Abschnitt III.

Die binäre Form sechsten Grades und die biquadratische Involution und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

§. 25.

Die Darstellung auf der cubischen Normcurve.

122. Dieser Abschnitt beginne mit einer einleitenden Bemerkung, die sich auf die Darstellung im Weiteren bezieht.

Nach den systematischen Entwicklungen nemlich, wie sie bis jetzt vorliegen, und die besonders im zweiten Capitel (Abschnitt I und II) einzelne Wiederholungen, sowie Wiedergaben von Bekanntem nicht vermeiden liessen, dürfte eine thunliche Gedrängtheit von nun ab geboten sein, um so wenigstens einen Theil des reichen Stoffes in dieser Arbeit bewältigen zu können.

Um den Gang der weitern Theorie (mehrerer) biquadratischer Formen später nicht zu oft zu unterbrechen, möge zunächst die Hülfstheorie der binären Form sechsten Grades, soweit sie sich an die Betrachtung dieser auf der cubischen Normcurve (und weiterhin auf dem Normkegelschnitt *)) anlehnt und für die Abrundung der erstgenannten Theorie erforderlich ist, vorausgehen.

123. Nach Reye[42] trägt (stützt, ist apolar zu) eine Fläche zweiter Ordnung F_2:

$$(1)\quad a_x^2 \equiv \Sigma\,\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \;(i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$$

*) Die darauf bezügliche Betrachtung fällt mit der zur Normcurve vierter Ordnung gehörigen, wie sich zeigen wird, im Wesentlichen zusammen.

eine andere Fläche zweiter Klasse Φ_2 (und umgekehrt ruht (stützt sich) dann die letztere auf der ersteren):

$$(2)\quad u_\alpha^3 \equiv \Sigma\,\Sigma\, u_{ik}\, \alpha_i\, \alpha_k = 0$$

unter der Apolaritätsbedingung (des Verschwindens der bilinearen Invariante beider):

$$(3)\quad (a\alpha)^2 \equiv \Sigma\,\Sigma\, a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0.$$

Dann giebt es nach Hesse[43] ein (und damit unendlich viele) Poltetraeder der ersten (zweiten), die der zweiten (ersten) um- (ein-) beschrieben sind.

Wir suchen jetzt die Bedingungen, unter denen eine F_2 (1) alle einer cubischen Raum- (Norm-)Curve umbeschriebenen Flächen zweiter Klasse Φ_2 oder, wie wir kürzer sagen, die Curve stützt*).

Die ganze der Normcurve

$$(4)\quad \rho x_0 = 1,\ \rho x_1 = 3\lambda,\ \rho x_2 = 3\lambda^2, \rho x_3 = \lambda^3\ (N_3)\ \text{oder}$$

$$(5)\quad \sigma u_0 = \lambda^3,\ \sigma u_1 = -\lambda^2, \sigma u_2 = \lambda,\ \sigma u_3 = -1\ (\mathrm{N}_3)$$

umschriebene Klassenschaarschaar von Φ_2 war gegeben durch (v. pg. 49)

$$(6)\ \nu_0\,(u_0\, u_2 - u_1^2) + \nu_1\,(u_0\, u_3 - u_1\, u_2) + \nu_2\,(u_1\, u_3 - u_2^2) = 0.$$

Soll demnach die F_2 (1) die Curve N_3 (5) d. h. die Flächen der Schaarschaar (6) stützen, so sind dazu die drei Bedingungen nothwendig und hinreichend:

$$(7)\quad a_{02} = a_{11},\ a_{03} = a_{12},\ a_{13} = a_{22}.$$

„Diese Bedingungen (7) sind vollkommen ausgedrückt, wenn man die Coefficienten von (1) der Bezeichnung unterwirft:

**) Im dualistischen Falle nennt dann Reye (Crelle's Journal Bd. 82) die Curve die cubische Polcurve der Fläche. Danach müsste man, wenn, wie oben, die Fläche F_2 die Curve stützt, genau sagen: die Curve ist die cubische Polarencurve der Fläche. Den Grund dieser Bezeichnung wird man bald erkennen.

(8) $a_{ik} = a_{i+k}$ $(i + k = 0, 1, \ldots 6)$."

Dann geht die F_2 (1) in die Gestalt über:

(9) $a_{xx} = x_0 (a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + x_1 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3) + x_2 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2 + a_5 x_3) + x_3 (a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3) = 0.$

Da aber die canonische Form der cubischen Curven (cf. pg. 49) so gewählt ist, dass die homogenen Coordinaten x_i eines Raumpunktes gerade zusammenfallen mit den homogenen symmetrischen Funktionen σ_i dreier Elemente μ (der Parameter der durch den Punkt gehenden Ebenen der Curve), so entsteht (9) aus der einfacheren Form:

(10) $a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6 = 0,$

wenn man von den sechs Elementen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6$, aus denen die s gebildet sind, immer zwei einander gleich setzt:

(11) $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = \mu_2$; $\lambda_5 + \lambda_6 = \mu_3$.

Soll dies auch äusserlich hervortreten, so schreiben wir in (9) die σ statt der x und erhalten

$$(12) \quad a_\sigma^2 = 0.$$

Der Schnitt der F_2 {(9) oder (12)} mit der Normcurve N_3 (4) liefert das Sextupel:

(13) $f \equiv a_\lambda^6 \equiv a_\lambda = a_0 \mu^6 + 6 a_1 \lambda\mu^5 + 15 a_2 \lambda^2 \mu^4 + 20 a_3 \lambda^3 \mu^3 + 15 a_4 \lambda^4 \mu^2 + 6 a_5 \lambda^5 \mu + a_6 \lambda^6 = 0.$

Dieses geht aus (10) a_s durch Gleichsetzen aller Elemente λ hervor d. h. a_s ist die nach sechs Elementen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6$ polarisirte Form a_λ (13).

Daraus folgt dann, dass man (cf. pg. 36) der Form a_σ^2 (12) auch die Gestalt

$$(14) \quad a_\sigma^2 \equiv a_{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}$$

geben kann, sowie, dass die Klammerfaktoren in (9) die dritten

Ueberschiebungen (bilinearen Invarianten) der dritten Differentialquotienten von f über die cubische Form mit den Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 sind.

Umgekehrt ist die Form a_s, also auch $a_\sigma^2 \equiv a_x^2$ eindeutig durch a_λ bestimmt; wie auch geometrisch evident ist, da durch sechs gegebene Punkte (13) $f = 0$ von N_3 nur eine F_2 gehen kann, die alle N_3 umschriebenen Φ_2 stützt.

Da die Normgleichung einer cubischen Raumcurve, so lange diese eine eigentliche ist, immer (pg. 47) durch eine bestimmte Raumcollineation herzustellen ist, so hat man:

α) „Durch irgend sechs Punkte*) einer cubischen Raumcurve (auf der eine Parametervertheilung ausgebreitet sei)

$$(13) \quad a_\lambda = 0$$

geht eine einzige sie stützende F_2, deren Gleichung dann mittelst einer bestimmten Collineation stets in die Gestalt gebracht werden kann:

$$(12)\ (14) \quad a_\sigma^2 \equiv a_{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} = 0.“$$

124. Suchen wir nunmehr, ehe wir die F_2 (12) näher untersuchen, die zur vorigen dualistische Entwicklung.

Das der Curve N_3 (4) einbeschriebene F_2-Netz war (pg. 48):

$$(15) \quad \mu_0 (3\, x_0\, x_2 - x_1^2) + \mu_1 (9\, x_0\, x_3 - x_1\, x_2)$$
$$+ \mu_2 (3\, x_1\, x_3 - x_2^2) = 0.$$

Somit ruht eine Classenfläche Φ_2

$$(16) \quad u_\beta^2 = 0$$

auf der Curve N_3, wenn:

*) Man könnte auch sagen: durch sechs Raumpunkte geht eine einzige F_2, die die durch die sechs Punkte gehende cubische Raumcurve stützt etc.

(17) $\beta_{11} = 3\,\beta_{02},\ \beta_{12} = 9\,\beta_{03},\ \beta_{22} = 3\,\beta_{13}.$

Ersetzt man daher zuvörderst in (16) die $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$ durch ihre resp. rechten Seiten in (17), so kann man dann wiederum die Bezeichnungsart einführen:

(18) $\beta_{ik} = \beta_{i+k}\ (i + k = 0, 1, \ldots 6)$

wodurch aus (16) wird:

$$(19)\quad u_\beta^2 \equiv u_0^2\,\beta_0 + 2\,u_0\,u_1\,\beta_1 + 2\,u_2\,u_3\,\beta_5 + u_3^2\,\beta_6$$
$$+ \beta_2\,(2\,u_0\,u_2 + 3\,u_1^2) + 2\,\beta_3\,(u_0\,u_3 + 9\,u_1\,u_2)$$
$$+ \beta_4\,(2\,u_1\,u_3 + 3\,u_2^2) = 0,$$

und für das Sextupel der dieser Fläche mit N_3 (5) gemeinsamen Ebenen erhält man:

$$(20)\quad \beta_\lambda = \beta_0\,\lambda^6 - 2\,\beta_1\,\lambda^5\mu + 5\,\beta_2\,\lambda^4\,\mu^2 - 20\,\beta_3\,\lambda^3\,\mu^3$$
$$+ 5\,\beta_4\,\lambda^2\,\mu^4 - 2\,\beta_5\,\lambda\mu^5 + \beta_6\,\mu^6 = 0.$$

125. Diese beiden Formen (19) (20) bedingen sich also wieder gegenseitig eindeutig.

Vergleicht man beide, so erkennt man ohne Weiteres, dass (19) entsteht, wenn man aus β_λ (20) zunächst die Form β_s (durch Polarisation nach sechs Werthen) bildet, und dann in β_s die Substitutionen vornimmt:

(21) $\sigma_3 = u_0,\ \sigma_2 = -3\,u_1,\ \sigma_1 = 3\,u_2,\ \sigma_0 = -u_3.$

Dies war aber a priori vorauszusehen, denn die Bildung der Gleichung einer Klassenfläche Φ_2, die mit N_3 das Sextupel β_λ (20) gemein hat und auf N_3 ruht, muss ja gerade so (nur dualistisch) erfolgen, wie die der Ordnungsfläche F_2 (12), die mit N_3 das Sextupel a_λ^6 gemein hat und N_3 stützt.

Da aber die σ mit den Coordinaten eines Punktes identisch sind, so gehen vermöge der Gleichungen (21) (cf. pg. 49) Punkt- in Ebenencoordinaten (für dieselben Argumente $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3$) über.

q. e. d.

Andrerseits überzeugt man sich sofort, dass die bilineare Invariante der Flächen (12) und (19) identisch ist mit der der beiden binären Formen (13) a_λ und (20) β_λ. Demnach gilt der wichtige, später vielfach benützte Satz:

β) „Die bilineare Invariante zweier binären Formen sechsten Grades (a_λ^6, b_λ^6) ist identisch mit der zweier quaternärer Formen zweiten Grades, die, $=0$ gesetzt, eine F_2 resp. Φ_2 darstellen, die eine (sonst beliebige) cubische Raumcurve tragen resp. auf ihr ruhen, und mit ihr die gegebenen Formen a, b resp. gemein haben.

Sind also die binären Formen apolar, so auch die quaternären und umgekehrt."

Auch dieser Satz ist leicht ohne spezielle Rechnung zu erhärten.

Denn die Gleichung einer F_2, die aus einer cubischen Curve das Punktsextupel a_λ^6 ausschneidet und auf der Curve ruht, muss (wie auch aus (12) ersichtlich) offenbar vom ersten Grade in den Coefficienten von a_λ^6 sein: desgleichen die zur Curve bezüglich einer zweiten Form b_λ^6 sich dualistisch verhaltende Φ_2.

Die simultanen Invarianten beider Flächen sind von einer linearen Transformation auf der Curve völlig unabhängig d. h. simultane Invarianten der Formen a_λ^6, b_λ^6 (durch die ja die resp. Flächen eindeutig bestimmt sind).

Da endlich die bilineare Invariante der beiden binären Formen die einzige ist, die vom ersten Grade in den Coefficienten beider wird, so ist der Satz bewiesen, der in dieser Art eine Verallgemeinerung *) des Nr. 49 aufgestellten ist.

126. Wir kehren jetzt vorläufig wieder zu der einen F_2 (12) zurück.

---

*) Der ganz allgemeine Satz findet sich in Cap. III dieses Werkes.

In Ebenencoordinaten schreibt sie sich:

$$(22)\ 0 = u_A{}^2 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & u_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & u_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & u_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & u_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

wo die rechte Seite die geränderte Determinante der F_2 ist, die mit der Invariante vierten Grades a_λ^6 (cf. Salmon, Höhere Algebra, art. 252) zusammenfällt *).

Combinirt man (22) mit der Gleichung von N_3, so ergiebt sich das die gemeinsamen Ebenen beider Gebilde darstellende Sextupel als die Covariante von $a_\lambda^6 \equiv f$:

$$(23)\ 0 = H = \begin{vmatrix} f_{1111} & f_{1112} & f_{1122} \\ f_{1112} & f_{1122} & f_{1222} \\ f_{1122} & f_{1222} & f_{2222} \end{vmatrix}$$

d. i. die Determinante der vierten Differentialquotienten von f.

Dieses Resultat wird sich bald auch geometrisch bestätigt finden. Es ist die Erweiterung (cf. Kap. III) des Nr. 48 bewiesenen (ternären) Satzes und mag besonders betont werden, zumal da der eigenthümliche Zusammenhang der Formen f und H später eine sehr wichtige Rolle spielt.

γ) „Hat eine eine cubische Raumcurve stützende F_2 mit ihr das Punktsextupel f gemein, so sind die gemeinsamen Ebenen beider durch die Form H gegeben, wo H die bekannte Covariante von f (Determinante der vierten Differentialquotienten) ist."

Nehmen wir das Resultat vorweg, dass zu einer gege-

*) Es ist dies die von Sylvester so genannte Catalektikante, deren Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung ist, dass die Form f als Summe von drei sechsten Potenzen darstellbar ist. Davon wird weiterhin Gebrauch gemacht.

benen binären Form H fünf andere gehören, so dass ihre Covariante H mit der ersteren Form identisch ist, so gilt im Anschluss an γ):

δ) „Sechs Ebenen einer cubischen Raumcurve sind zugleich die Ebenen von fünf die Curve stützenden Flächen zweiter Ordnung (und dualistisch)."

127. Wir gelangen jetzt mittelst der Form f zu einer sehr einfachen Darlegung der zum Theil schon von Reye (Crelle Bd. 82) eingehend untersuchten Eigenschaften der Polvielflache der Fläche (12), die der Curve N_3 umbeschrieben sind. Man erkennt leicht die Analogie mit den Entwicklungen für den Normkegelschnitt, auf dem eine biquadratische binäre Form gegeben war.

Theilt man nemlich die sechs Werthe λ in (10) a_s in zwei Gruppen

$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$; $\lambda_4\, \lambda_5\, \lambda_6$ mit den bez. symmetrischen Funktionen

σ_i, τ_i, $(i = 0, 1, 2, 3)$

so geht (10) über in

$$(24) \quad a_{\sigma\tau} = 0. \quad \text{d. h.}$$

die Punkte (σ) (τ) bilden ein in Bezug auf unsere F_2 [(12) oder (14)] conjugirtes Paar. Aus der Symmetrie der Form (10) in den sechs Elementen λ folgt dann sofort:

ε) „Irgend ein conjugirtes Punktepaar unserer eine cubische Curve stützenden Fläche bestimmt*) (mittelst der beiden an die Curve ge-

*) Ist eine beliebige Fläche zweiter Ordnung $a_x^2 = 0$ gegeben, so bestimmen bekanntlich[44] (cf. z. B. Rosanes, Crelle's Journal Bd. 88, pg. 266 ff.) irgend vier conjugirte Punktepaare der Fläche sechs weitere, die mit den ersten die Gegenecken eines Polsechsflachs der Fläche bilden. Es sind dies die zehn zerfallenden Flächen der dreifach unendlichen Schaar von Flächen zweiter Classe, die sich aus den ersten vier Punktepaaren linear zusammensetzt.

henden Ebenentripel) ein der Curve umschriebenes Polsechsflach der Fläche (d. h. dessen sämmt-

---

Der Übergang von diesem Satze zum obigen (ε) gestaltet sich ganz analog wie in der Ebene (cf. pg. 88).

Sind durch vier conjugirte Punktepaare irgend einer F_2 weitere mitbestimmt, so findet eine lineare Identität (in den a_{ik}) der Form statt:

$$k_1\ a_{x_1y_1} + k_2\ a_{x_2y_2} + k_3\ a_{x_3y_3} + k_4\ a_{x_4y_4} + k_5\ a_{x_5y_5} = 0.$$

In der That giebt das zehn Gleichungen, aus denen sich gerade die zehn Unbekannten (die Verhältnisse der k nebst den Coordinaten der beiden Punkte eines fünften Paares) bestimmen.

Soll nun schon ein conjugirtes Punktepaar weitere mitbestimmen, so müssen drei lineare Relationen zwischen den a_{ik} stattfinden: dann zerfällt die Identität

$$k_1\ a_{x_1y_1} + k_2\ a_{x_2y_2} = 0$$

in sieben Gleichungen, die die jetzt vorhandenen sieben Unbekannten bestimmen.

Mithin muss für diesen Fall die F_2 zu drei Flächen zweiter Klasse (und damit zu ihrer Schaarschaar) apolar sein.

In unserem Falle ist diese Schaarschaar speciell die einer cubischen Raumcurve φ umbeschriebene.

In der That giebt es ja dann, wie Satz (k) zeigt, Polvierflache von F_2, die φ d. h. jeder der Flächen der Schaarschaar φ umschrieben sind, was mit der bekannten (Hesse'schen) Erklärung der Apolarität übereinstimmt.

Umgekehrt aber folgt aus dem Obigen noch nicht ohne Weiteres, dass es solche φ umschriebene Polvierflache von F_2 giebt; dies zeigt erst die Textentwicklung.

Man findet diese Beziehung von F_2 zu φ auch bei Reye (Crelle Bd. 82) des Näheren untersucht, der auch die umgekehrte Frage erledigt, welche Curven φ zu einer gegebenen Fläche F_2 gehören.

Auch im Übrigen verweise ich ein für allemal auf diese und die verwandten[45]) Arbeiten Reye's, die mit unsern Untersuchungen auf das engste zusammenhängen, wenn auch die ganze Untersuchungsmethode eine wesentlich verschiedene ist. Sie aber haben mir die eigentliche Anregung zur Abfassung dieses Werkes gegeben.

liche Gegeneckenpaare solche conjugirten Punktepaare sind)."

„Es giebt eine fünffach unendliche (∞^5)*) lineare Schaar solcher der Curve umschriebenen Polsechsflache der Curve. Die bezüglichen Ebenensextupel stellen auf der Curve die ganze zum Schnittpunktsextupel von Fläche und Curve conjugirte Gruppe dar."

Umgekehrt folgt hieraus mit Hülfe des Satzes (β):

ζ) „Ist eine cubische Curve nebst einer sie stützenden F_2 gegeben, so construire man die (∞^5) lineare Schaar von Klassenflächen Φ_2, die auf F_2 und der Curve ruhen. Die dieser Schaar mit der Curve gemeinsamen Ebenensextupel sind die Ebenen der Polsechsflache des vorigen Satzes."

„Die ganze zur Fläche F_2 conjugirte Gruppe von (Klassen-) Flächen setzt sich linear zusammen aus sechs Flächen der Schaar der Φ_2 und drei der der Curve umbeschriebenen Flächen."

„Die ganze zur Schaar der Φ_2 conjugirte Gruppe von (Ordnungs-) Flächen setzt sich linear zusammen aus F_2 und dem der Curve einbeschriebenen Netze."

128. Nun kann man aber den Satz (β) und Gleichung (24) in derselben Weise auf eine ganze Schaar von Flächen F_2 anwenden, die nur sämmtlich der Bedingung genügen müssen, die Curve zu stützen und gelangt so zu dem allgemeineren, später benützten Satze:

*) Diese gebräuchliche Abkürzung werde von jetzt ab eingeführt. Eine andere Abkürzung tritt ferner des Öfteren später auf: so oft kein Zweifel herrschen kann, heisse es nur „Involution" statt „biquadratischer Involution".

η) „Gegeben sei eine cubische Raumcurve und eine ∞^m ($m = 0, 1, \ldots 5$) lineare Schaar von F_2, die alle die Curve stützen.

Dann existirt eine ∞^μ ($\mu = 5 - m$) lineare Schaar von Φ_2, die alle auf der F_2-Schaar und zugleich auf der Curve ruhen.

Die der Φ_2-Schaar mit der Curve gemeinsamen Sechsflache sind *alle* der Curve umschriebenen *gemeinsamen* Polsechsflache der F_2-Schaar.

Die zugehörigen Ebenensextupel der Curve bilden die *ganze* zur Schaar der Schnittpunktsextupel von Curve und F_2-Schaar conjugirte (*binäre*) Gruppe."

„Dem entspricht dann, dass die *ganze* zur F_2-Schaar *conjugirte* (*quaternäre*) Schaar sich *linear* zusammensetzt aus den Flächen der Φ_2-Schaar und den der Curve umschriebenen Flächen: umgekehrt setzt sich die *ganze* zur Schaar der Φ_2 *conjugirte* (*quaternäre*) Schaar *linear* zusammen aus den Flächen der F_2-Schaar nebst den der Curve einbeschriebenen Flächen."

129. Wir kommen jetzt wieder zu einer Fläche F_2, die die Curve stützt, zurück und stellen ihre der Curve umschriebenen Polfünf- und -vierflache auf.

Bekanntlich wird ein Polsechsflach einer F_2 zum Polfünfresp. -vierflach, wenn eine resp. zwei seiner Ebenen unbestimmt werden.

Dann ist jeder Eckpunkt zur Gegenkante resp. Gegenebene conjugirt. Mithin werden diese speciellen Polsechsflache vermöge der bekannten Umformung der Form a_s (pg. 32) dargestellt durch die Gleichungssysteme:

$$(25)\quad \begin{cases} A_1 \equiv a_0\, S_0 + a_1\, S_1 + \,.\,.\, a_5\, S_5 = 0 \\ A_2 \equiv a_1\, S_0 + a_2\, S_1 + \,.\,.\, a_6\, S_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{resp. } (26)\quad \begin{cases} A_{11} \equiv a_0\, T_0 + a_1\, T_1 + \,.\,.\, a_4\, T_4 = 0 \\ A_{12} \equiv a_1\, T_0 + a_2\, T_1 + \,.\,.\, a_5\, T_4 = 0. \\ A_{22} \equiv a_2\, T_0 + a_3\, T_1 + \,.\,.\, a_6\, T_4 = 0 \end{cases}$$

wo die A_i resp. A_{ik} die nach fünf resp. vier Werthen polarisirten ersten resp. zweiten Differentialquotienten von $f \equiv a_\lambda^6$ sind.

Dies heisst aber mit Hülfe des Fundamentalsatzes des §. 5:

$\varkappa$) „Die Ebenen der einer cubischen Raumcurve umschriebenen (∞^3, linearen) Schaar der Polfünfflache resp. der (∞^1, linearen) Schaar der Polvierflache einer die Curve stützenden und das Sextupel f ausschneidenden F_2 sind durch die zur Gruppe der ersten resp. zweiten *Polaren* von f *conjugirten* Gruppen dargestellt.“

Diese der Curve umschriebenen Polvierflache von F_2, die also eine biquadratische Involution auf der Curve erzeugen, bilden weiterhin den Kern der ganzen Entwicklung. Es wird sich zeigen, dass man umgekehrt, von ihnen ausgehend, wieder die F_2 reconstruiren kann (und zwar in eindeutiger Weise).

130. Zunächst zeigt man leicht, wie aus dem letzten Satze wieder der Satz (γ) hervorgeht. Denn aus den Gleichungen (26) folgt, dass man von den vier Elementen (Ebenen der Curve), die ein Quadrupel der Involution der Polvierflache bilden, eines beliebig annehmen kann; dann ist das Quadrupel eindeutig bestimmt.

Man wähle als eine solche Ebene eine der gemeinsamen Ebenen von F_2 und der Curve. Dann (und nur dann) liegt ihr

Pol (in Bezug auf die F_2) auf ihr, d. h. es müssen von den vier Ebenen des Quadrupels zwei coincidiren.

Zunächst ergiebt sich durch Elimination zweier der vier in (26) enthaltenen Werthe $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$, etwa λ_3, λ_4, die Gleichung (23), wenn man in ihr die vierten Differentialquotienten nach zwei Elementen $\lambda_1 \lambda_2$ polarisirt.

Dann stellt (23) die Bedingung dar, unter der zwei Ebenen der Curve $\lambda_1 \lambda_2$, einem Quadrupel der Polvierflachinvolution angehören.

Fallen λ_1, λ_2 zusammen, so resultirt demnach (23) selbst.

q. e. d.

In der That kommt dies nur auf einen früheren Satz (pg. 41) zurück. Denn die Doppelelemente einer biquadratischen Involution sind ja die Wurzeln ihrer Funktionaldeterminante. Diese ist aber identisch mit der ihrer conjugirten Gruppe, d. i. hier der Gruppe der zweiten Polaren von f, ist also keine andere als die Covariante H.

131. Durch sechs beliebig gewählte binäre Formen sechsten Grades ist, wie wir wissen, im Allgemeinen stets eine siebente zu allen jenen apolare eindeutig bestimmt. (Nach früherer (§§. 2, 5) Bezeichnungsweise heisst dies: man fasst eine Form a_λ^6 als Schnittpunktform einer R_6^5 auf.) Dies hat hier zur Folge:

λ) „Sechs beliebig einer cubischen Raumcurve umschriebene Sechsflache sind Polsechsflache einer bestimmten die Curve stützenden F_2. Dann giebt er eine ∞^5 Schaar solcher Polsechsflache etc. etc.“

132. Wir gelangen jetzt zu dem am Schluss von Nr. 129 angedeuteten Satz, der sich algebraisch einfach so formuliren lässt:

μ) „Die zu einer gegebenen biquadratischen

Involution conjugirte Gruppe ist (im Allgemeinen) die Gruppe der zweiten Polaren einer bestimmten Form sechsten Grades."

Den Beweis führt man so. Ist die gegebene Involution eine ganz allgemeine, so auch ihre conjugirte Gruppe. Wir zeigen daher, dass drei allgemeine Formen vierten Grades

$$(27) \quad \varphi = a_\lambda^4, \quad \chi = b_\lambda^4, \quad \psi = c_\lambda^4$$

die zweiten Polaren einer bestimmten einzigen Form

$$(25) \quad g \equiv g_\lambda^6$$

sind, d. h. dass es drei bestimmte lineare Combinationen der φ, ψ, χ giebt, die die zweiten Differentialquotienten von g sind:

$$(29) \begin{cases} \mu_1 \varphi + \nu_1 \chi + \pi_1 \psi \equiv g_{11} \\ \mu_2 \varphi + \nu_2 \chi + \pi_2 \psi \equiv g_{12} \\ \mu_3 \varphi + \nu_3 \chi + \pi_3 \psi \equiv g_{22} \end{cases}$$

Dies liefert acht in den neun Grössen μ, ν, π homogene, lineare Relationen, die demnach ihre Verhältnisse eindeutig zu bestimmen erlauben.

Denn die Möglichkeit, dass etwa zwischen diesen acht Relationen Identitäten stattfänden, wodurch die Werthe der μ, ν, π unbestimmt würden, widerlegt sich z. B. so.

Man sieht, dass für eine Form g ihre Covariante H (23) mit der Funktionaldeterminante der Formen (27) zusammenfällt. Demnach führt unsere Frage zu der andern: Wie viel Involutionen vierten Grades giebt es mit gegebenen sechs Doppelelementen? oder Wie viel Formen sechsten Grades giebt es, die eine gegebene zur Covariante H haben? und dies wieder nach Satz γ: Wie viel F_2 giebt es, die mit einer cubischen Curve irgend sechs gegebene Ebenen gemein haben und die Curve stützen?

Aus dieser letzten Form geht aber deutlich hervor, dass es eine endliche Zahl solcher geben muss, womit der aufgeworfene Zweifel erledigt ist.

Von dieser endlichen Zahl von Lösungen gehört dann nach Obigem eine bestimmte zu der gegebenen zu (27) conjugirten Involution.

Die fragliche Zahl der Lösungen ist schon oben (Nr. 126) vorläufig als fünf angegeben.

Somit ist Satz (μ) erwiesen und wir geben ihm die andere wichtigere Gestalt:

μ') „Die Theorien der binären Form sechsten Grades und der biquadratischen Involution sind identisch."

133. Mit Rücksicht auf diesen letzten Satz ist dann die Frage nach der Bedingung, unter der zwei Elemente λ_1, λ_2 einem Quadrupel einer gegebenen Involution

$$(30)\quad \alpha_\lambda^4 + k\,\beta_\lambda^4$$

angehören, schon in Nr. 130 erledigt. Denn sei f die binäre Form sechsten Grades, deren zweite Polaren die zur gegebenen Involution conjugirte Gruppe bilden, so ist die Bedingung (cf. die analoge pg. 98)

$$(31)\quad 0 = \mathrm{H} \equiv \begin{vmatrix} A_{1111} & A_{1112} & A_{1122} \\ A_{1112} & A_{1122} & A_{1222} \\ A_{1122} & A_{1222} & A_{2222} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2, & a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2, & a_2\sigma_0 + a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2, \\ a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2, & a_2\sigma_0 + a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2, & a_3\sigma_0 + a_4\sigma_1 + a_5\sigma_2, \\ a_2\sigma_0 + a_3\sigma_1 + a_4\sigma_2, & a_3\sigma_0 + a_4\sigma_1 + a_5\sigma_2, & a_4\sigma_0 + a_5\sigma_1 + a_6\sigma_2 \end{vmatrix}$$

wo H aus der Covariante H von f durch Polarisation der vierten Differentialquotienten nach zwei Werthen $\lambda_1\ \lambda_2$ hervorgeht.

Die Ecken der der cubischen Curve umschriebenen Involutionstetraeder liegen auf einer zweiten Curve, die wieder eine cubische ist, da nach (26) zu jedem Element λ_1 drei bestimmte $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ gehören, die mit ihm ein Involutionsquadrupel bilden d. h. da in jeder Ebene der ursprünglichen Curve nur drei Punkte der zweiten Curve liegen können (die drei Eckpunkte des durch die Ebene λ_1 bestimmten *) Tetraeders).

Beide Curven stehen also in der Beziehung, dass der einen ∞^1-Tetraeder um- und der andern zugleich einbeschrieben sind, eine von Hurwitz[46] näher studirte Beziehung, die daher von jetzt ab immer kurz die Hurwitz'sche heisse. Dann können wir sagen:

ν) „Die einer biquadratischen Involution angehörigen Axen einer cubischen Raumcurve (N_3) sind Sehnen **) einer zweiten (H_3), die zur ersten in der Hurwitz'schen Beziehung steht. Den sechs Doppelelementen $H = 0$ der Involution entsprechen die sechs Tangenten von N_3, die Sehnen von H_3 sind.

Jede Ebene von N_3 ist Ebene eines N_3 um- und H_3 einbeschriebenen Tetraeders (dualistisch jeder Punkt von H_3 Eckpunkt eines solchen).

Steht eine Curve H_3 zu N_3 in dieser Beziehung, so lässt sie sich immer durch *eine* Gleichung (31) vollständig darstellen."

Somit sind die Begriffe „biquadratische Involution auf einer cubischen Curve" und „Hurwitz'sche Beziehung zweier cubischer Curven" vollkommen vertauschbar, und der Satz (μ) gewinnt jetzt für die Theorie der cubischen Raumcurven folgende Gestalt:

μ'') „Stehen zwei cubische Raumcurven in der

*) Zu einer Ebene der Curve gehört ein Punkt als Pol (in Bezug auf die F_2), der mittelst des an die Curve gehenden Ebenentripels das Tetraeder bestimmt.

**) Im Allgemeinen giebt es bekanntlich sechs Axen einer cubischen Curve, die Sehnen einer zweiten sind, in unserem Falle aber unendlich viele. Wir kommen später darauf genauer zurück.

Hurwitz'schen Beziehung, so sind die bezüglichen um- resp. einbeschriebenen Tetraeder die Poltetraeder einer bestimmten F_2, die die eine Curve stützt resp. auf der andern ruht, deren mit der einen gemeinsame Ebenen resp. mit der andern gemeinsame Punkte in die Doppelelemente H der zugehörigen Involution fallen, und deren mit der einen gemeinsame Punkte resp. mit der andern gemeinsame Ebenen durch eine Form f dargestellt werden, deren Covariante H mit der obigen Form H zusammenfällt."

134. Damit sind die Grundlinien einer Theorie verzeichnet, die der in den §§. 17 ff. durchgeführten ganz analog ist, indem man hier von einer binären Form sechsten Grades als Covariante H einer andern solchen Form ausgeht. Daher spricht sich der dem Satze Nr. 76 entsprechende so aus:

π) „Man gehe von irgend einem Sextupel H auf einer cubischen Raumcurve φ aus. Dann giebt es einmal fünf Curven H_3, die zu φ in der Hurwitzschen Beziehung stehen, sodass sie die sechs Tangenten H zu Sehnen haben *); andrerseits fünf Flächen F_2, die φ stützen und mit φ das Ebenensextupel H gemein haben.

Je eine der Curven H_3 ist einer bestimmten der Flächen F_2 eindeutig zugeordnet (und umg.), indem sie der Ort der Ecken der φ umschriebenen Polvierflache von F_2 ist."

135. Dieser Zusammenhang zwischen einer Curve H_3 und der ihr zugeordneten F_2 lässt sich leicht noch genauer verfolgen.

*) Dies sind gerade (wie sich weiterhin herausstellen wird) diejenigen fünf cubischen Curven, die überhaupt sechs Tangenten von φ zu Sehnen haben.

Denn die Curve H_3 ist der Ort der Ecken der φ umschriebenen Tetraeder einer bestimmten Involution (mit den Doppelelementen H), also (cf. Hurwitz l. c.) durch irgend zwei beliebige φ umschriebene Tetraeder gerade so eindeutig bestimmt, wie die Involution durch die beiden bezüglichen Quadrupel.

Mit Rücksicht auf die Sätze (β), sowie (ε) bis (η) hat man daher Folgendes:

ρ) „Einer cubischen Raumcurve φ seien irgend zwei Tetraeder umbeschrieben. Deren Ecken liegen auf einer bestimmten Curve H_3 (der dann noch unendlich viele solche φ umschriebene Tetraeder einbeschrieben sind).

Für jedes der beiden gegebenen Tetraeder giebt es eine Schaarschaar von Flächen Φ_2, die ihm einbeschrieben sind und auf φ ruhen. Diese seien S_1, S_2. Dann ist die H_3 zugeordnete F_2, für die alle H_3 ein- und φ umbeschriebenen Tetraeder Poltetraeder sind, dadurch *eindeutig bestimmt, dass sie auf den drei Schaarschaaren* S_1, S_2, φ*) *ruht.*

Dann ruht sie auch auf jeder weitern Schaarschaar, die durch je eines der obigen unendlich vielen Tetraeder mitbestimmt ist.“

136. Will man umgekehrt von der Fläche F_2 zur Curve H_3 übergehen, so kann man gleichfalls von zwei, φ umschriebenen Tetraedern ausgehen, wie im letzten Satze, oder auch von irgend drei φ umschriebenen Fünfflachen resp. irgend sechs der Curve φ umschriebenen Sechsflachen. Die letztere Thatsache ist schon im Satze (λ) ausgesprochen gewesen. Hier

---

*) Die Schaarschaar φ ist der abgekürzte Ausdruck für die φ umschriebene Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse. Das Dualistische gilt vom Netze φ.

handelt es sich um die Construktion der zugehörigen F_2. Diese fliesst wieder sofort aus den Sätzen (β) (ε) bis (η):

σ) „I. Irgend sechs φ umschriebene Sechsflache sind Polsechsflache einer bestimmten (φ stützenden) F_2. Diese Bestimmung geschieht so. Jedem der Sechsflache ist eine einzige Fläche Φ_2 einbeschrieben, die auf dem Netze φ ruht. So entstehen sechs Flächen Φ_2^k ($k = 1 \,.\,.\, 6$).

Dann giebt es nur eine F_2, die die Schaarschaar φ und die sechs Flächen Φ_2^k (und damit natürlich die aus ihnen linear gebildete ∞^5-Schaar) *stützt*. Dies ist die gewünschte.

II. Irgend drei φ umschriebene Fünfflache sind Polfünfflache einer bestimmten (φ stützenden) F_2. Die Bestimmung ist der in I analog.

Es giebt für jedes der drei Fünfflache eine (∞^1 lineare) Schaar von Flächen Φ_2, die ihm einbeschrieben sind und auf dem Netze φ *ruhen*. Diese seien Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Dann giebt es nur eine F_2, die die Schaarschaar φ nebst den drei Schaaren Σ_1, Σ_2, Σ_3 stützt. Dies ist die gewünschte."

Diese drei Sätze (ρ) (σI) σII) lassen sich kurz in einen zusammenfassen, der dann zugleich noch eine Reihe ähnlicher enthält, nemlich:

τ) „Die sechs Sechsflache des Satzes (σI) lassen sich der Reihe nach ersetzen und zwar immer zwei durch ein Fünfflach, und immer drei durch ein Vierflach."

137. Wir gehen jetzt über (analog dem Verfahren des §. 18, Nr. 52 ff.) zur canonischen Form der Flächen F_2 (die die Curve φ stützen) und der zugehörigen Curven H_3. Diese fällt

wieder völlig mit der b i n ä r e n Canonizationsfrage zusammen. Zugleich treten dadurch verschiedene der oben entwickelten Eigenschaften von F_2 in ein helleres Licht.

Den Ausgang bilde wieder die Form $a_\lambda^6 \equiv f$, deren zugehörige F_2 a_σ^2 (13) war. Man kann bekanntlich eine Form f auf fünffach unendliche Weise als Summe von sechs sechsten Potenzen darstellen:

$$(32)\ f \equiv \sum_{i=1}^{i=6} k_i\,(\lambda - \alpha_i)^6 \equiv a_\lambda^6.$$

Dabei unterliegen nach dem schon oft erwähnten Rosanesschen Fundamentalsatz die α der einzigen Bedingung, Wurzeln einer zu f conjugirten Form zu sein. Die sämmtlichen Sextupel α sind somit durch die zu f conjugirte Gruppe (d. h. die φ umschriebenen Polsechsflache von F_2) dargestellt.

Werden ein resp. zwei resp. drei α unbestimmt, so dass man sie gleich λ nehmen darf, so reducirt sich die rechte Seite von (32) auf die Summe von fünf resp. vier resp. drei Potenzen. Die bezüglichen Wurzelsysteme α sind dann durch die zu den ersten, zweiten, dritten Polaren von f conjugirten Gruppen repräsentirt. Das letzte findet offenbar, wie ja auch bekannt, nur statt, wenn die schon Nr. 126 erwähnte Invariante B (Sylvesters Catalecticante) verschwindet (wenn also die F_2 zum Kegel wird).

Die beiden andern Gruppen entsprechen der ∞^3- resp. ∞^1-Schaar der φ umschriebenen Polfünf- resp. -vierflache von F_2.

Nun ging aus a_λ^6 (32) die Gleichung von F_2 hervor, wenn man erst die Form a_s (10) und daraus die andere a_σ^2 bildete.

Bei der Darstellung (32) geht dabei irgend ein Term der rechten Seite

(33) $k_i(\lambda - \alpha_i)^6$ über in $s_0\,\alpha_i^6 - s_1\,\alpha_i^5 + s_1\,\alpha_i^4 - s_1\,\alpha_i^3 + s_4\,\alpha_i^2 - s_5\,\alpha_i + s_6$
$= (\sigma_0\,\alpha_i^3 - \sigma_1\,\alpha_i^2 + \sigma_2\,\alpha_i - \sigma_3)\ (\tau_0\,\alpha_i^3 - \tau_1\,\alpha_i^2 + \tau_2\,\alpha_i - \tau_3)$,
mithin ist die Gleichung der zur Form f (32) gehörigen F_2:

$$(34)\ F_2 \equiv a_\sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^{i=6} k_i\,(\sigma_0\,\alpha_i^3 - \sigma_1\,\alpha_i^2 + \sigma_2\,\alpha_i - \sigma_3)^2 = 0.$$

Dabei sind die in's Quadrat erhobenen Klammerfaktoren rechts offenbar die linken Seiten der Gleichungen der sechs Ebenen α_i der cubischen Curve N_3.

Diese Darstellung (34) ist aber wieder die bekannte der Flächen zweiter Ordnung vermöge eines ihrer Polsechsflache. Geht der Index i nur bis 5 resp. 4, so geht die Darstellung über in die vermöge der Polfünf- resp. vierflache.

Und endlich, geht i nur bis 3, so besitzt die F_2 ein Poldreiflach, ist also ein Kegel; und in der That war ja die Determinante der Fläche F_2 identisch mit der Catalecticante B. (cf. pg. 201.)

Dies Resultat drücken wir kurz so aus:

υ) „Der binären Darstellung der Formen sechsten Grades f als Summen von sechs, fünf, vier sechsten Potenzen entspricht in eindeutiger Weise die quaternäre Darstellung der (eine cubische Curve φ stützenden *)) Flächen zweiter Ordnung als Summen von sechs, fünf, vier, zweiten Potenzen (d. i. mittelst ihrer φ umschriebenen Polsechs-fünf-vierflache).

Die die binäre Darstellung leistenden Sechs-Fünf-Viertupel sind durch die zu f, ihren ersten und zweiten Polaren conjugirten Gruppen dargestellt.

Verschwindet die Catalecticante B von f, so

*) Umgekehrt geht aus Satz (φ_1) hervor, dass man bei Zugrundelegung einer ganz beliebigen Fläche zweiter Ordnung den Satz (υ) immer anwenden kann, sobald man zur Curve φ irgend eine irgend einem Poltetraeder der Fläche eingeschriebene cubische Raumcurve nimmt. Vgl. die analoge, bekanntere Theorie der Ebene (Nr. 145).

lässt sich f als Summe von drei Potenzen darstellen und F_2 wird ein Kegel."

Das letzte können wir auch so ausdrücken:

Die Catalecticante B von f verschwindet, wenn zwischen den dritten Differentialquotienten von f eine lineare Identität besteht (denn dann giebt es cf. §. 7 eine zu ihnen conjugirte cubische Form).

Daran schliesst sich dann der noch speciellere (später von Wichtigkeit werdende) Fall, dass sich f als Summe von zwei (sechsten) Potenzen darstellen lässt, wenn zwischen den 5 vierten Differentialquotienten von f drei lineare Identitäten stattfinden. Denn dann giebt es nach dem citirten §. 7 eine zu ihnen conjugirte quadratische Form.

Aus der Bildung der Differentialquotienten folgt sofort, dass die Bedingungen für diesen Fall auch durch das Verschwinden (der Kerne) (cf. §. 2) der Matrix:

$$(34) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0$$

ersetzt werden können.

Die Gleichung der F_2 wird in diesem Falle von der Form

$$F_2 \equiv k_1 \mathrm{A}_1^2 + k_2 \mathrm{A}_2^2 = 0$$

d. h. ein zu den Ebenen α_1, α_2 der Curve φ (N_3) harmonisches Ebenenpaar.

υ_1) „Finden zwischen den vierten Differentialquotienten von f drei lineare Identitäten statt (d. h. verschwindet die Matrix (34)), so giebt es eine zu ihnen conjugirte quadratische Form

$$(35) \quad (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2).$$

Dann zerfällt die eine cubische Curve φ stützende (und das Punktsextupel f ausschneidende) Fläche F_2 in ein zu den Ebenen α_1, α_2 von φ harmonisches Ebenenpaar.

Der Satz gilt, wie die Sätze υ, auch umgekehrt."

138. Ganz ähnlich nimmt auch die zu einer F_2 gehörige Curve H_3 (31) eine canonische Gestalt an (ganz wie der Kegelschnitt H in Nr. 52).

Denn durch Einsetzen der nach zwei Elementen polarisirten vierten Differentialquotienten der Form f (32), wo aber der Index i nur bis 4 gehen mag *), geht H_3 (31) nach leichter Rechnung über in:

$$(36)\quad H_3 \equiv \sum_i \sum_k \sum_l (k_i\, k_k\, k_l\, A_i\, A_k\, A_l\, D^2_{ikl}) = 0 \;(i, k, l, = 1, 2, 3, 4)$$

$$\text{oder auch} \equiv \sum_i \frac{D^2_i}{k_i\, A_i} = 0$$

$$\text{wo (37)} \begin{cases} A_i \equiv \sigma_0\, \alpha_i^2 - \sigma_1\, \alpha_i + \sigma_0 \;(i = 1, 2, 3, 4) \\ D_i \equiv D_{klm} = [(\alpha_k - \alpha_l)(\alpha_k - \alpha_m)(\alpha_l - \alpha_m)] \end{cases}$$

„Demnach ist (36) die Darstellung einer zu einer gegebenen cubischen Curve φ in der Hurwitzschen Beziehung stehenden zweiten cubischen Curve mittelst der φ um- und ihr einbeschriebenen Tetraeder."

Daher findet der Satz der Ebene (Nr. 54 π II): „Stehen zwei Kegelschnitte in der Beziehung, dass es ein dem einen um- und dem andern einbeschriebenes Dreieck giebt, so giebt es solcher Dreiecke unendlich viele" folgende (nicht vollkommen analoge) Erweiterung:

φ) „Stehen zwei cubische Curven im Raume in der Beziehung, dass es ein der einen (φ) um- und zugleich der andern (ψ) einbeschriebenes Tetraeder giebt, so giebt es in der ∞^4-Schaar von diesem

*) Wir wollen uns auf den Fall der Poltetraeder beschränken, obschon für Polfünf- und -sechsflache die erste Form der Gleichung (36) sich ganz analog erweitert (i, k, l, $=$ 1, 2, . . . bis 5 resp. 6).

Tetraeder einbeschriebenen cubischen Curven noch *dreifach**) unendlich viele, für die es dann (einfach) unendlich viele Tetraeder giebt, die irgend einer von ihnen ein- und φ umbeschrieben sind.

Ihre Gleichung ist (36), sobald man unter den k_i**) variable Coefficienten versteht, während

---

*) Demnach ist es für die dem Tetraeder einbeschriebenen cubischen Curven (ψ) nur eine Bedingung, zu φ in der Hurwitz'schen Beziehung zu stehen.

Diese kann man mit Rücksicht auf das Spätere so formuliren.

Die sechs Kanten des Tetraeders repräsentiren sechs Axen der Curve φ, die zugleich Sehnen der andern, ψ, sind. Im Allgemeinen giebt es dann keine weitere Axe von φ, die Sehne von ψ wäre. Giebt es aber eine, dann existiren auch noch unendlich viele und die Curve ψ steht dann zu φ in der Hurwitz'schen Beziehung. Man kann daher sagen:

„Die beiden im Satze (φ) angenommenen cubischen Curven (φ) (ψ) stehen dann in der Hurwitz'schen Beziehung sobald es *eine* weitere Axe von φ giebt, die zugleich Sehne von ψ ist."

**) Nimmt man andrerseits zwei beliebige der Curve φ umschriebene Tetraeder an, so geht (cf. Satz ρ) durch die Ecken derselben eine einzige bestimmte Curve H_3, die in der Form (36) darstellbar sein muss. Dann handelt es sich nur noch darum, die Coefficienten k_i zu bestimmen, was so geschieht.

Sind die Argumente der beiden Ebenenquadrupel von φ resp.

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4; \qquad \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$$

so muss es eine bestimmte binäre Form sechsten Grades f geben, die in den beiden Formen

$$\sum_1^4 k_i (\lambda-\alpha_i)^6; \qquad \sum_1^4 k'_i (\lambda-\beta_i)^4$$

darstellbar sein muss.

Die Identität beider liefert aber sieben Gleichungen, linear und homogen in den acht Grössen k_i, k_i' wodurch ihre Verhältnisse eindeutig bestimmt sind.

die D_i und A_i die obige (jetzt auf unser Tetraeder bezügliche) Bedeutung haben."

Die canonische Form der Curven H_3 wird von grösserer Bedeutung bei der Betrachtung der binären Form f auf dem (Norm-)Kegelschnitt der Ebene, die uns bald begegnen wird.

Der zum Satze (φ) parallele Satz für die Flächen F_2, die ein gegebenes φ umschriebenes Tetraeder zum Poltetraeder haben, ist dagegen dem bezüglichen Satze der Ebene (Nr. 55 π I) ganz analog. Denn dieser hiess rein geometrisch: „Giebt es ein einem Kegelschnitt φ umschriebenes Dreiseit, das Poldreiseit eines zweiten ist, so giebt es unendlich viele und der zweite Kegelschnitt stützt den ersten."

Hier, im Raume, hat man mit Rücksicht auf Gleichung (34) sofort:

φ_1) „Stehen eine Fläche zweiter Ordnung F_2 und eine cubische Raumcurve φ in der Beziehung, dass es ein φ umschriebenes Poltetraeder von F_2 giebt, so giebt es unendlich viele solche und die Fläche stützt die Curve.

Denn seien

$$(38)\quad y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$$

die Ebenen des Tetraeders, so lässt sich bekanntlich die F_2 in die Gestalt bringen:

$$(39)\quad \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \mu_3 y_3^2 + \mu_4 y_4^2 = 0.$$

Ist dann auf φ in bekannter Weise eine Parametervertheilung ausgebreitet, und sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die Argumente der vier Tetraederebenen, so lautet die zugehörige binäre Form sechsten Grades:

Damit ist also auch die Aufgabe der Nr. 132 auf eine zweite Weise gelöst. Auf die explicirte Darstellung der Grössen k_i (wie auch damals der Grössen μ, ν, π (29)) soll verzichtet werden.

$$(40)\ \mu_1 (\lambda - \alpha_1)^4 + \mu_2 (\lambda - \alpha_2)^4 + \mu_3 (\lambda - \alpha_3)^4 + \mu_4 (\lambda - \alpha_4)^4 = 0.$$

Dann ist (39) diejenige F_2, die φ stützt und mit φ das Punktsextupel (40) gemein hat."

139. Die Untersuchung in der Ebene (§. 17 ff.) beschäftigte sich zuerst mit den einem Kegelschnitt φ umschriebenen Poldreiseiten eines Kegelschnitts F. Die Ecken dieser Dreiseite (deren Seiten auf φ eine Involution dritter Ordnung bildeten) lagen auf einem andern Kegelschnitt H. Die zu dieser Involution auf φ conjugirte Gruppe (Involution) lieferte die Poldreiseite eines Kegelschnitts F' und ihre Ecken lagen auf einem weiteren H'.

Aehnliche Verhältnisse gelten auch für unsere jetzige Entwicklung, indem wir die zur gegebenen Involution vierten Grades (auf φ) conjugirte (dreigliedrige) Gruppe in's Auge fassen.

Die gegebene Involution sei

$$(41)\ a_\lambda^4 + k\, b_\lambda^4,$$

die conjugirte Gruppe

$$(42)\ \nu_1 \varphi_1(\lambda) + \nu_2 \varphi_2(\lambda) + \nu_3 \varphi_3(\lambda).$$

Dann bilden die vier Elemente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ (nach Nr. 5) das Wurzelsystem einer Form (42), wenn ihre homogenen symmetrischen Funktionen s_i ($i = 0, 1, \ldots 4$) den Bedingungen genügen

$$(43)\ a_s = 0,\ b_s = 0.$$

Daraus folgt sofort, mit Hülfe der vielbenützten Entwicklung der Nr. 21, dass drei Elemente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ einem Quadrupel (42) angehören unter der Bedingung *)

*) Dies ist also nach der Terminologie des §. 2 die quadratische Schnittpunktsgleichung erster Ordnung der R_4^2:

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda)\ (i = 0, 1, 2).$$

$$(44)\quad H' \equiv \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, & a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3 \\ b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3, & b_1\sigma_0 + b_2\sigma_1 + b_3\sigma_2 + b_4\sigma_3 \end{vmatrix}$$

wo also die A resp. B die nach den drei Elementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ polarisirten ersten Differentialquotienten von a_λ^4, resp. b_λ^4 sind. Dies liefert den Satz:

χ) „Ist auf der cubischen (Norm-)Curve N_3 die Involution (41) gegeben, so liegen die Eckpunkte der ∞^2-Schaar von N_3 umschriebenen Tetraedern, deren bezügliche (Argumenten-) Quadrupel durch die zu (41) conjugirte Gruppe (42) dargestellt sind, auf einer Fläche zweiter Ordnung H′ (44)."

Und da man umgekehrt von einer beliebigen Gruppe (42) (anstatt von einer beliebigen Involution (41)) ausgehen kann, so erhält man so den bekannten[47)] Satz:

χ_1) „Die Ecken irgend dreier einer cubischen Raumcurve φ umschriebenen Tetraeder liegen auf einer bestimmten Fläche zweiter Ordnung."

Die nähere Untersuchung dieser Fläche und ihre Beziehungen zur Involution finden eine passendere Stelle im Anschluss an die Darstellung der Involution auf dem Normkegelschnitt resp. der Theorie der rationalen ebenen Curven vierter Ordnung.

Dabei wird sich herausstellen, dass diese Flächen H′ vollständig dadurch charakterisirt sind, dass drei Axen der cubischen Curve ganz auf ihnen liegen *).

---

*) Im Uebrigen treffen sie die Curve in den sechs Punkten, deren Argumente den sechs Doppelelementen der durch die Fläche auf der Curve festgelegten Involution zugehören.

Zunächst verlassen wir die cubische Curve und studiren die binäre Form sechsten Grades oder die biquadratische Involution auf dem Normkegelschnitt, für die viele Eigenschaften durch einfache Uebertragungen aus diesem Paragraphen gewonnen werden werden. Umgekehrt wird dann wieder die ebene Theorie die räumliche weiter führen.

§. 26.

Die binäre Form sechsten Grades auf dem Normkegelschnitt der Ebene.

140. Nach Reye[48] trägt (stützt, ist apolar zu) eine ebene Curve dritter Ordnung F_3

$$(1)\quad a_x^3 \equiv \Sigma\,\Sigma\,\Sigma\, a_{ikl}\, x_i\, x_k\, x_l = 0 \; (i, k, l, = 0, 1, 2)$$

einen Klassenkegelschnitt Φ_2 (und umgekehrt ruht (stützt sich) der letztere auf der ersteren):

$$(2)\quad u_\alpha^2 \equiv \Sigma\,\Sigma\, u_{ik}\, \alpha_{ik} \; (i, k = 0, 1, 2)$$

unter den drei Apolaritätsbedingungen (des Verschwindens der drei bilinearen Invarianten beider):

$$(3)\quad (a_r \alpha)^2 = \Sigma\,\Sigma\, a_{rik}\, \alpha_{ik} = 0 \; (r = 0, 1, 2)$$

d. h. wenn der Kegelschnitt Φ_2 mit jedem Punkte der Ebene eine zu F_3 apolare Curve dritter Classe bildet (so dass die bilineare Invariante beider verschwindet), oder was dasselbe ist, wenn Φ_2 auf dem Netze der Polarkegelschnitte von F_3 ruht.

Wird statt des Kegelschnitts Φ_2 wieder der Normkegelschnitt eingeführt:

$$\begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}\left\{\begin{aligned} \rho x_0 &= 1, & \rho x_1 &= 2\,\lambda, & \rho x_2 &= \lambda^2 \\ \sigma u_0 &= \lambda^2, & \sigma u_1 &= -\lambda, & \sigma u_2 &= 1, \end{aligned}\right\} \text{ oder}$$

$$\left\{\begin{aligned} 4\, x_0\, x_2 - x_1^2 &= 0 \quad (N_2) \\ u_0\, u_2 - u_1^2 &= 0 \quad (\mathrm{N}_2) \end{aligned}\right.$$

so nehmen die Bedingungen (3) die einfachere Form an:

$$(6) \quad a_{r02} = a_{r11} \; (r = 0, 1, 2).$$

„Diese Bedingungen (6) sind vollkommen ausgedrückt, wenn man statt der Coefficienten von (1) die andern einführt

$$(7) \quad a_{ikl} = a_{i+k,\,1} \; (i+k+l = 0, 1, \ldots 6).$$

Dann geht die F_3 (1) über in:

$$\begin{aligned}(8)\; 0 = a_{xxx} \equiv x_0 \{ & x_0 (a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2) + \\ + x_1 \{ & x_0 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2) + \\ + x_2 \{ & x_0 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2) + \\ & x_1 (a_1 x_0 + a_2 x_1 + a_3 x_2) + x_2 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2)\} \\ & x_1 (a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_4 x_2) + x_2 (a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2)\} \\ & x_1 (a_3 x_0 + a_4 x_1 + a_5 x_2) + x_2 (a_4 x_0 + a_5 x_1 + a_6 x_2)\}.\end{aligned}$$

Aus der Wahl des Normkegelschnitts folgte (Nr. 29), dass die homogenen Coordinaten eines Punktes der Ebene identisch sind mit den homogenen symmetrischen Funktionen σ_i zweier Elemente $\mu_1\ \mu_2$ (der Parameter der durch den Punkt gehenden Tangenten von N_2).

Daraus folgt jetzt, mit Hülfe der Zerlegung der Nr. 21, dass a_{xxx} (8) aus der einfacheren Form:

$$(9) \quad a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 + a_5 s_5 + a_6 s_6$$

hervorgeht, wenn man von den sechs Elementen $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_6$, aus denen die s_k gebildet sind, immer drei einander gleich setzt:

$$(10) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_2.$$

Um dies auch in der Bezeichnung auszudrücken, schreiben wir statt (8):

$$(11) \quad a_\sigma^3 = 0.$$

Das dieser Curve mit N_2 gemeinsame Punktsextupel wird:

$$(12) \quad f \equiv a_\lambda^6 \equiv a_\lambda = 0,$$

wo a_s (9) aus a_λ durch Polarisation nach den sechs Elementen λ hervorgeht.

Daher können wir die Gleichung von F_3 auch schreiben:

$$(13)\ a_\sigma^3 \equiv a_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0.$$

Die Klammerfaktoren in (8) sind die zweiten Ueberschiebungen der vierten Differentialquotienten von f (12) über die Form mit den Wurzeln $\mu_1\ \mu_2$.

So gelangt man, ebenso wie Nr. 123 zu dem entsprechenden Raumsatz, hier zu folgendem:

α) „Durch irgend sechs Punkte eines Kegelschnitts φ (auf dem ein Parameter λ ausgebreitet sei)

$$(12)\ a_\lambda = 0$$

geht eine einzige ihn stützende F_3, deren Gleichung mittelst einer bestimmten Collineation der Ebene stets in die Gestalt gebracht werden kann

$$(8)\ (11)\ (13)\quad a_\sigma^3 \equiv a_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0.“$$

141. Die dualistische Entwicklung kann man wie in Nr. 124 durchführen: der kürzere Weg ist aber der der Nr. 125. Gerade so wie dort gelangt man zu folgender Regel *):

„Ist auf N_2 ein Tangentensextupel gegeben

$$(14)\ b_\lambda^6 = 0,$$

---

*) Diese sagt also (cf. pg. 45) geometrisch einfach aus, dass die zu einem Tangentensextupel (14) von N_2 gehörige Φ_3 erhalten wird als Umhüllungscurve der in Bezug auf N_2 gebildeten Polaren der Punkte der zum Punktsextupel (14) von N_2 gehörigen F_3 oder kürzer: „beide Curven sind in Bezug auf den Normkegelschnitt reciprok.“ Und dies ist ja evident.

so findet man die Gleichung der auf N_2 ruhenden und mit N_2 das Tangentensextupel (14) gemein habenden Curve dritter Classe Φ_3, wenn man zunächst die Gleichung der (dualistischen) F_3 bildet

$$(15)\quad b_\sigma^3 = 0,$$

und dann in dieser die Substitutionen vornimmt:

$$(16)\quad \sigma_0 = u_2,\ \sigma_1 = -2\,u_1,\ \sigma_2 = u_0.\text{“}$$

Daher wird die Gleichung der gesuchten Φ_3:

$$(17)\quad \Phi_3 \equiv b_0\,u_2^3 - 6\,b_1\,u_2^2\,u_1 + 3\,b_2\,(u_2^2\,u_0 + 4\,u_2\,u_1^2) - b_3\,(12\,u_0\,u_1\,u_2 + 8\,u_1^3) + \ldots = 0,$$

während die auf das Punktsextupel a_λ^6 bezügliche F_3 lautete:

$$(18)\quad F_3 = a_6\,x_2^3 + 3\,a_5\,x_2^2\,x_1 + 3\,a_4\,(x_2^2\,x_0 + x_2\,x_1^2) + a_3\,(6\,x_0\,x_1\,x_2 + x_1^3) + \ldots = 0.$$

Die bilineare Invariante von F_3 und Φ_3 ist wieder identisch mit der der binären Formen (wie man auch ohne Rechnung ganz wie in Nr. 125 schliesst), und man hat *):

β) „Die bilineare Invariante zweier binären Formen sechsten Grades (a_λ^6, b_λ^6) ist identisch mit der zweier ternären Formen dritten Grades, die, $=0$ gesetzt, eine F_3, resp. Φ_3 darstellen, die einen (sonst beliebigen) Kegelschnitt tragen resp. auf ihm ruhen, und mit ihm die gegebenen Sextupel a_λ, b_λ gemein haben.

Demnach bedingt die Apolarität der binären Formen die der ternären und umgekehrt.“

Durch Anwendung dieses Satzes auf mehrere (auf dem Normkegelschnitt dargestellte) solche Formen a_λ^6, $a_{1\lambda}^6$, ...

*) Ueber die Verallgemeinerung dieses Satzes cf. Cap. III.

und die zu ihnen conjugirten Gruppen erhält man ohne Weiteres:

β') „Ist auf einem Kegelschnitt φ eine μ-gliedrige Gruppe sechsten Grades

$$(19)\quad k_1 a_{1\lambda} + k_2 a_{2\lambda} + \ldots k_\mu a_{\mu\lambda}\ (\mu = 1, 2, \ldots 6)$$

nebst der zu ihr conjugirten ν $(\nu = 7 - \mu)$-gliedrigen Gruppe:

$$(20)\quad k_1' b_{1\lambda} + k_2' b_{2\lambda} + \ldots k_\nu' b_{\nu\lambda}$$

dargestellt, so steht die μ-gliedrige Gruppe der Curven dritter Ordnung F_3 (die N_2 stützen und aus N_2 die Punktsextupel (19) ausschneiden) zu den ν-gliedrigen der Curven dritter Classe Φ_3 (die auf N_2 ruhen und mit N_2 die Tangentensextupel (20) gemein haben) in der Beziehung,
dass sowohl die Gruppe F_3 die vollständige die Gruppe Φ_3 nebst N_2 stützende Gruppe,
als die Gruppe Φ_3 die vollständige auf der Gruppe F_3 nebst N_2 ruhende Gruppe ist."

Dies wird gleich nachher auf die Polvielflache einer Curve F_3 (die einem auf der letzteren ruhenden Kegelschnitt φ umbeschrieben sind) Anwendung finden.

142. Drei Punkte der Ebene (x) (y) (z) bilden bekanntlich ein Poldreieck (oder ein in Bezug auf die Curve conjugirtes Punktetripel) einer Curve dritter Ordnung (1), wenn sie der Bedingung genügen

$$(21)\quad a_{xyz} = 0$$

d. h. wenn die nach den Punkten polarisirte Form (1) verschwindet.

Für unsere besonderen Curven F_3 (8) (oder (11) (13)) wird dann aber die linke Seite von (21) identisch mit der Form

(9) a_s

wenn man unter den x_i, y_i, z_i die homogenen symmetrischen Funktionen der resp. Argumentenpaare $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_3 \lambda_4)$ $(\lambda_5 \lambda_6)$ versteht.

Nennen wir daher ein Sechsseit $(a\, b\, c\, d\, e\, f)$ dann ein Polsechsseit einer ebenen Curve dritter Ordnung, wenn alle Punktetripel der Form

(21) $(a\, b)$ $(c\, d)$ $(e\, f)$

Poldreiecke der Curve sind, so haben wir mit Rücksicht auf die Symmetrie von (9) in den sechs Elementen λ:

γ) „Irgend ein in Bezug auf eine einen Kegelschnitt φ stützende Curve dritter Ordnung F_3 conjugirtes Punktetripel (Poldreieck) bestimmt (mittelst der drei von ihm an φ gehenden Tangentenpaare) ein *Polsechsseit* der Curve F_3" oder auch: „ein solches Punktetripel zieht *neun* weitere gleicher Art nach sich, die alle, dem Typus (21) gemäss, demselben Sechsseite angehören."

„Es giebt eine ∞^5-Schaar solcher φ umschriebenen Polsechsseite von F_3.

Die bezüglichen Tangentensextupel (auf φ) stellen die ganze zum Schnittpunktsextupel von F_3 und φ conjugirte Gruppe dar."

Fünf Seiten eines solchen Polsechsseits kann man als Tangenten von φ beliebig annehmen, dann ist die sechste eindeutig bestimmt und zwar nach Satz (β') durch folgende Construktion:

Man construire diejenige Curve dritter Klasse Φ_3, die die gegebenen fünf Seiten berührt, und auf der Curve F_3, sowie auf φ ruht. Diese hat mit N_2 eine sechste Tangente gemein, die die gewünschte sechste Seite liefert.

Ebenso wie sich der Satz (β') an (β) anschloss, so kann man auch hier den Satz (γ) für eine ganze Gruppe von Curven F_3 formuliren, analog dem Raumsatze (η) Nr. 128. Dies bleibe dem Leser überlassen.

143. Der Übergang von den Polsechs- zu den Polfünf- und -vierseiten von F_3, die φ umbeschrieben sind, läuft gleichfalls zunächst den Entwicklungen von Nr. 129 ff. parallel.

Wird eine Seite des Polsechsseits einer F_3 unbestimmt, so entsteht ein Polfünfseit, d. h. ein solches, in dem jede Seite die gemischte lineare Polare je zweier Gegenecken des von den vier übrigen gebildeten Vierseits ist.

Wird wieder eine Seite dieses Polfünfseits unbestimmt, so resultirt ein Polvierseit, für das je zwei Gegenecken mit jedem Punkte der Ebene ein Poldreieck bilden, oder ein sogenanntes Paar conjugirter Pole der F_3 sind. Dann zerfällt der Polarkegelschnitt jeder Ecke in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt die Gegenecke der ersten ist.

Umgekehrt bestimmt irgend ein Paar conjugirter Pole nach Satz (γ) ein φ umschriebenes Polvierseit von F_3.

Dann durchlaufen bekanntlich die Gegenecken aller dieser Polvierseite die Hesse-Steiner'sche Curve von F_3 und bestimmen auf der ersteren die zur letzteren gehörige Hesse-Steiner'sche Correspondenz.

Wir können daher im Folgenden von der ausgedehnten Theorie dieser Correspondenz Gebrauch machen, um sie für die uns interessirenden Apolaritätsverhältnisse der binären Form sechsten Grades und der biquadratischen Involution fruchtbar zu machen.

Rückwärts wird dann dadurch wieder die Raumtheorie des §. 25 gefördert werden.

144. Zunächst gilt der zu Satz ($\varkappa$) (Nr. 129) analoge Satz:

δ) „Die Seiten der einem Kegelschnitt φ umschriebenen (∞^3 linearen) Schaar der Polfünfseite, resp. der (∞^1 linearen) Schaar (Involution) der Polvierseite einer φ stützenden und aus φ das Sextupel $f \equiv a_\lambda$ ausschneidenden F_3 sind durch die zur Gruppe der ersten resp. zweiten Polaren von f conjugirten Gruppen dargestellt."

Desgleichen mögen die den Sätzen (λ) (ρ) (σ) (τ) entsprechenden Sätze hier in einen zusammengezogen werden:

ε) „Es sei m_1, m_2, m_3 *irgend* ein Tripel von positiven ganzen Zahlen (0 incl.), das der Bedingung genügt

$$(22)\quad m_1 + 2\,m_2 + 3\,m_3 = 6.$$

Sind dann m_1, m_2, m_3, φ umschriebene Sechs-Fünf-Vierseite gegeben, so existirt eine bestimmte F_3, für die dieselben Polseite sind, und welche φ stützt. Die Bestimmung dieser Curve F_3 geschieht so:

Man denke sich *alle* (∞^0, ∞^1, ∞^2 linearen) Schaaren von Curven dritter Classe Φ_3 aufgestellt, die den gegebenen Sechs-Fünf-Vierseiten einbeschrieben sind und auf φ ruhen. Diese Φ_3 bilden, zusammengefasst, eine sechsgliedrige Gruppe.

Dann ist die gesuchte F_3 diejenige, *die alle diese* Φ_3 *und zugleich* φ *stützt.*"

144. Die Gleichung (31) (Nr. 133)

$$(23)\quad \mathrm{H}_3 = 0$$

stellt hier den Ort der Punkte dar, von denen ein solches Tangentenpaar an den Kegelschnitt φ geht, das zugleich ein Seitenpaar eines (φ umschriebenen) Polvierseits von F_3 ist d. h. (23) ist die Gleichung der Hesse-Steiner'schen Curve von F_3, was mit der bekannten Darstellung zusammenfällt.

Ihre Schnittpunkte mit φ sind durch das Verschwinden der Covariante H (Nr. 126, (23)) dargestellt.

In Folge dessen lautet der dem Satze π (Nr. 134) parallele Satz:

φ) „Man gehe von irgend einem Sextupel H auf einem Kegelschnitt φ aus. Dann gehen einmal durch das Punktsextupel H fünf Curven H_3, die zu φ in der Beziehung stehen, dass es einfach unendlich viele φ um- und H_3 einbeschriebene Vierseite giebt.

Diese Vierseite sind Polvierseite von fünf weiteren Curven F_3, die φ stützen.

Diese Curven F_3 und H_3 stehen in der Beziehung, dass jede der Curven H_3 die Hesse-Steiner-sche einer bestimmten ihr zugeordneten F_3 ist.

Die fünf Curven F_3 schneiden aus φ fünf Sextupel aus: diese sind diejenigen, die alle das Sextupel H als Covariante H besitzen.

Die fünf Schaaren von Vierseiten stellen auf φ die fünf Involutionen (vierten Grades) mit denselben sechs Doppelelementen H dar."

145. Wir kommen nunmehr zur canonischen Form der Curven F_3 und H_3, die in den damaligen Entwicklungen (Nr. 137 ff.) ihr deutliches Vorbild hat.

Ist die Form $f \equiv a_\lambda^6$ wieder als Summe von Potenzen dargestellt:

$$(24)\ f \equiv \Sigma\, k_i\, (\lambda - \alpha_i)^6 \quad (i = 1 \text{ bis } 6 \text{ resp. } 5 \text{ resp. } 4),$$

so wird die zugehörige Form a_s nach einfacher Rechnung:

$$(25)\ a_s \equiv \Sigma k_i(\rho_0\,\alpha_i^2 - \rho_1\,\alpha_i + \rho_2)(\sigma_0\,\alpha_i^2 - \sigma_1\,\alpha_i + \sigma_2)(\tau_0\,\alpha_i^2 - \tau_1\,\alpha_i + \tau_2)$$

wo die ρ, σ, τ die frühere Bedeutung haben; mithin die Gleichung von F_3:

$$(26)\ a_\sigma^3 \equiv \Sigma\, k_i\, (s_0\, \alpha_i^2 - s_1\, \alpha_i + s_2)^3\ {}^{*)}) = 0.$$

Dabei waren die α_i die Argumente der dem Kegelschnitt φ (den F_3 stützte) umschriebenen Polsechs- resp. -fünf- resp. -vierseite von F_3.

Umgekehrt hat also der Kegelschnitt φ nur den Bedingungen zu genügen, auf F_3 zu ruhen, d. h. man kann als Kegelschnitt φ irgend einen des auf F_3 „ruhenden Gewebes" nehmen. Dieses ist aber bekanntermassen das Polarkegelschnittgewebe einer bestimmten Curve dritter Klasse Φ_3 **) der „associirten" Curve von F_3.

Demnach haben wir:

η) „Die bekannte Darstellung der Gleichung einer allgemeinen, beliebigen Curve dritter Ordnung als Summe von 6, 5, 4 dritten Potenzen erscheint hier in dem Lichte, dass die Curve bezogen gedacht wird auf die Polsechs-fünf-vierseite, die irgend einem der Polarkegelschnitte ihrer associirten Curve umbeschrieben sind.

Dadurch wird sie geradezu identisch mit der

---

*) Die Klammerfaktoren, deren dritte Potenzen in (26) auftreten, sind evidentermassen die linken Seiten der Tangenten α_i des Kegelschnitts φ.

**) Dies ist die bekannte Curve

$$\Pi \equiv ST - T\Sigma = 0$$

cf. die Vorlesungen von Clebsch-Lindemann über Geometrie, Bd. II, pg. 577. Ich nenne sie die zu F_3 associirte nach dem Vorgang von Battaglini (Sulle forme ternarie sizigetiche: In Memoricum Dom. Chelini).

Mit Rücksicht auf die eingehende Behandlung[49)] der Curven dritter Ordnung im Apolaritätssinn bei Clebsch, Lindemann, Battaglini, sowie weiter bei Rosanes, Em. Weyr, S. Kantor u. A. ist die Textentwicklung eine etwas gedrängtere geworden.

Insbesondere sei auf die wichtige Abhandlung von Rosanes: Über ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle's Journal Bd. 76, verwiesen.

bekannten Darstellung der binären Form sechsten Grades (die die Schnittpunkte der gegebenen Curve mit jenem Kegelschnitte auf dem letzteren darstellt) als Summe von sechs, fünf, vier sechsten Potenzen."

146. Dagegen fällt die sich hieran anschliessende canonische Form der Curven H_3 geradezu mit der in Nr. 138 gegebenen (36) zusammen, so dass sie hier nicht wiederholt zu werden braucht.

Bekanntermassen gehören zu einer beliebig gegebenen Curve dritter Ordnung H_3 drei andere, deren Hesse'sche sie ist, sowie drei Klassencurven, die Cayley'schen jener drei, die Umhüllungscurven der Verbindungslinien je zweier (den drei Hesse-Steiner'schen Correspondenzen gemäss) sich entsprechender Punkte der Curve H_3.

Somit gilt der zu (η) parallele Satz (cf. Nr. 52):

η') „Die bekannte Darstellung der Gleichung einer allgemeinen beliebigen Curve dritter Ordnung H_3 als Summe von Produkten von je drei linearen Formen (*die alle Combinationen zu dreien* von sechs *) resp. fünf resp. vier solchen Formen repräsentiren) und die auf dreierlei Weise möglich ist, erscheint hier in dem Lichte, dass man die Curve bezieht auf die Polsechs- -fünf- -vierseite einer der Curven F_3, die H_3 zur Hesse'schen Curve besitzen, die irgend einem der Polarkegelschnitte der associirten Curve umbeschrieben sind etc. wie in (η)."

147. Das Verschwinden der Invariante B (vierten Grades) von f (24) war die Bedingung, dass sich f als Summe von nur

*) Man nehme jetzt in Formel (36) (Nr. 138) den Index i wieder von 1 bis 6 resp. 5 resp. 4.

drei (sechsten) Potenzen darstellen liess. Dann geht auch in der Potenzdarstellung von F_3 (26) der Index i nur von 1 bis 3, desgleichen in der zugehörigen Darstellung von H_3, d. h. H_3 zerfällt in drei Gerade, die ein φ umschriebenes Poldreiseit von F_3 bilden.

Dann ist bekanntlich das Doppelverhältniss der Curve F_3 ein aequianharmonisches und es muss die Invariante S derselben verschwinden. In der That überzeugt man sich sofort, dass diese mit der Invariante B von f (bis auf einen Zahlenfaktor) identisch ist.

148. Herr Em. Weyr[50] hatte den Satz aufgestellt:

„Ist auf einem Kegelschnitt eine Tangenteninvolution vierten (n^{ten}) Grades gegeben, so sind ihre Vier(n)seite einer bestimmten Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einbeschrieben."

Diesen Satz können wir jetzt zunächst für den einfachen Fall $n = 4$ in erweiterter Gestalt so aussprechen:

$\varkappa$) „Ist auf einem Kegelschnitt φ irgend eine Tangenteninvolution vierten Grades gegeben, so giebt es eine einzige C_3 (F_3), für die die Involutionsvierseite Polvierseite sind, und eine einzige C_3 (H_3) (die Hessiana der ersten), denen die Vierseite einbeschrieben sind. Die erste C_3 (F_3) stützt (ist apolar zu) φ.

Ist irgend eines der Vierseite gegeben durch

$$(27) \quad a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad c_x = 0, \quad d_x = 0$$

so ist F_3 darstellbar durch:

$$(28) \quad \alpha\,(a_x)^3 + \beta\,(b_x)^3 + \gamma\,(c_x)^3 + \delta\,(d_x)^3 = 0$$

und H_3 durch:

$$(29) \quad \frac{(bcd)^2}{\alpha a_x} + \frac{(cda)^2}{\beta b_x} + \frac{(dab)^2}{\gamma c_x} + \frac{(abc)^2}{\delta d_x} = 0$$

(wo z. B. (abc) die Determinante der Formen a_x, b_x, c_x ist)."

Ganz in derselben Weise werden wir zu dem allgemeinen Satze (cf. Cap. III) geführt *):

$\varkappa_1$) Stützt eine Curve n^{ter} Ordnung F_n (der Ebene) einen Kegelschnitt φ, so lässt sich die linke Seite ihrer Gleichung durch lineare Substitutionen der alten variabeln in die neuen $(\lambda_1 + \lambda_2)$, $(\lambda_1\ \lambda_2)$ in die Gestalt (in der Gordan'schen Schreibweise)

$$(30) \quad a_{\lambda_1^n},\ \lambda_2^n$$

bringen, wo $f \equiv a_\lambda^{2n} = 0$ die Schnittpunkte beider Curven darstellt.

Es giebt unendlich viele φ umschriebene Pol-$(2\,n)\,(2\,n-1)\ldots(2\,n-p)$ Seite der F_n {und zwar eine $\infty^{2\,(n-q)-1}$ lineare Schaar von $(2\,n-q)$ Seiten ($q = 0, 1, \ldots n-1$)}, deren (auf φ) zugehörige binäre Formen die zu den q^{ten} Polaren von f conjugirte Gruppe bilden.

Im Speciellen giebt es eine Involution $(n+1^{\text{ten}})$ Grades von $(n+1)$ Seiten, die einer zweiten Curve n^{ter} Ordnung (H_n) einbeschrieben sind.

Dann gehört zu jeder Curve F_n (bei gegebenem φ) eine einzige H_n und umgekehrt zu jeder Curve H_n nur eine F_n.

Ist die binäre Form f irgend wie als Potenzsumme dargestellt

---

*) Wegen des Falles $n = 5$ vergleiche die Arbeiten[51)] von Lüroth' und Scherrer'. Er umfasst diejenigen Curven vierter Ordnung, für die eine Darstellung ihrer Gleichung als Summe von fünf Biquadraten möglich ist. Dazu ist bekanntlich das Verschwinden einer gewissen Invariante sechsten Grades erforderlich.

Der Satz k_1 selbst ist seinerseits wieder einer grossen Verallgemeinerung fähig, wie sich in Kap. III ergeben wird,

$$(31) \quad f \equiv \Sigma\, k_i\, (\lambda - \alpha_i)^{2n}$$

so geht F_n über in die Form

$$(32) \quad F_n \equiv \Sigma\, k_i\, (s_0\, \alpha_i^2 - s_1\, \alpha_i + s_2)^n \equiv \Sigma\, k_i\, A_i^n = 0$$

wo $A_i = 0$ die Tangente von φ im Punkte $\lambda = \alpha_i$ ist.

Die zugehörige Curve H_n ist dann immer als Summe von Produkten von je n der vorhandenen $(2\,n - q)$ linearen Formen darstellbar etc. etc.

Geht man umgekehrt von einer beliebigen Tangenteninvolution $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades auf φ aus, so giebt es eine einzige F_n, für die die Involutions$(n+1)$seite Pol$(n+1)$seite sind und eine einzige H_n, denen dieselben einbeschrieben sind.

Die erstere Curve trifft φ in dem $(2n)^{\text{tupel}}$

$$a_\lambda^{2n} \equiv f = 0$$

dessen $(n-1)^{\text{te}}$ Polaren die zur gegebenen Involution conjugirte Gruppe bilden, und die zweite trifft φ in dem $(2n)^{\text{tupel}}$ der Doppelelemente der Involution etc. etc.“

149. Kehren wir zurück zu den Curven dritter Ordnung, so möge der Zusammenhang zwischen den Curven F_3 und H_3 noch in folgender Weise ergänzt werden.

Dem entsprechend, dass zu einer Curve H_3 (bei unbestimmtem φ) drei Curven F_3 gehören, giebt es bekanntlich auf H_3 drei Arten von Hesse-Steiner'schen Correspondenzen d. s. drei Arten von zweifach unendlich vielen ihr einbeschriebenen Vierseiten und zwar so, dass irgend zwei Punkte der Curve eine solches Vierseit bestimmen.

Wendet man den Satz von Rosanes (Crelle Bd. 76 l. c. pg. 328):

„Irgend zwei einer Curve dritter Ordnung einbeschriebene Vierseite sind einem bestimmten Kegelschnitt umbeschrieben,"

auf zwei Vierseite derselben Art (für die Curve H_3) an, so ist damit der Kegelschnitt φ und zugleich auf ihm die Tangenteninvolution vierten Grades bestimmt, dadurch aber die eine der zu H_3 gehörigen Curven F_3.

150. Wir haben schon einigemal von dem Satze Gebrauch gemacht (wenn er auch erst später bewiesen wird), dass es, wenn man sich eine Involution vierten Grades durch ihre (sechs) Doppelelemente gegeben denkt, fünf zugehörige Involutionen giebt. Das Analogon zu dem Satze pg. 211 lässt sich hier ohne Weiteres aussprechen:

λ) Durch sechs Punkte eines Kegelschnitts φ gehen fünf Curven H_3, denen fünf Curven F_3 je eindeutig zugeordnet sind.

Die einer Curve H_3 ein- φ umbeschriebenen Polvierseite der entsprechenden Curve F_3 bilden die eine der fünf Involutionen auf φ, deren Doppelelemente die Argumente der sechs gegebenen Punkte sind.

Benützen wir des Weiteren die Eigenschaft, dass man die sechs Doppelelemente auch ersetzen kann durch irgend sechs Elementenpaare der Involution (cf. Nr. 187 ff.), so haben wir die Erweiterung des letzten Satzes (λ):

λ_1) *) Durch irgend sechs Punkte in der Ebene

---

*) Lässt man in bekannter Weise den Curven dritter Ordnung durch die gegebenen sechs Punkte die Ebenen des Raumes projektivisch entsprechen, so geht der Kegelschnitt φ in eine rationale Raumcurve sechster Ordnung über, sowie die Punkte der Ebene in die einer Fläche dritter Ordnung (die durch die Curve hindurch geht).

Andrerseits geht bekanntlich durch eine solche Curve nur eine einzige Fläche dritter Ordnung, deren Gleichung pg. 20 ermittelt wurde.

eines festen Kegelschnitts φ geht ein Quintupel von Curven dritter Ordnung H_3, das aus dem Kegelschnitt die Doppelelementensextupel von fünf Involutionen vierter Ordnung mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren ausschneidet.

Diese sechs Elementenpaare sind die Berührungspunkte der Tangentenpaare der sechs gegebenen Punkte.

Diesen fünf Curven H_3 sind fünf Curven F_3 eindeutig zugeordnet etc.

Je zwei Punkte einer Curve H_3, deren Elementenpaare (auf φ) ein Quadrupel der zugehörigen Involution bilden, sind conjugirte Punkte derselben.

Und endlich, mit vorläufiger Heranziehung des näheren Zusammenhangs zwischen solchen fünf Involutionen vierter Ordnung erhält man:

λ_2) Je zwei der fünf Curven H_3 haben noch drei weitere Punkte gemein, je drei noch *einen*. Daher giebt es solcher weiteren gemeinsamen Punkte (Elementenpaare) noch *zehn*, die den fünf Curven (Involutionen) in der Art angehören, wie die zehn

---

Daher liefert die Abbildung von Ebene auf Fläche dritter Ordnung folgenden interessanten Satz:

„Durch jede der sechs vierfachen Sehnen einer allgemeinen rationalen Raumcurve sechster Ordnung geht ein die Curve berührendes Ebenenpaar.

Dann giebt es fünf Involutionen vierter Ordnung, die diese sechs Paare von Berührungspunkten zu gemeinsamen Elementenpaaren besitzen.

Die fünf zugehörigen Doppelelementensextupel werden aus der Curve von den Ebenen eines Pentaeders ausgeschnitten, das der einzigen durch die Curve gehenden Fläche dritter Ordnung einbeschrieben ist."

Eckpunkte eines Pentaeders den fünf Ebenen derselben. Und daraus folgt:

Jede der fünf Curven (Involutionen) enthält noch sechs der weiteren zehn Punkte (Elementenpaare), die drei ihr angehörige Quadrupel (d. i. drei conjugirte Punktepaare auf der Curve) bilden.

Hier brechen wir vorläufig die Anwendungen auf Curven dritter Ordnung ab, um erst durch weitere Untersuchungen über die Involutionen vierter Ordnung ein reichhaltigeres Material zu gewinnen.

Die direkte Übertragung der Raumsätze des vorigen Paragraphen auf die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung und umgekehrt ist in den wichtigsten Fällen angegeben: es kann daher die weitere Durchführung dem Leser überlassen bleiben.

Im nächsten Paragraphen betrachten wir die Involution vierter Ordnung unter dem Gesichtspunkt der Schnittpunktformengruppe einer rationalen ebenen Curve vierter Ordnung und bringen sie dabei vornehmlich in Zusammenhang mit der quadratischen ein- eindeutigen Involution der Ebene.

§. 27.

Die rationalen Curven vierter Ordnung in der Ebene und die quadratische Transformation.

151. Wir haben die biquadratische Involution auf der Normcurve zweiter und dritter Ordnung studirt; es möge auch noch die der vierten und (soweit es nöthig erscheint) der sechsten Ordnung zu Grunde gelegt werden.

Doch sollen beide nicht in den ihnen eigentlich zukommenden Räumen (von vier resp. sechs Dimensionen), sondern, ganz in der Weise des §. 24, im ternären Gebiet betrachtet werden. Dies geschieht für den ersten Fall einfach so

Auf der Normcurve vierter Ordnung

$$(1)\quad \rho x_i = m_i \lambda^i \ (i = 0, 1, \ldots 4)$$

nehmen wir drei (linear unabhängige) Punktquadrupel

$$(2)\quad \varphi_1(\lambda),\ \varphi_2(\lambda),\ \varphi_3(\lambda)$$

an. Jedes derselben liegt auf einem bestimmten Gebilde (Raum)

$$(3)\quad u_{1x} = 0,\ u_{2x} = 0,\ u_{3x} = 0,$$

die eine Gerade gemein haben.

Von jedem Punkte der letzteren geht ein „Raum-"quadrupel an die Curve, dem als Argumente auf der letzteren die Wurzeln einer Form a_λ resp. b_λ etc. zugehören mögen. Dann bilden alle diese Quadrupel, wie aus den §§. 1, 2 hervorgeht, die zu den Formen (2) conjugirte Involution

$$(4)\quad a_\lambda + k b_\lambda.$$

Projicirt man nun die Curve mittelst sämmtlicher durch die Gerade (3) gehenden „Räume" auf eine Ebene, so gelangt man zu einer rationalen Curve vierter Ordnung (R_4^2, resp. P_4^2 etc. oder einfacher auch R, P etc.):

$$(5)\quad \sigma y_i = \varphi_i(\lambda)\ \ (i = 1, 2, 3)$$

deren Schnittpunkttheorem durch

$$(6)\quad a_s = 0,\ b_s = 0$$

gegeben ist (wo a_s, b_s durch Polarisation von a_λ, b_λ (4) nach vier Elementen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ entstehen, d. h. wo a_λ, b_λ die zu (5) gehörigen linearen Schnittpunktformen sind). Dann sind die in den λ linearen und symmetrischen Grössen s_i nichts Anderes, als die im ursprünglichen Raume den Punktcoordinaten x dualistisch gegenüberstehenden (contragredienten) „Raum-"coordinaten. Wir drücken die gegebene Umformung in dem Satze aus:

α) „Die Betrachtung der biquadratischen Involution (resp. der zu ihr conjugirten Gruppe) auf der biquadratischen Normcurve wird ersetzt durch die der Schnittpunktformen einer ebenen rationalen Curve vierter Ordnung (R, P, etc.)."

152. Die Gleichungen (6) beziehen wir wieder, wie in Nr. 45 ff. auf einen (zunächst noch beliebigen) Normkegelschnitt einer Ebene, auf dem wir den Parameter λ der Curve R ausgebreitet denken. Dann gilt nach den früheren Entwicklungen (Nr. 46 ff.) der Satz:

β) „Die Gruppe (2) stellt sämmtliche dem Normkegelschnitt umschriebene Polvierseite der Kegelschnitte und (damit ihres Büschels)

$$(7)\quad a_\sigma^2 = 0,\ \ b_\sigma^2 = 0$$

dar, die ihn stützen und aus ihm die Punktquadrupel (4) ausschneiden."

Aus der Entstehung der Formen (7) aus (6) (cf. Nr. 46) folgt dann sofort, dass die vier Grundpunkte des Büschels (7), vermöge ihrer an N_2 gehenden Tangentenpaare $\lambda_i\ \mu_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), den Doppeltangenten der Curve R entsprechen d. h. den vier Quadraten quadratischer Formen, die sich in der Gruppe (2) vorfinden.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Kegelschnitt φ aus, so befindet sich in einem beliebigen Kegelschnittnetze evidentermassen (wegen der Linearität der Bedingungsgleichungen in den Coefficienten) immer ein Büschel von solchen, die φ stützen; wählt man das Netz so, dass seine Individuen alle durch drei beliebig gewählte Punkte gehen, so bestimmt das in ihm befindliche φ stützende Büschel eindeutig einen vierten Grundpunkt. Denkt man sich diesen construirt, so kommt man durch dieselbe Construktion offenbar von je drei dieser vier Punkte immer zum vierten.

Da aber sowohl zwischen irgend vier quadratischen (binären), als zwischen irgend vier der Gruppe (2) angehörigen biquadratischen Formen eine lineare Identität besteht, so gilt der Satz *):

γ) „Durch irgend drei quadratische (binäre) Formen ist im Allgemeinen stets eine vierte eindeutig bestimmt, sodass sowohl zwischen diesen

*) [Es finden sich die Resultate der Sätze γ) δ) ε) und einiger weiteren auch im Wesentlichen, wenn auch ganz anders abgeleitet, in der während des Druckes erschienenen Abhandlung des Herrn Brill: „Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades“ Math. Ann. XX. Vgl. auch die noch spätere Note desselben: „Ueber das Polvierseit“ ebenda.

Die Zahl der Involutionen vierter Ordnung mit denselben sechs Doppelelementen, sowie algebraische Relationen zwischen den ersteren gab Herr Stephanos in einem Comptes Rendus Dec. 1881 erschienenen Auszuge aus einer grösseren der Pariser Academie eingereichten Abhandlung.

Herr Jordan gab einen Bericht über die letztere Comptes Rendus Mai 1882. Erst in diesem wird des wichtigen von H. Stephanos bewiesenen Prinzips Erwähnung gethan, dass zwei conjugirte Gruppen binärer Formen dieselben Combinanten besitzen.

Dasselbe Prinzip hat auch, ganz unabhängig von H. Stephanos, H. Brill seiner oben angegebenen Abhandlung zu Grunde gelegt.

Andrerseits findet sich dasselbe am Ende von Kap. I von mir bewiesen und ich kann hier nur anführen, dass dieses Kapitel schon am Ende des Jahres 1881 geschrieben war, wodurch natürlich ein Prioritätsanspruch nicht begründet sein soll.

Was die Involutionensätze ε) angeht, muss ich jedoch betonen, dass sowohl H. Brill, als H. Stephanos nur von Involutionen mit denselben Doppelelementen handeln, während dort die Erweiterung auf Involutionen mit denselben (6) Elementenpaaren entwickelt ist, eine Erweiterung, wie sie namentlich in der späteren Anwendung auf cubische Raumcurven von Wichtigkeit wird.

Was ich über die Zahl und Natur der weiteren zehn Elementenpaare entwickelt habe, liegt implicite in der von H. Brill l. c. pg. 354 etc. angegebenen Tabelle; aber man wird meinen Formulirungen einen gewissen Fortschritt gegenüber den Brill'schen Resultaten nicht absprechen.

Vgl. meine Note, Math. Ann. XXI, die einen kurzen Auszug meiner auf die Involutionen bezüglichen Resultate darstellt.

Mitte Januar 1882.]

vier Formen, als zwischen ihren Quadraten je eine lineare Identität besteht.

Bezogen auf irgend einen Normkegelschnitt φ, stellen die drei gegebenen Formen irgend drei Punkte in der Ebene desselben dar. Dann stellt die vierte Form einen vierten Punkt dar, der mit den drei ersten ein φ stützendes Kegelschnittbüschel bestimmt.

Die Involution, die das letztere auf φ ausschneidet, stellt die Schnittpunktformen einer Curve R dar, deren Doppeltangenten die Wurzeln der vier quadratischen Formen zu Argumentenpaaren haben etc. etc.

Geht man umgekehrt von einem beliebigen Kegelschnittbüschel aus, so hat der zugehörige Kegelschnitt φ nur den beiden Bedingungen zu genügen, auf dem gegebenen Büschel zu ruhen."

Der Inhalt dieses Satzes ist aber eines weit einfacheren Ausdrucks fähig. Denn dem φ stützenden Kegelschnittbüschel gehören drei Linienpaare an, $A_i\ B_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Ein solches trifft aber φ (cf. pg. 106) in zwei zu einander harmonischen Punktepaaren oder die Geraden A_i, B_i sind in Bezug auf φ conjugirt.

Daraus folgt sofort:

γ_1) „Die vier quadratischen Formen des Satzes (γ) stellen, auf irgend einen Kegelschnitt φ bezogen, stets ein *Polviereck* desselben dar, und umgekehrt."

Die Umkehrung gilt, weil (cf. l. c.) ein in Bezug auf φ conjugirtes Linienpaar stets einen φ stützenden Kegelschnitt darstellt: zwei solcher Linienpaare (die nach dem Hesse'schen Satze cf. pg. 87 zugleich ein drittes solches, mit den ersten die

Gegenseiten eines vollständigen Vierecks bildendes, liefern) bestimmen aber ein φ stützendes Kegelschnittbüschel.

153. Die Verbindungsgerade zweier Punkte, denen die quadratischen Formen ψ, χ zugehören mögen, trifft den Normkegelschnitt in dem zu ψ, χ harmonischen Paar d. i. der Funktionaldeterminante beider.

Demnach treffen die sechs Seiten des Polvierecks von φ diesen Kegelschnitt in den sechs Funktionaldeterminanten, die aus den vier quadratischen Formen zu bilden sind.

Andrerseits kommt diesen sechs weiteren Formen auch für die Curve R eine einfache Bedeutung zu. Sie stellen die Tangentenpaare dar, die von den Ecken des Doppeltangentenvierseits der Curve noch ausserdem an sie gehen.

Denn die sechs Tangenten, die von irgend einem Punkte in der Ebene der Curve R an sie gehen, berühren sie in den Doppelelementen der biquadratischen Involution, die das Strahlbüschel des Punktes aus R ausschneidet.

Gehen von dem Punkte zwei Doppeltangenten der Curve aus (mit den Argumentenpaaren ψ, χ), so ist die Involution gegeben durch

$$(8) \quad \psi^2 + k\chi^2 = 0$$

und demnach ihre Doppelelemente durch *):

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi^2}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\psi^2}{\partial\mu}, \\ \frac{\partial\chi^2}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\chi^2}{\partial\mu} \end{vmatrix} = \psi\lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\psi}{\partial\mu} \\ \frac{\partial\chi}{\partial\lambda}, & \frac{\partial\chi}{\partial\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

q. e. d.

154. Die sechs Funktionaldeterminanten stehen weiter zu den vier ursprünglichen Formen in einer einfachen Bezieh-

*) λ, μ sind, wie immer, die homogenen Variabeln der binären Formen.

ung, zu der man durch passende Anwendung von quadratischen Transformationen auf die Curve R gelangt.

Zuvor beweisen wir den Satz:

δ) „Die Funktionaldeterminante der Involution (4) stellt die Wendepunkte der Curve dar.“

In der That, man setze in den Gleichungen (6) drei der Argumente λ gleich und eliminire das vierte.

Wir gehen jetzt für den nächsten Zweck lieber von der zu R dualistischen Curve aus, einer rationalen ebenen Curve sechster Ordnung S mit sechs Spitzen und vier Doppelpunkten; die letzteren seien bezeichnet mit D_1, D_2, D_3, D_4.

Dann geht bekanntlich durch eine quadratische ein- eindeutige involutorische Transformation T_4 mit den Fundamentalpunkten D_1 D_2 D_3 die Curve S in eine von gleicher Ordnung und Art „S_1“ über. Dabei bleiben die Argumente der sechs Spitzen und des vierten Doppelpunktes unverändert: dagegen treten nach voriger Nummer an Stelle der Argumentenpaare der drei Doppelpunkte D_1 D_2 D_3 ihre bezüglichen Funktionaldeterminanten. Daraus folgt bei wiederholter Anwendung des Satzes γ):

δ) „Bestimmen drei quadratische Formen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ eine vierte φ_4 so, dass zwischen ihren vier Quadraten eine lineare Identität herrscht, so findet eine solche auch statt zwischen den Quadraten von φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) und denen der Funktionaldeterminanten der jedesmal restirenden drei Formen.“

155. Excurs. An diese auf die Curve R in obiger Weise ausgeübten Transformationen T_i knüpft sich eine für die biqua-

---

*) Eine solche werde auch weiterhin immer durch das spezifische Zeichen T charakterisirt.

dratische Involution höchst wichtige Entwicklung. Eigentlich zwar gehört sie in die Theorie der allgemeinen ebenen rationalen Curven sechster Ordnung R_6^2, soweit sie mit der biquadratischen Involution verbunden ist. Da indess die gemeinte Entwicklung von der speziellen Natur der Curve S fast unabhängig ist, so möge sie gleich hier im Wesentlichen vorweggenommen werden.

Die Verbindungsgerade der Doppelpunkte D_i D_k (φ_i, φ_k) der Curve S schneidet nach Nr. 153 aus S das Punktepaar aus, das durch die Funktionaldeterminante von φ_i, φ_k (bezeichnet mit φ_{ik}) gegeben ist.

Für eine allgemeine R_6^2 sind bekanntlich statt der sechs Spitzen sechs weitere Doppelpunkte Δ_r vorhanden $(r = 1, 2, \ldots 6)$ und die Punktepaare φ_{ik} hören dann auf, gerade die Funktionaldeterminanten von φ_i, φ_k zu sein, sondern sind irgend welche anderen sechs quadratischen Formen.

Im Uebrigen denken wir uns auf der Curve R_6^2 gerade so einen Parameter ausgebreitet, wie auf S resp. R_4^2. Den Doppelpunkten Δ_r mögen die Argumentenpaare Φ_r zugehören. Dann zeigt die Figur der Curve R_6^2 unmittelbar:

ε) „Die vier Strahlbüschel der Doppelpunkte D_i schneiden nebst dem einen durch sie bestimmten Kegelschnittbüschel D aus der Curve fünf biquadratische Involutionen mit denselben sechs Elementenpaaren Φ_r aus.“

Diese fünf Involutionen fassen wir näher in's Auge: erst später soll gezeigt werden, dass es keine weiteren mit derselben Eigenschaft giebt, sowie dass die sechs Elementenpaare Φ_r ganz beliebig angenommen werden dürfen.

Durch eine der vier Transformationen T_i reproduciren sich die fünf Involutionen und zwar bleiben die durch die drei

Strahlbüschel D_k, D_l, D_m erzeugten unverändert, während die vom Strahlbüschel D_i und vom Kegelschnittbüschel D bestimmten sich vertauschen.

ε_1) „Unterwirft man die Curve R_6^2 den vier*) quadratischen Transformationen T_i (deren Fundamentaldreiecke von je drei der vier Doppelpunkte D_i gebildet sind), so erhält man vier neue Curven R_6^2 derselben Art, für die immer sechs ihrer (zehn) Doppelpunkte dieselben Argumentenpaare besitzen wie die sechs ursprünglich ausgewählten (Δ_r).

Die so erhaltenen fünf Curven bilden einen Cyclus in der Weise, dass durch den angegebenen Transformationsprocess aus jeder die vier übrigen hervorgehen.

Die Argumentenpaare der fünfmal vier weiteren Doppelpunkte bilden zusammen die zehn weiteren (je zweien noch ausserdem gemeinsamen) Elementenpaare der fünf Involutionen.

Die fünf Involutionen sind auch durch die fünf Involutionen dargestellt, die die fünf Kegelschnittbüschel D aus den fünf Curven R_6^2 ausschneiden."

Daher genügt es, wenn die je zwei resp. drei der fünf

*) Eine solche Transformation ist natürlich durch ihr Fundamentaldreieck noch nicht bestimmt, sondern enthält noch zwei willkürliche Parameter, wie bekannt. Man kann diese etwa so bestimmen, dass der vierte Doppelpunkt sich in der Transformation selbst entspricht, dann ist für sämmtliche fünf Curven R_6^2 die Lage der vier Doppelpunkte D_i dieselbe.

Involutionen gemeinsamen Elementenpaare bestimmt werden sollen, für eine der fünf Curven R_6^2, etwa die gegebene, irgend zwei resp. drei der Strahlbüschel D_i daraufhin zu untersuchen.

Nun haben offenbar die beiden Involutionen D_i, D_k noch ausserdem die drei Elementenpaare φ_l, φ_m, φ_{ik} gemein: sowie die drei Involutionen D_i, D_k, D_l das eine Paar φ_m. Dies liefert mithin sofort die erste Ergänzung des letzten Satzes:

ε_2) „Je zwei der fünf Involutionen haben noch (ausser den sechs gemeinschaftlichen Elementenpaaren Φ_r) drei Elementenpaare gemein, je drei noch *eines*.

Daher reduciren sich die 3. 10 weiteren solchen Elementenpaare auf 10, deren jedes dreimal auftritt, d. h. diese zehn weiteren Paare gehören den fünf Involutionen in der Art an, wie die zehn Eckpuncte eines Pentaeders den fünf Ebenen desselben."

Endlich enthält jede der fünf Involutionen sechs der zehn weiteren Paare: z. B. D_i die Paare φ_k, φ_{ik}; φ_l, φ_{il}; φ_m, φ_{im}. Diese bilden drei Quadrupel der Involution und wir haben:

ε_3) „Die zehn weiteren (theilweise gemeinsamen) Elementenpaare der fünf Involutionen lassen sich auch in fünf Sextupel anordnen, so dass jedes Paar dreimal auftritt. Jedes der Sextupel bildet drei Quadrupel einer der Involutionen.

Diese Sextupel entsprechen also den Gegenecken des vollständigen Vierseits, das auf irgend einer Ebene des Bild-Pentaeders von den vier übrigen ausgeschnitten wird."

Dieser Excurs möge vorläufig genügen.

Ueberträgt man diese Entwicklungen unter Vorwegnahme des Hülfssatzes, dass es ausser den besprochenen fünf Involutionen keine weiteren (mit denselben sechs Elementenpaaren) giebt, auf die Curve R, so erkennt man, dass damit die Aufgabe, die Zahl der biquadratischen Involutionen mit denselben Doppelelementen*) nebst dem Zusammenhang unter ihnen zu erforschen, im Wesentlichen erledigt ist.

Eine partielle Ausdehnung der Zahlverhältnisse auf Involutionen beliebiger Ordnung mit denselben Elementenpaaren findet man Kap. III.

Ehe wir uns aber zur Figur des Polvierecks (Satz γ_1) zurückwenden, möge noch ein Zweifel beseitigt werden, den man erheben kann, ob man nemlich berechtigt ist, die Funktionaldeterminante zweier biquadratischer Formen als eine ganz allgemeine Form sechsten Grades aufzufassen. Allerdings hängt die Involution vierten Grades von ebenso viel Constanten (nemlich sechs) ab, wie die Gleichung ihrer Doppelelemente: es könnten aber eventuell zwischen den Coefficienten der letzteren Gleichung Relationen stattfinden, die sie zu einer speziellen Gleichung sechsten Grades stempeln würden.

Die Funktionaldeterminante einer Involution (4) lautet entwickelt:

$$(10)\ 0 = J \equiv \mu^6 p_{01} + 3\mu^5\lambda\, p_{02} + 3\,\lambda^2\,\mu^4\,(3\,p_{03} + 2\,p_{12})$$
$$+\lambda^3\mu^3(p_{04}+8p_{23}) + \lambda^6\,p_{34} + 3\,\lambda^5\mu\,p_{24} + 3\,\lambda^2\,\mu^4\,(p_{14}+2p_{23})$$

wo die p_{ik} die bekannten Verbindungen $(ab)_{ik}$ bedeuten.

Zwischen diesen herrschen bekanntlich drei Relationen der Form:

$$(11)\ p_{ik}\,p_{lm} + p_{il}\,p_{mk} + p_{im}\,p_{kl} = 0$$

wo i, k, l, m irgend vier der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 sind.

---

*) Für diese ist der erwähnte Hülfssatz durch Hinweis auf das Stephanos'sche Resultat cf. pg. 241 anm. ersetzbar.

Aus den fünf möglichen Relationen dieser Art kann man irgend drei auswählen, dann setzen sich die beiden übrigen, wie man sich leicht überzeugt, linear aus jenen zusammen.

Alle sonst denkbaren Relationen zwischen den p müssen, da z. B. zwischen den 6 p der Relation (11) nur diese eine Bedingung statthat, auf diese drei ausgewählten zurückführbar sein. Wir wählen etwa die, in denen der Reihe nach der Index 4, 3, 2 nicht auftritt.

Dann kann man z. B. die folgenden p:

$$p_{01}, \; p_{02}, \; p_{03}, \; p_{23}, \; p_{31}, \; p_{24}, \; p_{34}$$

als unabhängige homogene Grössen auffassen. Denn es giebt keinen Index, der in einem der p nur einmal aufträte, so dass zwischen irgend sechs dieser Grössen eine der Relationen (11) nicht existiren kann.

Aus den ersten der drei ausgewählten Relationen kann dann p_{12}, und aus den beiden folgenden p_{04}, p_{14} eindeutig durch die übrigen ausgedrückt werden.

Denkt man sich jetzt die Coefficienten a, b variabel, so enthält jeder Coefficient in (10) eine unabhängige Variable q. e. d.

156. Wir kehren nunmehr zu den vier Formen φ_i, die den Doppeltangenten von R zugehörten, zurück und fragen, welche (canonische) Gestalt die Form J (10) annimmt, sobald man die Faktoren einer der Formen φ_i als neue homogene Variable einführt. Seien diese $(\lambda-\varepsilon_i)$ $(\lambda-\eta_i)$; setzen wir demnach

$$(12) \quad \lambda' = \lambda-\varepsilon_i, \quad \mu' = \lambda-\eta_i$$

so wird die Doppeltangente $(\varepsilon_i \, \eta_i)$ dadurch zur Doppeltangente $(0, \infty)$. Die Einsetzung in (7) liefert dann:

(13) $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ und damit $p_{2r} = 0$ $(r = 0, 1, 3, 4)$.

Damit geht J (10) über (wenn wir wieder λ, μ schreiben) in: (14)

$$J \equiv \mu^6 p_{01} + 3\mu^4\lambda^2 p_{03} + \mu^3\lambda^3(p_{04} + 8p_{13}) + 3\mu^2\lambda^4 p_{14} + \lambda^6 p_{34} = 0$$

wo man noch etwa p_{13} durch die übrigen in (14) vorkommenden p ausdrücken kann. Dies liefert den Stephanosschen Satz (cf. Comptes Rendus Dec. 1881):

ζ) „Die Frage nach der Zahl und Natur der biquadratischen Involutionen mit gegebenen festen Doppelelementen ($J = 0$) ist identisch mit der Frage nach der Zahl und Natur der verschiedenen linearen Substitutionen (12), durch die J in diejenige canonische Form übergeht, in der die Coefficienten des zweiten und vorletzten Termes verschwinden."

157. Wir combiniren jetzt die für die Doppeltangenten D_i der Curve R (d. h. ihre Argumentenpaare φ_i) erhaltenen Resultate mit der bekannten[52] Entstehung einer solchen Curve aus einem Kegelschnitt mittelst einer quadratischen Transformation T.

Sei ein Kegelschnitt φ gegeben nebst drei Punkten (seiner Ebene), die, bezogen auf ihn, durch die Argumentenpaare $\psi_k \equiv (a_k, b_k)$ ($k = 1, 2, 3$) bezeichnet seien. Das Dreieck der Punkte sei Fundamentaldreieck einer (sonst vorläufig beliebigen) Transformation T.

Dann ist das Bild von φ eine Curve R, mit den Doppelpunkten in den Ecken des Dreiecks. Von ihnen gehen an die Curve R die Tangentenpaare $\psi_k = (a_k, b_k)$: die Argumentenpaare der Doppelpunkte selbst sind die bezüglichen Funktionaldeterminanten der ψ (ψ_{kl}).

Durch die Ecken des Dreiecks gehen vier φ doppelt berührende Kegelschnitte: die Paare der Berührungspunkte sind durch die Formen φ_i gegeben und die vier Kegelschnitte gehen vermöge T in die Doppeltangenten von R über. Dies möge vor der Hand genügen.

Man betrachte jetzt auf dem Kegelschnitt φ (als Klassencurve) diejenige projektivische Beziehung, der die drei Paare (a_i, b_i) als Paare angehören. Solcher projektivischer Beziehungen giebt es noch acht, da noch in jedem Paare das Element a_i dem ersten System und b_i dem zweiten oder umgekehrt angehören kann.

Diese acht Beziehungen theilen sich aber in zwei gleiche Gruppen von je vier, wo die zweite aus der ersten hervorgeht, indem man in jedem der drei Paare $a_i\ b_i$ die Rollen der Elemente vertauscht, wodurch sich nur die Bezeichnungen: „erstes und zweites System" vertauschen.

Die eine der beiden Gruppen ist dargestellt durch das Schema ($i, k, l = 1, 2, 3$)

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{lll} (a_i\ b_i) & (a_k\ b_k) & (a_l\ b_l) \\ (a_i\ b_i) & (a_k\ b_k) & (b_l\ a_l) \\ (a_i\ b_i) & (b_k\ a_k) & (a_l\ b_l) \\ (a_i\ b_i) & (b_k\ a_k) & (b_l\ a_l) \end{array}\right\}$$

Bekanntlich durchlaufen die Punkte, von denen Tangentenpaare einer projektivischen Beziehung an einen Kegelschnitt φ gehen, einen zweiten Kegelschnitt, der den ersten doppelt berührt *).

---

*) Andrerseits stellt ein beliebig gewählter Kegelschnitt φ nebst einer projektivischen Beziehung (linearen Transformation) seiner Elemente auf ihm die allgemeine reciproke Verwandtschaft in der Ebene dar.

Denn wählen wir φ als Ordnungskegelschnitt, so ist durch die gegebene Beziehung ein zweiter (Klassen-) Kegelschnitt Φ bestimmt, der φ zweimal berührt und umgekehrt.

Zwei solche sich doppelt berührende Kegelschnitte sind bekanntlich[53]) stets die Fundamentalkegelschnitte einer reciproken Verwandtschaft u. umg. d. h. die Örter der Punkte resp. Geraden, deren in der Verwandtschaft entsprechende Gerade resp. Punkte mit ihnen incident sind.

Daher muss für jede der projektivischen Beziehungen (15) der zugehörige Kegelschnitt durch drei feste Punkte

---

Zugleich werden dann dadurch die Elemente von φ und Φ selbst projektivisch auf einander bezogen.

Es möge für den canonischen Fall, dass φ zum Normkegelschnit N_2 gewählt wird

(1) $4\, x_0\, x_2 - x_1^2 = 0$ i. e. $\rho x_0 = 1, \quad \rho x_1 = 2\,\lambda, \quad \rho x_2 = \lambda^2$ (cf. pg. 43)

und die gegebene projektivische Beziehung

$$(2)\ \lambda' = \alpha\,\lambda$$

ist (also die Doppelelemente 0, ∞ besitzt) die Rechnung durchgeführt werden.

Dann ist der Kegelschnitt Φ von der Form

$$(3)\ u_0\, u_2 - \beta u_1^2 = 0$$

und es handelt sich um die Beziehung zwischen α, β.

Die allgemeine bilineare Form, deren Verschwinden die allgemeine reciproke Verwandtschaft darstellt, wird für N_2 als Ordnungsfundamentalkegelschnitt, folgende einfachere:

(4) $x_0(k_{01}\, y_1 + k_{02} y_2) + x_1(-k_{01} y_0 - y_1 + k_{12} y_2) + x_2\{(4 - k_{02})\, y_0 - k_{12} y_1\} = 0.$

Soll andererseits der Klassenfundamentalkegelschnitt der Verwandtschaft mit (3) zusammenfallen, so verschwinden k_{01} und k_{12} und (4) wird:

(4') $x_0 y_2 k_{20} - x_1\, y_1 + x_2\, y_0\,(4 - k_{02}) = 0$ und die dualistisch adjungirte Form:

(5) $u_0 v_2 k_{02} - u_1 v_1 k_{02} (4 - k_{02}) + u_2 v_0 (4 - k_{02}) = 0.$

und

$$(6)\quad \beta = \frac{k_{02}\ (4 - k_{02})}{4}$$

Irgend einem Punkte P_1 (λ_1) von N_2 entspricht eine durch ihn gehende Gerade. Ihr zweiter Schnittpunkt mit N_2 ist der nach (2) dem Punkte λ_1 entsprechende Punkt λ'_1. Die Gleichung der Geraden wird wegen (4')

$$(7)\ x_0\ k_{02}\ \lambda_1^2 - 2x_1\ \lambda_1 + x_2\ (4 - k_{02}) = 0$$

und ihr mit N_2 gemeinsames Punktepaar:

(8) $\nu^2\,(4 - k_{02}) - 4\,\nu\,\lambda_1 + k_{02}\,\lambda_1^2 \equiv (\nu - \lambda_1)\,\{\nu\,(4 - k_{02}) - \lambda_1\, k_{02}\} = 0,$

mithin ist

$$(9)\ \alpha = \frac{4 - k_{02}}{k_{02}} \text{ und}$$

$$(10)\ \beta = \frac{4\ \alpha}{(\alpha + 1)^2}$$

gehen und φ doppelt berühren. Dies liefert mit Berücksichtigung des über die Transformation T Gesagten:

η) „Gegeben sei eine Curve R: von den drei Doppelpunkten mögen die Tangentenpaare $(a_i\ b_i) = \psi_i$ an sie gehen: die Argumentenpaare der Doppeltangenten seien $(\varepsilon_k\ \eta_k) = \varphi_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Dann sind die vier Paare φ_k die Doppelelemente der vier (überhaupt möglichen) projektivischen Beziehungen, denen die drei Paare ψ_i als Paare angehören.

Durch irgend einen Punkt P einer Doppeltangente D_k gehen immer zwei solche Kegelschnitte, dass ihre drei weiteren Schnittpunkte in den Doppelpunkten von R liegen, und die zugleich R berühren.

Die Berührungspunkte sind ein Paar der D_k angehörigen projektivischen Beziehung."

Und in Hinsicht auf Satz γ_2) kann man unser Resultat beiläufig als einen Satz aus der Theorie der projektivischen Beziehungen aussprechen:

η_1) Es giebt vier verschiedene projektivische Beziehungen, denen drei feste Paare $(a_i\ b_i) = \psi_i$

In der That fallen die beiden nach (10) einem Werth β entsprechenden Werthe für $\beta = 1$ zusammen. Dann aber wird auch $\alpha = 1$ und es fallen N_2 und Φ zusammen (d. h. Φ wird $= N_2$) und die projektivische Beziehung auf N_2 zur Identität. Das ist aber bekanntlich der Fall des Polarsystems.

Betrachtet man in der allgemeinen Verwandtschaft einen beliebigen Punkt P_1 als Punkt des ersten Systems, und gehen von ihm die Tangenten $(d_1\ t_1)$ an N_2, so entsprechen diesen in der projektivischen Beziehung zwischen den Elementen von N_2 und Φ auf Φ zwei Punkte $(d_2\ t_2)$: die Gerade $(d_2\ t_2)$ ist dann die P_1 entsprechende Gerade.

als Elementenpaare angehören. Ihre Doppelelemente seien durch die Paare $(\varepsilon_k\ \eta_k) = \varphi_k$ dargestellt.

Zwischen den Quadraten dieser Formen φ_k herrscht eine lineare Identität. Construirt man sechs weitere Paare, die Funktionaldeterminanten der φ_k, so stellt jedes Paar φ_k mit den drei dieser weiteren Paare, die den Index k nicht enthalten, wiederum die Doppelelemente von vier projektivischen Beziehungen dar, die drei gemeinsame Paare besitzen. Oder kürzer: zu vier projektivischen Beziehungen mit drei gemeinsamen Paaren gehören noch vier Gruppen von vier Beziehungen derselben Art. Jedes Doppelelementenpaar tritt zweimal auf, so dass es deren im Ganzen zehn giebt.

Die fünf Doppelelementenpaarquadrupel entsprechen den Ecken der fünf Tetraeder des Bild-Pentaeders der Involutionen vierter Ordnung mit gemeinsamen Doppelelementen etc. etc.

Zu den drei (einfach unendlichen) Schaaren von projektivischen Beziehungen mit drei festen Doppelelementenpaaren φ_1, φ_2, φ_3 gehört stets noch eine vierte mit dem Doppelelementenpaar φ_4.

Dann giebt es drei bestimmte Paare $(a_i\ b_i) = \varphi_i$, so dass jede der vier Beziehungsschaaren eine Beziehung aufweist, der diese drei Paare als Elementenpaare zugehören etc. etc."

158. Im Folgenden soll die Transformation T in direkte Verbindung mit dem Schnittpunkttheorem einer Curve R (6) gebracht werden. Diese Verbindung ist schon implicite im Satze (β) enthalten.

Denn es ist bekannt, dass die in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel conjugirten Punktepaare nichts anderes sind, als die Punktepaare einer Transformation T, deren Einheitspunkte in den Basispunkten *) des Büschels liegen und deren Fundamentaldreieck das gemeinsame Polardreieck des Büschels ist; und umgekehrt lässt sich jede ein- eindeutige, involutorische, quadratische Transformation in dieser Weise auffassen. Wir nennen sie kurz die Transformation des Büschels. Dann kann man Satz (β) auch so aussprechen:

β_1) „Es sei irgend ein Kegelschnittbüschel gegeben und damit seine Transformation T. Sei dann φ irgend ein auf dem Büschel ruhender Kegelschnitt, so sind die sämmtlichen Punktepaare von T ersetzbar durch die sämmtlichen Gegenecken aller (∞^2) φ umschriebenen Polvierseite des Büschels."

Wird φ zum Normkegelschnitt gewählt, so ist umgekehrt ein solches Büschel durch

$$(3)\quad a_\sigma^2 = 0,\ b_\sigma^2 = 0$$

und die Transformation T durch

$$(6)\quad a_s = 0,\ b_s = 0$$

dargestellt.

In der That werden ja die Formen (6), wenn man die s_i durch die beiden Reihen $\sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2;\ \tau_0\ \tau_1\ \tau_2$ ersetzt, zwei in diesen Reihen bilineare symmetrische Formen, die durch ihr Verschwinden immer eine Transformation T[54] feststellen.

Wir denken uns die Ebene des Büschels (oder auch von φ) zunächst als eine ganz beliebige, mit der der Curve R nicht sich deckende.

159. Wählt man das Polardreieck des Büschels zum

---

*) Wir nennen daher umgekehrt das Büschel das „Einheitsbüschel von T", seine zerfallenden Kegelschnitte, wie gewöhnlich, die „Einheitsgeradenpaare von T".

Coordinatendreieck, so ist die Transformation T immer in der canonischen Form darstellbar

$$(16)\quad \rho x_i\, y_i = \nu_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

wo die ν_i noch beliebige Constanten sind.

Dann ist die Gleichung für das Paar der durch den Punkt $(x_i = x_k = 0)$ gehenden Einheitsgeraden von T

$$(17)\quad x_i^2\, \nu_k - x_k^2\, \nu_i = 0.$$

Da der Kegelschnitt φ

$$(18)\quad u_\alpha^2 = 0$$

auf dem Einheitsbüschel von T ruhen soll, so gelten die Relationen:

$$(19)\quad \sigma\alpha_{ii} = \nu_i \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha_{ii}}{\alpha_{kk}} = \frac{\nu_i}{\nu_k}:$$

$\varkappa$) „Die ganze Schaar der nach Satz β_1) zu einer in der canonischen Form gegebenen Transformation T (9) gehörigen Kegelschnitte φ ist dargestellt durch

$$(13)\ \varphi \equiv (u_0^2\nu_0 + u_1^2\nu_1 + u_2^2\nu_2) + 2\alpha_{12}u_1u_2 + 2\alpha_{01}u_0u_1 + 2\alpha_{02}u_0u_2 = 0,$$

wo die α variabel sind."

Mithin ist die Gleichung des vom Fundamentalpunkte $(x_i = 0, x_k = 0)$ an einen Kegelschnitt φ (18) gehenden Tangentenpaares:

$$(20)\quad x_i^2\, \nu_k - 2\, x_i\, x_k\, \alpha_{ik} + x_k^2\, \nu_i = 0.$$

Wegen der Bedingung (12) ist dieses Paar zum Einheitsgeradenpaar (10) harmonisch.

Wir nennen diejenige Strahleninvolution (zweiten Grades) des Fundamentalpunktes, für die seine Einheitsgeraden Doppelstrahlen sind, „die Hauptinvolution des Punktes", sowie einen Kegelschnitt φ einen „Grundkegelschnitt von T" und haben*):

---

*) Andrerseits sagt Satz γ_1) jetzt aus, dass jeder Kegelschnitt, für den die Einheitspunkte von T ein Polviereck bilden, ein Grundkegelschnitt von T ist und umg.

λ) „Die zwei Bedingungen, denen ein Grundkegelschnitt φ einer Transformation T zu genügen hat (nemlich auf dem Einheitsbüschel von T zu ruhen) lassen sich auch dahin angeben, dass die von den Fundamentalpunkten von T an φ gehenden Tangentenpaare den bez. Hauptinvolutionen angehören."

Ist dies daher für zwei Paare der Fall, so auch für das dritte, wie bekannt. Umgekehrt folgt aus Obigem sofort, dass bei beliebigem Grundkegelschnitt φ (11) und bei beliebigem Fundamental- (und Coordinatendreieck) die bezügliche Transformation T die folgende ist:

$$(21)\quad \rho x_i\, y_i = \alpha_{ii}.$$

160. Die Construktion des einem gegebenen Punkte vermöge einer Transformation T entsprechenden Punktes ist bekannt, dagegen möge hier mit Benützung der Sätze Nr. 49 cf. auch Nr. 125, 127, 136 eine andere Eigenschaft eines Punktepaares von T zur Sprache kommen.

Die Elemente eines solchen Paares bestimmen immer ein einem Grundkegelschnitt φ umschriebenes Polvierseit des Einheitsbüschels (für das sie zwei Gegenecken sind). Daraus folgt:

μ) „Greift man irgend einen der Grundkegelschnitte φ einer Transformation T heraus, so bestimmen zwei vermöge T sich entsprechende Punkte (vermöge ihrer Tangenten an φ) ein φ umschriebenes Vierseit.

Dann ruht der diesem Vierseit einbeschriebene und auf φ ruhende Kegelschnitt *zugleich* auf dem ganzen Einheitsbüschel von T. Oder:

Denkt man sich nur den einen Punkt gegeben (mit den Tangenten t_1, t_2 an φ), so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt, der t_1, t_2 berührt und auf φ und dem Einheitsbüschel von T ruht. Die zwei weiteren Tangenten, die dieser mit φ gemein hat, treffen sich in dem dem gegebenen vermöge T entsprechenden Punkte. etc."

161. Nunmehr gehen wir zur Ausführung des Nr. 158 angeregten Gedankens. Vermöge der Gleichungen (7) (8) repräsentirt jedes Punktepaar von T, bezogen auf einen Grundkegelschnitt φ, oder auch jedes φ umschriebene Polvierseit des Einheitsbüschels von T ein Punktquadrupel einer Curve R (mit dem Schnittpunkttheorem (8)) auf gerader Linie.

Jeder Fundamentalpunkt von T bildet mit einem beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Fundamentallinie ein Paar von T, mithin sind, wenn von den Fundamentalpunkten die Tangentenpaare $(\alpha_i\ \beta_i)$ an φ gehen, dies die Argumentenpaare der drei Doppelpunkte *) von P.

Umgekehrt ist bekanntlich bei beliebiger Annahme dieser drei Paare eine Curve R (nebst allen collinear in sie überführbaren) völlig bestimmt, wie es im Einklang mit der Schlussbemerkung von Nr. 159 sein muss.

Dagegen treffen jetzt die Seiten des Fundamentaldreiecks

---

*) Dies erhält seine Bestätigung durch die an Nr. 55, 115 anknüpfende Ergänzung. Die Einheitsgeradenpaare schneiden aus dem Kegelschnitt φ harmonische Quadrupel aus, mithin sind die letzteren durch die Gleichung dritten Grades in k (cf. Formel (7)):

$$j\ (a_\lambda + k\ b_\lambda = (0$$

bestimmt. Sei k_1 eine der Wurzeln, so ist nach Früherem

$$j\ (a_\lambda + k_1\ b_\lambda) \equiv A\ (\lambda - \alpha)^4 + B\ (\lambda - \beta)^4$$

wo α, β das zu den beiden Paaren, die die Geraden des bezüglichen Einheitspaares aus φ ausschneiden, harmonische Paar ist d. h. das von ihrem Doppelpunkt (Fundamentalpunkt von T) an φ gehende Tangentenpaar.

Dann aber lautet die bezügliche Gleichung des Schnittpunkttheorems der Curve P (cf. Formel 6)):

$$A\ (\lambda_1-\alpha)\ (\lambda_2-\alpha)\ (\lambda_3-\alpha)\ (\lambda_4-\alpha) + B\ (\lambda_1-\beta)\ (\lambda_2-\beta)\ (\lambda_3-\beta)\ (\lambda_4-\beta) = 0$$

woraus wiederum hervorgeht, dass α, β ein Doppelpunkt der Curve P ist.

den Kegelschnitt φ in den drei Paaren (a_i b_i), die auf der Curve R den Berührungspunkten der von den Doppelpunkten an sie gehenden Tangenten zugehören.

Die vier Einheitspunkte von T repräsentiren, auf φ bezogen, die Argumentenpaare der Doppeltangenten von R und die sechs Punkte J auf φ, in denen ein Einheitskegelschnitt φ berührt, die Wendepunkte von R.

162. Wir haben bisher mit zwei ganz verschiedenen Transformationen T zu thun gehabt, einmal die, durch die eine Curve R in einen Kegelschnitt überging (und die noch zwei Parameter enthielt): zweitens diejenige, die das Schnittpunkttheorem einer Curve P auf eine beliebige Ebene abbildete mit Hülfe eines beliebigen Kegelschnitts φ und eines beliebigen Fundamentaldreiecks (wodurch sie dann aber eindeutig bestimmt war).

Wir lassen nunmehr die beiden Ebenen von T *zusammenfallen* (und denken uns in dieser Ebene die Curven R und P), ferner aber auch beide Transformationen T und zugleich beide Kegelschnitte.

In der That sind die beiden Parameter der ersten Transformation so bestimmbar. Bekanntlich sind die drei Tangentenpaare von den Doppelpunkten einer Curve R an dieselbe zugleich solche eines bestimmten Kegelschnitts K.

Von einem Doppelpunkte A_i geht somit einmal ein solches Tangentenpaar (a_i b_i) aus: zweitens das Geradenpaar nach den beiden andern Doppelpunkten A_k A_l.

ν) „Wir wählen für jeden Doppelpunkt dasjenige Geradenpaar zum Einheitsgeradenpaar (der Transformation T, durch die R in einen Kegelschnitt K übergeht), das zu den beiden angegebenen Paaren harmonisch ist. Dann geht die Curve R gerade in den Kegelschnitt K über."

In der That ist diese Bestimmung möglich, und zwar auf

17*

nur eine Art. Denn zum Geradenpaar $A_i\ A_k$, $A_i\ A_l$ muss das Einheitsgeradenpaar a priori harmonisch sein: die drei Restbedingungen kommen aber wegen Satz (λ) auf nur zwei zurück.

Dieser Kegelschnitt K ist daher sowohl das Bild der Curve R vermöge der so bestimmten „Grundtransformation T“, als zugleich für diese ein Grundkegelschnitt.

Er heisse daher auch der „Grundkegelschnitt φ der Curve R“.

Soll nun diese Transformation T zugleich das Schnittpunkttheorem der Curve R darstellen, so folgt:

π) „Die Curven R und P sind durch T ein-eindeutig*) auf einander bezogen und zwar haben sich für beide die drei Paare ($\alpha_i\ \beta_i$) und die drei andern ($a_i\ b_i$) vertauscht.“

163. Die Beziehung zwischen den beiden Curven R, P soll jetzt mit Hülfe des Kegelschnitts φ näher angegeben werden. Es ergeben sich so eine Reihe von Sätzen **) für den Grundkegelschnitt einer rationalen Curve vierter Ordnung.

Dieser Grundkegelschnitt dient jetzt zugleich als Normkegelschnitt, sodass die Bezeichnungen „Punkt ($\lambda_1\ \lambda_2$), Gerade ($l_1\ l_2$)“ völlig deutlich sind.

Nun entspricht irgend einer Tangente von P ($\lambda\ \lambda\ r_1\ r_2$)

---

*) Da dann zwischen den Parametern beider rationalen Curven eine bilineare Beziehung (Projectivität) herrscht, so hat man beiläufig den Satz:

„Es giebt eine bestimmte projektivische Beziehung, die irgend drei Elementenpaare in ihre bezüglichen Funktionaldeterminanten überführt.“

Die Art und Weise, wie sich die einzelnen Faktoren dieser drei Formenpaare entsprechen, folgt daraus, dass einem Umlauf der Curve R ein bestimmter Umlauf der Curve P entspricht.

**) Bei ihrer Ableitung könnte man sich auch auf die Betrachtung der Transformation T allein beschränken, da diese ja die der Curve P ersetzt.

ein vollständiges (φ umschriebenes) Vierseit von T, für das ein Paar Gegenecken aus den Punkten $(\lambda\lambda)$ $(r_1\, r_2)$ besteht. Die den Punkten von φ vermöge T entsprechenden Punkte durchlaufen die Curve R: d. h.: die Beziehung zwischen R und P {gemäss Satz (π)} gestaltet sich genauer so:

π_1) „Die Punkte der Curve R (auf φ bezogen) repräsentiren die Restpunktepaare der Tangenten der Curve P und umgekehrt (und reciprok, wenn man die Punkte von P auf ihren Grundkegelschnitt beziehen würde)."

Dies wende man auf die Doppeltangenten von P an. Dann entsprechen diesen einmal vier Punktepaare auf R, andererseits vier Punktepaare auf φ (und zwar gehen vermöge T die Elemente jedes Paares in einander über). Demnach setzen diese vier Paare die Schnittpunkte von R und φ zusammen:

π_2) „Die acht Schnittpunkte einer beliebigen Curve R mit ihrem Grundkegelschnitte theilen sich in vier Paare φ_i der Art, dass die vier Punkte φ_i (auf φ bezogen) die Einheitspunkte der zur Curve R gehörigen Grundtransformation T sind."

Die Eigenschaften der Einheitspunkte von T liefern eine Reihe von specielleren Sätzen für R, die hier unterdrückt werden können.

Wir gehen weiter zu den Wendetangenten von P.

Nun ist es bekannt, dass eine beliebige Gerade von zwei Kegelschnitten des Einheitsbüschels berührt wird und dass die Berührungspunkte stets ein Paar der Transformation T bilden.

Da aber den Wendepunktsargumenten ω auf P die Doppelelemente der auf φ durch das Einheitsbüschel ausgeschnittenen Involution entsprechen, so gilt:

π_3) „Gegeben sei irgend eine Curve R. Dann giebt es sechs Kegelschnitte des Einheitsbüschels ihrer Grundtransformation T, die ihren Grundkegelschnitt φ (in den Punkten ω) berühren.

Die Tangenten von φ in den Punkten ω werden von sechs weiteren Kegelschnitten des Einheitsbüschels noch an einer andern Stelle berührt (in den Punkten W).

Diese Punkte W liegen wieder auf der Curve R."

Die sechs weiteren, von den Punkten W an φ gehenden Tangenten besitzen die Argumente r der Restpunkte der Wendetangenten von P.

π_4) Diese Tangenten r von φ berühren aber die Curve R in den Punkten W, wie jetzt gezeigt werden soll.

Es giebt zwölf den Curven R und φ gemeinsame Tangenten. Zu diesen kommt man so.

Eine beliebige Tangente τ von φ treffe R in den Punkten $(\tau\mu_1)$ $(\tau\mu_2)$ $(\tau\mu_3)$ $(\tau\mu_4)$, dann sind andrerseits die μ die Restpunkte der vier Tangenten, die vom Punkte τ der Curve P an sie gehen.

Nun fallen von den vier μ d. h. von solchen vier Tangenten nur in folgenden zwei Fällen zwei zusammen; wenn der Punkt τ von P:

Erstens ein Doppelpunkt (a_i resp. b_i),

Zweitens ein Restpunkt r einer Wendetangente ω ist.

Im letzteren Falle fällt auch der Restpunkt μ einer solchen Tangente mit dem Wendepunkt ω zusammen.

Mithin sind die gemeinsamen Tangenten von R und φ (einmal die drei Tangentenpaare a_i, b_i, die von den Doppelpunkten ausgehen und diese dienten ja gerade ursprünglich zur Bestimmung von φ: andrerseits) die sechs Tangenten r, die R in den Punkten (r, ω) berühren. Dies ist aber Satz (π_4).

164. Es erhebt sich jetzt die allgemeine Frage:

Welche Eigenschaft haben drei Punkte auf R resp. P, die drei andern auf P resp. R in gerader Linie liegenden entsprechen?

Erst nach Beantwortung dieser kann man die Frage nach der Beziehung beider Curven als im Wesentlichen erledigt ansehen.

Der erste Fall ist der einfachere.

Man nehme drei Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf der Curve P in gerader Linie an. Ihre Tangenten an P schneiden drei Restpunktepaare aus; die diesen (nach Satz π_1) entsprechenden Punkte der Curve R werden gesucht (deren Bildpunkte auf φ eben die Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ besitzen).

Dann müssen die Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von φ Seiten eines φ umschriebenen Polvierseits des Einheitsbüschels (von T) sein (cf. Satz β).

Dies liefert mit Hülfe des Satzes (μ) den folgenden:

ρ) „Drei Punkten von P auf gerader Linie entsprechen zunächst auf φ drei Punkte, deren Tangenten (an φ) ein solches Dreiseit bilden, dass ihm ein Kegelschnitt einbeschrieben werden kann, der auf φ und dem Einheitsbüschel ruht (und umgekehrt).

Die diesen drei Punkten von φ vermöge T entsprechenden Bildpunkte auf R sind die gesuchten, den bez. Punkten von P entsprechenden.“

165. Zweitens betrachte man drei Punkte μ_1, μ_2, μ_3 von R auf gerader Linie. Trifft diese φ in dem Punktepaar η_1, η_2, so gehören die drei von den gegebenen Punkten an φ gehenden Tangentenpaare der Involution (zweiten Grades) mit den Doppelelementen η_1, η_2 an.

ρ_1) „Demnach suche man auf P solche drei Punktepaare, die Paare einer auf P gegebenen

Involution (η_1, η_2) sind und deren bez. Verbindungsgeraden ausserdem P berühren. Die Berührungspunkte entsprechen dann den auf R gegebenen drei Punkten μ_1, μ_2, μ_3 (und umgekehrt)."

Demnach reducirt sich die Erledigung unserer Frage auf die Untersuchung einer auf einer Curve P gegebenen gewöhnlichen Involution d. h. genauer der Verbindungsgeraden ihrer Punktepaare auf P.

Da eine Gerade die Curve R in vier Punkten trifft, so haben wir zunächst:

σ) „Ist auf einer Curve P irgend eine gewöhnliche Punktinvolution gegeben, so giebt es vier Tangenten der Curve, die ein Punktepaar der Involution (als Restpunktepaar) aus P ausschneiden."

Die weitere Untersuchung der von den Verbindungsgeraden aller Punktepaare der Involution (auf P) umhüllten Curve würde hier zu weit abführen; es möge genügen, das Hauptresultat, dessen Beweis sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten mittelst des Schnittpunkttheorems von P führen lässt, hier anzuführen.

σ_1) „Gegeben sei auf einer Curve P die Punktinvolution mit den Doppelelementen η_1, η_2. Dann umhüllen die Verbindungsgeraden der Punktepaare der Involution eine rationale Curve dritter Klasse I.

Diese berührt die Curve P an sechs Stellen (b).

Die bezüglichen Tangenten an P haben die Eigenschaft, dass der Berührungspunkt mit einem der Restpunkte ein Paar der Involution bildet.

Die Punkte (b) sind zugleich diejenigen von P, für die die sie mit dem in der Involution entsprechenden Punkte verbindende Gerade zusammenfällt mit einer der beiden, für die von den drei Restpunkten zwei ein Paar der Involution bilden.

Ausserdem hat die Curve I noch die vier ausgezeichneten Tangenten des Satzes (σ), sowie die beiden Tangenten η_1, η_2 an P mit P gemein.

Desgleichen hat die Curve I noch vier Punkte P mit P gemein, für die die beiden von P ausgehenden und ein Punktepaar der Involution (das P nicht enthält) ausschneidenden Geraden coincidiren.

Auf diese Weise setzen sich die 16 gemeinsamen Punkte und die 18 gemeinsamen Tangenten zusammen, was das Schema erläutert:

$$16 = 2.6 + 4$$
$$18 = 2.6 + 4 + 2.$$

Es giebt eine Doppeltangente der Curve I, die aus P zwei Punktepaare der Involution ausschneidet.

Dem entspricht, dass die Gerade (η_1, η_2) der T-Ebene von zwei Kegelschnitten des Einheitsbüschels berührt wird, und daher die Berührungspunkte ein Paar von T bilden."

Die Beziehung zwischen den beiden Curven P und I ist aber einer höchst merkwürdigen Umkehrung fähig, auf die ich an andrer Stelle mal näher einzugehen gedenke und die hier nur folgendermaassen angedeutet sein soll.

Da die Curve I rational ist, so lässt sich auch auf ihr ein Parameter λ in bekannter Weise ausbreiten. Dann gilt der Satz:

σ_2) „Es giebt eine bestimmte symmetrische*) Verwandtschaft zweiten Grades ($a_{ik} = a_{ki}$)

*) Daher kann man die Form (22) auch so schreiben, dass sie als vom zweiten Grade in den Grössen $(\lambda + \mu)$, $(\lambda\mu)$ erscheint.

$$(22)\quad \lambda^2 (a_{00}\,\mu^2 + a_{01}\,\mu + a_{02}) + \lambda\,(a_{10}\,\mu^2 + a_{11}\,\mu + a_{12}) + (a_{20}\,\mu^2 + a_{21}\,\mu + a_{22}) = 0,$$

die auf die Tangenten von I angewandt, als Schnittpunkte der der Verwandtschaft angehörigen Tangentenpaare (λ, μ) wieder rückwärts die Punkte der Curve P erzeugt.

Geht man umgekehrt von einer beliebigen rationalen Curve dritter Klasse I nebst einer beliebigen symmetrischen Verwandtschaft (22) auf ihr aus, so gelangt man so zu einer Curve P, für die es dann wieder eine bestimmte Involution

$$(23)\quad \alpha_0 + \alpha_1 (\lambda + \mu) + \alpha_2\,\lambda\mu = 0$$

giebt, vermöge deren man nach Satz σ_1) wieder zur Curve I zurückgelangt."

166. Zum Schluss runden wir unsere allgemeinen Betrachtungen über das Verhältniss der Curven R und P dahin ab, dass wir letzterer, deren Lage bis dahin ganz irrelevant war, eine canonische Lagenform geben.

τ) „Man kann als Curve P (deren Schnittpunkttheorem mit Hülfe des Grundkegelschnitts φ zugleich die Transformation T darstellte) diejenige *Klassen*curve P nehmen, die aus dem Grundkegelschnitt der Curve R, als Klassenkegelschnitt aufgefasst, vermöge der zu T genau dualistischen Transformation T′ hervorgeht."

In der That erhält man dann eine Klassencurve P, deren drei Doppeltangenten die Argumentenpaare $(a_i\ b_i)$ und deren Restpunktepaare die Argumentenpaare $(\alpha_i\ \beta_i)$ erhalten, was genügt, um sie statt der ursprünglichen Curve P zu substituiren.

Dann kann man das Verhältniss zwischen den Curven R und P so formuliren:

φ) „**Ist in einer Ebene ein Dreieck und ein beliebiger (nicht zerfallender) Grundkegelschnitt φ gegeben, so ist damit sowohl die Punkttransformation T gegeben, vermöge deren φ in die Curve *R*, als auch die Geradentransformation T′, vermöge deren φ in die Curve P übergeht.**

Dann stellt irgend ein Punktepaar von T (bezogen auf φ) ein Tangentenquadrupel von P mit gemeinsamem Centrum und irgend ein Geradenpaar von T′ (bezogen auf φ) ein Punktquadrupel von *R* auf gerader Linie dar.

Speciell repräsentiren die Punkte von *R* die Resttangentenpaare der Punkte von P und die Tangenten von P die Restpunktepaare der Tangenten von *R*."

Oder kürzer: „**Die Punkte von *R* resp. die Tangenten von P repräsentiren, auf φ als Normkegelschnitt bezogen, das Schnittpunkttheorem von P resp. *R*.**"

167. Auf die grosse Zahl der besondern Fälle, in denen die Curven *R*, P specielle Singularitäten aufweisen, soll hier nicht näher eingegangen werden: nur ein Fall von besonderer Wichtigkeit möge zur Sprache kommen, um die Betrachtungen der Nr. 33, die damals von der Projektion einer cubischen Raumcurve auf eine Ebene zuerst auf die quadratische Transformation der dort erwähnten Natur führte, jetzt in ein helleres Licht zu stellen.

Besitzt nemlich die Curve P eine dreifache Tangente (cf. über die dazu nöthige Bedingung pg. 184), so ist der Grundkegelschnitt φ dem Fundamentaldreieck einbeschrieben (u. umg.), dann geht die reciproke Curve *R* in eine solche mit drei Spitzen über.

In diesem Falle (und nur in diesem) existirt ein φ umschriebenes **Poldreiseit** des Einheitsbüschels. Die Einheitsgeradenpaare werden unbestimmt, wie ja auch daraus folgt, dass die Coefficienten von u_0^2, u_1^2, u_2^2 in der Klassengleichung von φ verschwinden (cf. Formel 21).

Mithin ist die Transformation T erst nach Annahme eines beliebigen ihr angehörigen Punktepaares *) bestimmt.

Wählt man als solches den sich selbst entsprechenden Punkt, der den drei Verbindungsgeraden der Dreiecksecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten angehört, so ist man damit genau auf die Transformation der Nr. 33 gekommen.

Construirt man für jede Ecke zu der bez. Verbindungsgeraden (in Bezug auf das Paar der bez. Dreiecksseiten) den vierten harmonischen Strahl, so sind die Eckpunkte dieses neuen Dreiecks die drei weiteren Einheitspunkte von T.

Derjenige Kegelschnitt φ_1, der diese drei vierten harmonischen Strahlen in den Ecken des Dreiecks berührt, ist

---

*) Besitzt die dreifache Tangente von P die Argumente α, β, γ und wird

$$(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4) \equiv \psi\,(\lambda)$$

gesetzt, so hat das Schnittpunkttheorem von P die Form (cf. Nr. 113):

$$p_1\ \psi(\alpha) + p_2\ \psi(\beta) + p_3\ \psi(\gamma) = 0$$

$$q_1\ \psi(\alpha) + q_2\ \psi(\beta) + q_3\ \psi(\gamma) = 0.$$

Der Willkürlichkeit der Grössen $(pq)_{ik}$ entspricht die Willkürlichkeit des für T noch anzunehmenden Punktepaares. Zwischen diesen Grössen und den Constanten ν der Transformation T bestehen drei bilineare Beziehungen.

Trotzdem der Grundkegelschnitt φ für die Transformation T der Nr. 33 eine specielle Lage hat, so erkennt man doch leicht, dass sich jede andere Transformation T auf sie (mit Hülfe einer speciellen Collineation) zurückführen lässt, denn es gilt der Satz:

„Die allgemeinste quadratische ein- eindeutige, aber nicht involutorische Transformation der Ebene lässt sich immer zusammensetzen aus jener speciellen Transformation T und einer allgemeinen Collineation.“

Dieser Satz liegt der Nr. 34 implicite zu Grunde.

wieder umgekehrt der Grundkegelschnitt einer bestimmten Transformation T_1, die das Schnittpunkttheorem einer Curve P mit drei Wendetangenten (also einer zur Curve R, die vermöge T dem Kegelschnitt φ entsprach, gerade dualistischen) darstellt.

Mit Hülfe des Satzes pg. 179 formulirt sich das Hauptresultat für unsern Specialfall so:

ψ) „Die Transformation T der Nr. 33 ist das Bild des Schnittpunkttheorems einer Curve P mit dreifacher Tangente $(\alpha\,\beta\,\gamma)$, für die einer der Doppelpunkte die Argumente (ξ, η) besitzt, die zu $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ aequianharmonisch sind."

Sehen wir zum Schluss noch, wie sich der Gang von der allgemeinen nicht-involutorischen Transformation T zu der letzterwähnten Specialtransformation T vollzieht.

Die erstere ist bekanntlich gegeben durch die Relationen:

$$24)\quad \rho x_i = \frac{k_i}{y_i} = \frac{k_i}{a_{ix}} = \frac{k_i}{a_{i0}\,x_0 + a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2}\quad (i = 0,\ 1,\ 2)$$

wo die x resp. y sich auf die beiden verschiedenen Coordinatendreiecke (zweier als verschieden gedachter, sich deckender Ebenen) beziehen.

Durch diejenige Collineation, vermöge der die Seiten des zweiten Dreiecks in die bezüglichen des ersten hineinfallen, entsteht eine involutorische Transformation T:

$$25)\quad \rho x_i = \frac{k_i'}{x_i}$$

wo die k' noch ganz willkürliche Constanten sind.

χ) „Dieser zweifachen Willkürlichkeit entspricht einmal, dass man als *Grundkegelschnitt* φ der Transformationen T (25) der Reihe nach jeden *)

*) Es mag dabei noch einmal betont werden, dass dann (für jeden Einheitspunkt) die Coefficienten der Quadrate der u in der Klassengleichung

dem x-Dreieck einbeschriebenen wählen kann; in andrer Hinsicht das zweifach ausgedehnte System der *Collineationen*, die bei festem x-Dreieck der Reihe nach jeden Punkt der Ebene zum *Einheitspunkt* der Coordinatenbestimmung machen."

In der That ist bei fest gewähltem Kegelschnitt φ nach der oben mitgetheilten Construktion der Einheitspunkt bestimmt und umgekehrt bei fest gewähltem Einheitspunkt der zugehörige Kegelschnitt.

Werfen wir dagegen einen Rückblick auf die Behandlung der Curven R in diesem §., so war das Eigenthümliche der Betrachtungsweise im Wesentlichen folgendes.

Wir haben früher (§. 2 ff.), als wir von einer festen, gegebenen Curve R d. h. ihrer Gleichung $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ ausgingen, die ausser den (11) Constanten der Curve noch drei weitere, die der Willkürlichkeit der Parametervertheilung auf der Curve zu Grunde liegen, enthielten, das Schnittpunkttheorem der Curve so abgeleitet, dass wir mittelst einer ganz beliebigen allgemeinen Collineation acht Constanten der Curve eliminirten, wie dies ja a priori vorauszusehen war. Demnach hängt das Schnittpunkttheorem der Curve nur noch von den (drei) ternären absoluten Invarianten derselben nebst denselben drei weiteren Constanten ab, wie die gegebene Parametergleichung der Curve. Die Elimination der letzteren ergiebt aber die absoluten Invarianten des Schnittpunkttheorems, oder nach den Entwicklungen des §. 11 die absoluten Invariant-Combinanten der Gruppe der Schnittpunktformen.

Demnach muss es immer möglich sein, mittelst des Schnittpunkttheorems und einer ganz bestimmten Colli-

---

jedes Kegelschnitts φ verschwinden, mithin ihre Verhältnisse, die ja nach (21) den Verhältnissen der k' gleich sind, unbestimmt, d. h. willkürlich sind.

neation umgekehrt zu der ursprünglichen, festen Curve (auch ihrer ganzen Lage in der Ebene nach) zurückzukehren.

ω) „Dies ist aber im Laufe der Entwicklung in der Art geschehen, dass wir das Doppelpunktsdreieck der Curve R zum Fundamentaldreieck der durch das Schnittpunkttheorem der Curve bestimmten Transformation T wählten und als den noch verfügbaren Grund- (Norm-) Kegelschnitt derselben den Grundkegelschnitt der Curve. Dann ist die vermöge T dem Kegelschnitt φ entsprechende Curve R gerade wieder die gegebene.

Der Willkürlichkeit der Parameterbestimmung auf φ entspricht vollständig die der analogen auf R und umg.“

Natürlich ist dies nicht die einzige (eindeutige) Art der Reconstruktion der Curve aus ihrem Schnittpunkttheorem: man hätte z. B. auch drei der Doppeltangenten, gerade wie oben die drei Doppelpunkte zu Grunde legen können.

Man sieht, dass bei dieser unserer Auffassung die 11 Constanten der Curve sich zerlegen in $6 + 5$, von denen die ersteren auf die Lage dreier Punkte in der Ebene, die letzteren auf die Lage des Normkegelschnitts gehen.

Auf die merkwürdigen Beziehungen, die sich für die rationalen Curven höherer Ordnung (und im Raume etc.) bei weiterer Ausdehnung unseres Verfahrens zwischen reinen Argumenten- und reinen Lagensätzen ergeben, gedenke ich bei künftiger Gelegenheit näher einzugehen.

Was endlich die schon bekannte Theorie der Curven R (bes. vierter Ordnung) angeht, so verweise ich vor Allem auf die wichtige Abhandlung des Herrn Brill (Math. Ann. XII), sowie auf die Arbeiten[55] von Em. Weyr: dagegen betreffs der quadratischen Transformation auf die Lehrbücher wie auf die Arbeiten[56] von Rosanes, Aschieri, Battaglini.

Wir kommen nunmehr zur letzten und wichtigsten Partie des zweiten Capitels, die die Involutionen vierter Ordnung auf den cubischen Raumcurven von Neuem aufnimmt, um die tiefeingreifende Wichtigkeit der ersteren für die letztere wenigstens in den Hauptzügen darzulegen.

Abschnitt IV.

Die biquadratische Involution auf der cubischen Raumcurve. Zweiter Theil.

§. 28.

Das Schnittpunkttheorem der R_4^2 im Raume.

168. Dieser Theil untersucht des Genaueren die biquadratischen Involutionen mit (sechs) gemeinsamen Elementenpaaren, sowie die sich daran anschliessenden geometrischen Configurationen.

Wir knüpfen wieder an das Schnittpunkttheorem (pg. 239 Formel Nr. (6)) der Curven R_4^2 an. Man verfährt zunächst, wie bei Aufstellung der H-Kegelschnitte (cf. Nr. 51) und eliminirt λ_4. Dann sind die Elemententripel der dreigliedrigen Gruppe (2) (pg. 239) gegeben durch

$$(1) \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3, & a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 + a_4 s_3, \\ b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3, & b_1 s_0 + b_2 s_1 + b_3 s_2 + b_4 s_3 \end{vmatrix}$$

$$\equiv s_0^2 p_{01} + s_1^2 p_{12} + s_2^2 p_{23} + s_3^2 p_{34} + s_0 s_1 p_{02} + s_1 s_2 p_{13} + s_2 s_3 p_{24}$$
$$+ s_0 s_2 (p_{03} - p_{12}) + s_0 s_3 (p_{04} - p_{13}) + s_1 s_3 (p_{14} - p_{23}) = 0,$$
$$\text{wo } p_{ik} = (ab)_{ik}.$$

Aus den zwischen den p_{ik} herrschenden Relationen der Nr. 155, aus denen man jetzt als linear unabhängige etwa diejenigen drei aussuche, die den Index 0, 2, 4 resp. nicht aufweisen, folgt: