CAPITOLO I.

Limiti e derivate geometriche.

§ 1. Dei limiti.

1. I concetti del calcolo infinitesimale, cioè di funzione, limite, derivata, ecc. si possono applicare direttamente, oltrechè ai numeri, e alle grandezze misurabili da numeri, anche agli enti geometrici, come segmenti, aree, posizione d'un punto, d'una retta ecc.

Questi enti geometrici si possono considerare come costanti, o come variabili. E se in una questione compaiono più enti variabili, alcuni si possono considerare come variabili indipendenti, se li possiamo fissare a nostro arbitrio; ed altri come funzioni dei primi, se risultano determinati quando siano fissati i primi. Così noi diremo che la posizione di un punto nello spazio è funzione delle sue coordinate cartesiane; che l'area del triangolo ABC, come pure il piano del triangolo, sono funzioni delle posizioni dei punti ABC, ecc.

2. Diremo che:

1. Il segmento variabile $\mathbf{a}$ ha per limite il segmento fisso $\mathbf{a}_0$, se il valore assoluto della differenza geometrica $\overline{\mathbf{a}-\mathbf{a}_0}$ ha per limite zero.

2. L'area geometrica variabile ω ha per limite l'area fissa ω_0, ed il volume V ha per limite V_0, se il valore assoluto della differenza geometrica $\omega-\omega_0$, ovvero $V-V_0$, ha per limite zero.

3. Il punto variabile A ha per limite il punto fisso A_0, se la distanza A_0A ha per limite zero.

4. La retta variabile r ha per limite la retta fissa r_0, se la distanza d'ogni punto della retta fissa r_0 dalla variabile r ha per limite zero.

5. Il piano variabile π ha per limite il piano fisso π_0, se la distanza d'ogni punto del piano fisso π_0 dal piano variabile π ha per limite zero.

6. Una funzione dicesi continua se il limite della funzione è la funzione del limite.

3. Pei limiti di segmenti, aree e volumi variabili si hanno le proposizioni che seguono.

Teorema I. — Se i segmenti variabili $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ..., in numero finito, hanno per limiti $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, ..., e se i numeri variabili m, n, ... hanno per limiti m_0 n_0 ..., ... allora

$$\lim (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots) \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 + \dots \tag{1}$$

$$\lim m\mathbf{a} \equiv m_0\mathbf{a}_0 , \tag{2}$$

$$\lim (m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + \dots) \equiv m_0\mathbf{a}_0 + n_0\mathbf{b}_0 + \dots, \tag{3}$$

$$\lim \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0, \tag{4}$$

$$\lim \mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}_0.\mathbf{b}_0, \tag{5}$$

$$\lim \mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c} \equiv \mathbf{a}_0.\mathbf{b}_0.\mathbf{c}_0. \tag{6}$$

Per dimostrare la formula (1), pongasi

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{x} , \quad \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0 + \mathbf{y} , \ \dots$$

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots , \quad \mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 + \dots$$

Sarà

$$\mathbf{s} - \mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} + \dots$$

Ora siccome $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... hanno per limiti $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, ..., le differenze $\mathbf{a} - \mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} - \mathbf{b}_0$, ..., ossia $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ... hanno per limite zero; quindi anche la loro somma geometrica $\mathbf{s} - \mathbf{s}_0$, il cui valore assoluto non è maggiore della somma aritmetica dei valori assoluti dei segmenti $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$,..., ha per limite zero, e quindi $\lim \mathbf{s} \equiv \mathbf{s}_0$, c. v. d.

Per la formula (2), pongasi

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{x}, \quad m = m_0 + n, \quad \mathbf{b} \equiv m\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_0 \equiv m_0\mathbf{a}_0.$$

Sarà

$$\mathbf{b} \equiv (m_0 + n)(\mathbf{a}_0 + \mathbf{x}) \equiv m_0\mathbf{a}_0 + m_0\mathbf{x} + n\mathbf{a}_0 + n\mathbf{x},$$

e $\mathbf{b} - \mathbf{b}_0 \equiv m_0\mathbf{x} + n\mathbf{a}_0 + n\mathbf{x}$. Ora poichè $\lim \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0$, e $\lim m = m_0$, si deduce $\lim \mathbf{x} \equiv 0$, e $\lim n = 0$, e quindi $\lim(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0) \equiv 0$, ossia $\lim \mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0$, c. v. d.

La (3) è conseguenza delle formule (1) e (2).

Per la formula (4), posto $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{x}$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_0 + \mathbf{y}$, si ricava

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_0 \times \mathbf{y} + \mathbf{b}_0 \times \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

onde

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{y} + \mathbf{b}_0 \times \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

da cui si ricava immediatamente $\lim \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0$.

In modo analogo si dimostrano le (5) e (6).

Teorema II. — Se il segmento variabile $\mathbf{a}$ ha per coordinate x, y, z rispetto ai segmenti di riferimento fissi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e queste coordinate hanno per limiti $x_0\, y_0\, z_0$, il segmento $\mathbf{a}$ ha per limite il segmento $\mathbf{a}_0$ di coordinate $x_0\, y_0\, z_0$.

Viceversa, se il segmento $\mathbf{a}$ ha per limite $\mathbf{a}_0$, le coordinate di $\mathbf{a}$ hanno per limite le coordinate di $\mathbf{a}_0$.

Infatti, se $\mathbf{a}$ ha per coordinate $x\, y\, z$, sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

e se x, y, z hanno per limiti $x_0\, y_0\, z_0$, si deduce (formula 3)

$$\lim \mathbf{a} \equiv x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} \equiv \mathbf{a}_0.$$

Viceversa, se il segmento $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ha per limite il segmento $\mathbf{a}_0 \equiv x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$, si deduce

$$\lim(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \equiv \lim\left[(x - x_0)\,\mathbf{i} + (y - y_0)\,\mathbf{j} + (z - z_0)\,\mathbf{k}\right] \equiv 0.$$

Si consideri il volume $(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0).\mathbf{j}.\mathbf{k}$. Sarà

$$(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0).\mathbf{j}.\mathbf{k} \equiv (x - x_0)\, \mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k};$$

e siccome il membro di sinistra ha per limite zero, lo stesso avverrà del membro di destra. Ma il volume $\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}$ è finito e non nullo, perchè i segmenti di riferimento sono supposti nè nulli, nè paralleli ad un piano; quindi deve essere $\lim (x - x_0) = 0$, ossia $\lim x = x_0$. In modo analogo si dimostra $\lim y = y_0$, e $\lim z = z_0$.

Teorema III. — Se la lunghezza del segmento $\mathbf{a}$ ha per limite la lunghezza di $\mathbf{a}_0$, e l'angolo $\widehat{\mathbf{a}_0 \mathbf{a}}$ ha per limite zero, il segmento $\mathbf{a}$ ha per limite $\mathbf{a}_0$.

Sia $OA \equiv \mathbf{a}$, e $OA_0 \equiv \mathbf{a}_0$, sarà $A_0A \equiv \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$. Si descriva il cerchio di centro O e di raggio OA_0, e contenuto nel piano A_0OA, e sia B il suo punto d'intersezione colla semiretta OA, in modo che l'arco A_0B sottenda l'angolo $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$. Poichè l'angolo $\mathbf{a}_0\mathbf{a}$ ha per limite zero, anche l'arco A_0B e la sua corda hanno limite zero. Il segmento BA è in grandezza eguale alla differenza delle lunghezze di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_0$, quindi ha pure per limite zero; ed infine $A_0A \equiv A_0B + BA$ ha per limite zero, ossia $\lim \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}$.

4. Le proposizioni che seguono si riferiscono ai limiti di punti.

Teorema I. — Essendo O una origine fissa, se il segmento OP ha per limite OP_0, il punto P ha per limite OP_0. Viceversa, se P ha per limite P_0, il segmento OP ha per limite OP_0.

Infatti, si ha $OP - OP_0 \equiv P_0P$. Quindi, se OP ha per limite OP_0, P_0P ha per limite zero, e P ha per limite P_0. Viceversa, se P ha per limite P_0, P_0P ha per limite zero, e OP ha per limite OP_0.

Di qui si deduce che le ricerche sui limiti di punti si possono ridurre a ricerche sui limiti di segmenti.

Teorema II. — Se le coordinate del punto P hanno per limiti le coordinate del punto P_0, il punto P ha per limite il punto P_0. Viceversa, se il punto P ha per limite P_0, le coordinate di P hanno rispettivamente per limiti le coordinate di P_0.

Infatti, poichè le coordinate del punto P coincidono colle coordinate del segmento OP che va dall'origine O al punto variabile P, questo teorema è conseguenza dei due precedenti.

TEOREMA III. — Se i punti A B.... hanno per limiti $A_0 B_0$..., si ha $lim AB \equiv A_0B_0$, $lim ABC \equiv A_0B_0C_0$, $lim ABCD \equiv A_0B_0C_0D_0$.

Infatti si ha $AB \equiv OB - OA$, $A_0B_0 \equiv OB_0 - OA_0$, e sottraendo $AB - A_0B_0 \equiv B_0B - A_0A$. Se ora A e B hanno per limite A_0 e B_0, $lim A_0A \equiv 0$, e $lim B_0B \equiv 0$; quindi $lim\,(AB - A_0B_0) \equiv 0$, e $lim AB \equiv A_0B_0$.

Si ha $ABC \equiv \frac{1}{2} AB.AC$; e poichè $lim AB \equiv A_0B_0$, e $lim AC \equiv A_0C_0$, si deduce (N. 3, I, formula 5) $lim ABC \equiv \frac{1}{2} A_0B_0.A_0C_0 \equiv A_0B_0C_0$.

Analogamente, poichè $ABCD \equiv \frac{1}{6} AB.AC.AD$, si ha $lim ABCD \equiv \frac{1}{6} A_0B_0.A_0C_0.A_0D_0 \equiv A_0B_0C_0D_0$.

5. Dimostreremo ora alcuni teoremi che riguardano i limiti di rette.

TEOREMA I. — Se le distanze di due punti distinti della retta fissa r_0 dalla retta mobile r hanno per limite zero, la distanza d'ogni altro punto di r_0 da r ha per limite zero, e la retta r ha per limite r_0.

Infatti, siano sulla r_0 i punti distinti A e B; e sia C un altro punto della stessa retta. Si possono determinare due numeri m ed n tali che il punto C risulti il baricentro dei punti A e B coi pesi m ed n (Introd. N. 14), ossia, essendo O un punto qualunque, tali che

$$(m + n)\,OC \equiv m OA + n\,OB.$$

Siano AH, BK e CL le distanze di A B C da r. I punti H, K, L sono le proiezioni di A B C su r, e quindi L è il baricentro di H e K coi pesi m ed n, ossia

$$(m+n)\,\mathrm{OL} \equiv m\mathrm{OH} + n\mathrm{OK}.$$

Sottraendo da questa eguaglianza la precedente, si ottiene

$$(m+n)\,\mathrm{CL} \equiv m\mathrm{AH} + n\mathrm{BK}$$

Se ora $\lim \mathrm{AH} \equiv 0$, e $\lim \mathrm{BK} \equiv 0$, si deduce $\lim \mathrm{CL} \equiv 0$, ossia la distanza d'ogni altro punto C di r_0 da r ha per limite zero, ed r ha per limite r_0.

Teorema II. — Se i punti A e B hanno per limiti i punti A_0 B_0 distinti, la retta AB ha per limite la retta A_0B_0.

Infatti, se i punti A B hanno per limite A_0 B_0, le distanze di A_0 e B_0 dalla retta AB, che in valore assoluto non sono maggiori di A_0A e B_0B, hanno pure per limite zero, e, pel teorema precedente, la retta AB ha per limite A_0B_0.

Viceversa, se la retta l ha per limite l_0, preso su questa un punto ad arbitrio A_0, si può sempre determinare un punto A della retta l che abbia per limite A_0; basta invero prendere per punto A la proiezione normale di A_0 su l; in tal caso A_0A rappresenta la distanza di A_0 dalla retta l, e quindi ha per limite zero.

Teorema III. — Se il punto A ha per limite A_0, e la retta l ha per limite l_0, la retta condotta per A parallelamente ad l ha per limite la retta condotta per A_0 parallelamente ad l_0.

Infatti, sia C_0D_0 una coppia di punti distinti di l_0, e siano CD due punti della l aventi per limiti C_0 e D_0. Si prenda $\mathrm{AB} \equiv \mathrm{CD}$, $A_0B_0 \equiv C_0D_0$. Poichè lim $\mathrm{CD} \equiv C_0D_0$, si deduce $lim \mathrm{AB} \equiv A_0B_0$; e poichè A ha per limite A_0, il punto B ha per limite B_0, e la retta AB ha per limite A_0B_0. Ma la retta AB è la retta condotta per A, e parallela ad l, e la A_0B_0 è la parallela ad l_0, dunque la prima retta ha per limite la seconda, c. v. d.

Teorema IV. — Se le rette variabili l ed m si incontrano sempre in un punto P pure variabile, e le rette l ed m hanno per limite le rette distinte l_0 ed m_0, che si incontrano in P_0, il punto P ha per limite P_0.

Infatti, siano A e B due punti della retta l aventi per limiti i punti A_0 e B_0 di l_0. Poichè i punti ABP e $A_0B_0P_0$ sono in linea retta, si possono determinare due numeri x e x_0 tali che $AP \equiv xAB$, e $A_0P_0 \equiv x_0A_0B_0$. Per determinare effettivamente questi numeri, siano CD due punti della m aventi per limiti i punti C_0 e D_0 di m_0. Poichè i punti CDP e $C_0D_0P_0$ sono in linea retta, sarà $CD.CP \equiv 0$, e $C_0D_0.C_0P_0 \equiv 0$. Ora, poichè $CP \equiv AP - AC \equiv xAB - AC$, l'equazione $CD.CP \equiv 0$, si può scrivere

$$xCD.AB - CD.AC \equiv 0,$$

la quale determina il numero x come rapporto di due aree. In modo analogo x_0 è determinato dalla equazione

$$x_0C_0D_0.A_0B_0 - C_0D_0.A_0C_0 \equiv 0.$$

Si passi al limite; poichè i punti A B C D hanno per limiti A_0 B_0 C_0 D_0, le aree CD.AC e CD.AB hanno per limiti $C_0D_0.A_0C_0$ e $C_0D_0.A_0B_0$, e di queste la seconda non è nulla, poichè, per le ipotesi fatte, i segmenti C_0D_0 e A_0B_0 sono nè nulli nè coincidenti in direzione. Quindi il rapporto x delle due prime aree ha per limite il rapporto x_0 delle seconde; e poichè AB ha per limite A_0B_0, si deduce $lim AP \equiv lim xAB \equiv x_0A_0B_0 \equiv A_0P_0$, e siccome A ha per limite A_0, il punto P ha per limite P_0, c. v. d.

Teorema V. — Se le rette l ed l_0 passano per un punto fisso O, ed l ha per limite l_0, il minimo angolo compreso fra le rette l ed l_0 ha per limite zero, e viceversa.

Invero, sia A_0 un punto di l_0 distinto da O, e A_0A la sua distanza da l ; e sia θ il minimo angolo compreso fra le rette l ed l_0. Si avrà in valor assoluto $A_0A = OA_0 sen\theta$. Quindi se l ha per limite l_0, $lim\, A_0A = 0$, e quindi $lim\, sen\theta = 0$. Viceversa se $lim\theta = 0$, sarà $lim A_0A = 0$, e quindi la distanza d'ogni punto di l_0 da l ha per limite zero, ed l ha per limite l_0.

6. Pei limiti di piani si hanno le proposizioni che seguono.

Teorema I. — Se le distanze di tre punti non in linea retta del piano fisso π_0 dal piano variabile π hanno per limite zero, la distanza d'ogni altro punto di π_0 da π ha per limite zero, e il piano π ha per limite π_0.

Infatti, siano ABC i tre punti non in linea retta di π_0; sia D un altro punto dello stesso piano. Si possono determinare tre numeri m, n, p tali che D risulti il baricentro di A B C coi pesi m, n, p; ossia

$$(m+n+p)\,\mathrm{OD} \equiv m\mathrm{OA} + n\mathrm{OB} + p\mathrm{OC}.$$

Siano AH, BK, CL, DM le distanze di A B C D da π. Saranno H K L M le proiezioni ortogonali di A B C D su π, e M il baricentro di H K L coi pesi $m\ n\ p$, ossia

$$(m+n+p)\,\mathrm{OM} \equiv m\mathrm{OH} + n\mathrm{OK} + p\mathrm{OL};$$

sottraendo da questa eguaglianza la precedente, si ha

$$(m+n+p)\,\mathrm{DM} \equiv p\mathrm{AH} + n\mathrm{BK} + m\mathrm{CL},$$

e se AH, BK, CL hanno per limite zero, anche DM ha per limite zero. Quindi la distanza d'ogni punto D di π_0 da π ha per limite zero, e π ha per limite π_0.

Teorema II. — Se i punti A B C hanno per limiti i punti $A_0\ B_0\ C_0$ non in linea retta, il piano ABC ha per limite il piano $A_0B_0C_0$.

Infatti, le distanze dei punti $A_0B_0C_0$ dal piano ABC sono in valore assoluto non maggiori di A_0A, B_0B e C_0C, le quali hanno per limiti zero, quindi quelle distanze hanno pure per limite zero, e, pel teorema che precede, il piano ABC ha per limite il piano $A_0B_0C_0$.

Viceversa, se il piano π ha per limite π_0, preso su questo un punto ad arbitrio A_0, si può sempre determinare un punto A di π avente per limite A_0; basta invero prendere per punto A la proiezione di A_0 su π.

TEOREMA III. — Se i punti A B ..., e le rette l m ..., e il piano π hanno rispettivamente per limiti A_0, B_0 ..., l_0, m_0 ... π_0, si ha:

a) Se il punto A_0 non sta sulla l_0, il piano passante pel punto A e per la retta l ha per limite il piano passante per A_0 e per l_0.

b) Se la retta l_0 non è parallela ad A_0B_0, il piano passante pei punti A e B, e parallelo alla retta l ha per limite il piano passante per A_0 e B_0, e parallelo ad l_0.

c) Se la retta l_0 non è parallela ad m_0, il piano passante per la retta m e parallelo ad l ha per limite il piano passante per m_0 e parallelo ad l_0.

d) Se la retta l_0 ed m_0 non sono parallele, il piano passante per A e parallelo ad l e m ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo ad l_0 e m_0.

e) Il piano passante per A e parallelo al piano π ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo a π_0.

Infatti, siano B_0 e C_0 due punti di l_0, e siano B e C due punti di l aventi per limiti B_0 e C_0. Allora, poichè i punti ABC hanno per limiti $A_0B_0C_0$, il piano ABC, ossia il piano Al, ha per limite $A_0B_0C_0$, ossia il piano A_0l_0.

Per dimostrare la *b)*, siano m ed m_0 le parallele ad l ed l_0 condotte per B e B_0. Il piano passante per A e B e parallelo ad l coincide col piano passante per A e per m, il quale ha per limite il piano passante per A_0 e per m_0, ossia il piano passante per A_0 B_0 e parallelo ad l_0.

Per la *c)*, siano A_0 e B_0 due punti di m_0, e AB due punti di m aventi per limiti A_0 e B_0; il piano passante per la m e parallelo ad l coincide col piano passante per A e B e parallelo ad l, e quindi siamo ridotti al caso precedente.

Per la *d)*, siano n ed n_0 le parallele ad m ed m_0 condotte per A ed A_0; il piano passante per A e parallelo ad l e m coincide col piano passante per n e parallelo ad l, il quale ha per limite il piano passante per n_0 e parallelo ad l_0, ossia il piano passante per A_0 e parallelo ad l_0 ed m_0.

Per la *e)*, siano l_0 ed m_0 due rette non parallele di π_0, e l ed m due rette di π aventi per limiti l_0 ed m_0. Il piano passante per A e parallelo a π coincide col piano passante per A e parallelo alle rette l ed m, e quindi ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo a l_0 ed m_0, ossia il piano passante per A_0 e parallelo a π_0.

TEOREMA IV. — Se la retta l ha per limite l_0, ed il piano π ha per limite π_0, che non contiene, nè è parallelo ad l_0, il punto d'intersezione di l con π ha per limite il punto d'intersezione di l_0 con π_0.

Invero, siano A_0 B_0 due punti distinti di l_0, e siano A B due punti di l aventi per limiti A_0 e B_0.

Siano C_0 D_0 E_0 tre punti non in linea retta di π_0; e C D E siano tre punti di π aventi per limiti C_0 D_0 E_0.

Sia P il punto d'intersezione di AB con π; P_0 il punto d'intersezione di A_0B_0 con π_0. Si potranno determinare due numeri x e x_0 tali che $AP \equiv xAB$, $A_0P_0 \equiv x_0A_0B_0$; e per determinarli, si osservi che i volumi $CDE.CP = 0$, $C_0D_0E_0.C_0P_0 = 0$; ovvero poichè $CP \equiv AP - AC \equiv xAB - AC$, la prima equazione diventa $xCDE.AB - CDE.AC = 0$, da cui risulta determinato x come rapporto dei volumi CDE.AC e CDE.AB. In modo analogo, x_0 risulta determinato come rapporto dei volumi $C_0D_0E_0.A_0C_0$ e $C_0D_0E_0.A_0B_0$. Si passi al limite. Poichè i punti ABCDE hanno per limiti A_0 B_0 C_0 D_0 E_0, i volumi CDE.AC e CDE.AB hanno per limiti i volumi $C_0D_0E_0.A_0C_0$, e $C_0D_0E_0.A_0B_0$, e di questi il secondo non è nullo per le ipotesi fatte. Quindi il rapporto x dei due primi volumi ha per limite il rapporto x_0 dei secondi; e perciò $AP \equiv xAB$ ha per limite $x_0A_0B_0 \equiv A_0P_0$; e siccome A ha per limite A_0, il punto P ha per limite P_0.

TEOREMA V. — Se i piani π e π' hanno per limiti i piani π_0 e π_0' non paralleli, la retta intersezione dei due primi piani ha per limite la retta d'intersezione dei secondi.

Infatti, siano A_0 e B_0 due punti distinti di π_0', e la retta A_0B_0 incontri il piano π_0, e quindi la retta $\pi_0\pi_0'$, nel punto P_0; siano A e B due punti di π' aventi per limiti A_0B_0, e la retta AB incontri il piano π, e quindi la retta $\pi\pi'$ nel punto P. Per quanto si è dimostrato, la retta AB ha per limite A_0B_0, ed il punto P d'intersezione della retta AB con π ha per limite il punto P_0 d'intersezione di A_0B_0 con π_0; dunque un punto P della retta $\pi\pi'$ ha per limite un punto P_0 della retta $\pi_0\pi_0'$. E poichè, cambiando la posizione dei punti A_0B_0, si può dimostrare la stessa cosa per altri punti, si deduce che la retta $\pi\pi'$ ha per limite la $\pi_0\pi_0'$.

Teorema VI. — *Se i piani $\pi\,\pi'\,\pi''$ hanno per limiti i piani $\pi_0\,\pi_0'\,\pi_0''$ non paralleli ad una stessa retta, il punto d'intersezione dei tre primi piani ha per limite il punto d'intersezione dei tre secondi.*

Infatti i piani π' e π'' si incontrano secondo una retta $\pi'\pi''$ che ha per limite la $\pi_0'\pi_0''$. La retta $\pi'\pi''$ incontra il piano π nel punto $\pi\,\pi'\,\pi''$ che ha per limite il punto d'intersezione di $\pi_0'\pi_0''$ con π_0, ossia il limite del punto $\pi\pi'\pi''$ è il punto $\pi_0\pi_0'\pi_0''$, c. v. d.

Teorema VII. — *Se i piani π e π_0 passano per uno stesso punto O, e il piano π ha per limite π_0, l'angolo diedro più piccolo compreso fra i piani π e π_0 ha per limite zero, e viceversa.*

Infatti, siano A_0 e B_0 due punti del piano π_0 aventi la stessa distanza r da O, e tali che l'angolo A_0OB_0 sia retto. Dette A_0A e B_0B le distanze di A_0 e B_0 dal piano π, e θ l'angolo $\pi\pi_0$, si ha dalla trigonometria

$$\overline{A_0A}^2 + \overline{B_0B}^2 = r^2 sen^2\theta.$$

(Infatti, se da A_0 e B_0 si abbassano le perpendicolari A_0H e B_0K sulla retta $\pi\pi_0$, dai triangoli rettangoli A_0AH e B_0BK, nei quali gli angoli in H e K sono eguali a θ, si ricava in valor assoluto

$$A_0A = A_0H sen\theta\,, \quad B_0B = B_0B sen\theta\,,$$

e poichè $B_0K = OH$, e $\overline{A_0H}^2 + \overline{HO}^2 = \overline{OA_0}^2 = r^2$, elevando a quadrato e sommando si ha la formula citata).

Ora se π ha per limite π_0, A_0A e B_0B hanno per limite zero, e quindi $lim\, sen\theta = 0$, e $lim\theta = 0$.

Viceversa, siccome dalla formula citata si ha

$$A_0A^2 < r^2 sen^2\theta\,,$$

se $lim\theta = 0$, si deduce $lim A_0A = 0$, ossia la distanza d'ogni punto A_0 di π_0 da π ha per limite zero, e il piano π ha per limite π_0.

Teorema VIII. — Se la retta l e il punto A hanno per limite l_0 e A_0, il piano normale ad l e passante per A, ha per limite il piano normale ad l_0 e passante per A_0.

Invero da un punto fisso O si conducano la retta m parallela ad l, ed m_0 parallela ad l_0. Poichè l ha per limite l_0, m ha per limite m_0, e l'angolo mm_0 ha per limite zero (N. 5, III e V).

Per O si conducano il piano $\pi \perp l$, e $\pi_0 \perp l_0$. L'angolo diedro $\pi\pi_0$ è eguale all'angolo piano ll_0, e quindi ha per limite zero, e, per l'ultimo teorema, il piano π ha per limite π_0.

Ora il piano passante per A e normale ad l coincide col piano passante per A e parallelo a π, ed esso ha per limite il piano passante per A_0 e parallelo a π_0, vale a dire ha per limite il piano passante per A_0 e normale ad l_0.

Teorema IX. — Se il piano π ed il punto A hanno per limiti π_0 e A_0, la retta normale a π e passante per A ha per limite la normale a π_0 passante per A_0.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Teorema X. — Se la retta l ed il piano π hanno per limiti l_0 e π_0, il piano passante per l e normale a π ha per limite il piano passante per l_0 e normale a π_0.

Infatti, da un punto fisso O si conduca la retta m perpendicolare a π, e la m_0 a π_0; la retta m ha per limite m_0; e il piano che passa per l ed è normale a π, siccome coincide col piano passante per l e parallelo ad m, ha per limite il piano passante per l_0 e parallelo a m_0, vale a dire ha per limite il piano che passa per l_0 ed è normale a π_0.

7. Dalle proposizioni dimostrate risulta la continuità delle più semplici funzioni geometriche, in cui gli enti variabili siano punti, rette, e piani; vale a dire il limite della funzione è la funzione del limite, eccettuato il solo caso in cui gli enti variabili assumano al limite una posizione tale che la loro funzione cessi di essere determinata.

Combinando insieme le costruzioni semplicissime, di cui si è dimostrata la continuità, si può dedurre la continuità di altre funzioni geometriche meno semplici. Un esempio basterà a rischiarare queste parole.

È noto che se due rette l ed m non sono parallele, esiste una ed una sola retta n che le incontra amendue ad angolo retto. Essa si ottiene conducendo da un punto fisso O il piano π parallelo ad amendue; poi il piano α passante per l e perpendicolare a π, e il piano β passante per m e perpendicolare a π; la retta d'intersezione dei piani α e β è la retta n cercata. Si vuol ora dimostrare che se le rette l ed m variabili hanno per limiti l_0 ed m_0, la retta n perpendicolare comune ad l ed m ha per limite la retta n_0 perpendicolare comune ad l_0 ed m_0. Perciò siano π_0, α_0, β_0, i piani analoghi a π, α, β, ma costrutti sulle rette l_0 ed m_0. Poichè l ed m hanno per limiti l_0 ed m_0, il piano π parallelo ad l ed m, e passante per O, ha per limite il piano π_0 parallelo ad l_0 e m_0 e passante per O. Il piano α passante per l e normale a π ha per limite il piano α_0 passante per l_0 e normale a π_0; analogamente β ha per limite β_0, e la retta n, intersezione dei piani α e β ha per limite la n_0 intersezione dei piani α_0 e β_0.

§ 2. Derivate dei segmenti.

8. Il segmento variabile **a** dicesi funzione d'un numero t data in un certo intervallo, se ad ogni valore di t in questo intervallo cor-

risponde un segmento **a**. Indicheremo con $\mathbf{a}(t)$ un segmento funzione di t; con $\mathbf{a}(t_0)$ quel segmento che corrisponde al valore t_0 di t.

Ad esempio, se $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_n$ sono segmenti costanti, il segmento

$$\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 t + \mathbf{p}_2 t^2 + \ldots + \mathbf{p}_n t^n$$

è una funzione di t. Lo stesso avverrebbe se invece di $t, t^2, \ldots$ si avessero funzioni numeriche qualunque di t.

Dati a t due valori t_0 e $t_0 + h$, sia $\Delta\mathbf{a}$ la differenza geometrica dei segmenti corrispondenti

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(t_0 + h) - \mathbf{a}(t_0).$$

Dicesi *derivata* del segmento $\mathbf{a}(t)$ per $t = t_0$, il limite del segmento $\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}$, ove h tenda a zero. Questa derivata è un nuovo segmento. La indicheremo con $\mathbf{a}'(t_0)$. Il prodotto della derivata per un numero arbitrario dt, differenziale della variabile indipendente t, dicesi differenziale del segmento. Lo indicheremo con $d\mathbf{a}(t)$, ovvero $d\mathbf{a}$. Quindi per definizione:

$$d\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{a}'(t)\, dt.$$

In modo analogo, intenderemo per derivata di un'area $\omega(t)$ funzione di un numero t, il limite verso cui tende il rapporto $\frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h}$, ove h tenda a zero; e questa derivata è un'area.

E intenderemo per derivata del volume $\mathrm{V}(t)$ funzione di t il limite di $\frac{\mathrm{V}(t+h) - \mathrm{V}(t)}{h}$ per $h = 0$; essa è un volume.

9. Per i segmenti sussistono regole di derivazione, alcune delle quali sono analoghe a quelle che servono per le funzioni numeriche.

TEOREMA I. — Se i segmenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ hanno derivate $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}', \ldots$, la loro somma geometrica $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots$ ha per derivata la somma geometrica delle derivate $\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \ldots$

Infatti, posto $\mathbf{s} \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots$, e dati a t due valori t e $t + h$, e detti $\Delta\mathbf{a}, \Delta\mathbf{b}, \ldots \Delta\mathbf{s}$ gli incrementi dei segmenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots \mathbf{s}$, si ricava

$$\Delta \mathbf{s} \equiv \Delta \mathbf{a} + \Delta \mathbf{b} + \ldots$$

quindi

$$\frac{\Delta \mathbf{s}}{h} \equiv \frac{\Delta \mathbf{a}}{h} + \frac{\Delta \mathbf{b}}{h} + \ldots,$$

e passando al limite, poichè $\frac{\Delta \mathbf{a}}{h}$, $\frac{\Delta \mathbf{b}}{h}$, ... hanno per limiti $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, ... si deduce che anche $\frac{\Delta \mathbf{s}}{h}$ tende ad un limite $\mathbf{s}'$ ossia $\mathbf{s}$ ha una derivata

$$\mathbf{s}' \equiv \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \ldots$$

Questa formula si può pure scrivere

$$d(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots) \equiv d\mathbf{a} + d\mathbf{b} + \ldots$$

Teorema II. — *Se il segmento* $\mathbf{a}$ *ed il numero* x *sono funzioni di* t *aventi per derivata* $\mathbf{a}'$ *ed* x', *la derivata del segmento* $x\mathbf{a}$ *vale* $x\mathbf{a}' + x'\mathbf{a}$.

Infatti, posto $\mathbf{b} \equiv x\mathbf{a}$, e dati a t i valori t e $t + h$, e detti $\mathbf{a}$, x, $\mathbf{b}$, e $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$, $x + \Delta x$, $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ i segmenti e numeri corrispondenti, si avrà

$$\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \equiv (x + \Delta x)\ (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) \equiv x\mathbf{a} + x\Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}\Delta x + \Delta x\Delta\mathbf{a},$$

ovvero

$$\Delta\mathbf{b} \equiv x\Delta\mathbf{a} + \mathbf{a}\Delta x + \Delta x\Delta\mathbf{a},$$

$$\frac{\Delta\mathbf{b}}{h} \equiv x\frac{\Delta\mathbf{a}}{h} + \mathbf{a}\frac{\Delta x}{h} + \frac{\Delta x}{h}\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}h,$$

e facendo tendere h a zero, si ha la formula a dimostrarsi.

Come caso particolare, se $\mathbf{a}$ è fisso, ed x variabile, funzione di t, si avrà

$$dx\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}dx\,;$$

e se x è costante, ed $\mathbf{a}$ variabile

$$dx\mathbf{a} \equiv xd\mathbf{a}.$$

Applicando le regole precedenti alla funzione

$$\mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 t + \mathbf{p}_2 t^2 + \dots + \mathbf{p}_n t^n,$$

ove $\mathbf{p}_0\ \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n$ sono segmenti costanti, si deduce

$$\mathbf{a}'(t) \equiv \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 t + \dots + n\mathbf{p}_n t^{n-1}.$$

Teorema III. — *Se il segmento* $\mathbf{a}$ *ha per coordinate* $x\ y\ z$ *funzioni di* t, *e queste hanno derivata* $x'\ y'\ z'$, *il segmento* $\mathbf{a}$ *ha per derivata il segmento* $\mathbf{a}'$ *di coordinate* $x'\ y'\ z'$.

Viceversa, se il segmento $\mathbf{a}$ *ha per derivata* $\mathbf{a}'$, *le coordinate di* $\mathbf{a}$ *hanno per derivata le coordinate di* $\mathbf{a}'$.

Infatti, se $\mathbf{a}$ ha per coordinate $x\ y\ z$ rispetto ai segmenti fondamentali fissi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

e per ciò che si è dimostrato (Teoremi I e II)

$$\mathbf{a}' \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Viceversa, dati a t i valori t e $t+h$, e detti $\Delta\mathbf{a}$, Δx, Δy, Δz gli incrementi del segmento $\mathbf{a}$ e dei numeri x, y, z, sarà

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \Delta x.\mathbf{i} + \Delta y.\mathbf{j} + \Delta z.\mathbf{k},$$

e
$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{h} \equiv \frac{\Delta x}{h}.\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{h}.\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{h}.\mathbf{k},$$

e se $\mathbf{a}$ ha derivata $\mathbf{a}' \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, siccome $\lim \frac{\Delta\mathbf{a}}{h} \equiv \mathbf{a}'$, dovrà essere (N. 3, II) $\lim \frac{\Delta x}{h} = x'$, $\lim \frac{\Delta y}{h} = y'$, $\lim \frac{\Delta z}{h} = z'$, ossia $x\ y\ z$ hanno per derivata $x'\ y'\ z'$.

Siccome, le coordinate del segmento $\mathbf{a}$ sono funzioni di t spesso facili a calcolarsi, e di cui si sa pure calcolare la derivata, il teorema precedente permette di determinare, nei casi più comuni, la derivata dei segmenti variabili.

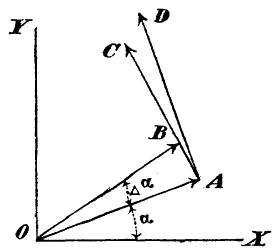
Si osservi ancora che $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ è la proiezione del segmento $\mathbf{a}$ sul piano xy fatta parallelamente all'asse delle z, e che $z\mathbf{k}$ è la proiezione di $\mathbf{a}$ sull'asse delle z, fatta parallelamente al piano xy. Ora la derivata di $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ è $x'\mathbf{i}+y'\mathbf{j}$, cioè la proiezione di $\mathbf{a}'$ derivata di $\mathbf{a}$, e la derivata di $z\mathbf{k}$ è $z'\mathbf{k}$ ossia la proiezione di $\mathbf{a}'$ sull'asse delle z. Quindi si deduce:

Teorema IV. — La derivata della proiezione parallela di un segmento è la proiezione della derivata di questo segmento.

Questo teorema si potrebbe pure dimostrare direttamente.

Teorema V. — Se, in un piano fisso, il segmento $\mathbf{a} \equiv \overline{\mathrm{OA}}$ è di lunghezza costante, e fa con un asse fisso OX un angolo variabile α, sarà il segmento $\mathbf{a}$ funzione di α, e la sua derivata è un segmento $\mathbf{a}'$ eguale in lunghezza ad $\mathbf{a}$, e tale che l'angolo $\widehat{\mathbf{aa}'}$ è eguale ad un retto, e quindi l'angolo che fa coll'asse OX vale $\alpha+\frac{\pi}{2}$.

Infatti, dati ad α i valori α ed $\alpha+\Delta\alpha$, siano $\overline{\mathrm{OA}} \equiv \mathbf{a}$, e $\overline{\mathrm{OB}} \equiv \mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}$ i segmenti corrispondenti. Sarà $\mathrm{AB} \equiv \Delta\mathbf{a}$. Sia $\mathrm{AC} \equiv \frac{\mathrm{AB}}{\Delta\alpha}$, e AD il segmento eguale in lunghezza ad OA, e tale che l'angolo formato dalle direzioni OA e AD sia un retto. Si vuol dimostrare che il limite di AC è AD. Ora è facile il vedere dalla figura che l'angolo DAC vale $\frac{1}{2}\Delta\alpha$; inoltre $lung\mathrm{AC} = \frac{1}{\Delta\alpha}\, lung\mathrm{AB} = \frac{1}{\Delta\alpha}\, 2\, lung\,\mathrm{OA}.sen\,\frac{1}{2}\Delta\alpha = lung\mathrm{OA}\,\frac{sen\frac{1}{2}\Delta\alpha}{\frac{1}{2}\Delta\alpha}$, ha per limite la lunghezza di OA, vale a dire la lunghezza di AD. Quindi, poichè l'angolo che fanno i segmenti AC e AD ha per limite zero, e la lunghezza di AC ha per limite la lunghezza di AD, si conchiude che AC ha per limite AD, c.v.d.



Oppure, riferito il segmento OA agli assi cartesiani ortogonali OX ed OY, detta a la lunghezza del segmento OA, le proiezioni di

OA sugli assi sono misurate dai numeri $a\cos\alpha$, e $a\,\text{sen}\,\alpha$, i quali sono le coordinate di OA. Quindi, pel teorema III, la derivata del segmento OA ha per coordinate $-a\,\text{sen}\,\alpha$, e $a\cos\alpha$, dal che si deduce che essa è appunto il segmento enunciato nel teorema.

10. I teoremi che seguono permettono di determinare la derivata di numeri, aree e volumi che dipendono da segmenti funzioni della variabile t.

TEOREMA I. — Se i segmenti **a** e **b** hanno per derivata **a**′ e **b**′, il prodotto $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ha per derivata $\mathbf{a}\times\mathbf{b}'+\mathbf{a}'\times\mathbf{b}$; ossia

$$d(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times d\mathbf{b}+\mathbf{b}\times d\mathbf{a}\,.$$

Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e fatta la differenza dei valori corrispondenti di $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, si ha

$$\Delta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a})\times(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})-\mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

ossia

$$\Delta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\Delta\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\Delta\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}\times\Delta\mathbf{b},$$

e

$$\frac{\Delta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{h}=\mathbf{a}\times\frac{\Delta\mathbf{b}}{h}+\mathbf{b}\times\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}+\frac{\Delta\mathbf{a}}{h}\times\frac{\Delta\mathbf{b}}{h}\,h$$

e, passando al limite, si ha la formula a dimostrarsi.

Come caso particolare, fatto $\mathbf{b}\equiv\mathbf{a}$ si trova

$$d\mathbf{a}^2=2\mathbf{a}\times d\mathbf{a}.$$

TEOREMA II. — Se il segmento non nullo **a** ha per derivata **a**′, il numero che misura la lunghezza di **a** ha per derivata il numero che misura la projezione di **a**′ su **a**, preso positivamente se questa proiezione ha lo stesso senso di **a**, negativamente se ha senso contrario.

Infatti, detta a la lunghezza del segmento **a**, si avrà $\mathbf{a}^2=a^2$; quindi derivando $\mathbf{a}\times\mathbf{a}'=a\dfrac{da}{dt}$. Sia p il numero che misura la proiezione di $\mathbf{a}'$ su $\mathbf{a}$, preso positivamente se questi segmenti hanno lo stesso senso, negativamente se senso contrario. Sarà $\mathbf{a} \times \mathbf{a}' = ap$; e quindi $ap = a\frac{da}{dt}$, e dividendo per a che non è nullo, $\frac{da}{dt} = p$, c. v. d.

Teorema III. — Se i segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno per derivate $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$, la derivata dell'area $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ è $\mathbf{a}.\mathbf{b}' + \mathbf{a}'.\mathbf{b}$.

Invero, si ha $\Delta(\mathbf{a}.\mathbf{b}) \equiv (\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}).(\mathbf{b} + \mathbf{b}) - \mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}.\Delta\mathbf{b} + \Delta\mathbf{a}.\mathbf{b} + + \Delta\mathbf{a}.\Delta\mathbf{b}$; quindi $\frac{\Delta(\mathbf{a}.\mathbf{b})}{h} \equiv \mathbf{a}.\frac{\Delta\mathbf{b}}{h} + \frac{\Delta\mathbf{a}}{h}.\mathbf{b} + \frac{\Delta\mathbf{a}}{h}.\Delta\mathbf{b}$; e passando al limite si ha la formula a dimostrarsi.

Teorema IV. — Se l'area ω e il segmento $\mathbf{l}$ hanno per derivata ω' ed $\mathbf{l}'$, la derivata del volume $\omega.\mathbf{l}$ è $\omega.\mathbf{l}' + \omega'.\mathbf{l}$.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Di qui si deduce che se $\mathbf{a}'$ $\mathbf{b}'$ $\mathbf{c}'$ sono le derivate dei segmenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, la derivata del volume $\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}$ è

$$\mathbf{a}'.\mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{b}'.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}'.$$

§ 3. Derivate successive.

11. Sia $\mathbf{a}'(t)$ la derivata del segmento $\mathbf{a}(t)$. Sarà $\mathbf{a}'(t)$ un segmento, funzione di t, che può avere una nuova derivata che indicheremo con $\mathbf{a}''(t)$, e che diremo derivata seconda di $\mathbf{a}(t)$. La derivata della derivata seconda si dirà derivata terza, e così via.

Così ad esempio, se $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono segmenti costanti, ed i numeri x y z sono funzioni di t aventi derivate successive, si avrà

$$\mathbf{a}' \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}'' \equiv x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k},$$

ed in generale

$$\mathbf{a}^{(n)} \equiv x^{(n)}\mathbf{i} + y^{(n)}\mathbf{j} + z^{(n)}\mathbf{k},$$

ossia le coordinate della derivata n^{ma} di $\mathbf{a}$ sono le derivate n^{me} delle coordinate di $\mathbf{a}$.

Se $\mathbf{a}$ è un segmento contenuto in un piano fisso, di lunghezza costante, e che fa con una retta fissa OX del piano l'angolo α, che si assume come variabile indipendente, la sua derivata è un segmento $\mathbf{a}'$ eguale in lunghezza ad $\mathbf{a}$, e che fa con questo un angolo retto, e quindi che fa con OX l'angolo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ (N. 9, V). E la derivata di $\mathbf{a}'$ è un segmento $\mathbf{a}''$ eguale in lunghezza ad $\mathbf{a}'$ e ad $\mathbf{a}$, e che fa con $\mathbf{a}'$ un angolo retto, ossia con $\mathbf{a}$ due retti. Vale a dire il segmento $\mathbf{a}''$ è eguale ed opposto ad $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}'' \equiv -\mathbf{a}.$$

In modo analogo $\mathbf{a}'''$ è un segmento eguale in grandezza ai precedenti, e che fa con $\mathbf{a}$ un angolo eguale a tre retti, e quindi è opposto ad $\mathbf{a}'$; $\mathbf{a}''' \equiv -\mathbf{a}'$, e così via.

Fra i valori di un segmento, ove si attribuiscano varii valori alla variabile t, e le derivate successive del segmento stesso passano relazioni analoghe a quelle che sussistono per le funzioni numeriche, e che si potrebbero dimostrare direttamente con ragionamenti analoghi, ma che si ottengono più facilmente da queste mediante le coordinate.

Dimostreremo dapprima una formula analoga a quella di Taylor.

12. Teorema. — Se il segmento $\mathbf{a}(t)$ è funzione di t, avente pel valore considerato di t le successive derivate fino all'ordine n, posto

$$\mathbf{a}(t+h) \equiv \mathbf{a}(t) + h\mathbf{a}'(t) + \frac{h^2}{1.2}\mathbf{a}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\left[\mathbf{a}^{(n)}(t) + \epsilon\right],$$

il segmento ϵ ha per limite zero col tendere di h a 0.

Infatti, siano $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ le coordinate del segmento $\mathbf{a}\,(t)$.

Poichè questo ha le derivate successive fino all'ordine n, lo stesso avverrà delle sue coordinate x, y, z.

Ora si sa che, se $f(t)$ è funzione avente le successive derivate fino all'ordine n, posto

$$f(t+h) = f'(t) + \frac{h^2}{1.2} f''(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(t) + \epsilon],$$

il numero ϵ ha per limite zero col tendere di h a zero (*).

(*) Questa formula si può considerare come compresa in quella del N. 67 del *Calcolo differenziale*, ove si supponga l'esistenza e la continuità della derivata d'ordine $n+1$ nell'intervallo $(t, t+h)$. Invero paragonando la formula sopra scritta colla

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t+\theta h),$$

si ricava

$$\epsilon = \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(t+\theta h),$$

e quindi, facendo tendere h a zero, $lim \epsilon = 0$.

Ma la formula in questione si può pure dimostrare senza fare nuove supposizioni, cioè senza supporre l'esistenza della derivata n^a per valori di t diversi da quello considerato, e tanto meno la sua continuità, l'esistenza della derivata d'ordine $n+1$, e la continuità di questa. Invero, da essa si ricava

$$\epsilon = \frac{f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \frac{h^2}{1.2} f''(t) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t)}{\frac{1}{n!} h^n},$$

ove il numeratore ed il denominatore sono funzioni di h che si annullano insieme alle loro derivate 1^a, 2^a,... $(n-1)^{ma}$ per $h=0$; il numeratore ha ancora nulla la derivata n^a, mentre quella del denominatore vale 1; quindi (*Calc. differ.* N. 124), $lim \epsilon = 0$.

Se si fa $n=1$, la formula diventa

$$f(t+h) = f(t) + h[f'(t) + \epsilon], \text{ con } lim \epsilon = 0,$$

che è la definizione della derivata. La formula generale si può anche ottenere da questa leggendo $f^{(n-1)}(t)$ invece di $f(t)$, ed integrando rispetto ad h, fra 0 ed h, $n-1$ volte. (Vedi *Calc. differ.*, Annotazioni pag. XIX).

Si applichi questa formula alle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si avrà

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{1.2} x''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!} [x^{(n)}(t) + \alpha]$$

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{1.2} y''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!} [y^{(n)}(t) + \beta]$$

$$z(t+h) = z(t) + hz'(t) + \frac{h^2}{1.2} z''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!} [z^{(n)}(t) + \gamma]$$

ove $\alpha\ \beta\ \gamma$ sono numeri infinitesimi con h. Si moltiplichino queste eguaglianze per **i**, **j**, **k** e si sommino. Osservando che

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t+h) &\equiv x(t+h)\mathbf{i} + y(t+h)\,\mathbf{j} + z(t+h)\mathbf{k}, \\ \mathbf{a}(t) &\equiv x(t)\mathbf{i} + y\,(t)\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{a}'(t) &\equiv x'(t)\mathbf{i} + y'\,(t)\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

si ricava

$$\mathbf{a}(t+h) \equiv \mathbf{a}(t) + h\mathbf{a}'(t) + \frac{h^2}{1.2} \mathbf{a}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!} [\mathbf{a}^{(n)}(t) + \bar{\epsilon}],$$

ove $\bar{\epsilon} \equiv \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ è un segmento che ha per limite zero col tendere di h a zero, c. v. d.

13. Anche pei segmenti si possono definire funzioni analoghe alle funzioni interpolari (*Calc. diff.* N. 84).

Pongasi

$$\mathbf{a}(t_1\, t_2) \equiv \frac{\mathbf{a}(t_1) - \mathbf{a}(t_2)}{t_1 - t_2}, \quad \mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3) = \frac{\mathbf{a}(t_1\, t_2) - \mathbf{a}(t_1\, t_3)}{t_2 - t_3}, \ \ldots\ldots$$

I segmenti $\mathbf{a}(t_1, t_2)$, $\mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3)$, ... diconsi le funzioni interpolari di primo, secondo, ecc., ordine di $\mathbf{a}(t)$.

Teorema. — Se il segmento $\mathbf{a}(t)$ ha le successive derivate continue, fino all'ordine considerato, col tendere di $t_1\, t_2 \ldots$ ad uno stesso valore t si ha

$$\lim \mathbf{a}(t_1\, t_2) \equiv \mathbf{a}'(t), \quad \lim \mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{a}''(t),$$

ed in generale

$$\lim \mathbf{a}(t_1\, t_2 \ldots t^n) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \mathbf{a}^{(n-1)}(t).$$

Infatti, riferito il segmento **a** ai segmenti **i**, **j**, **k**, e posto

$$\mathbf{a}(t) \equiv x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

si ricava

$$\frac{\mathbf{a}(t_1) - \mathbf{a}(t_2)}{t_1 - t_2} \equiv \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}\,\mathbf{i} + \frac{y(t_1) - y(t_2)}{t_1 - t_2}\,\mathbf{j} + \frac{z(t_1) - z(t_2)}{t_1 - t_2}\,\mathbf{k}$$

ossia

$$\mathbf{a}(t_1 t_2) \equiv x(t_1 t_2)\mathbf{i} + y(t_1 t_2)\mathbf{j} + z(t_1 t_2)\mathbf{k}\,;$$

ed in generale

$$\mathbf{a}(t_1 t_2 \ldots t_n) \equiv x(t_1 t_2 \ldots t_n)\,\mathbf{i} + y(t_1 t_2 \ldots t_n)\,\mathbf{j} + z(t_1 t_2 \ldots t_n)\mathbf{k}\,;$$

quindi passando al limite (*Calc. diff.* N. 86)

$$\lim \mathbf{a}(t_1 t_2) \equiv x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \equiv \mathbf{a}'(t),$$

e

$$\lim \mathbf{a}(t_1 t_2 \ldots t_n) \equiv \frac{1}{(n-1)!}\left[x^{(n-1)}(t)\,\mathbf{i} + y^{(n-1)}(t)\,\mathbf{j} + z^{(n-1)}(t)\,\mathbf{k}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{(n-1)!}\,\mathbf{a}^{(n-1)}(t)\,.$$

14. Un segmento variabile **a** può essere funzione di due o più numeri $u, v, \ldots$; ed allora si avrà a parlare di tante derivate parziali del primo ordine di **a** quante sono le variabili. Le derivate di primo ordine possono avere alla loro volta derivate, che si diranno di secondo ordine, e così via. Tutte queste derivate parziali sono segmenti.

Così ad esempio, se $x\ y\ z$ sono le coordinate del segmento **a**

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,$$

e queste sono funzioni dei numeri $u, v, \ldots$, aventi derivate parziali, anche **a** è funzione di $u, v, \ldots$ le cui derivate si ottengono derivando l'equipollenza precedente, e si ha

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} \equiv \frac{dx}{du}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\,\mathbf{k}\,,$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dv} \equiv \frac{dx}{dv}\mathbf{i} + -\frac{dy}{dv}\mathbf{j} + \frac{dz}{dv}\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{du^2} \equiv \frac{d^2x}{du^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du^2}\mathbf{k}, \text{ ecc.}$$

E viceversa, se **a** ha derivate parziali, lo stesso avviene delle sue coordinate.

Per le derivate parziali d'un segmento si possono dimostrare delle proposizioni analoghe a quelle dimostrate per le funzioni numeriche, e che noi ridurremo a queste per mezzo delle coordinate.

TEOREMA. — Se il segmento **a** è funzione dei numeri u, v,..., avente le derivate parziali di primo ordine $\frac{d\mathbf{a}}{du}$, $\frac{d\mathbf{a}}{dv}$, ..., continue, dati a u, v, ... incrementi Δu, Δv, ... l'incremento corrispondente $\Delta\mathbf{a}$ di **a**, si può mettere sotto la forma

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} + \alpha\right)\Delta u + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + \beta\right)\Delta v + ...,$$

ove α, β, ... sono segmenti che hanno per limite zero ove tendano a zero Δu, Δv, ...

Infatti, riferito il segmento **a** ai segmenti **i**, **j**, **k**, e posto $\mathbf{a} \equiv \mathbf{i}x + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, saranno x y z funzioni di u, v,... aventi le derivate parziali di primo ordine continue; e sarà

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}.$$

Ora gli incrementi delle funzioni numeriche x y z si possono mettere sotto la forma (*Calc. diff.* N. 105)

$$\Delta x = \left(\frac{dx}{du} + \alpha'\right)\Delta u + \left(\frac{dx}{dv} + \beta'\right)\Delta v + ...$$

$$\Delta y = \left(\frac{dy}{du} + \alpha''\right)\Delta u + \left(\frac{dy}{dv} + \beta''\right)\Delta v + ...,$$

$$\Delta z = \left(\frac{dz}{du} + \alpha'''\right)\Delta u + \left(\frac{dz}{dv} + \beta'''\right)\Delta v + ...,$$

ove α' β'... α'' β''... α''' β''' ... sono numeri infinitesimi.

Sostituiti questi valori nella espressione di $\Delta\mathbf{a}$, ed osservando che

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} \equiv \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dv} \equiv \frac{dx}{dv}\mathbf{i} + \frac{dy}{dv}\mathbf{j} + \frac{dz}{dv}\mathbf{k}, \text{ ecc.,}$$

e posto

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha'\mathbf{i} + \alpha''\mathbf{j} + \alpha'''\mathbf{k}, \quad \bar{\beta} \equiv \beta'\mathbf{i} + \beta''\mathbf{j} + \beta'''\mathbf{k}, \text{ ecc.}$$

i segmenti α, β, ... hanno per limite zero, e si ha la formula a dimostrarsi.

Se $\mathbf{a}$ è funzione dei numeri u, v, ..., e questi alla loro volta sono funzioni delle numero t, sarà $\mathbf{a}$ funzione di t, composta mediante u, v, ... Dato a t un incremento Δt, e detti Δu, Δv, ... $\Delta\mathbf{a}$ gli incrementi di u, v, ... $\mathbf{a}$, si avrà, supposte verificate le condizioni del teorema precedente,

$$\Delta\mathbf{a} \equiv \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} + \alpha\right)\Delta u + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + \beta\right)\Delta v + \ldots;$$

e dividendo per Δt

$$\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} \equiv \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} + \alpha\right)\frac{\Delta u}{\Delta t} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dv} + \beta\right)\frac{\Delta v}{\Delta t} + \ldots.$$

Facendo ora tendere Δt a zero, se u, v, ... hanno per derivate $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, ..., anche $\mathbf{a}$ avrà una derivata data dalla formula

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{du}\frac{du}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dv}\frac{dv}{dt} + \ldots$$

la quale serve per derivare le funzioni composte, ed è analoga a quella vista nel *Calcolo* al N. 106.

Anche pei segmenti è lecito invertire l'ordine delle differenziazioni. Invero si ha p. e.

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{du\,dv} \equiv \frac{d^2x}{du\,dv}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du\,dv}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du\,dv}\mathbf{k},$$

e

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dv\,du} \equiv \frac{d^2x}{dv\,du}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dv\,du}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dv\,du}\mathbf{k},$$

e poichè (*Calc. diff.* N. 103) $\frac{d^2x}{du\,dv} = \frac{d^2x}{dv\,du}$, ecc. si ha $\frac{d^2\mathbf{a}}{du\,dv} \equiv \frac{d^2\mathbf{a}}{dv\,du}$.

15. Le cose dette pei segmenti, sono pure applicabili alle aree ed ai volumi funzioni d'una o più variabili numeriche. Così se $\omega(t)$ è un'area avente le successive derivate $\omega'(t)$, $\omega''(t)$, ecc. sarà

$$\omega(t+h) \equiv \omega(t) + h\omega'(t) + \frac{h^2}{1.2}\,\omega''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\,[\omega^{(n)}(t) + \epsilon],$$

ove ϵ è un'area infinitesima con h.

E se $V(t)$ è un volume avente le successive derivate, sarà

$$V(t+h) = V(t) + hV'(t) + \frac{h^2}{1.2}\,V''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\,[V^{(n)}(t) + \epsilon],$$

ove ϵ è un volume infinitesimo con h.

§ 4. Derivata della posizione d'un punto.

16. Sia la posizione di un punto P funzione d'una variabile numerica t. Dati a t due valori t e $t+h$, e dette P e P' le posizioni corrispondenti del punto, si immagini il segmento

$$\overline{PQ} \equiv \overline{PP'} : h\,;$$

diremo *derivata* del punto P il limite del segmento PQ, ove h tenda a zero.

La derivata del punto P coincide colla derivata del segmento OP, che va da una origine fissa O al punto variabile P. Invero si ha $\Delta OP \equiv OP' - OP \equiv PP'$, e quindi $\frac{\Delta OP}{h} \equiv PQ$; e facendo tendere h a zero, il membro di sinistra ha per limite la derivata del segmento OP, e il membro di destra la derivata del punto P; onde queste derivate coincidono.

La derivata del punto P è un segmento funzione di t, il quale a sua volta può avere derivata, e questa un'altra, e così via. I segmenti che così si ottengono diconsi le successive derivate del punto P; le indicheremo alcune volte colle lettere $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ..., altre volte con $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... Le derivate successive del punto P coincidono colle successive derivate del segmento OP.

Se il punto P ha per coordinate cartesiane x, y, z, detti $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$ i segmenti di riferimento, si ha

$$\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} ;$$

e se i numeri x y z sono funzioni di t aventi le successive derivate, derivando, ed osservando che successive derivate di OP coincidono con quelle di P, si ricava per la derivata prima:

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 \equiv \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

e per la seconda

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}_2 \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k},$$

ed in generale per la derivata n^a:

$$\mathbf{u}_n \equiv \frac{d^n x}{dt^n}\mathbf{i} + \frac{d^n y}{dt^n}\mathbf{j} + \frac{d^n z}{dt^n}\mathbf{k},$$

e così si hanno le coordinate o componenti delle successive derivate del punto, in funzione delle derivate delle sue coordinate. Reciprocamente, se il punto ha le successive derivate, lo stesso avverrà delle sue coordinate.

17. A causa dell'identità delle derivate d'un segmento e delle derivate del punto che ne è il termine, supposta fissa l'origine, si possono estendere ai punti le formule già dimostrate pei segmenti.

Così, se P è funzione di t avente le successive derivate, pongasi $\mathrm{OP} \equiv \mathbf{a}(t)$. Le derivate $\mathbf{u}_1$ $\mathbf{u}_2$ ... di P coincidono colle derivate del segmento $\mathbf{a}(t)$; e si ha

$$\mathbf{a}(t+h) \equiv \mathbf{a}(t) + h\mathbf{u}_1 + \frac{h^2}{1.2}\mathbf{u}_2 + \ldots + \frac{h^n}{n!}(\mathbf{u}_n + \epsilon).$$

Ora, dette P e P′ le posizioni del punto corrispondenti ai valori t e $t+h$ della variabile, si ha $\mathbf{a}(t) \equiv \overline{\mathrm{OP}}$, $\mathbf{a}(t+h) \equiv \overline{\mathrm{OP'}}$, e $\mathbf{a}(t+h) - \mathbf{a}(t) \equiv \overline{\mathrm{PP'}}$; e quindi la formula precedente diventa

$$\overline{\mathrm{PP'}} \equiv h\mathbf{u}_1 + \frac{h^2}{1.2}\mathbf{u}_2 + \dots + \frac{h^n}{n!}(\mathbf{u}_n + \bar{\epsilon}),$$

ove ϵ è un segmento che ha per limite zero, col tendere di h a zero.

Analogamente, se P è funzione di più numeri variabili $u, v, \dots$ avente derivate parziali di primo ordine continue, che chiameremo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$, date alle variabili gli incrementi $\Delta u, \Delta v, \dots$, e detta P′ la nuova posizione del punto, si avrà

$$\overline{\mathrm{PP'}} \equiv (\mathbf{u} + \alpha)\Delta u + (\mathbf{v} + \beta)\Delta v + \dots,$$

ove $\alpha, \beta, \dots$ sono segmenti infinitesimi con $\Delta u, \Delta v, \dots$ E se $u, v, \dots$ sono funzioni di t aventi derivate $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \dots$, il punto P è funzione di t, e la sua derivata sarà

$$\mathbf{u}\frac{du}{dt} + \mathbf{v}\frac{dv}{dt} + \dots.$$

Esercizii.

18. 1. Un segmento $\mathbf{a}$ nel piano è determinato quando si conoscano la sua lunghezza r, e l'angolo α che esso fa con una retta fissa OX del piano. Se r ed α sono funzioni d'un numero t, anche il segmento è funzione di t. La sua derivata è la risultante d'un segmento avente la direzione di $\mathbf{a}$, ed eguale in lunghezza a $\frac{dr}{dt}$, e di un segmento normale ad $\mathbf{a}$ ed eguale in lunghezza a $r\frac{d\alpha}{dt}$.

2. Se i punti P, Q, R, S.... sono funzioni di t aventi per derivate $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \dots$, la derivata del segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$ vale $\mathbf{q} - \mathbf{p}$; la derivata dell'area PQR vale

$$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{PQ}}.\mathbf{r} + \overline{\mathrm{QR}}.\mathbf{p} + \overline{\mathrm{RP}}.\mathbf{q});$$

e la derivata del volume PQRS vale

$$\frac{1}{3}(\mathrm{PQR}.\mathbf{s} - \mathrm{PQS}.\mathbf{r} + \mathrm{PRS}.\mathbf{q} - \mathrm{QRS}.\mathbf{p}).$$