CAPITOLO VII.

Figure variabili; inviluppi.

§ 1. Limiti di figure variabili.

1. Intenderemo sempre per *figura,* o *campo di punti,* ogni insieme di punti. Diremo *distanza d'un punto* A *da una figura* F il limite inferiore delle distanze dal punto A da tutti i punti della figura F. Essa può anche essere la minima distanza del punto A dai punti della figura, e questo avverrà certamente se i punti della figura formano un campo chiuso. La distanza del punto A dalla figura F sarà nulla quando A appartiene alla figura data, ovvero al campo limite di essa.

Una figura si può considerare o come fissa o come variabile. Diremo *limite d'una figura variabile* F il luogo dei punti le cui distanze dalla figura F hanno per limite zero.

Già si è definito (Cap. I, 2) il limite d'una retta e d'un piano; è facile lo scorgere che le definizioni allora date coincidono coll'attuale, ove la retta ed il piano si considerino come figure. Si è pure definito il limite d'un cerchio o d'una sfera variabili; si può dimostrare che anche quelle definizioni concordano coll'attuale. Invero suppongasi che il piano π, il centro C ed il raggio r d'un cerchio C variabile abbiano per limiti π_0, C_0, r_0, piano, centro, raggio d'un cerchio fisso C_0; dico che il primo cerchio (considerato come luogo di punti) ha per limite il secondo. Infatti la distanza δ d'un punto A dal cerchio variabile è espressa da $\delta = \sqrt{\overline{AH}^2 + (HC - r)^2}$, ove H sia il piede della perpendicolare abbassata da A sul piano π. Ora, detto H_0 il piede della perpendicolare abbassata da A su π_0, il limite di H è H_0 (Cap. I, § 1°); quindi il limite di δ è $\sqrt{\overline{AH_0}^2+(H_0C_0-r_0)^2}$, ossia è la distanza δ_0 di A dal cerchio fisso C_0. Pertanto il limite di δ sarà o non sarà nullo secondochè A sta o non sta sul cerchio C_0, ossia il cerchio C_0 è il luogo dei punti, le cui distanze dal cerchio variabile C hanno per limite zero, vale a dire C_0 è il limite di C. In modo analogo si ragionerebbe per le sfere.

2. Una figura, nello spazio, si può definire come luogo dei punti P, le cui coordinate cartesiane soddisfano ad una o a più equazioni della forma $f(z,y,z)=0$, ove supporremo i primi membri funzioni continue, ed aventi derivate parziali. Sotto certe condizioni, una di quelle equazioni determina una superficie, due determinano una linea, e tre alcuni punti. La figura così determinata sarà costante o variabile secondochè le quantità $f(x, y, z)$ non dipendono, ovvero dipendono pure da altre variabili. Noi ci occuperemo brevemente delle figure date mediante equazioni, ed enuncieremo su esse le tre proposizioni seguenti:

I. Essendo $F(t)$ la figura definita dall'equazione $f(x,y, z, t)=0$, la quale figura è variabile con t, allora, col tendere di t a t_0, ogni punto della figura limite di $F(t)$ appartiene alla $F(t_0)$; viceversa ogni punto della figura $F(t_0)$ appartiene alla figura limite di $F(t)$, se, corrispondentemente ad esso, non sono nulle ad un tempo $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$.

Infatti, sia P_0 un punto della figura limite di $F(t)$, e siano x_0, y_0, z_0 le sue coordinate. Allora la distanza del punto P_0 dalla figura F avrà per limite zero; quindi anche la distanza di P_0 da qualche punto P di F avrà per limite zero, ossia il punto P di F tende a P_0. Siano x, y, z le coordinate di questo punto. Poichè esso appartiene alla figura F, sarà $f(x, y, z, t)=0$. Facciasi tendere t a t_0; x, y, z tendono a x_0, y_0, z_0 e $f(x, y, z, t)$ tende a $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$; ma siccome $f(x, y, z, t)$ è sempre nullo, sarà anche il suo limite

$f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$, ossia il punto P_0 appartiene appunto alla figura $F(t_0)$.

Viceversa, se P_0 è un punto di $F(t_0)$, cioè se $f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$, e se una delle derivate di f rispetto ad x, y, z, p. e. $\frac{df}{dx}$ non è nulla, allora l'equazione $f(x, y_0, z_0, t) = 0$ fra le due variabili x e t, che è soddisfatta da $x = x_0$ e $t = t_0$, determina x quale funzione continua di t, che per $t = t_0$ assume il valore x_0. Quindi il punto P di coordinate x, y_0, z_0 appartiene alla figura $F(t)$, perchè le sue coordinate soddisfano all'equazione $f(x, y, z, t) = 0$; inoltre col tendere di t a t_0 il punto P tende a P_0, e la distanza P_0P tende a zero. Ma la distanza di P_0 dalla F non è maggiore di P_0P; dunque la distanza del punto P_0 dalla figura $F(t)$ tende a zero, e P_0 è un punto del limite di questa figura variabile.

Se il punto P_0 appartenesse alla $F(t_0)$, ma per esso si annullassero tutte le derivate parziali di f rispetto alle sue coordinate, occorrerebbe uno studio ulteriore per riconoscere se questo punto appartenga, ovvero non alla figura limite di F.

In modo analogo si dimostrano queste proposizioni:

II. Se la figura $F(t)$ è definita dalle equazioni

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(x, y, z, t) = 0$$

i punti della figura limite di $F(t)$, ove t tenda a t_0, appartengono alla figura $F(t_0)$. Viceversa ogni punto di $F(t_0)$, pel quale non siano nulli ad un tempo i determinanti della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz} \end{matrix} \right\| ,$$

appartiene alla figura limite di $F(t)$.

III. Se la figura $F(t)$ è definita dalle equazioni $f(x,y,z,t) = 0$,

$\varphi(x,y,z,t)=0$, $\psi(x,y,z,t)=0$, col tendere di t a t_0, i punti limiti di $F(t)$ appartengono ad $F(t_0)$. Viceversa, ogni punto di $F(t_0)$ è un punto limite di $F(t)$, se, corrispondentemente ad esso non è nullo il determinante formato colle derivate parziali di f,φ,ψ rispetto a xyz.

3. Come applicazione delle cose precedenti, tratteremo da un nuovo punto di vista le tangenti a curve ed i piani tangenti a superficie.

Sia F una linea od una superficie, e P_0 un punto di essa. Si immagini la figura omotetica della F, con centro di omotetia in P_0 e con rapporto di omotetia r. Col crescere indefinitamente di r, questa figura omotetica tende nei casi più comuni verso un limite. Esso è in generale la tangente alla linea, od il piano tangente alla superficie F; ma può anche essere, in casi speciali, una figura più complicata, cui potremo dare in ogni caso il nome di *figura tangente* alla F nel suo punto P_0.

Sia dapprima

$$(1)\qquad f(x,y)=0$$

un'equazione fra le coordinate xy d'un punto P del piano, la quale rappresenti una linea. Se P_0 è un punto di questa linea, e x_0 y_0 sono le sue coordinate, sarà $f(x_0,y_0)=0$. Quindi l'equazione della linea si può pure scrivere

$$(2)\qquad f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$$

ossia, sviluppando colla formula di Taylor,

$$(3)\qquad \left(\frac{df}{dx}+\alpha\right)(x-x_0)+\left(\frac{df}{dy}+\beta\right)(y-y_0)=0,$$

ove α e β sono infinitesimi con $x-x_0$ e $y-y_0$. Si faccia ora la figura omotetica della linea data, con centro d'omotetia in P_0, e con rapporto r. Dette XY le coordinate dal punto Q omotetico di P, sarà $X - x_0 = r(x - x_0)$, $Y - y_0 = r(y - y_0)$, e l'equazione della figura omotetica diventa

$$\left(\frac{df}{dx} + \alpha\right) \frac{X - x_0}{r} + \left(\frac{df}{dy} + \beta\right) \frac{Y - y_0}{r} = 0,$$

ovvero

$$(4) \qquad \left(\frac{df}{dx} + \alpha\right) (X - x_0) + \left(\frac{df}{dy} + \beta\right) (Y - y_0) = 0,$$

ove α e β sono infinitesimi con $\frac{X - x_0}{r}$ e $\frac{Y - y_0}{r}$. Si passi ora al limite, facendo crescere indefinitamente r; α e β hanno per limite zero, e l'equazione (4) ha per limite la

$$(5) \qquad \frac{df}{dx}(X - x_0) + \frac{df}{dy}(Y - y_0) = 0,$$

e, per quanto si disse, la figura definita da quest'equazione è effettivamente il limite della figura definita dall'equazione (4), se le derivate della (5) rispetto X ed Y, cioè $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ non sono nulle ad un tempo. In questa ipotesi, la (5) rappresenta una retta, che è la tangente alla curva data (V. pag. 78); dunque il limite della figura omotetica della curva data, con centro d'omotetia in un punto P_0 della curva, e con rapporto d'omotetia crescente indefinitamente, è la tangente alla curva in quel punto.

Ma se $\frac{df}{dx} = 0$ e $\frac{df}{dy} = 0$, l'equazione (5) diventa un'identità, e non rappresenta più alcuna linea. Se sono nulle le derivate parziali di f degli ordini 2°, 3°,... $(n-1)$°, ma non sono nulle tutte quelle d'ordine n, l'equazione (2), ove si sviluppi colla formula di Taylor, diventa:

$$(3') \qquad \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}(x - x_0)^n + n\,\frac{d^n f}{dx^{n-1}\,dy}(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{d^n f}{dy^n}(y - y_0)^n\right]_\theta = 0,$$

ove le derivate parziali d'ordine n corrispondono a valori delle variabili della forma $x_0 + \theta(x - x_0)$ e $y_0 + \theta(y - y_0)$, compresi rispettivamente fra x_0 e x, y_0 e y. L'equazione della figura omotetica è in questo caso

$$(4') \quad \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f}{dx^n}(\mathrm{X} - x_0)^n + n\frac{d^n f}{dx^{n-1}\,dy}(\mathrm{X} - x_0)^{n-1}(\mathrm{Y} - y_0) + \ldots + \frac{d^n f}{dy^n}(\mathrm{Y} - y_0)^n\right]_\theta = 0,$$

e passando al limite questa equazione diventa

$$(5') \quad \frac{d^n f}{dx^n}(\mathrm{X} - x_0)^n + n\frac{d^n f}{dx^{n-1}\,dy}(\mathrm{X} - x_0)^{n-1}(\mathrm{Y} - y_0) + \ldots + \frac{d^n f}{dy^n}(\mathrm{Y} - y_0)^n = 0,$$

ove le derivate corrispondono ai valori $x_0\,y_0$ delle variabili. È noto dalla geometria analitica che questa equazione rappresenta delle rette reali passanti per P_0, il cui numero è compreso fra 0 ed n. Per quanto si è detto, ciascheduna di queste rette appartiene effettivamente al limite della figura omotetica della curva data, se pei suoi punti non sono nulle ad un tempo le due derivate del primo membro dell'equazione (5′) rispetto ad X ed Y.

Con ragionamento analogo si dimostra che se l'equazione

$$f(x,y,z) = 0$$

rappresenta nello spazio una superficie, il limite della figura omotetica di questa superficie, con centro in suo punto P_0 e con rapporto crescente indefinitamente, è la figura rappresentata dall'equazione

$$\frac{df}{dx}(\mathrm{X} - x_0) + \frac{df}{dy}(\mathrm{Y} - y_0) + \frac{df}{dz}(\mathrm{Z} - z_0) = 0,$$

se $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ non sono nulle ad un tempo; cioè questo limite è il piano tangente alla superficie in P_0. Ma se le derivate parziali di f degli ordini 1°, 2°,... $(n-1)^{mo}$ sono nulle, il limite della figura omotetica della superficie soddisfa all'equazione

$$\sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \frac{d^n f}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma} (X - x_0)^\alpha (Y - y_0)^\beta (Z - z_0)^\gamma = 0,$$

la quale rappresenta un cono di vertice P_0; ed ogni punto di questo cono apparterrà effettivamente a questa figura limite se per esso non si annullano ad un tempo le tre derivate parziali del primo membro di questa equazione rispetto a X, Y, Z.

§ 2. Inviluppi di curve nel piano.

4. Sia $F(t)$ una linea variabile in un piano fisso, la quale dipenda da una variabile numerica t. Dati a t due valori t e $t+h$, le linee $F(t)$ e $F(t+h)$ si possono incontrare in alcuni punti. Col tendere di h a zero questi punti si muovono sulla $F(t)$ e tendono in generale a posizioni limiti, che diremo punti d'incontro della linea considerata colla consecutiva, o colla infinitamente prossima. Su ogni linea del sistema possono esistere alcuni di tali punti; il loro insieme forma un luogo geometrico che diremo *inviluppo* dalle curve del sistema proposto; queste diconsi *inviluppate*.

La linea $F(t)$ sia data mediante un'equazione

$$f(x, y; t) = 0 \tag{1}$$

fra le coordinate cartesiane xy d'un punto nel piano e la variabile t. La linea $F(t+h)$ sarà data dall'equazione

$$f(x, y; t+h) = 0 \tag{2}$$

ed i punti comuni alle due linee sono quelli le cui coordinate soddisfano alle equazioni (1) e (2).

Al sistema di queste due equazioni si possono sostituire le

$$f(x, y; t) = 0, \quad \frac{f(x, y; t+h) - f(x, y; t)}{h} = 0.$$

Facciasi tendere h a zero; al limite le equazioni precedenti diventano

(3) $$f(x, y; t) = 0, \quad f'_t(x, y; t) = 0$$

e, per le cose precedentemente dimostrate, i limiti dei punti d'incontro delle $F(t)$ e $F(t+h)$ debbono soddisfare alle equazioni (3); viceversa, se un punto soddisfa a queste equazioni, esso sarà il limite di qualche punto d'incontro delle due curve date, se per esso non è nullo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{df}{dx} & \dfrac{df}{dy} \\ \dfrac{d^2f}{dx\,dt} & \dfrac{d^2f}{dy\,dt} \end{vmatrix}.$$

Supposto pertanto Δ non nullo, le equazioni (3) determinano in funzione di t le coordinate di punti della linea inviluppata; eliminando t fra queste equazioni, si ha l'equazione della linea cercata.

5. Una notevole proprietà di questi inviluppi è la seguente. Se P è un punto d'incontro della curva $F(t)$ sua consecutiva, le tangenti in P a questa curva e all'inviluppo, sotto certe condizioni, coincidono. Invero, il rapporto direttivo $\frac{dy}{dx}$ della tangente alla curva del sistema si otterrà dall'equazione

(α) $$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy = 0,$$

la quale si ricava differenziando la (1), considerando ivi la t come costante, supposto però che $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ non siano ad un tempo nulle. Per avere il rapporto direttivo della tangente all'inviluppo, si può risolvere la seconda delle equazioni (3) rispetto a t, il che è possibile se $\frac{d^2f}{dt^2} \gtrless 0$; poi sostituire questo valore di t nella prima delle equazioni (3); essa diventa l'equazione dell'inviluppo.

La si differenzi, ricordando che t è funzione di x ed y; si avrà

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dt}dt = 0.$$

Ma poichè $\frac{df}{dt} = 0$, in virtù delle (3), l'equazione precedente diventa identica alla (α), perciò i rapporti $\frac{dy}{dx}$ corrispondenti all'inviluppante e all'inviluppata coincidono, e coincidono pure le tangenti a queste curve.

Come caso particolare, se le linee variabili sono rette, esse saranno le tangenti all'inviluppo.

Si è visto che il centro di curvatura d'una curva piana è il punto d'incontro di due normali successive. Quindi il luogo di questi centri di curvatura, che si è chiamato l'evoluta della curva data, non è altro che l'inviluppo delle sue normali. Si ritrova così che le normali alla curva proposta sono le tangenti alla sua evoluta.

6. Esempio. — Vogliasi determinare l'inviluppo d'una retta AB, di lunghezza costante, la quale si muove in guisa che i suoi due estremi scorrono su due assi ortogonali Ox e Oy.

Scelti per assi cartesiani gli assi Ox, Oy, detto α l'angolo che la perpendicolare abbassata da O su AB fa coll'asse delle x, e ρ la lunghezza di questa perpendicolare, l'equazione della retta AB è

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - \rho = 0. \tag{1}$$

Sia a la lunghezza costante del segmento AB. Sarà

$$\text{OA} = a\operatorname{sen}\alpha, \quad \text{e} \quad \rho = a\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha;$$

quindi, sostituendo, l'equazione della retta indefinita AB, il cui segmento intercetto fra gli assi è a, diventa

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0, \tag{2}$$

la quale non dipende che dal solo parametro α. Applicando la regola precedente, il punto di contatto della retta AB ha coordinate che soddisfanno all'equazione (2), ed a quella che si ottiene differenziandola rispetto al parametro α, supponendo fissi x ed y; la nuova equazione è

$$(3) \qquad -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha - a(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0.$$

Ricavando da queste equazioni x ed y, si ha

$$(4) \qquad x = a\operatorname{sen}^3\alpha, \quad y = a\cos^3\alpha.$$

Così si hanno le coordinate del punto P in funzione della variabile α. Volendo l'equazione della curva descritta da P, basta eliminare α fra le due equazioni (4) il che si ottiene elevandole alla potenza $\frac{2}{3}$ e sommando.

Si ricava

$$(5) \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

e, fatti sparire gli irrazionali, si ottiene

$$(6) \qquad (x^2 + y^2 - a^2)^3 - 27a^2x^2y^2 = 0.$$

7. Applicando il metodo precedentemente spiegato per la ricerca degli inviluppi, possono presentarsi alcune singolarità che esamineremo brevemente.

Può avvenire che le due equazioni $f(x, y; t) = 0$ e $f'_t(x, y; t) = 0$, pel valore considerato di t non abbiano alcuna soluzione comune; allora conchiuderemo che non esistono punti d'intersezione della linea corrispondente al valore considerato di t colla successiva. Questo può avvenire o perchè quella linea non è incontrata dalle linee vicine, ovvero perchè, esistendo questi punti d'intersezione, essi non tendono ad alcun limite. Se ciò avviene per ogni valore di t, allora le linee date non hanno inviluppo.

Può avvenire che le equazioni precedenti $f = 0$ e $f'_t = 0$ abbiano una soluzione, ma che, per essa, il determinante denominato Δ sia nullo. In questo caso il punto, le cui coordinate soddisfanno a queste due equazioni, può alcune volte essere, ed altre volte non essere il limite d'un punto d'incontro della linea considerata del sistema con una sua consecutiva. Un esempio basterà a rischiarare questo caso.

Sia l'equazione

$$y-(x-t)^3=0$$

la quale, attribuendo a t un valore qualunque, rappresenta una parabola cubica, e variando t, rappresenta infinite parabole cubiche che sono posizioni parallele d'una qualunque di esse. Annullando la derivata del primo membro rispetto a t, secondo la regola indicata, si ha

$$(x-t)^2=0$$

da cui si ricava $x=t$; e sostituendo a t questo suo valore nella prima equazione, si ha come equazione risultante $y=0$, che rappresenta l'asse delle x. Però questa linea non si può considerare come l'inviluppo delle curve del sistema, secondo la definizione data dell'inviluppo. Invero due curve qualunque $y-(x-t)^3=0$, $y-(x-t')^3=0$ non possono avere alcun punto comune, se t è diverso da t'. Però la linea così trovata riesce ancora tangente a tutte le parabole del sistema. Il determinante Δ è in questo caso nullo per ogni valore di t.

Avviene alcune volte che, per ogni valore di t, esistano dei valori di x ed y che soddisfino ad un tempo alle due equazioni $\frac{df}{dx}=0$ e $\frac{df}{dy}=0$, e che questi valori di x ed y siano funzioni continue di t (in questo caso ogni curva del sistema ha dei punti singolari). Allora si può riconoscere che sarà anche $\frac{df}{dt}=0$, e il risultato dell'eliminazione di t fra le equazioni $f=0$ e $\frac{df}{dt}=0$ contiene anche il luogo dei punti singolari delle curve del sistema. In questo caso (in cui di necessità $\Delta=0$) questi punti possono essere ovvero non i limiti dei punti d'intersezione delle curve del sistema, e il loro luogo può essere ovvero non tangente alle medesime.

Infine può avvenire che sia $\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$. Si consideri p. e. l'equazione $\varphi(x, y) + t\psi(x, y) = 0$, ove f e ψ sono funzioni ben definite di x ed y. Differenziandola rispetto a t si avrà $\psi(x, y) = 0$, che congiunta alla precedente, dà luogo alle due equazioni $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$. Queste non contengono più la variabile t; le soluzioni comuni sono indipendenti da t. I punti così determinati sono comuni a tutte le curve del sistema (le quali curve formano un fascio); in questo caso non ha più significato la ricerca se l'inviluppo sia o non tangente alle curve del sistema.

§ 3. Inviluppi di superficie.

8. Nei sistemi di superficie si hanno a considerare due sorta di inviluppi, secondochè ogni superficie del sistema dipende da una o da due variabili numeriche indipendenti.

Sia $F(t)$ una superficie variabile, la quale dipenda da un parametro t. Dati a t due valori t e $t + h$, le due superficie corrispondenti si incontrano in generale secondo una linea; tendendo h a zero, questa linea si muove sulla prima superficie e tende ad una posizione limite, che dicesi intersezione della superficie $F(t)$ colla consecutiva, ovvero la *caratteristica* della superficie.

Su ogni superficie del sistema esiste in generale una di queste linee. Il loro insieme forma una superficie cui si dà il nome di *inviluppo* delle superficie date. Queste diconsi anche inviluppate da quella.

La superficie $F(t)$ sia rappresentata dall'equazione

$$f(x, y, z; t) = 0 \tag{1}$$

fra le coordinate cartesiane $x\, y\, z$ d'un punto e la variabile t. L'intersezione delle superficie $F(t)$ e $F(t + h)$ sarà data dalle equazioni $f(x, y, z; t) = 0$ e $f(x, y, z; t + h) = 0$, ovvero dalle

$$f(x, y, z; t) = 0, \quad \frac{f(x, y, z; t + h) - f(x, y, z; t)}{h} = 0, \tag{2}$$

Facendo tendere h a zero, esse diventano

$$(3) \qquad f(x, y, z; t) = 0 \quad f'_t(x, y, z; t) = 0$$

e, per proposizioni dimostrate, la linea definita da queste due equazioni sarà effettivamente il limite della linea definita dalle (2), se per tutti i suoi punti non sono ad un tempo nulli i determinanti della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{d^2f}{dt\,dx} & \frac{d^2f}{dt\,dy} & \frac{d^2f}{dt\,dz} \end{matrix} \right\|.$$

Se fra le equazioni (3) si elimina il parametro t, si avrà l'equazione dell' inviluppo.

Si può anche qui dimostrare che, nei casi più comuni, l'inviluppo è tangente alle superficie inviluppate.

Invero la giacitura del piano tangente alla superficie (1) è determinata dai valori di $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$, supposto che questi non siano tutti nulli. Se $\frac{d^2f}{dt^2}$ non è nullo, dalla seconda delle equazioni (3) si può ricavare t in funzione di $x\,y\,z$, e, sostituito il suo valore nella prima delle (3), si avrà l'equazione dell'inviluppo. Il piano tangente all'inviluppo è definito dalle tre derivate parziali di $f(x,y,z,t)$ rispetto ad x, y, z, ove a t si sia sostituito il suo valore; esse sono

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dy}, \quad \frac{df}{dz} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dz},$$

e poichè $\frac{df}{dt} = 0$, si riducono a $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$; quindi i piani tangenti alle due superficie coincidono.

Tre superficie del sistema $F(t_1)\,F(t_2)\,F(t_3)$ si incontrano in generale in un gruppo di punti, le cui coordinate soddisfano alle tre equazioni

$$f(x, y, z; t_1) = 0, \quad f(x, y, z; t_2) = 0, \quad f(x, y, z; t_3) = 0,$$

e quindi anche alle equazioni

$$f(x,y,z;t_1)=0, \quad f(x,y,z; t_1 t_2) = 0, \quad f(x, y, z; t_1 t_2 t_3) = 0,$$

ove i primi membri della seconda e terza equazione sono le funzioni interpolari di primo e secondo ordine di f rispetto a t. Facendo tendere t_1 t_2 e t_3 ad uno stesso valore t, le equazioni precedenti diventano $f(x, y, z; t) = 0$, $f'_t(x, y, z; t) = 0$, $f''_t(x, y, z; t) = 0$, cui debbono soddisfare i limiti dei punti d'incontro delle tre superficie del sistema; e viceversa i punti che soddisfano a queste equazioni sono effettivamente i punti limiti, se è verificata la condizione enunciata dal Teor. III del N. 2. Questi punti si possono pure considerare come i limiti dell'intersezione della caratteristica corrispondente ad una superficie del sistema, con una superficie consecutiva.

Variando t, questi punti descrivono una curva, detta *spigolo di regresso* della superficie inviluppo. Si dimostra con ragionamento analogo ai precedenti che in generale le caratteristiche sono tangenti allo spigolo di regresso nei punti loro comuni.

Come esempio, se le superficie variabili sono i piani normali ad una curva gobba, le caratteristiche sono gli assi dei piani osculatori; lo spigolo di regresso è formato dai centri delle sfere osculatrici.

9. Sia $F(u, v)$ una superficie la quale dipenda da due variabili numeriche u e v. Le superficie $F(u, v)$ e $F(u + h, v + k)$ si incontrano in generale secondo una linea, la quale, col tendere di h e k a zero, l'una indipendentemente dall'altra, non tende verso una linea, ma verso un gruppo discreto di punti; vale a dire esiste un gruppo di punti sulla superficie $F(u, v)$ pei quali ha per limite zero la distanza dalla curva intersezione delle $F(u, v)$ e $F(u+h, v+k)$, comunque si facciano tendere h e k a zero.

Sia

(1) $$f(x, y, z; u, v) = 0$$

l'equazione della superficie $F(u, v)$. Supponendo v costante e variabile u, i punti limiti dell'intersezione della (1) colla superficie

$$f(x, y, z; u+h, v) = 0$$

dovranno, per le cose dette soddisfare anche all'equazione $\frac{df}{du} = 0$.

Analogamente i punti limiti dell'intersezione della (1) colla

$$f(x, y, z, u, v+k)$$

debbono soddisfare alla equazione $\frac{df}{dv} = 0$. Pertanto i punti limiti dell'intersezione della superficie (1) colla superficie $f(x, y, z; u + h, v+k) = 0$, ove si facciano tendere arbitrariamente h e k a zero, debbono soddisfare, oltre alla (1), alle equazioni

(2) $$\frac{df}{du} = 0, \quad \frac{df}{dv} = 0.$$

Se fra le equazioni (1) e (2) si eliminano u e v, si avrà una equazione cui soddisfano i punti dell'inviluppo.

Si può riconoscere che l'inviluppo è generalmente tangente alle superficie inviluppate. Invero la giacitura del piano tangente alla superficie inviluppata è data dalle tre derivate parziali della (1) rispetto x, y, z, ove u e v si considerino costanti. La giacitura del piano tangente all'inviluppo è data dalle tre derivate parziali della (1) rispetto ad x, y, z, ove ad u e v siano sostituiti i loro valori che si suppongono ricavati dalle (2). Ora, poichè $\frac{df}{du} = 0$ e $\frac{df}{dv} = 0$, i valori di queste derivate parziali in ambe le ipotesi coincidono, e coincidono pure i piani tangenti.

10. Esempio. — Determinare l'inviluppo dei piani che tagliano da un dato angolo triedro un tetraedro di volume costante.

Presi per assi di riferimento gli spigoli Ox Oy Oz del triedro, la equazione

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1}$$

rappresenta un piano che taglia sugli assi i segmenti $a, b, c,$ e il quale determina colle faccie del triedro un volume

$$V=\frac{1}{6}\Delta abc, \tag{2}$$

ove Δ rappresenta il volume del parallelepipedo costrutto su tre segmenti eguali all'unità di misura, e diretti secondo gli assi. Essendo V dato, delle tre variabili a, b, c che compaiono nella equazione (1) due sole sono variabili indipendenti, poichè fra esse passa la relazione (2). Pertanto, per trovare l'inviluppo dei piani (1) basterà eguagliare a zero le due derivate parziali della (1) rispetto alle due variabili indipendenti, tenendo conto che la terza è funzione delle altre due data dall'equazione (2). Questo, com'è noto, equivale ad eguagliare i rapporti delle derivate parziali delle (1) e (2) rispetto alle tre variabili a, b, c; si ha così

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{bc}=\frac{\frac{y}{b^2}}{ca}=\frac{\frac{z}{c^2}}{ab},$$

ovvero, semplificando

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c};$$

ossia, in virtù della (1), ciascheduna delle quantità $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ vale $\frac{1}{3}$, cioè

$$x=\frac{a}{3}, \quad y=\frac{b}{3}, \quad z=\frac{c}{3}. \tag{3}$$

Queste sono le coordinate del punto di contatto del piano col suo inviluppo. Esse dicono che questo punto è il baricentro dei tre punti d'incontro del piano cogli spigoli del tetraedro.

Volendosi l'equazione della superficie inviluppo, basterà eliminare a, b, c fra le equazioni (2) e (3); si ha così

$$xyz = \frac{2}{9} \frac{V}{\Delta}.$$

§ 4. Rette e piani variabili.

11. Finora si è essenzialmente considerato come variabile un punto, il quale descrive una linea od una superficie secondochè la sua posizione è funzione di una o di due variabili numeriche. Ora potremo considerare come elementi variabili una retta od un piano, e studiare gli enti geometrici che essi generano variando. Premetteremo alcune definizioni.

Sia O un punto fisso, ed r un numero dato; ad ogni punto P dello spazio si faccia corrispondere un punto Q tale che

$$\overline{OQ} \equiv r\overline{OP}.$$

Se P descrive una figura, anche Q descriverà una figura, che dicesi *omotetica* (simile e similmente posta) della prima, con *centro di omotetia* in O, e con *rapporto di omotetia* eguale ad r.

Se P′ e Q′ è una nuova coppia di punti omologhi, sarà

$$\overline{OQ'} \equiv r\overline{OP'},$$

e sottraendo, si ottiene

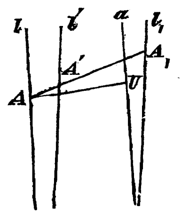
$$\overline{QQ'} \equiv r\overline{PP'};$$

ossia i segmenti omologhi PP′ e QQ′ sono paralleli, ed il loro rapporto è ancora r. Di qui si deduce che se P descrive una retta, il suo omologo Q descrive pure una retta parallela alla prima; e se P descrive un piano, il suo omologo descrive un piano parallelo al primo.

12. Sia l una retta variabile, la cui posizione è funzione d'un numero t. Dati a t i valori t e $t+h$, e dette l ed l' le posizioni corrispondenti della retta, si prenda sulla retta l un punto A, e si immagini la retta l_1 omotetica di l', con centro di omotetia in A e con rapporto di omotetia eguale ad $\frac{1}{h}$. Alla retta limite della l_1, ove si faccia tendere h a zero, daremo il nome di *retta polare* di l nel suo punto A. Se col tendere di h a zero, l' ha per limite l, la retta l_1, che è parallela ad l', ha per limite una parallela alla l, ossia la polare d'una retta in un suo punto è una parallela alla retta data.

Fra le polari d'una retta nei suoi varii punti e le derivate di punti che stanno sulla retta passano notevoli relazioni, enunciate nelle proposizioni che seguono.

TEOREMA I. — Se A è un punto funzione di t, avente derivata $\mathbf{u} \equiv \mathrm{AU}$, e l è una retta, funzione continua di t, passante sempre per A, la polare di l nel punto A è la retta a parallela ad l passante pel punto U termine della derivata di A.



Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e dette A, l e A', l' le posizioni corrispondenti del punto e della retta, si faccia

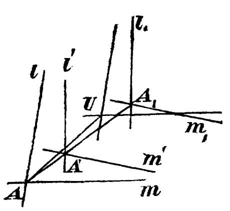
$$\mathrm{AA}_1 \equiv \frac{1}{h}\,\mathrm{AA}',$$

e sia l_1 la omotetica di l' con centro di omotetia in A, e con rapporto di omotetia $\frac{1}{h}$. La retta l_1 passa per A_1. Si faccia tendere h a zero; AA_1 ha per limite la derivata AU del punto A; il punto A_1 ha per limite U; e la retta l_1, che passa per A_1 ed è parallela ad l', ha per limite la retta a passante per U e parallela ad l; dunque questa è la polare di l nel suo punto A.

TEOREMA II. — Se A è il punto d'intersezione della retta variabile l con una linea fissa C, o con una superficie fissa S, aventi rispettivamente tangente o piano tangente, e se l ha in A la polare a, la derivata del punto A ha per termine il punto d'intersezione di a colla tangente alla C, o col piano tangente alla S.

Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e dette l, A e l', A' le posizioni corrispondenti della retta e del punto, si faccia $AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA'$, e sia l_1 l'omotetica di l' con centro A e con rapporto $\frac{1}{h}$; la retta l_1 passa per A_1. Si faccia tendere h a zero; la retta l_1 ha per limite la a polare di A; e se A sta su una curva C, la $AA'A_1$ ha per limite la tangente alla C in A; e A_1 punto d'intersezione di AA' colla l_1 ha per limite il punto U d'intersezione della tangente alla C in A colla retta a. Se A sta su d'una superficie S, la retta $AA'A_1$ è contenuta in un piano avente per limite il piano tangente, e A_1 punto d'intersezione di questo piano variabile colla l_1 ha per limite il punto d'intersezione U del piano tangente colla a. Dunque in ogni caso la AA_1 ha per limite la AU, ossia il punto A ha per derivata AU, ed il suo estremo U è il punto d'intersezione della retta a, polare di A, colla tangente alla C, o col piano tangente alla S nel punto considerato.

Teorema III. — Se A è il punto d'intersezione delle rette variabili l ed m funzioni di t, aventi polari nel punto A, questo loro punto d'intersezione ha derivata, il cui termine è il punto d'intersezione delle polari di l ed m in A.



Infatti, dette l, m, A e l', m', A' le posizioni delle rette e del punto corrispondenti ai valori t e $t+h$ della variabile, e fatto $AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA'$, se l_1 ed m_1 sono le rette omotetiche di l' ed m' ottenute col metodo solito, le rette l_1 ed m_1 si incontrano in A_1; fatto tendere h a zero, le l_1 ed m_1 hanno per limiti le polari delle l ed m in A, ed il punto A_1 ha per limite il punto U d'intersezione di queste polari; quindi il segmento AA_1 ha per limite AU, e questa è la derivata di A;

dunque A ha derivata, ed il suo estremo U è il punto d'intersezione delle polari di l ed m in A, c. v. d.

13. Teorema IV. — Se dei punti A B C d'intersezione della retta variabile l con tre piani paralleli fissi $\alpha\beta\gamma$, due hanno derivata AU e BV, anche il terzo ha derivata CW, e gli estremi U, V, W di queste derivate sono in linea retta.

Infatti, il punto C della retta AB si può considerare come il baricentro dei punti A e B, ove ad essi si affiggano pesi convenienti m ed n; quindi, detto O un punto dello spazio, sarà

$$(m+n)\,\mathrm{OC} \equiv m\mathrm{OA} + n\mathrm{OB}.$$

Data alla variabile t un nuovo valore $t+h$, e dette l', A′, B′, C′ le nuove posizioni della retta e dei suoi punti d'intersezione coi piani fissi, A′ B′ C′ si possono considerare come proiezioni parallele di A B C su l'; e quindi sarà ancora

$$(m+n)\,\mathrm{OC'} \equiv m\mathrm{OA'} + n\mathrm{OB'}.$$

Sottraendo da questa equipollenza la precedente, si ha:

$$(m+n)\,\mathrm{CC'} \equiv m\mathrm{AA'} + n\mathrm{BB'},$$

e dividendo per h

$$(m+n)\,\frac{\mathrm{CC'}}{h} \equiv m\,\frac{\mathrm{AA'}}{h} + n\,\frac{\mathrm{BB'}}{h}.$$

Facciasi tendere h a zero; i segmenti $\frac{\mathrm{AA'}}{h}$ e $\frac{\mathrm{BB'}}{h}$ hanno per limiti le derivate AU e BV dei punti A e B; quindi anche C ha derivata CW data dalla formula

$$(m+n)\;\mathrm{CW} \equiv m\mathrm{AU} + n\mathrm{BV};$$

aggiungendo a questa equipollenza la prima, si ha

$$(m+n)\,\mathrm{OW} \equiv m\mathrm{OU} + n\mathrm{OV},$$

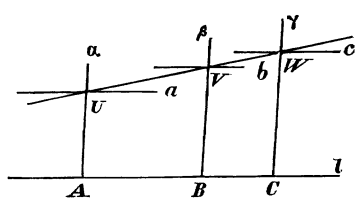
la quale dice che W si può considerare come il baricentro di U e V coi pesi m ed n, e quindi U, V, W sono in linea retta.

Dal teorema precedente si deduce che se una retta l ha rette polari a e b in due suoi punti A e B, essa ha retta polare c in ogni altro suo punto C, e la costruzione di c si ottiene a questo modo:

Si conducano per A, B, C tre piani paralleli, α, β, γ; il primo incontri la polare a in U, e il secondo la polare b in V; si conduca la UV, che incontri il terzo piano γ in W. La retta c condotta per W parallelamente ad a è la polare di l in C.

Infatti, poichè la retta l ha polari a e b nei punti A e B, i punti d'intersezione di questa retta coi piani α, β hanno derivata, le quali in virtù del teorema II sono AU e BV. Quindi, pel teorema precedente, anche il punto C d'intersezione della l col piano γ ha derivata, che è la CW, e perciò (teorema I) la retta l ha polare in C, che è la c.

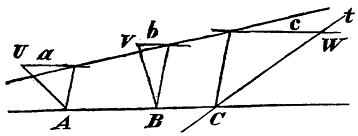
Se la retta mobile l sta in un piano fisso, invece di condurre i tre piani paralleli α, β, γ basta segnare le loro intersezioni con questo piano fisso, e si ha la costruzione: si conducano per A B C



tre rette parallele AU, BV, CW; le due prime incontrino nei punti U e V le polari a e b; la retta UV incontri la terza parallela in W; la retta c condotta per W parallelamente ad l è la polare cercata.

14. Le proposizioni ora dimostrate permettono di risolvere molti problemi, in cui si ha a determinare la derivata d'un punto, o la tangente ad una curva. Eccone alcuni esempi.

1° Conoscendo le derivate AU e BV dei punti A e B, determinare la derivata CW del punto C d'intersezione della retta AB con una linea o superficie fissa, della quale si conosce la tangente Ct, o il piano tangente.



Poichè sono note le derivate dei punti A e B, in virtù del teorema I, sono note le polari a e b dalla retta AB nei punti A e B; quindi la retta ABC ha pure polare c nel suo punto C, in virtù dell'ultimo teorema dimostrato; e pel teorema II, è determinata la derivata di C.

2° Conoscendo la derivata del punto P, determinare la derivata della sua proiezione Q fatta da un centro fisso O su d'un piano fisso π.

Questo problema non è che caso particolare del precedente, ove ai punti A B C sono sostituiti i punti O P Q, ed alla superficie un piano π, e si ha la costruzione seguente.

Sia PU la derivata di P; si segni la retta p passante per U e parallela ad OP (la quale retta è la polare di OPQ in P); si immaginino due piani α e β paralleli passanti per P e Q; il primo incontri p in P_1; la OP_1 incontri il piano β in Q_1; sia q la retta passante per Q, e parallela ad OPQ (la quale q è la polare di OPQ in Q); la q incontri il piano π in V. Sarà QV la derivata di Q. La costruzione precedente si può semplificare prendendo convenientemente i piani paralleli α e β, la cui giacitura è arbitraria; si può p. e. assumere per β lo stesso piano π.

3° In un piano fisso sono segnati tre punti ABC e due linee l_1 ed l_2. Da A si conduca una retta ad incontrare l_1 in P e l_2 in Q; le rette BP e CQ si incontrino in R.

Conoscendo le tangenti alle linee l_1 ed l_2, trovare la tangente alla linea che descrive R.

Poichè A è fisso, e P ha derivata nota, è determinata la derivata di Q, in virtù del problema 1°; inoltre, poichè sono note le derivate dei punti B e P della BPR, è nota la polare di questa retta in R; per la stessa ragione è nota la polare di CQR in R; e quindi, pel teorema III, è nota la derivata del punto R, e la direzione di questa derivata è la direzione della tangente alla curva che esso descrive.

4° Una retta l ruota in un piano fisso attorno ad un punto fisso A; l'angolo α che questa retta fa con una retta fissa AB è data funzione della variabile t; trovare la polare della retta in un suo punto qualunque P.

Se il punto P si muove colla retta l mantenendosi ad una distanza fissa da A, esso descrive un cerchio; e la derivata di questo punto, ossia del segmento AP, è un segmento PU normale ad AP ed in lunghezza eguale alla lunghezza di AP moltiplicatá per la derivata $\frac{d\alpha}{dt}$. Per U si conduca la parallela ad AP; sarà questa la polare della retta in P.

5° In un piano fisso, due rette AP e BP ruotano intorno ai punti fissi A e B. Gli angoli α e β che esse fanno colla retta fissa AB sono date funzioni di t; trovare la derivata del punto P d'incontro delle due rette.

Pel problema che precede, sono note le polari delle rette AP e BP nel punto P; quindi (teorema III) è determinata la derivata del punto P. La costruzione è la seguente. Sia PU un segmento normale ad AP ed eguale in lunghezza ad $AP\frac{d\alpha}{dt}$; sia PV un segmento normale a BP ed eguale in lunghezza a $BP\frac{d\beta}{dt}$. Le parallele ad AP e BP condotte rispettivamente per U e V si incontrino in W. Sarà PW la derivata di P, e la sua direzione è la direzione della tangente alla curva descritta da P.

Se si fa ruotare la figura PUVW attorno a P d'un angolo retto, i segmenti PU e PV vengono a coincidere in direzione con AP e BP, e la nuova direzione di PW è normale alla curva; si deduce così una costruzione della normale alquanto più semplice di quella della tangente.

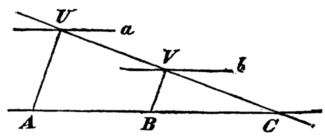
6° La retta l passa pel punto variabile P, ed è parallela ad una retta fissa m. Conoscendo la derivata di P, trovare la polare di l in un suo punto qualunque.

Sia PU la derivata di P; siano A e B due punti fissi su m. Si faccia $PQ \equiv AB$. Sarà Q un punto di l. Essendo O un'origine arbitraria, si avrà $PQ \equiv OQ - OP$, e quindi $OQ \equiv OP + AB$. Si derivi questa equipollenza; osservando che la derivata di OP è PU, detta QV la derivata di Q, si deduce $QV \equiv PU$; quindi la parallela alla l condotta per V è la polare cercata. Si osservi che la retta UV è appunto questa polare, ossia una retta che si sposta conservandosi sempre parallela ad una retta fissa ha la medesima polare in tutti i suoi punti.

15. Inviluppi di rette nel piano. La posizione della retta l nel piano sia funzione della variabile t. Variando t, la l assume infinite posizioni, il cui insieme determina un *inviluppo*. Per brevità diremo *punto di contatto* della retta coll'inviluppo il punto d'incontro della retta colla successiva, e diremo *normale* all'inviluppo della retta l la perpendicolare alla retta nel suo punto di contatto coll'inviluppo. Così, se le rette del sistema inviluppano una vera curva, queste espressioni riacquistano i soliti significati; ma se p. e. la retta ruota attorno ad un punto fisso, il punto di contatto della retta coll'inviluppo sarà il punto fisso, e la normale all'inviluppo sarà la perpendicolare alla retta variabile nel punto fisso. Due rette consecutive l ed l' del sistema hanno due bissetrici; ed è chiaro che, col tendere di l' ad l, una ha per limite la l stessa, e l'altra bissetrice ha per limite la normale all'inviluppo della l; quindi la normale all'inviluppo della retta l è il limite del luogo dei punti equidistanti da due rette consecutive del sistema.

Il punto di contatto della retta l coll'inviluppo, ove siano note le polari della l nei suoi punti, si può costrurre colla seguente regola:

Se a e b sono le polari della retta l nei suoi due punti A e B, condotte per A e B due rette parallele AU e BV, che incontrino le polari a e b in U e V, la retta UV, se non è parallela nè coincide colla l, la incontra in un punto C, che è il punto d'intersezione della l colla retta successiva del sistema.



Infatti, la retta l', corrispondente al valore $t+h$ della variabile, incontri le parallele AU e BV in A$'$ e B$'$. Fatto $AA_1 \equiv \frac{1}{h} AA'$, e $BB_1 \equiv \frac{1}{h} BB'$, le rette AB, A$'B'$, e A_1B_1 passano per uno stesso punto. Si faccia tendere h a zero. I segmenti AA_1 e BB_1 hanno per limiti AU e BV; la A_1B_1 ha per limite la UV; ed il punto d'intersezione di AB con A$'$B$'$, cioè di AB con A_1B_1, ha per limite il punto d'incontro della AB colla UV, c. v. d.

Si osservi che la polare della l nel suo punto C coincide colla retta l stessa. Quindi, variando la retta l ed il punto corrispondente C dell'inviluppo, se C ha derivata non nulla, l'estremo di questa derivata deve trovarsi sulla stessa retta l e la derivata di C avrà la direzione della l; ossia la l è tangente alla curva descritta da C, cioè al proprio inviluppo. Si riconoscerà che C ha una derivata non nulla se p. e. si riconosce che la retta UVC ha nel punto C una polare distinta da essa, poichè in questo caso la derivata di C è data dal teorema III del N. 2. Adunque, sotto le condizioni enunciate, le rette l sono tangenti al loro inviluppo nei punti corrispondenti.

16. Molte questioni riferentisi agli inviluppi si possono trattare con considerazioni geometriche.

È noto che se in un piano si hanno due figure ABC.... e A′B′C′.... eguali e dello stesso senso, e se due segmenti corrispondenti AB e A′B′ non sono equipollenti, esiste nel piano un punto S tale che le figure SABC.... e SA′B′C′.... sono ancora eguali e dello stesso senso. Il punto S dista egualmente da tutte le coppie di punti omologhi, come AA′, BB′, ..., e quindi si trova sulla perpendicolare nel punto medio di ogni segmento che unisce una coppia di punti omologhi; lo stesso punto dista pure egualmente da ogni coppia di rette omologhe, come AB e A′B′, e quindi giace sulla bissetrice esterna dell'angolo di due rette omologhe. Se si fa ruotare la figura ABC.... attorno ad S finchè A venga in A′, la prima figura viene a coincidere colla seconda.

Suppongasi ora che una figura piana, di forma invariabile, si muova nel proprio piano, e che la sua posizione sia funzione d'un numero t; attribuiti a t due valori t e $t+h$, e detto S il punto attorno a cui ruotando la figura, essa passa dalla prima alla seconda posizione, avviene nei casi più comuni, che, col tendere di h a zero, il punto S tenda ad un limite O. A questo punto O si da il nome di *centro d'istantanea rotazione* della figura.

Noi ci assicureremo dell'esistenza di questo punto O, e lo determineremo, se due rette passanti per S tendono verso posizioni limiti non parallele nè coincidenti, e l'intersezione di queste rette limiti è il punto O. Così noi sappiamo che se AA′ sono due posizioni d'uno stesso punto della figura mobile, la perpendicolare nel punto medio di AA′ passa per S, e il limite di questa perpendicolare è la normale alla linea descritta da A. Sappiamo pure che la bissetrice esterna di due posizioni d'una stessa retta della figura passa per S, ed il limite di questa bissetrice è la normale all'inviluppo della retta.

Adunque, se si conoscono le normali alle linee descritte da due punti della figura, ovvero le normali al luogo d'un punto, e all'inviluppo d'una retta, od infine le normali all'inviluppo di due rette, e queste normali non sono nè parallele nè coincidenti, il loro punto d'incontro è il centro O d'istantanea rotazione.

Così determinato il punto O, la normale al luogo descritto da ogni punto della figura, come pure la normale all'inviluppo d'ogni retta della figura passa per O.

17. Ecco alcune applicazioni del centro d'istantanea rotazione per determinare tangenti a curve; e punti di inviluppi.

1° Un segmento AB di lunghezza costante si muove in guisa che i suoi estremi scorrono su due linee date, di cui si conoscono le tangenti; determinare la tangente alla linea descritta da un punto C invariabilmente connesso con A e B, e il punto di contatto della retta AB col suo inviluppo.

Il centro d'istantanea rotazione della figura ABC è il punto S d'incontro delle normali alle linee descritte da A e B; quindi la SC è la normale alla linea descritta da C, e la proiezione di S su AB è il punto di contatto di AB col suo inviluppo.

La seconda questione fu già trattata al N. 8. Si dimostra che, se A e B scorrono su due assi $0x$ ed $0y$, ogni punto C connesso invariabilmente con A e B descrive un'ellisse.

2° Un segmento AB di lunghezza costante si muove nel piano. Conoscendo la tangente alla linea descritta da A, ed il punto di contatto della AB col suo inviluppo, determinare la tangente alla linea descritta da B.

La normale al luogo del punto A, e la normale all'inviluppo della retta AB, cioè la normale ad AB nel suo punto di contatto coll'inviluppo, si incontrano nel centro d'istantanea rotazione S; SB è la normale al luogo del punto B.

Come caso speciale, se la retta AB passa per un punto fisso O, il punto B descrive la concoide della linea descritta da A, e si ottiene così la costruzione della tangente alla concoide già data al Cap. II, 19.

3° Due rette *a* e *b* variabili comprendono un angolo costante. Conoscendo i punti di contatto di queste rette col loro inviluppo, determinare la tangente alla linea descritta dal loro punto d'incontro M.

Le normali agli inviluppi delle rette *a* e *b* si incontrano nel centro d'istantanea rotazione S; sarà SM la normale al luogo del punto M. (V. Cap. II, eserc. 9).

Come caso speciale, se l'angolo compreso fra le rette date è retto, e se una di queste rette OM passa per un punto fisso O, mentre l'altra MP inviluppa una curva, e P è il punto di contatto, il luogo del punto M è la *podaria* della curva inviluppata dalla MP, con polo in O. Formato il rettangolo OMPS, la diagonale MS è la normale alla podaria. (V. Cap. II, eserc. 7).

4° Due rette OM ed MP comprendono un angolo retto; la retta OM passa pel punto fisso O, e il punto M descrive una curva di cui si conosce la tangente. Determinare il punto P di contatto della MP col suo inviluppo.

La normale ad OM in O e la normale alla curva descritta da M si incontrano nel centro d'istantanea rotazione S; il punto cercato P è la proiezione di S sulla MP.

Si osservi che l'inviluppo delle rette MP ha per podaria la curva descritta da M.

18. Un numero U può essere funzione della posizione d'una retta *l* nel piano. Così son funzioni della posizione di *l* i numeri che misurano le sue distanze da punti fissi, ed ogni funzione analitica di tali distanze. Le rette del piano per cui la funzione U ha un valore costante inviluppano in generale una linea. Per determinare il punto di contatto delle rette del sistema coll'inviluppo può servire il seguente

Teorema. — Se h_1 h_2 .... h_n sono, in un piano fisso, le distanze della retta variabile l dai punti fissi A_1 A_2 .... A_n, ed U è funzione di queste distanze

$$U = f(h_1, h_2, \dots h_n),$$

la retta l tocca l'inviluppo delle rette per cui U ha uno stesso valore nel punto che è la proiezione sulla l del baricentro dei punti A_1 A_2 .... A_n, cui siano affissi i numeri $\frac{df}{dh_1}$, $\frac{df}{dh_2}$, ... $\frac{df}{dh_n}$.

Infatti siano l ed l' due posizioni della retta; Δh_1, Δh_2 .... Δh, e ΔU le differenze dei valori delle distanze h_1 h_2 ....h_n, e della loro funzione U corrispondenti alle due posizioni della retta.

Sarà

$$\Delta U = \left(\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1\right) \Delta h_1 + \left(\frac{df}{dh_2} + \epsilon_2\right) \Delta h_2 + \dots + \left(\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n\right) \Delta h_n.$$

Sia S il baricentro dei punti A_1 A_2 .... A_n cui siano affissi i numeri $\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1$, ... $\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n$. Indicando con p la distanza di l da S sarà

$$\left(\frac{df}{dh_1} + \frac{df}{dh_2} + \dots + \frac{df}{dh_n} + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n\right) p =$$
$$= \left(\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1\right) h_1 + \left(\frac{df}{dh_2} + \epsilon_2\right) h_2 + \dots + \left(\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n\right) h_n.$$

Sostituendo alla l la l', e sottraendo le formule ottenute, si ha

$$\Sigma \left(\frac{df}{dh_i} + \epsilon_i\right) \Delta p = \Sigma \left(\frac{df}{dh_i} + \epsilon_i\right) \Delta h_i;$$

e quindi

$$\Delta U = \Sigma \left(\frac{df}{dh_i} + \epsilon_i\right) \Delta p.$$

Se ora le rette l ed l' sono tali che $\Delta U = 0$, dovrà pure essere $\Delta p = 0$, e le rette l ed l' distano egualmente da S. Si faccia tendere l' verso l. Le quantità Δh_1, Δh_2, ... ϵ_1, ϵ_2, ... hanno per limite zero; il punto S baricentro di $A_1 \ldots A_n$ colle masse $\frac{df}{dh_1} + \epsilon_1$, ... $\frac{df}{dh_n} + \epsilon_n$, ha per limite il punto O baricentro di A_1 .... A_n colle masse $\frac{df}{dh_1}$, ... $\frac{df}{dh_n}$. Pertanto un punto S equidistante dalle rette ll' ha per limite il punto O; dunque la perpendicolare abbassata da O sulla l è la normale all'inviluppo della l, ed il suo piede è il punto di contatto della l col suo inviluppo.

19. Superficie rigate. Una retta l mobile nello spazio, la cui posizione dipenda dai valori d'una variabile numerica t, descrive una superficie rigata.

Il piano tangente alla superficie in un punto A d'una generatrice l è il piano che passa per A e per la polare a di l nel suo punto A. Invero, sia A' un altro punto della superficie, per cui passa la generatrice l', corrispondente al valore $t+h$ della variabile numerica t. Detta l_1 la retta omotetica di l' con centro di omotetia in A, e con rapporto $\frac{1}{h}$, i punti AA' e le rette $l' l_1$ giacciono in uno stesso piano. Facciasi tendere A' verso A; la retta l_1 ha per limite la retta a, polare di l in A; e il piano A A' $l' l_1$ ha per limite il piano A a. Pertanto per ogni retta che unisce il punto A con un altro punto A' della superficie si può condurre un piano A $l' l_1$ che, col tendere di A' verso A, ha per limite il piano A a; dunque (pag. 117) questo è il piano tangente alla superficie in A.

Se la retta mobile l ha le polari a e b in due suoi punti A e B, essa avrà polare in ogni altro suo punto, e quindi risulta determinato il piano tangente in ogni punto della generatrice. Per quanto si è detto, la costruzione del piano tangente in un terzo punto C è la seguente. Si conducano per A e B due piani paralleli α e β che incontrino le polari a e b in U e V; la retta U V incontra il piano γ condotto per C parallelamente ai piani α e β in W; per W si conduca la retta c parallela ad l; questa sarà la polare di b in C, e il piano Cc è il piano tangente cercato.

Se le tre parallele l, a, b giacciono in uno stesso piano, giacerà pure in esso la polare c in ogni punto C; perciò i piani tangenti in tutti i punti della generatrice coincidono. Se invece essi non giacciono in uno stesso piano, allora varia il piano tangente in esso; e siccome il piano tangente si ottiene dal punto C mediante proiezioni e sezioni, si conchiude che mentre il punto di contatto descrive sulla generatrice una punteggiata, il piano tangente corrispondente descrive un fascio di piani proiettivo a quella punteggiata.

20. Piani variabili. Le cose dette per le rette variabili si possono applicare con leggere modificazioni ai piani variabili. Noi ci limiteremo a pochi cenni.

Sia π un piano, la cui posizione dipenda da una variabile numerica t. Sia A un punto di π. Si attribuisca alla variabile t un nuovo valore $t+h$, e sia π' il piano corrispondente; si immagini il piano omotetico di π' con centro d'omotetia in A e con rapporto d'omotetia $\frac{1}{h}$. Col tendere di h a zero questo piano tende in generale ad una posizione limite α, parallela a π; al piano α daremo il nome di piano polare di π nel suo punto A.

Si dimostrano con ragionamenti analoghi ai precedenti le proposizioni che seguono.

Se AU è la derivata del punto A e α il piano polare di π in A, il piano α contiene il punto U. Questa proprietà permette di costrurre il piano polare α ove si conosca la derivata del punto A; ovvero di costrurre la derivata del punto A conoscendo il piano polare α, e la direzione della derivata di A. Esso permette pure di costrurre la derivata del punto A d'incontro d'un piano π e d'una retta l, ove in quel punto si conoscano il piano polare α e la retta polare a del piano e retta date; l'estremo della derivata di A è il punto $a\alpha$. Infine, se π, ρ, σ sono tre piani variabili e se α, β, γ sono i loro piani polari nel loro punto comune A, l'estremo della derivata di A è il punto $\alpha\beta\gamma$.

Se α, β, γ sono i piani polari del piano variabile π in tre suoi punti A B C non in linea retta, il piano polare di π in questo suo punto D si costruisce a questo modo: si conducano per A B C D quattro rette parallele $h\,k\,l\,m$; le prime tre incontrino rispettivamente i piani $\alpha\,\beta\,\gamma$ in H K L; il piano H K L incontri la m in M; il piano δ condotto per M, parallelamente a π è il piano cercato. La retta intersezione del piano H K L col piano π è il limite dell'intersezione del piano π con un piano successivo del sistema, ossia è la caratteristica dell'inviluppo dei piani π.

Si consideri infine il sistema di piani per cui ha un valore costante una funzione $f(h_1, h_2, \ldots h_n)$ delle loro distanze $h_1\,h_2 \ldots h_n$ da n punti fissi $A_1\,A_2 \ldots A_n$. Il punto di contatto d'un piano del sistema col suo inviluppo è la proiezione ortogonale su quel piano del baricentro dei punti dati, cui siano affissi i numeri $\frac{df}{dh_1}, \frac{df}{dh_2}, \ldots \frac{df}{dh_n}$. I piani per cui sono costanti due funzioni analitiche f e φ delle loro distanze da n punti dati si possono, in generale, far corrispondere univocamente ad un numero. La caratteristica d'uno dei piani del sistema è la congiungente le proiezioni su quel piano dei due baricentri dei punti dati, cui si immaginano affissi numeri rispettivamente eguali alle derivate parziali di f e φ rispetto a queste distanze.

Esercizii.

1. Dai punti della curva di equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$ si abbassino le perpendicolari sugli assi e si segni la retta che passa pei piedi di queste perpendicolari. L'inviluppo di queste rette ha per equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1.$$

2. L'inviluppo dei cerchi aventi per diametri i raggi vettori condotti da un punto fisso O ai punti d'una curva C è la podaria di C rispetto ad O.

3. L'inviluppo dei cerchi il cui centro sta su d'una curva fissa C, e che pas-

sano per un punto fisso O è la podaria, rispetto ad O, della curva omotetica di C, con centro di omotetia in O, e con rapporto di omotetia eguale a 2.

4. L'inviluppo delle curve di equazione $y^3 - (x - t)^2 = 0$, ove varii t, è l'asse delle x. Le tangenti alle curve del sistema nei punti dell'inviluppo sono normali all'inviluppo.

5. L'evoluta della parabola $y^2 = 2px$ ha per equazione $27py^2 = 8(x - p)^3$.

6. L'evoluta della curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ è $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

7. Dai punti d'un piano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ si abbassano le perpendicolari sugli assi; l'inviluppo dei piani passanti pei piedi di queste perpendicolari ha per equazione $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$.

8. Dai punti della superficie di equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1$ si abbassino le perpendicolari sugli assi; l'inviluppo dei piani passanti pei piedi di queste perpendicolari ha per equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1.$$

9. Dai punti della superficie data nell'esercizio precedente si abbassino le perpendicolari sui piani coordinati; l'inviluppo dei piani passanti pei piedi di queste perpendicolari ha per equazione

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{m}{m+1}} + \left(\frac{z}{2c}\right)^{\frac{m}{m+1}} = 1.$$

10. Ad ogni punto (x, y, z) della superficie $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1$ facciasi corrispondere la superficie di equazione $\left(\frac{X}{x}\right)^p + \left(\frac{Y}{y}\right)^p + \left(\frac{Z}{z}\right)^p = 1$. L'inviluppo di queste superficie ha per equazione

$$\left(\frac{X}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{Y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{Z}{c}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1.$$