:

$$(8) \quad \varrho = \overline{PC} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2},$$

$$(9) \quad \tau = \overline{CB_0} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

während gleichzeitig:

$$(10) \quad y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0.$$

Nach § 135, (7') ist auch:

$$(11) \quad \tau = e - x_0.$$

Dabei sind die beiden voneinander unabhängigen Knickpunkte von  $r$  und  $m$  in der Bezeichnung  $C = x_0, y_0, 0$  nicht besonders unterschieden.

**5. Größte und kleinste Werte der gebrochenen Entfernungen.** Während der Knickpunkt  $C$  die ganze linke Parabel durchläuft, bleibt die gebrochene Entfernung (5) immer größer als Null und wird bei unendlich fernem  $C$  unendlich groß. Sie wird daher wenigstens einmal einen kleinsten Wert erhalten. Dagegen bleibt die positive oder negative Differenz (6) immer endlich; bei unendlich fernem  $C$  fällt die Strecke  $CB_0$  in die  $x$ -Achse und die Strecke  $PC$  wird der  $x$ -Achse parallel, so daß  $m = -x$  wird. Die Differenz wird daher im allgemeinen wenigstens einmal einen kleinsten und einmal einen größten Wert annehmen.

*Die gebrochene Entfernung  $r$  hat wenigstens ein Minimum, die gebrochene Entfernung  $m$  wenigstens ein Minimum und ein Maximum.*

**6. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Maxima und Minima.** Um die extremen Werte zu bestimmen, betrachten wir  $r$  und  $m$  als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $x_0$ , während wir  $y_0$  durch (10) von  $x_0$  abhängig gemacht denken. Dann ist der erste und zweite Differentialquotient von  $y_0$  nach  $x_0$ :

$$(12) \quad \frac{dy_0}{dx_0} = -\frac{e}{y_0}, \quad \frac{d^2y_0}{dx_0^2} = -\frac{e^2}{y_0^3},$$

und zugleich:

$$(13) \quad \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + y_0 \frac{d^2y_0}{dx_0^2} = 0.$$

Ferner ist nach (8) für den ersten und zweiten Differentialquotienten von  $\varrho$  nach  $x_0$ :

$$(14) \quad \varrho \frac{d\varrho}{dx_0} = (x_0 - x) + (y_0 - y) \frac{dy_0}{dx_0} = (x_0 - x) - \frac{e}{y_0} (y_0 - y),$$

$$\varrho \frac{d^2\varrho}{dx_0^2} + \left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2 + (y_0 - y) \frac{d^2y_0}{dx_0^2},$$

oder mit Rücksicht auf (13) und (12):

$$(15) \quad \varrho \frac{d^2\varrho}{dx_0^2} = -\left(\frac{d\varrho}{dx_0}\right)^2 + 1 + \frac{e^2y}{y_0^3}.$$

Der erste und zweite Differentialquotient von  $r$  nach  $x_0$  wird nun nach (7) mit Benutzung der Darstellung (11) von  $\tau$ :

$$(16) \quad \frac{dr}{dx_0} = \frac{d\rho}{dx_0} - 1 = \frac{x_0 - x}{\rho} - \frac{e}{y_0} \frac{y_0 - y}{\rho} - 1,$$

$$(17) \quad \frac{d^2r}{dx_0^2} = \frac{d^2\rho}{dx_0^2}.$$

Mit Benutzung der Darstellung (9) von  $\tau$  und der Formel (14) kann man den ersteren auch in der Form annehmen:

$$(18) \quad \frac{dr}{dx_0} = \left( \frac{x_0 - x}{\rho} + \frac{x_0}{\tau} \right) - \frac{e}{y_0} \left( \frac{y_0 - y}{\rho} + \frac{y_0}{\tau} \right).$$

Die Werte von  $x_0$ , für die ein extremer Wert von  $r$  eintritt, müssen nun der Gleichung:

$$\frac{dr}{dx_0} = 0$$

genügen. Für einen solchen Wert von  $x_0$  ist aber nach (16):

$$\frac{d\rho}{dx_0} = 1$$

und daher nach (17) und (15):

$$(19) \quad \frac{d^2r}{dx_0^2} = \frac{1}{\rho} \frac{e^2}{y_0^2} \frac{y}{y_0}.$$

Hiernach tritt bei reellen  $x_0, y_0$  im allgemeinen ( $y \neq 0, y_0 \neq 0$ ) auch wirklich ein Minimum oder Maximum ein, und zwar jenes oder dieses, je nachdem  $y_0$  und  $y$  gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Durch Umkehr des Vorzeichens von  $\rho$  erhält man die entsprechenden Formeln für  $m$ :

$$(16') \quad \frac{dm}{dx_0} = -\frac{x_0 - x}{\rho} + \frac{e}{y_0} \frac{y_0 - y}{\rho} - 1,$$

$$(18') \quad \frac{dm}{dx_0} = \left( -\frac{x_0 - x}{\rho} + \frac{x_0}{\tau} \right) - \frac{e}{y_0} \left( -\frac{y_0 - y}{\rho} + \frac{y_0}{\tau} \right),$$

$$(19') \quad \frac{d^2m}{dx_0^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{e^2}{y_0^2} \frac{y}{y_0}.$$

Die gebrochene Entfernung  $r$  und  $m$  in (7) hat immer dann und nur dann einen extremen Wert, wenn der Knickpunkt  $C = x_0, y_0, 0$  neben (10) der Bedingung genügt:

$$(20) \quad \frac{dr}{dx_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dm}{dx_0} = 0,$$

und zwar ist  $r$  dann ein Minimum, wenn  $C$  in bezug auf die  $zx$ -Ebene mit  $P$  gleichseitig liegt, und  $m$  ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem  $C$  mit  $P$  ungleichseitig oder gleichseitig liegt.

**7. Geometrische Bedeutung der Bedingungen (20).** Die Bedingungen (20) werden mit Einsetzung von (18), (18'):

$$(21) \quad -y_0 \left( \pm \frac{x-x_0}{\rho} + \frac{0-x_0}{\tau} \right) + e \left( \pm \frac{y-y_0}{\rho} + \frac{0-y_0}{\tau} \right) = 0,$$

wo die oberen Zeichen für  $r$ , die unteren für  $m$  gelten.

Da nun nach § 135, (5):

$$-qy_0, qe, 0; \frac{x-x_0}{\rho}, \frac{y-y_0}{\rho}, \frac{z}{\rho}; \frac{0-x_0}{\tau}, \frac{0-y_0}{\tau}, 0$$

bezüglich die Richtungskosinus der Tangente der Parabel § 135, (1) in  $C = x_0, y_0, 0$  und der Strecken  $CP$  und  $CB_0$  sind, so bedeutet die Gleichung (21) (I § 35, (9)):

*Die gebrochene Entfernung  $r$ , bezüglich  $m$ , hat für solche Lagen des Knickpunktes  $C$  auf der linken Fokalparabel einen extremen Wert, wo die innere, bezüglich äußere Halbierungslinie der Strecken  $CP$  und  $CB_0$  auf der Tangente der Parabel in  $C$  senkrecht steht oder, was dasselbe ist, die Winkel der beiden Strecken gegen die gerichtete Tangente sich zu  $\pi$  ergänzen, bezüglich gleich sind (§ 131, 5).*

Die gebrochene Entfernung  $r$  bildet, wo sie ein Minimum ist, zugleich die *stabile Gleichgewichtslage eines Fadens*, der in  $C$  über die Parabel gleitet und in  $P$  und  $B_0$  festgehalten wird.

### 8. Die Anfangsstücke der Maxima und Minima als Fokallinien.

Bildet die Strecke  $CB_0$  eines extremen Wertes von  $r$ , bezüglich  $m$ , mit der Tangente der linken Fokalparabel in  $C$  einen Winkel  $\gamma$ , so bildet nach 7 die Strecke  $CP$  mit dieser Tangente den Winkel  $\pi - \gamma$ , bezüglich  $\gamma$ .

Da aber die Strecke  $CB_0$  den Punkt  $B_0$  enthält, gehört sie nach 2 dem einen Mantel des von  $C$  über der rechten Fokalparabel gerichteten Drehungskegels an. Dieser Mantel ist daher der Ort aller von  $C$  ausgehenden Halbstrahlen, die den Winkel  $\gamma$  mit der Tangente bilden, während der andere Mantel ebenso der Ort aller Halbstrahlen mit dem Winkel  $\pi - \gamma$  ist. Somit gehört die Strecke  $CP$  dem letzteren, bezüglich dem ersteren Mantel an, die unbegrenzte Gerade  $CP$  aber überhaupt dem von  $C$  über der rechten Fokalparabel gerichteten Drehungskegel, weshalb sie nach 3 Fokallinie sein muß.

*Die gebrochene Entfernung  $r$ , bezüglich  $m$ , ist ein Maximum oder Minimum, wenn ihr Anfangsstück  $PC$  in eine der drei Fokallinien des Punktes  $P$  fällt und die Strecken  $CP$  und  $CB_0$  bei  $r$  verschiedenen Mänteln, bei  $m$  demselben Mantel des von  $C$  über der rechten Fokalparabel errichteten Drehungskegels angehören.*

**9. Das zu einer Fokallinie gehörige Maximum oder Minimum.** Umgekehrt gibt es zu jeder der drei Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  des Punktes  $P$  immer entweder ein Maximum oder Minimum von  $r$  oder von  $m$ . Denn ist  $C$  ihr Schnittpunkt mit der linken Fokalparabel, so gehört die Strecke  $CP$  nach 3 dem einen Mantel des von  $C$  über der rechten Fokalparabel errichteten Drehungskegels an, dessen Halberzeugende etwa den Winkel  $\gamma$  mit der Tangente der linken Parabel in  $C$  bilden. Die Strecke  $CB_0$  gehört demselben Kegel an und zwar demselben oder dem andern Mantel. Sie bildet also entweder den Winkel  $\pi - \gamma$  oder  $\gamma$  mit der Tangente, so daß nach 8 entweder  $\overline{PC} + \overline{CB_0}$  oder  $-\overline{PC} + \overline{CB_0}$  ein Maximum oder Minimum ist.

*Zu jeder der drei Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  des Punktes  $P$  gehört entweder ein Maximum oder ein Minimum von  $r$  oder von  $m$ .*

**10. Die drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes über die linke Fokalparabel.** Da aber nach 5  $r$  wenigstens ein Minimum und  $m$  wenigstens ein Maximum und ein Minimum hat, so muß zu jeder der drei Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  je ein solches gehören, und kann es nicht mehr als ein Minimum von  $r$  und ein Minimum und ein Maximum von  $m$  geben.

*Die gebrochene Entfernung  $r = \overline{PC} + \overline{CB_0}$  hat ein Minimum  $r_1$  und die gebrochene Entfernung  $m = -\overline{PC} + \overline{CB_0}$  ein Minimum  $m_1$  und ein Maximum  $m_2$ , und zwar ist (Fig. 213):*

$$(22) \quad r_1 = \overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}, \quad m_2 = -\overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}, \quad m_1 = -\overline{PC_3} + \overline{C_3B_0},$$

wo  $C_1, C_2, C_3$  die Schnittpunkte der drei Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  des Punktes  $P$  mit der linken Fokalparabel in bestimmter Anordnung (vgl. 11) bedeuten.

*Wir nennen  $r_1, m_1, m_2$  die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes  $P$  über die linke Fokalparabel.*

**11. Lage der Punkte  $B_i, C_i$  auf der Fokallinie  $f_i$ .** Nach 6 liegen in (22) in bezug auf die Ebene der rechten Fokalparabel  $C_1$  und  $C_2$  mit  $P$  gleichseitig und  $C_3$  mit  $P$  ungleichseitig. Da aber der Schnittpunkt einer Fokallinie mit der  $zx$ -Ebene zugleich ihr Schnittpunkt mit der rechten Fokalparabel sein muß, so folgt weiter: Ist  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der Schnittpunkt der Fokallinie  $PC_i$  mit der rechten Fokalparabel, so liegen  $B_1$  und  $B_2$  außerhalb der Strecken  $PC_1$  und  $PC_2$ , dagegen  $B_3$  innerhalb der Strecke  $PC_3$  (Fig. 213.)

Bei dem Minimum von  $r_1$  gehören nach 8 die Strecken  $C_1P$   $C_1B_0$  verschiedenen Mänteln des von  $C_1$  über der rechten Parabel er-

richteten Kegels an. Da nun  $C_1B_0$  diese Parabel in  $B_0$  trifft, kann  $C_1P$  sie nicht treffen. Daher liegen auf der Fokallinie  $f_1$  die Punkte in der Reihenfolge  $PC_1B_1$  (Fig. 213).

Bei dem Maximum  $m_2$  gehören nach 8 die Strecken  $C_2P$  und  $C_2B_0$  demselben Mantel des von  $C_2$  über der rechten Parabel er-

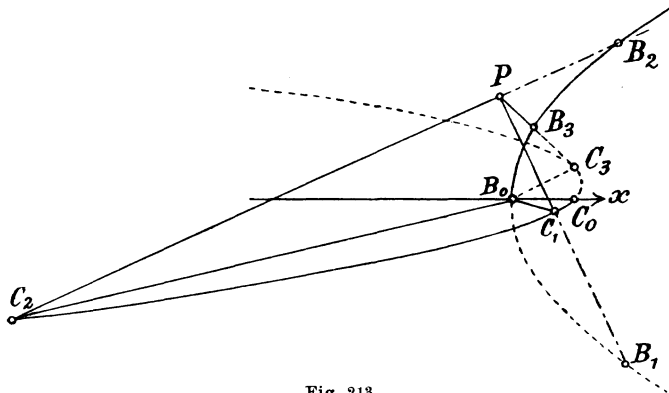


Fig. 213.

richteten Kegels an. Da nun  $C_2B_0$  diese Parabel trifft, muß  $C_2P$  sie auch treffen. Daher liegen auf  $f_2$  die Punkte in der Reihenfolge  $B_2PC_2$ .

Die Lage der Schnittpunkte der drei Fokallinien des Punktes  $P$  mit den beiden Fokalparabeln ist durch die Folgen bezeichnet (Fig. 213):

$$(23) \quad f_1 = PC_1B_1, \quad f_2 = B_2PC_2, \quad f_3 = PB_3C_3.$$

Dadurch ist auch die Benennung der drei Fokallinien mit  $f_1, f_2, f_3$  und die Verteilung der Minima und Maxima (22) auf sie bestimmt.

### 12. Ungleichung für die drei gebrochenen Fokaldistanzen.

Bei der in 10 eingeführten Bezeichnung des größten und kleinsten Wertes von  $m$  ist zunächst:

$$(24) \quad m_2 > m_1.$$

Da ferner in dem windschiefen Viereck  $C_2PC_1B_0C_2$  (Fig. 213) die Summe dreier Seiten größer als die vierte ist:

$$C_2P + PC_1 + C_1B_0 > B_0C_2,$$

so folgt:

$$r_1 - m_2 = (\overline{PC_1} + \overline{C_1B_0}) - (-\overline{PC_2} + \overline{C_2B_0}) > 0$$

oder:

$$(25) \quad r_1 > m_2.$$

Beide Ungleichungen (24) und (25) sind, da zwar  $r_1$  positiv ist,  $m_1$

und  $m_2$  aber positiv oder negativ sein können, algebraisch zu verstehen. In diesem Sinne folgt daher:

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_1, m_2$  eines Punktes  $P$  entsprechen stets den Ungleichungen:

$$(26) \quad m_1 < m_2 < r_1$$

oder auch:

$$(27) \quad m_2 + m_1 < m_1 + r_1 < r_1 + m_2.$$

**13. Die drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes über die rechte Fokalparabel.** Die Unterscheidung der drei Fokallinien  $f_i$  und die Verteilung des extremen Werte von  $r$  und  $m$  auf sie beruht auf der Reihenfolge (23) ihrer Punkte  $P, B_i, C_i$ . Bei Vertauschung der Stellung von  $B_i$  und  $C_i$  gegen  $P$  vertauschen sich nach (23)  $f_1$  und  $f_3$ , während  $f_2$  in sich übergeht. Bei der Gleichberechtigung der beiden kongruenten Fokalparabeln folgt daher aus 10, wenn unter  $B$  der laufende Punkt der rechten Fokalparabel verstanden wird:

Die gebrochene Entfernung  $s = \overline{PB} + \overline{BC}_0$  hat ein Minimum  $s_1$  und die gebrochene Entfernung  $n = -\overline{PB} + \overline{BC}_0$  ein Minimum  $n_1$  und ein Maximum  $n_2$ , und zwar ist (Fig. 213):

$$(28) \quad s_1 = \overline{PB}_3 + \overline{B}_3C_0, \quad n_2 = -\overline{PB}_2 + \overline{B}_2C_0, \quad n_1 = -\overline{PB}_1 + \overline{B}_1C_0,$$

wo  $B_1, B_2, B_3$  die Schnittpunkte der Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  des Punktes  $P$  mit der rechten Fokalparabel in der durch (23) bestimmten Anordnung sind.

Wir nennen  $s_1, n_1, n_2$  die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes  $P$  über die rechte Fokalparabel.

**14. Beziehung zwischen gebrochenen Fokaldistanzen über linke und rechte Fokalparabel.** Für die drei Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  ist nach (23):

$$\overline{B_1C_1} = \overline{PB}_1 - \overline{PC}_1, \quad \overline{B_2C_2} = \overline{PB}_2 + \overline{PC}_2, \quad \overline{B_3C_3} = \overline{PC}_3 - \overline{PB}_3.$$

Setzt man diese Werte in die nach § 135, (8) geltende Gleichung:

$$\overline{C_iB_0} - \overline{B_iC_i} + \overline{B_iC_0} = \frac{e}{2}$$

ein, so ergibt sich:

$$(\overline{PC}_1 + \overline{C_1B_0}) + (-\overline{PB}_1 + \overline{B_1C_0}) = \frac{e}{2},$$

$$(-\overline{PC}_2 + \overline{C_2B_0}) + (-\overline{PB}_2 + \overline{B_2C_0}) = \frac{e}{2},$$

$$(-\overline{PC}_3 + \overline{C_3B_0}) + (\overline{PB}_3 + \overline{B_3C_0}) = \frac{e}{2}.$$

Mit Rücksicht auf (22) und (28) folgt daher:

Die gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_1, m_2$  über die linke und  $s_1, n_1, n_2$  über die rechte Fokalparabel stehen in der Beziehung:

$$(29) \quad r_1 + n_1 = m_2 + n_2 = m_1 + s_1 = \frac{e}{2},$$

oder auch:

$$(30) \quad e - r_1 = \frac{e}{2} + n_1, \quad e - m_2 = \frac{e}{2} + n_2, \quad e - m_1 = \frac{e}{2} + s_1.$$

**15. Die zwei gebrochenen Hauptfokaldistanzen eines Punktes.** Mit Bezug auf  $r_1$  und  $s_1$ , die Hauptfokaldistanzen, ergibt sich unter Verzicht auf die Differenzen  $m_1, m_2, n_1, n_2$ :

Es sind (Fig. 214):

$$(31) \quad r_1 = PC_1B_0 \quad \text{und} \quad s_1 = PB_3C_0$$

die kürzesten Entfernungen des Punktes  $P$  vom Brennpunkt der linken Fokalparabel über diese hinweg und vom Brennpunkt der rechten Fokalparabel über diese hinweg.

Sie sind stabile Gleichgewichtslagen eines Fadens, der in dem Brennpunkt  $B_0$  oder  $C_0$  befestigt ist, über die linke oder rechte Fokalparabel gleitet und im Punkte  $P$  gespannt gehalten wird.

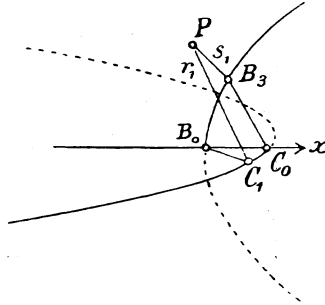


Fig. 214.

§ 137. Die Fokaleigenschaften der Paraboloid.

**1. Gleichungen der Knickpunkte der gebrochenen Fokaldistanzen.** Die Bestimmung der vier Fokallinien eines Punktes  $P$ , von denen eine als Parallele zur  $x$ -Achse bekannt ist (§ 136, 3) führt algebraisch auf eine kubische Gleichung. Handelt es sich doch um die Bestimmung der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte, die den unendlich fernen Punkt der  $x$ -Achse gemein haben, nämlich der Schnittpunkte der einen Fokalparabel mit der Zentralprojektion der andern vom Punkte  $P$  auf die Ebene der ersteren.<sup>186)</sup>

Die drei endlichen Schnittpunkte  $C_i = x_0, y_0, 0$  der linken Fokalparabel mit der Zentralprojektion der rechten sind nach § 136, 10 zugleich die Knickpunkte der drei gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_1, m_2$  über die linke Fokalparabel, also diejenigen, für welche die gebrochenen Entfernungen (§ 136, (7), (11), (8)):

$$(1) \quad r = \varrho + e - x_0 \quad \text{oder} \quad (1') \quad m = -\varrho + e - x_0$$

mit:

$$(2) \quad \varrho = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$



einen extremen Wert erhalten. Nach § 136, (10), (20), (16), (16') genügen diese Knickpunkte den Bedingungen:

$$(3) \quad y_0^2 + 2ex_0 - e^2 = 0$$

und:

$$(4) \quad (x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e - y_0\varrho = 0,$$

$$(4') \quad (x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e + y_0\varrho = 0.$$

Macht man die Gleichungen (4) und (4') durch Multiplikation rational und setzt den Wert (2) von  $\varrho^2$  ein, so vereinigen sie sich zu:

$$\{(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e\}^2 - y_0^2\{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2\} = 0,$$

eine Gleichung, die sich unter Benutzung von (3) auf die Form bringen läßt:

$$-2e\{(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)x_0\}(y_0 - y) - z^2y_0^2 = 0$$

oder:

$$(5) \quad z^2y_0^2 - 2e(xy_0 - yx_0)(y_0 - y) = 0.$$

Diese Gleichung, die mit  $X = x_0$ ,  $Y = y_0$ ,  $Z = 0$  aus § 136, (2) hervorgeht, stellt daher in der Tat die *Zentralprojektion der rechten Fokalparabel* von  $P = x, y, z$  auf die Ebene der linken Fokalparabel in laufenden Koordinaten  $x_0, y_0$  dar. Aus (3) und (5) wären neben dem unendlich fernen Punkte  $y_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ , der ihnen bei homogener Schreibweise in  $x_0, y_0, t_0$  genügt, die drei endlichen Punkte  $C_i = x_0, y_0, 0$  zu bestimmen.

## 2. Die kubische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen.

Statt aber die *kubische Gleichung der drei endlichen Schnittpunkte der Kegelschnitte* (3) und (5) aufzustellen, wollen wir unmittelbar die *kubische Gleichung für die extremen Werte*  $r_1, m_1, m_2$  von  $r$  und  $m$  ableiten (§ 136, 5), indem wir  $x_0, y_0$  aus (1), (3), (4) und (1'), (3), (4') eliminieren.<sup>190)</sup>

Durch Elimination von  $\varrho$  aus (1) und (4) folgt zunächst:

$$(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e - y_0(r - e + x_0) = 0,$$

$$(x_0 - x)y_0 - (y_0 - y)e - y_0(m - e + x_0) = 0,$$

oder, wenn wir  $r$  als gemeinsame Bezeichnung für  $r$  und  $m$  benutzen:

$$(6) \quad (r + x)y_0 - ey = 0.$$

Die Gleichungen (1) und (1'):

$$r + x_0 - e - \varrho = 0, \quad r + x_0 - e + \varrho = 0$$

geben, durch Multiplikation vereinigt und unter Einsetzung des Wertes (2):

$$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2 - (r + x_0 - e)^2 = 0$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$(7) \quad 2(r+x)x_0 + 2yy_0 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2er.$$

Setzt man hier den Wert  $y_0$  aus (6) ein, so folgt:

$$(8) \quad 2(r+x)^2x_0 = (x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2er)(r+x) - 2ey^2.$$

Durch Substitution der Werte (6) und (8) in die mit  $(r+x)^2$  multiplizierte Gleichung (3) ergibt sich endlich:

$$e^2y^2 + e(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + 2er)(r+x) - 2e^2y^2 - (r+x)^2e^2 = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + er - ex)(r+x) - ey^2 = 0.$$

Ordnet man die Gleichung nach  $r$ , so erhält man den Satz:

*Die drei gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_1, m_2$  eines Punktes  $P = x, y, z$  genügen der kubischen Gleichung:*

$$(9) \quad r^3 - (e-x)r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)r + e(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2)x = 0.$$

**3. Die Summe der drei gebrochenen Fokaldistanzen.** Daraus geht zunächst hervor:

*Für die Summe der drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes  $P = x, y, z$  ist stets:*

$$(10) \quad r_1 + m_1 + m_2 + x - e = 0.$$

**4. Bestimmung der Knickpunkte durch die gebrochenen Fokaldistanzen.** Nach der Ungleichung § 136, (26) läßt sich entscheiden, welche der drei gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_1, m_2$  jede der drei Wurzeln  $r$  der Gleichung (9) darstellt. Der zugehörige Knickpunkt  $C_i = x_0, y_0, 0$  ist dann jedesmal durch die Gleichungen (6) und (8) bestimmt.

**5. Kubische Gleichung für die Summe zweier gebrochenen Fokaldistanzen.** Wenn  $r = r_1, m_1, m_2$  überhaupt die drei Wurzeln einer gegebenen kubischen Gleichung:

$$(11) \quad r^3 + lr^2 + mr + n = 0$$

sind, so genügen die Summen  $R = m_1 + m_2, m_2 + r_1, r_1 + m_1$  der kubischen Gleichung:<sup>189)</sup>

$$(12) \quad R^3 + 2lR^2 + (l^2 + m)R + (lm - n) = 0.$$

Nimmt man, um diesen Satz auf die Gleichung (9) anzuwenden:

$$l = -(e-x), \quad m = -(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$n = e(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2)x,$$

so wird die Gleichung (12):

$$R^3 + 2(x-e)R^2 + (e^2 - 2ex - y^2 - z^2)R + ez^2 = 0$$

oder:

$$-Ry^2 + (e - R)z^2 - 2x(e - R)R + (e - R)^2R = 0$$

oder:

$$(e - R)(-R) \left\{ \frac{y^2}{e - R} + \frac{z^2}{-R} + 2x - (e - R) \right\} = 0.$$

Führt man endlich statt  $R$  durch die Substitution:

$$(13) \quad R = e - p, \quad p = e - R$$

die neue Unbekannte  $p$  ein, so erhält man mit Hinblick auf (9) den Satz:

*Sind  $r_1, m_1, m_2$  die drei gebrochenen Fokaldistanzen eines Punktes  $P = x, y, z$  über die linke Fokalparabel, so sind:*

$$(14) \quad e - m_2 - m_1, \quad e - m_1 - r_1, \quad e - r_1 - m_2$$

die Wurzeln der Gleichung:

$$(15) \quad -p(p - e) \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p - e} + 2x - p \right\} = 0.$$

Es besteht daher die in  $p$ , sowie in  $x, y, z$  identische Gleichung:<sup>4)</sup>

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} -p(p - e) \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p - e} + 2x - p \right\} \\ = (p - e + m_2 + m_1)(p - e + m_1 + r_1)(p - e + r_1 + m_2), \end{array} \right.$$

oder nach (10):

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -p(p - e) \left\{ \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p - e} + 2x - p \right\} \\ = (p - x - r_1)(p - x - m_1)(p - x - m_2). \end{array} \right.$$

Sie entspricht der identischen Gleichung § 2, (8), die in der Form geschrieben werden kann:

$$-p \left\{ \frac{y^2}{p} + 2x - p \right\} = (p - x - r)(p - x + r).$$

**6. Realität der Wurzeln der kubischen Gleichung (15).** Da für die Funktion:

$$f(p) = -(p - e)y^2 - pz^2 - p(p - e)(2x - p)$$

der Veränderlichen  $p$ :

$$f(-\infty) = -\infty, \quad f(0) = ey^2, \quad f(e) = -ez^2, \quad f(+\infty) = +\infty,$$

so folgt:

*Die kubische Gleichung (15) hat drei reelle Wurzeln  $p_1, p_2, p_3$ , die zwischen den Grenzen liegen:*

$$(18) \quad -\infty < p_3 < 0 < p_2 < e < p_1 < +\infty.$$

**7. Realität der drei gebrochenen Fokaldistanzen.** Da die drei Wurzeln aber auch mit (14) bezeichnet sind und in dieser Bezeich-

nung den Ungleichungen § 136, (27) genügen, so müssen die beiderlei Bezeichnungen in der Beziehung stehen:

$$(19) \quad e - m_2 - m_1 = p_1, \quad e - m_1 - r_1 = p_2, \quad e - r_1 - m_2 = p_3.$$

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_1, m_2$  eines Punktes  $P = x, y, z$  über die linke Fokalparabel drücken sich daher durch die drei reellen Wurzeln  $p_1, p_2, p_3$  der Gleichung (15) in der Weise aus:

$$(20) \quad r_1 = \frac{p_1 - p_2 - p_3 + e}{2}, \quad m_2 = \frac{-p_1 + p_2 - p_3 + e}{2}, \quad m_1 = \frac{-p_1 - p_2 + p_3 + e}{2}$$

und genügen den Ungleichungen:

$$(21) \quad -\infty < e - r_1 - m_2 < 0 < e - m_1 - r_1 < e < e - m_2 - m_1 < +\infty.$$

Die drei gebrochenen Fokaldistanzen sind daher *stets reell*. Dasselbe gilt nach 4 von den Punkten  $C_i = x_0, y_0, 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und damit von den drei Fokallinien  $f_i$  und deren Schnittpunkten  $B_i$  mit der Ebene  $y = 0$ .

**8. Die Identität der Fokaleigenschaften.** Die Gleichung (16) gilt in  $p$  einerseits und in  $P = x, y, z$  andererseits identisch, wobei  $r_1, m_1, m_2$  die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes  $P$  über die linke Fokalparabel sind. Bei fest gedachtem  $p$  ist daher die Bedingung, daß der Punkt  $P$  auf der Fläche:

$$(22) \quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0$$

liegt, vollkommen gleichbedeutend mit der Bedingung, daß seine gebrochenen Fokaldistanzen mit  $p$  in der Beziehung stehen:

$$(23) \quad (p - e + m_2 + m_1)(p - e + m_1 + r_1)(p - e + r_1 + m_2) = 0.$$

Die in der Gleichung (23) ausgesprochene Eigenschaft kommt also *jedem Punkte des Paraboloides (22) und keinem andern Punkte des Raumes zu*.

**9. Verteilung auf die einzelnen Paraboloid.** Ist nun  $+\infty > p > e$ , so ist die Fläche (22) ein linkes elliptisches Paraboloid (§ 56, (2)), und von den drei Faktoren (23) kann nach (21) nur der erste verschwinden. Ist die Fläche (22) mit  $e > p > 0$  ein hyperbolisches Paraboloid, so kann nach (21) nur der zweite, und ist sie mit  $0 > p > -\infty$  ein rechtes elliptisches Paraboloid, so kann nur der dritte Faktor (23) verschwinden.

*Daher hat die Fläche (22), je nachdem sie ein linkes elliptisches oder ein hyperbolisches oder ein rechtes elliptisches Paraboloid ist, beziehungsweise die Fokaleigenschaft:*

$$(24) \quad m_2 + m_1 = e - p,$$

$$(25) \quad m_1 + r_1 = e - p,$$

$$(26) \quad r_1 + m_2 = e - p.$$

**10. Einführung der Hauptfokaldistanzen.** Behält man unter Benutzung der Gleichungen (10) und § 136, (29) nur die beiden Hauptfokaldistanzen § 136, (31) bei, so nehmen diese Eigenschaften die Form an:

$$(27) \quad r_1 = p - x,$$

$$(28) \quad r_1 - s_1 = \frac{e}{2} - p,$$

$$(29) \quad s_1 = x - \left( p - \frac{e}{2} \right).$$

**11. Die Fokaleigenschaft des elliptischen Paraboloides.** Um die Gleichungen (27) und (29) zu deuten, führen wir die Hauptdirektrixebenen des Paraboloides ein. Nach § 83, (6) ist die Polarebene eines Punktes  $x_0, y_0, z_0$  in bezug auf die Fläche (22):

$$\frac{y_0 y}{p} + \frac{z_0 z}{p - e} + x + x_0 - p = 0.$$

Die Polarebenen der beiden Hauptbrennpunkte  $O = B_0(0, 0, 0)$  und  $C_0\left(\frac{e}{2}, 0, 0\right)$  sind daher:<sup>14)</sup>

$$(30) \quad x = p, \quad (31) \quad x = p - \frac{e}{2}.$$

Wir nennen sie *die beiden Hauptdirektrixebenen des Paraboloides* (§ 2, (1)).

Sie liegen bei dem linken elliptischen Paraboloid ( $+\infty > p > e$ ) ganz rechts, bei dem rechten ( $0 > p > -\infty$ ) ganz links von der

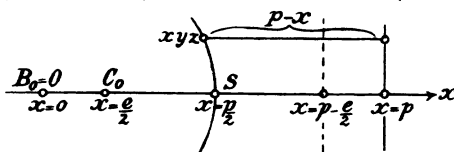


Fig. 215.

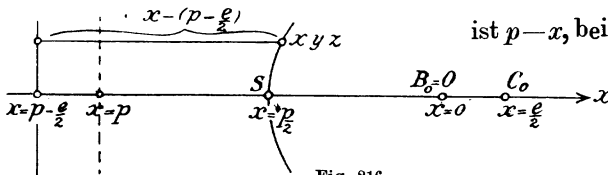


Fig. 216.

Fläche (vgl. die schematische Fig. 215; 216). Bei jenem ist (30), bei diesem (31) diejenige Hauptdirektrixebene, die zu dem Brennpunkt der *inneren* Fokalparabel gehört; bei jenem ist  $p - x$ , bei diesem  $x - \left( p - \frac{e}{2} \right)$

der absolute Wert des Abstandes eines Punktes  $x, y, z$  der Fläche

von dieser Hauptdirektrixebene. Daher geben die beiden Gleichungen (27) und (29) dieselbe Eigenschaft des elliptischen Paraboloides, mag es ein linkes oder ein rechtes sein:

I. Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist die gebrochene Hauptfokaldistanz von dem Brennpunkt der inneren Fokalparabel gleich dem senkrechten Abstand von der zugehörigen Hauptdirektrixebene.<sup>16)</sup>

12. Die Fokaleigenschaft des hyperbolischen Paraboloides. Die Gleichung (28) gibt für das hyperbolische Paraboloid ( $e > p > 0$ ), dessen Scheitelpunkt  $S(x = \frac{p}{2})$  zwischen den beiden Hauptbrennpunkten  $O = B_0(x = 0)$  und  $C_0(x = \frac{e}{2})$  liegt (Fig. 214), so daß:

$$(32) \quad \overline{SC_0} - \overline{SB_0} = \left(\frac{e}{2} - \frac{p}{2}\right) - \frac{p}{2} = \frac{e}{2} - p,$$

die folgende Eigenschaft:

II. Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids ist die Differenz der beiden gebrochenen Hauptfokaldistanzen gleich der Differenz der Entfernungen des Scheitelpunktes von den beiden Brennpunkten.<sup>3)</sup>

13. Die Halbierungslinien der Winkel. Die Anfangsstücke der drei gebrochenen Fokaldistanzen  $r_1, m_2$  und  $m_1$  (Fig. 213) fallen nach § 136, (22) bezüglich in die drei Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  des Punktes  $P$  (Fig. 211), während der senkrechte Abstand von der Direktrixebene in die der  $x$ -Achse parallele Fokallinie  $f_4$  (Fig. 211) zu liegen kommt. Die Winkel der vier Fokallinien werden aber nach § 125, 2 von den Normalen der drei durch den Punkt  $P$  gehenden Flächen des konfokalen Systems halbiert, welches die Gleichung (22) bei veränderlichem  $p$  darstellt (§ 123, (1'); 4). Diese drei Flächen sind ein linkes elliptisches, ein hyperbolisches und ein rechtes elliptisches Paraboloid. Die Normale des linken elliptischen Paraboloides halbiert, wenn die Fokallinien  $f_1, f_2, f_3$  im Sinne  $PC_i$  und  $f_4$  im Sinne der negativen  $x$ -Achse gerichtet werden (Fig. 211), den Innenwinkel sowohl von  $f_1$  und  $f_4$  als von  $f_2$  und  $f_3$ , und die Normale des hyperbolischen Paraboloids den Außenwinkel sowohl von  $f_1$  und  $f_3$  als von  $f_2$  und  $f_4$ . In  $f_1$  und  $f_3$  fallen aber nach § 136, (22); (28) die Anfangsstücke von  $r_1$  und  $s_1$ , in  $f_4$  der vom Fußpunkt nach  $P$  hin positiv gerechnete senkrechte Abstand eines Punktes  $P$  des linken elliptischen Paraboloides von seiner Hauptdirektrixebene (Fig. 215). Daher folgt:<sup>64)</sup>

I'. In jedem Punkte des elliptischen Paraboloides halbiert die Normale den Innenwinkel der gebrochenen Hauptfokaldistanz vom Brennpunkt der inneren Fokalparabel und des senkrechten Abstandes von der zugehörigen Hauptdirektrixebene.

II'. In jedem Punkte des hyperbolischen Paraboloides halbiert die Normale den Außenwinkel der beiden gebrochenen Hauptfokaldistanzen.

**14. Übergang auf die Parabel.** Kommt beim linken elliptischen Paraboloid der Punkt  $P$  in die  $xy$ -Ebene zu liegen, so wird (Fig. 214) die gebrochene Hauptfokaldistanz  $r_1$  im Gleitpunkte  $C_1$  gestreckt, also direkt der Abstand des Punktes  $P$  vom Brennpunkt  $B_0 = O$  des ersten Hauptschnittes, der Parabel:

$$\frac{y^2}{p} + 2x - p = 0, \quad z = 0,$$

während der Abstand von der Hauptdirektrixebene (30) der Abstand von der Direktrix § 2, (1) der Parabel wird.

*Die Sätze I, I' über das elliptische Paraboloid schließen also die Fokaleigenschaft der Parabel § 2, (8) und § 13, 13 als besonderen Fall in sich ein.*