ANALOGIES DE NEPER — FORMULES DE DELAMBRE

57. Les formules dont nous allons nous occuper sont à deux termes, et par suite immédiatement calculables par logarithmes au moyen des tables ordinaires, mais au lieu de consister en des relations entre certaines fonctions trigonométriques des éléments A, B, C, a, b, c des triangles, elles contiennent des fonctions trigonométriques de trois fonctions d'angles ayant respectivement pour types

$$\frac{A+B}{2}, \qquad \frac{A-B}{2}, \qquad \frac{C}{2},$$

et des fonctions trigonométriques de trois fonctions de côtés ayant respectivement pour types

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \frac{a-b}{2}, \qquad \frac{c}{2}.$$

Établissons ces formules qui ont une grande importance.

58. Formules de Delambre. — La première des relations à quatre éléments du premier type (n° 28), nous donne

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

et on en déduit, 1° :

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

ou

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{(a+c-b)}{2}\sin\frac{(a+b-c)}{2}}{\sin b \sin c};$$

ce qui, en posant

$$a + b + c = 2p,$$

et par suite

$$a + c - b = 2(p - b),$$

$$a + b + c = 2(p - c),$$

revient à

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c};$$

ou à

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}.$$

Puis, 2°:

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}$$

ou

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{(a+b+c)}{2}\sin\frac{(b+c-a)}{2}}{\sin b \sin c},$$

par conséquent

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

59. Des calculs analogues effectués en prenant comme point de départ la deuxième et la troisième des relations à quatre éléments du premier type (n° 29), ou, plus simplement, des permutations de lettres opérées dans les formules que nous venons d'établir, donnent

$$\sin\frac{B}{2},\ \cos\frac{B}{2},\ \sin\frac{C}{2},\ \cos\frac{C}{2},$$

et l'on a

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}},\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}};$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}},\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.$$

60. Ces résultats étant obtenus, on en déduit aisément les valeurs de $\sin\frac{A+B}{2}$, $\sin\frac{A-B}{2}$; $\cos\frac{A+B}{2}$, $\cos\frac{A-B}{2}$; au moyen des formules fondamentales

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2};$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2},$$

$$\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2};$$

En effet, on a d'abord

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{C}{2};$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2};$$

donc, 1°:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)}{\sin c}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{(2p-a-b)}{2}\cos\frac{(a-b)}{2}}{\sin c}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{(a-b)}{2}}{\sin c};$$

d'où

$$(1)\qquad \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{C}{2}\cos\frac{(a-b)}{2};$$

2°:

$$\sin\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin(p-b)-\sin(p-a)}{\sin c}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{(a-b)}{2}\cos\frac{(2p-a-b)}{2}}{\sin c}$$

$$=\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{(a-b)}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin c},$$

d'où

$$(2)\qquad \sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}=\cos\frac{C}{2}\sin\frac{(a-b)}{2};$$

3° :

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin p-\sin(p-c)}{\sin c}$$

$$=\sin\frac{C}{2}\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\left(\frac{2p-c}{2}\right)}{\sin c}$$

$$=\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\sin c},$$

d'où

$$(3)\qquad \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

enfin, 4° :

$$\cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin p+\sin(p-c)}{\sin c}$$

$$=\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{2p-c}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin c}$$

$$=\sin\frac{C}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin c},$$

d'où

$$(4)\qquad \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{C}{2}\sin\frac{a+b}{2}.$$

61. Les quatre formules (1), (2), (3), (4), qui se réduisent à trois parce que en les ajoutant membre à membre après avoir élevé chacune d'elles au carré on trouve l'identité $1 = 1$, constituent ce qu'on appelle les formules de Delambre pour les trois fonctions d'angles $\frac{A+B}{2}, \frac{A-B}{2}, \frac{C}{2}$ et les trois fonctions de côtés $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{c}{2}$. En y faisant des permutations tournantes simultanées sur A, B, C et a, b, c, on obtient toutes les formules analogues au nombre de douze et l'on a.

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{(a-b)}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \cos\frac{C}{2}\sin\frac{(a-b)}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{(a+b)}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{C}{2}\sin\frac{(a+b)}{2}$$

$$\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{a}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{(b-c)}{2}$$

$$\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{a}{2} = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{(b-c)}{2}$$

$$\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{(b+c)}{2}$$

$$\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{a}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{(b+c)}{2}$$

$$\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{b}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{(c-a)}{2}$$

$$\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{b}{2} = \cos\frac{B}{2}\sin\frac{(c-a)}{2}$$

$$\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{b}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{(c-a)}{2}$$

$$\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{b}{2}=\sin\frac{B}{2}\sin\frac{(c-a)}{2}.$$

62. Toutes ces formules sont des relations à deux termes comme celles qui concernent les triangles rectangles ; ajoutons que les monomes qui forment le premier et le second membre de chacune d'elles sont des produits de deux facteurs, l'un fonction des côtés, l'autre fonction des angles, et tous choisis parmi les douze fonctions trigonométriques sinus ou cosinus de $\frac{a \pm b}{2}$, de $\frac{c}{2}$, de $\frac{A \pm B}{2}$ et de $\frac{C}{2}$, quand, du moins, on se borne à considérer les relations (1), (2), (3), (4).

63. Le souvenir seul des propriétés que nous venons d'énoncer permet de retrouver complètement les formules (1), (2), (3), (4). Supposons en effet (*fig.* 7) que le triangle considéré devienne isocèle, et faisons $a=b$ par suite $A=B$. Menons l'arc de grand cercle CD perpendiculaire à AB, nous aurons

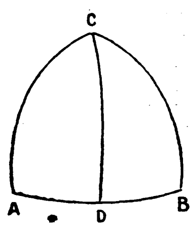

Fig. 7.

$$AC=\frac{a+b}{2} \qquad AD=\frac{c}{2},$$

$$CAD=\frac{A+B}{2} \qquad ACD=\frac{C}{2};$$

mais le triangle ADC rectangle en D, donne

$$\cos ACD = \sin CAD \cos AD,$$

$$\cos CAD = \sin ACD \cos CD = \sin ACD \frac{\cos AC}{\cos AD},$$

$$\sin AD = \sin ACD \sin AC;$$

donc il viendra

$$\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}, \quad \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

$$\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Ces formules rentrent dans celles de Delambre, mais ne conviennent (du moins les deux extrêmes) qu'au cas particulier où $a = b$ et $A = B$; pour en déduire les résultats généraux correspondants, il suffira évidemment d'y introduire, d'une manière convenable, les deux facteurs $\cos\frac{a-b}{2}$, $\cos\frac{A-B}{2}$ qui se réduisent à 1 et sont les seuls à se réduire à 1 lorsqu'on fait $a = b$, $A = B$. On trouve ainsi en se rappelant les remarques faites plus haut : d'abord les formules (1), (2), (3),

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2};$$

et puis la formule (4),

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} = \cos\frac{C}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

en s'appuyant sur ce que la somme membre à membre des carrés des quatre formules doit donner $1 = 1$.

64. Analogies de Neper. — Ces nouvelles formules qui ont été découvertes bien avant celles de Delambre, sont des conséquences très simples de celles-ci. Si nous résolvons en effet, les formules de Delambre par rapport à $\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}$ on trouve

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\cot\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}=\operatorname{tang}\frac{c}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}=\operatorname{tang}\frac{c}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}};$$

résultats auxquels nous adjoindrons le suivant

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}$$

qui est une conséquence immédiate de $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin a}{\sin b}$.

65. Ces cinq formules et les dix autres analogues qui s'en déduisent en effectuant des permutations tournantes simultanées sur A, B, C et sur a, b, c, mais que nous nous dispenserons d'écrire, constituent les analogies de Neper. On voit que ce sont des relations à deux termes comme les formules de Delambre et que si on en chasse les dénominateurs, après avoir remplacé les tangentes par leurs valeurs en sinus et cosinus, les monomes servant de premier et de second membre dans les quatre premières, seront composés de trois facteurs, deux fonctions d'angles et un fonction de côtés, ou inversement deux fonctions de côté set une fonction d'angles, choisies d'ailleurs parmi les douze fonctions trigonométriques sinus ou cosinus de $\frac{a \pm b}{2}$, de $\frac{c}{2}$, de $\frac{A \pm B}{2}$, de $\frac{C}{2}$.

66. Cette simple remarque permet de retrouver immédiatement deux des analogies de Neper. Opérons, en effet, comme pour les formules de Delambre. Considérons le cas particulier où $a = b$, $A = B$. Le triangle CAD rectangle en D (fig. 7) nous donnera

$$\operatorname{tang} \frac{A+B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{1}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

ou

$$\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{a+b}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

et

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{c}{2}}{\operatorname{tang} \frac{a+b}{2}},$$

ou

$$\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{c}{2};$$

ces formules expriment ce que deviennent la première et la troisième des analogies de Neper lorsqu'on y fait $a = b$, $A = B$. Pour en déduire les analogies correspondantes, relatives au cas général, il suffira évidemment d'introduire le facteur $\cos \frac{a-b}{2}$ dans le second membre de la première formule et le facteur $\cos \frac{A-B}{2}$ dans le second membre de la seconde, ce qui donnera

$$\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{a+b}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2} \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}},$$

et

$$\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{c}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

ou

$$\operatorname{tang} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tang} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}.$$

Il reste encore à retrouver les deux analogies qui ont respectivement $\operatorname{tang} \frac{A-B}{2}$ et $\operatorname{tang} \frac{a-b}{2}$ pour premier membre; or pour cela il suffit de diviser membre à membre la première et la deuxième de celles que nous venons d'obtenir, successivement par

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang} \frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\operatorname{tang} \frac{a-b}{2}},$$

en ayant soin, quand on effectue la deuxième division de renverser l'ordre des deux membres de la relation diviseur.