Advanced Studies in Pure Mathematics 46, 2007
Singularities in Geometry and Topology 2004
pp. 197–210

Exemples de fonctions de Artin de germes d'espaces analytiques

Guillaume Rond

Abstract.

We define here the Artin functions of a germ of analytic space. Artin functions are analytic invariants of the germ and a measure of its singularity. In general these functions are very difficult to compute. We give a few properties of these functions and we present some examples.

§1. Préliminaires

Soit $\mathbb{k}$ un corps valué (par exemple $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p, \ldots$). Pour tout entier $N \geq 1$, notons $\mathcal{O}_N$ l'anneau local $\mathbb{k}\{T_1, \ldots, T_N\}$, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et $\widehat{\mathcal{O}}_N := \mathbb{k}[[T_1, \ldots, T_N]]$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Nous noterons ord la valuation $\mathfrak{m}$-adique sur $\mathcal{O}_N$:

$$\operatorname{ord}(x) := \max\{n \in \mathbb{N} / x \in \mathfrak{m}^n\}.$$

Soit I un idéal de $\mathbb{k}\{X_1, \ldots, X_n\}$ définissant un germe d'espace analytique $(X, 0)$ plongé dans $(\mathbb{k}^n, 0)$. Nous allons définir ici la suite des fonctions de Artin de $(X, 0)$ qui sont des fonctions numériques de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Ces fonctions sont des invariants analytiques du germe mais, malheureusement, sont très difficiles à calculer en général. Nous présentons ici les résultats connus à propos de ces fonctions puis nous présentons quelques exemples.

Pour tout entier $p \geq 1$, notons X_p^N l'ensemble des morphismes de $\mathbb{k}$-algèbres locales $\mathcal{O}_{X,0} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_N/\mathfrak{m}^{p+1}$, et notons X_∞^N l'ensemble des morphismes de $\mathbb{k}$-algèbres locales $\mathcal{O}_{X,0} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_N$. Les projections canoniques

$$\widehat{\mathcal{O}}_N \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_N/\mathfrak{m}^{p+1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_N/\mathfrak{m}^{q+1}, \ \forall p \geq q$$

Received April 7, 2005
Revised October 3, 2005

définissent par composition des morphismes

$$X_\infty^N \xrightarrow{\pi_p} X_p^N \xrightarrow{\pi_{p,q}} X_q^N\ ,\ \forall p \geq q.$$

Les fonctions de Artin de $(X, 0)$ sont des fonctions qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un élément de X_p^N puisse se relever en un élément de X_∞^N.
Tout d'abord, nous avons le théorème suivant (qui est un cas légèrement plus particulier que le théorème énoncé originallement):

Théorème 1.1 ([Wa]). *Soit $\Bbbk$ un corps valué, complet de caractéristique nulle. Soient $f_1, \dots, f_r \in \Bbbk[[T, X]]$, où $T = (T_1, \dots, T_N)$ et $X = (X_1, \dots, X_n)$.*
Alors il existe $\beta \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que:
Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x(T) \in \widehat{\mathcal{O}}_N^n$ tel que

$$\begin{aligned}&x(0) = 0,\\ &\text{et } f_i(x(T)) \in \mathfrak{m}^{\beta(p)+1},\ 1 \leq i \leq r,\end{aligned}$$

il existe $\overline{x}(T) \in \widehat{\mathcal{O}}_N^n$ tel que

$$f_i(\overline{x}(T)) = 0,\ 1 \leq i \leq r,\ \text{et } x(T) - \overline{x}(T) \in \mathfrak{m}^{p+1}.$$

Dans la suite, $\Bbbk$ sera toujours un corps valué, complet de caractéristique nulle, sauf mention du contraire.
Nous appellerons fonction de Artin des f_i la plus petite fonction qui vérifie le théorème précédent. Il n'est pas difficile à vérifier que cette fonction de Artin ne dépend que du morphisme $\Bbbk[[T]] \longrightarrow \Bbbk[[T, X]]/(f_1, \dots, f_r)$.
Nous avons alors la définition suivante

Définition 1.2. Soit $I = (f_1, \dots, f_r)$ un idéal de $\Bbbk\{X_1, \dots, X_n\}$ définissant un germe d'espace analytique $(X, 0)$ plongé dans $(\Bbbk^n, 0)$. Soit $N \geq 1$ un entier. Notons I_N l'idéal de $\Bbbk[[T_1, \dots, T_N, X]]$ engendré par I. Nous appellerons N-ième fonction de Artin de $(X, 0)$ la plus petite fonction β_N qui vérifie le théorème de Artin précédent pour l'idéal I_N.

Dans le cas $N = 1$, un théorème de Greenberg nous permet d'affirmer que β_1 est bornée par une fonction affine [Gr]. Pour $N \geq 2$, ceci a été conjecturé pendant longtemps, mais c'est en général faux [Ro2]. Nous verrons plus loin certains exemples où ce n'est pas le cas.
Nous pouvons réénoncer l'existence de la fonction β_N en écrivant

$$\pi_p(\mathcal{X}_\infty^N) = \pi_{\beta_N(p),p}(\mathcal{X}_{\beta_N(p)}^N),\ \forall p \geq 1. \tag{1}$$

C'est-à-dire qu'un élément de X_p^N se relève en un élément de $\mathcal{X}_\infty^N$ si l'on peut le relever en un élément de $\mathcal{X}_{\beta_N(p)}^N$.
Nous avons alors le résultat suivant qui découle d'un théorème de Chevalley, énonçant que l'image d'un ensemble algébrique par un morphisme est un sous-ensemble constructible de ensemble d'arrivée:

Proposition 1.3. *Soient $(X, 0)$ un germe d'espace analytique sur un corps valué algébriquement clos, complet de caractéristique nulle et $N \in \mathbb{N}$ fixés. Alors pour tout p entier, $\pi_p(\mathcal{X}_\infty^N)$ est un sous-ensemble constructible de $\mathcal{X}_p^N$.*

La suite des fonctions de Artin d'un germe de variété analytique est un invariant analytique de celui-ci; d'après ce qui précède, nous voyons que β_N ne dépend que du morphisme $\mathbb{k}[[T]] \longrightarrow \mathbb{k}[[T, X]]/(f_1, \ldots, f_r)$. Par ailleurs, cette suite est, en quelque sorte, une mesure de la singularité du germe. En effet nous avons la proposition suivante:

Proposition 1.4 ([H1]). *Soit $(X, 0)$ un germe d'espace analytique sur un corps $\mathbb{k}$ et $N \geq 1$ un entier. Alors la N-ième fonction de Artin de $(X, 0)$ est égale à l'identité si et seulement si le germe est non-singulier.*

Le but de ce travail est d'étudier la suite des fonctions de Artin d'un germe d'espace analytique. Dans cette optique nous allons tout d'abord énoncer les premiers résultats connus à propos de ces fonctions (essentiellement sur β_1). Ensuite nous allons introduire deux outils utiles dans l'étude de fonctions de Artin: le théorème d'Izumi et un théorème d'approximation diophantienne dû à l'auteur. Enfin nous allons donner une liste des exemples connus de fonctions de Artin de germes d'espaces analytiques.

§2. Propriétés des fonctions de Artin d'un germe d'espace analytique

Nous pouvons énoncer les propriétés suivantes de ces fonctions.

Proposition 2.1. *Nous avons le propriétés suivantes:*

i) *Soient $(X, 0)$ un germe d'espace analytique et $(\beta_N)_N$ sa suite de fonctions de Artin. Nous avons les inégalités*

$$\forall N \geq 1, \forall p \in \mathbb{N}, \ \beta_N(p) \leq \beta_{N+1}(p)$$

ii) *Soient $(X, 0)$ et $(Y, 0)$ deux germes d'espaces analytiques, définis respectivement par les idéaux I et J, et $(\beta_N)_N$ et $(\beta'_N)_N$ leurs suites de fonctions de Artin respectives. Notons $(\gamma_N)_N$ la suite* *de fonctions de Artin du germe* $(X \cup Y, 0)$ *défini par l'idéal* $I \cap J$. *Nous avons alors les inégalités*

$$\forall N \geq 1, \forall p \in \mathbb{N}, \ \gamma_N(p) \leq \beta_N(p) + \beta'_N(p).$$

Preuve. Montrons i). Soit $f_1, \ldots, f_r$ un système de générateurs de l'idéal I définissant le germe $(X, 0)$. Soit $x(T) \in \widehat{\mathcal{O}}_N^n$ tel que $f_i(x(T)) \in \mathfrak{m}^{\beta_{N+1}(p)+1}$, $1 \leq i \leq r$. Nous avons donc l'existence d'un $\overline{x}(T) \in \widehat{\mathcal{O}}_{N+1}^n$ tel que $f(\overline{x}(T)) = 0$ et $x(T) - \overline{x}(T) \in \mathfrak{m}^{p+1}$. En annulant T_{N+1} dans l'écriture de $\overline{x}(T)$, nous trouvons $\overline{\overline{x}}(T) \in \widehat{\mathcal{O}}_N^n$ tel que $f(\overline{\overline{x}}(T)) = 0$ et $x(T) - \overline{\overline{x}}(T) \in \mathfrak{m}^{p+1}$.
Montrons maintenant ii). Soit $f_1, \ldots, f_r$ (resp. $g_1, \ldots, g_s$) un système de générateurs de l'idéal I définissant le germe $(X, 0)$ (resp. $(Y, 0)$). Soit $x \in \widehat{\mathcal{O}}_N^n$ tel que $h(x) \in \mathfrak{m}^{\beta_N(p)+\beta'_N(p)+1}$ pour tout $h \in I \cap J$. En particulier $f_j(x)g_k(x) \in \mathfrak{m}^{\beta_N(p)+\beta'_N(p)+1}$ pour tout j et k. Alors nous avons soit $f_j(x) \in \mathfrak{m}^{\beta_N(p)+1}$ pour tout j, soit $g_k(x) \in \mathfrak{m}^{\beta_N(p)+1}$ pour tout k. D'où l'existence de $\overline{x}$ tel que $x - \overline{x} \in \mathfrak{m}^{p+1}$ et $f(\overline{x})g(\overline{x}) = 0$, et donc tel que $h(x) = 0$ pour tout $h \in I \cap J$. Q.E.D.

Nous verrons plus tard que la première de ces inégalités peut être stricte.
Dans le cas des hypersurfaces, plusieurs auteurs ont étudié β_1, appelée parfois fonction de Artin-Greenberg du germe [LJ], [H1]. Le calcul explicite de β_1 pour les courbes planes a même été effectué [H2], et montre que celle-ci, avec la donnée de la multiplicité, est un invariant topologique complet pour les courbes planes. M. Hickel a aussi montré que la constante égale à $\theta := \overline{\lim}_p \beta_1(p)/p$ est une contrainte sur le nombre d'éclatements nécessaires à désingulariser un germe d'hypersurface:

Proposition 2.2 ([H2]). *Soit* $(X, 0)$ *un germe d'hypersurface complexe singulier défini par une équation. Soit une suite d'éclatements* φ_j *de centres lisses* Z_j *où* X_j *est équimultiple le long de* Z_j, X_{j+1} *est la transformée stricte de* X_j *et où* X_n *est lisse*:

$$\begin{tikzcd} W_n \arrow[r, "\varphi_n"] & W_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_1"] & W_0 \\ X_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_n"] & X_{n-1} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_1"] & X_0 = X \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Alors nous avons

$$n \geq \frac{\theta - 1}{m_0} \tag{2}$$

où $\theta := \overline{\lim}_p \beta_1(p)/p$, β_1 est la première fonction de Artin de $(X, 0)$ et m_0 est la multiplicité de X en l'origine.

La première fonction de Artin de $(X, 0)$ nous donne donc une condition nécessaire quant à la désingularisation d'un germe d'espace analytique.
Dans le cas des hypersurfaces, une première majoration effective de β_1 a été obtenue [LJ], améliorée ensuite par M. Hickel:

Théorème 2.3 ([H1]). *Soient f un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et J_f l'idéal jacobien de f (i.e. l'idéal de $\Bbbk\{X_1, \dots, X_n\}$ engendré par les dérivées partielles de f). Notons $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ (resp. $(X_J, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$) le germe de variété associé à f (resp. à J_f) et β_1 (resp. β'_1) sa première fonction de Artin. Alors nous avons*

$$\beta_1(p) \leq \beta'_1(p) + p, \ \forall i \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Ce théorème relie la fonction de Artin de (f) avec celle de son jacobien, et cette inégalité est bien meilleure que celle qui apparaît dans la preuve du théorème de Greenberg, et qui est de la forme $\beta_1 \leq 2\beta'_1$ (cf. [Gr]). En particulier, dans le cas d'un germe à singularité isolée, ce théorème permet d'obtenir le résultat suivant:

Théorème 2.4 ([H1]). *Soit f un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$ définissant un germe de variété analytique $(X, 0)$. Supposons que $(X, 0)$ est à singularité isolée et notons ν son exposant de Łojasiewicz* ([LJ-T] *ou* [H1]). *Alors*

$$\beta_1(i) \leq \lfloor \nu i \rfloor + i, \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Ces deux derniers résultats sont cependant faux si $N \geq 2$, comme nous le verrons dans la dernière partie.

§3. théorème d'Izumi et théorème d'approximation diophantienne

Nous présentons ici deux résultats (l'un d'algèbre commutative, l'autre d'arithmétique) qui sont deux cas particuliers de majoration affine d'une fonction de Artin. Ces deux résultats seront utilisés par la suite pour estimer certaines fonctions de Artin.

3.1. Théorème d'Izumi

Ce théorème donne une caractérisation des algèbres analytiques intègres:

Théorème 3.1 ([Iz][Re]). *Soient*

$$R := \Bbbk[[T_1, \ldots, T_N]]/(f_1, \ldots, f_p),$$

avec $\Bbbk$ *un corps, et* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal. Alors* R *est intègre si et seulement si il existe deux constantes* a *et* b *telles que*:

$$\forall x,\, y \in R,\ \nu(xy) \leq a(\nu(x) + \nu(y)) + b$$

où ν *est l'ordre* $\mathfrak{m}$*-adique sur* R.

Pour tout anneau local R, nous avons toujours $\nu(xy) \geq \nu(x) + \nu(y)$, quelques soient x et y dans R. Ce théorème peut se réénoncer sous la forme suivante:

Théorème 3.2 ([Ro3]). *Si* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est un idéal premier de* $\widehat{\mathcal{O}}_N$*, alors la fonction de Artin de* $XY - \sum_i f_i Z_i \in \widehat{\mathcal{O}}_N[[X, Y, Z_i]]$ *est bornée par une fonction affine de la forme* $p \longmapsto 2ap + c$ *où* a *est la constante du théorème précédent.*

Exemple 3.3. Soit $f \in \widehat{\mathcal{O}}_N$ une série irréductible. Alors, $XY - f$ n'admet pas de zéro $(x(T), y(T))$ tel que $x(0) = y(0) = 0$. Sa fonction de Artin est donc constante. Notons $c(f)$ cette constante. D'autre part, la fonction de Artin de $XY - fZ$ est bornée par une fonction affine d'après le Théorème 3.2.
Si $c(f) = \mathrm{ord}(f)$, c'est-à-dire si le cône tangent à la variété formelle $\{f = 0\}$ est irréductible, alors ν est une valuation, et les constantes a et b du Théorème 3.1 peuvent être choisies respectivement égales à 1 et 0. On peut alors voir que la fonction $p \longmapsto 2p + c$ (où c est une constante bien choisie) majore la fonction de Artin de $XY - fZ$.
La question naturelle qui se pose est de savoir, en général, comment relier le coefficient de linéarité d'une fonction affine majorant la fonction de Artin de $XY - fZ$, et les constantes $c(f)$ et $\mathrm{ord}(f)$.

3.2. Théorème d'approximation diophantienne

Nous allons noter ici $V_N := \{(x/y) \,/\, x,\, y \in \widehat{\mathcal{O}}_N \text{ et } \mathrm{ord}(x) \geq \mathrm{ord}(y)\}$, l'anneau de valuation discrète qui domine $\widehat{\mathcal{O}}_N$ pour ord et

$$\widehat{V}_N := \Bbbk(T_1/T_N, \ldots, T_{N-1}/T_N)[[T_N]]$$

le complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique de V_N. Les corps $\mathbb{K}_N$ et $\widehat{\mathbb{K}}_N$ sont respectivement les corps de fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_N$ et de $\widehat{V}_N$. La valuation ord définit une norme $|\ \ |$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_N$ en posant $|x| = e^{-\mathrm{ord}(x)}$ et cette norme induit une topologie appelée topologie $\mathfrak{m}$-adique. Cette norme s'étend naturellement à $\mathbb{K}_N$ et $\widehat{\mathbb{K}}_N$. On peut remarquer que $\widehat{\mathbb{K}}_N$ est le complété de $\mathbb{K}_N$ pour la norme $|\ \ |$. Nous avons alors le théorème suivant:

Théorème 3.4 ([Ro4]). *Soit $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N$ algébrique sur $\mathbb{K}_N$ tel que $z \notin \mathbb{K}_N$. Alors il existe $a \geq 1$ et $K \geq 0$ tels que*

$$\left| z - \frac{x}{y} \right| \geq K|y|^a, \forall x,\, y \in \widehat{\mathcal{O}}_N. \tag{5}$$

Ce théorème est un cas particulier de majoration affine de fonctions de Artin. En effet, celui-ci est équivalent au théorème suivant:

Théorème 3.5 ([Ro4]). *Soit $P(X, Y)$ un polynôme homogène en X et Y à coefficients dans $\widehat{\mathcal{O}}_N$. Alors P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine de la forme $p \longmapsto (d+a)p+c$, où d est le degré de P, a est la constante du* Théorème 3.4 *précédent et c est une constante.*

Exemple 3.6. Nous pouvons faire le parallèle avec le théorème d'Izumi. Soit $Q(Z)$ un polynôme en une variable à coefficients dans $\widehat{\mathcal{O}}_N$. Supposons que Q n'ait pas de zéro dans $\widehat{\mathcal{O}}_N$. Alors la fonction de Artin de Q est constante. L'exemple le plus caractéristique est le cas où $Q(Z) = Z^d - u$ et où u n'est pas une puissance d-ième dans $\widehat{\mathcal{O}}_N$. Dans ce cas notons $c(u)$ la valeur constante de la fonction de Artin de Q. Notons $P(X, Y)$ l'homogénéisé de Q (i.e. $P(X, Y) = Y^d Q(X/Y)$). D'après le Théorème 3.5, P admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine.
Si $c(u) = \text{ord}(u)$, c'est-à-dire si le terme initial de u n'est pas une puissance p-ième dans $\widehat{\mathcal{O}}_N$, alors u n'est pas une puissance p-ième dans $\widehat{V}_N$ et donc dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Le Théorème 3.4 est donc vide dans ce cas, et l'on peut montrer que la fonction de Artin de P est bornée par une fonction de la forme $p \longmapsto dp + c$, avec c bien choisie.
Là encore, la question naturelle qui se pose est de savoir, en général, comment relier le coefficient de linéarité d'une fonction affine majorant la fonction de Artin de $P(X, Y)$ (où, de manière équivalente, une constante a intervenant dans le Théorème 3.4 pour $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N$ tel que $z^d = u$), et les constantes $c(u)$ et $\text{ord}(u)$.

§4. Exemples

Nous allons donner ici, pour plusieurs germes d'espaces analytiques, le comportement des différentes fonctions de Artin de ceux-ci. Pour $N \geq 2$, un tel comportement est en général très difficile à déterminer. Dans chaque cas, β_N est la N-ième fonction de Artin du germe considéré. Nous considérerons parfois le cas où $\Bbbk$ est de caratéristique positive, si les β_N existent alors.

4.1. Germe de variété défini par un monôme

Ce premier cas, très simple, est celui d'un germe d'espace $(X, 0) \subset (\mathbb{k}^n, 0)$ défini par une équation de la forme $X_1^{n_1} \dots X_n^{n_n} = 0$. Nous avons alors la proposition:

Proposition 4.1. *Pour tout $N \geq 1$, nous avons*

$$\beta_N(p) = (n_1 + \cdots + n_n)p, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Preuve. Il est clair que si $x_1^{n_1} \cdots x_n^{n_n} \in \mathfrak{m}^{(n_1+\cdots+n_n)p+1}$, alors il existe i tel que $\mathrm{ord}(x_i) \geq p+1$. D'autre part, si pour tout i nous posons $x_i = T^p$, alors $x_1^{n_1} \cdots x_n^{n_n} = T^{(n_1+\cdots+n_n)p} \in \mathfrak{m}^{(n_1+\cdots+n_n)p}$. Cependant $\mathrm{ord}(x_i) < p+1$. D'où l'égalité. Q.E.D.

4.2. Germe de variété réduite à composantes irréductibles lisses

Les fonctions de Artin d'un germe d'espace analytique réduit dont chaque composante irréductible est lisse sont toutes bornées par une fonction linéaire $p \longmapsto m\,p$ où m est le nombre de composantes irréductibles du germe en 0. Ceci découle du fait que les fonctions de Artin de $(X \cup Y, 0)$ sont bornées par celles de $(X, 0)$ plus celles de $(Y, 0)$, et que les fonctions de Artin d'un germe lisse sont toutes égales à l'identité. Plus précisément nous avons la proposition:

Proposition 4.2. *Soient $(X, 0)$ un germe d'espace analytique réduit dont toutes les composantes irréductibles sont lisses. Supposons que le corps de base n'est pas de cardinal fini. Alors*

$$\beta_N(p) = m\,p, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \forall N \in \mathbb{N}^*$$

où m est le nombre de composantes irréductibles du germe en 0.

Preuve. D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que $\beta_N(p) \geq m\,p$ pour tout p. Supposons que $\mathbb{k}$ n'est pas de cardinal fini. Nous allons donner la preuve de ce résultat dans le cas de 2 composantes irréductibles (i.e. $m = 2$), le cas général étant identique. Soient I et J les idéaux de $\mathbb{k}\{X_1, \dots, X_n\}$ définissant respectivement $(X, 0)$ et $(Y, 0)$ deux germes lisses distincts. Nous avons $\mathbb{k}\{X_1, \dots, X_n\}/I \cap J \equiv \mathbb{k}\{Y_1, \dots, Y_r\}/K$ où K est inclu dans $\{X_1, \dots, X_n\}^2$ car $X \cup Y$ n'est pas lisse. Soient $I/I \cap K$ et $J/J \cap K$ les idéaux de $\mathbb{k}\{Y_1, \dots, Y_r\}/K$ engendrés par I et J, et I' et J' les idéaux de $\mathbb{k}\{Y_1, \dots, Y_r\}$ engendrés par les images reciproques de $I/I \cap K$ et $J/J \cap K$ respectivement. Comme X et Y sont lisses, ces idéaux sont inclus dans $(Y_1, \dots, Y_r)$ mais pas dans $(Y_1, \dots, Y_r)^2$. Soient f et g deux éléments de I' et J' respectivement qui ne sont pas dans $(Y_1, \ldots, Y_r)^2$. Soit $(y_1, \ldots, y_r)$ un élément de $\mathbb{k}^r$ n'appartenant ni aux zéros de la forme initiale de f, ni aux zéros de celle de g. Un tel $(y_1, \ldots, y_r)$ existe car $\mathbb{k}$ n'est pas un corps fini. Pour tout $h \in I \cap J$, $h(y_1 T_1^p, \ldots, y_r T_1^p) \in \mathfrak{m}^{2p}$ car $K \subset (Y_1, \ldots, Y_r)^2$. Si nous avions $\beta_N(p) < 2p$, alors il existerait $\overline{y}_1(T), \ldots, \overline{y}_r(T)$ tels que $h(\overline{y}(T)) = 0$ pour tout $h \in I \cap J$, et $\overline{y}_i(T) - y_i T_1^p \in \mathfrak{m}^{p+1}$ pour tout i. En particulier, $f(\overline{y})g(\overline{y}) = 0$. Or $(y_1, \ldots, y_r)$ n'appartenant ni aux zéros de la forme initiale de f, ni aux zéros de celle de g, ceci est impossible et $\beta_N(p) \geq 2p$. Q.E.D.

4.3. Cusp

Soit $(X, 0) \subset (\mathbb{k}^2, 0)$ le germe d'espace analytique défini par $X^2 - Y^3 = 0$. Nous avons alors la proposition:

Proposition 4.3. *Nous avons les cas suivants*:

i) *Si $N = 1$ et $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, nous avons*

$$\beta_1(p) = 3p, \ \forall p \notin (2)$$
$$\beta_1(2) = 4 \ \textit{et} \ \beta_1(p) = 3(p-1), \ \forall p \in (2)\backslash\{2\}.$$

ii) *Si $N = 1$ et $\mathbb{k}$ est un corps qui contient un élément λ qui n'est pas un carré (ex: $\mathbb{k} = \mathbb{R}$), nous avons*

$$\beta_1(p) = 3p, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

iii) *Si $N \geq 2$ et si $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique différente de 2 ou 3, nous avons*

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \beta_N(p)/p \geq 4.$$

Preuve. i) La première assertion découle du calcul de la première fonction de Artin d'une branche plane (cf. Théorème 2.1 [H2]).
ii) Supposons que $N = 1$ et $\mathbb{k}$ est un corps qui contient un élément λ qui n'est pas un carré. En particulier λ^3 n'est pas un carré (si $\lambda^3 = \mu^2$ alors $(\mu/\lambda)^2 = \lambda$ ce qui est impossible).
Posons alors $x = 0$ et $y = \lambda T^p$. Nous avons $x^2 - y^3 = -\lambda^3 T^{3p}$. Si $\beta_1(p) < 3p$, alors il existe $\overline{x}$ et $\overline{y}$ avec $\overline{x}^2 - \overline{y}^3 = 0$ et $\overline{x} - x$ et $\overline{y} - y$ sont dans $\mathfrak{m}^{p+1}$. Dans ce cas, néssairement le terme initial de $\overline{x}^2$ doit être égal au terme initial de $\overline{y}^3$ qui est égal à $\lambda^3 T^{3(p-1)}$. Or λ^3 n'est pas un carré, donc ceci est impossible et $\beta_1(p) \geq 3p$.
D'autre part, si $x^2 - y^3 \in \mathfrak{m}^{3p+1}$, alors deux cas peuvent se produire: si $\text{ord}(x) \geq p+1$ et $\text{ord}(y) \geq p+1$, alors nous posons $\overline{x} = \overline{y} = 0$, et nous avons $\overline{x}^2 - \overline{y}^3 = 0$ et $\overline{x} - x, \overline{y} - y \in \mathfrak{m}^{p+1}$. Si $\text{ord}(x) < p+1$ ou $\text{ord}(y) < p+1$, alors les termes initiaux de x^2 et de y^3 sont égaux, car

$x^2 - y^3 \in \mathfrak{m}^{3p+1}$. Donc y^3 est un carré dans $\mathbb{k}[[T]]$, et nous avons alors $(x - y^{3/2})(x + y^{3/2}) \in \mathfrak{m}^{3p+1}$. Donc $\mathrm{ord}(x - y^{3/2}) \geq p+1$ par exemple, et nous posons $\overline{x} = y^{3/2}$ et $\overline{y} = y$. Dans tous les cas nous avons $\overline{x}^2 - \overline{y}^3 = 0$ et $\overline{x} - x, \overline{y} - y \in \mathfrak{m}^{p+1}$. Donc $\beta_1(p) \leq 3p$.
La troisième assertion découle de [Ro1]. Q.E.D.

4.4. Parapluie de Whitney

Soit $(X, 0) \subset (\mathbb{k}^3, 0)$ le germe de variété défini par $X^2 - ZY^2 = 0$ où $\mathbb{k}$ est un corps muni d'une norme. Nous avons alors la proposition:

Proposition 4.4. *Nous avons les cas suivants*:
i) *Si $N = 1$, nous avons*

$$\beta_1(p) \leq 3p, \ \forall p \geq 1.$$

ii) *Si $N \geq 2$ et car $\mathbb{k} = 2$, nous avons*

$$\beta_1(p) \leq 3p, \ \forall p \geq 1.$$

iii) *Si $N \geq 2$ et car $\mathbb{k} \neq 2$, nous avons*

$$\beta_N(p) \geq \frac{p^2}{4} + p - 4, \ \forall p \geq 1.$$

Preuve. Notons $P(X, Y, Z) = X^2 - ZY^2$.
Le cas i) découle du Théorème 2.3 si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Dans le cas général, supposons que nous ayons x, y et z dans $\mathcal{O}_1$ tels que $x^2 - zy^2 \in \mathfrak{m}^{3p+1}$. Alors trois cas se présentent:
- Supposons que $\mathrm{ord}(y) < p+1$ et $\mathrm{ord}(x^2) = \mathrm{ord}(zy^2)$. Donc $x^2/y^2 - z \in \mathfrak{m}^{p+1}$ et nous posons $\overline{x} = x$, $\overline{y} = y$ et $\overline{z} = x^2/y^2$.
- Supposons que $\mathrm{ord}(x^2) \neq \mathrm{ord}(zy^2)$. Alors $\mathrm{ord}(x) \geq p+1$, et soit $\mathrm{ord}(z) \geq p+1$ soit $\mathrm{ord}(y) \geq p+1$. Nous posons alors $\overline{x} = 0$, et $\overline{z} = 0$ et $\overline{y} = y$ dans le premier cas, et $\overline{z} = z$ et $\overline{y} = 0$ dans le second cas.
- Supposons enfin que $\mathrm{ord}(y) \geq p+1$ et $\mathrm{ord}(x^2) = \mathrm{ord}(zy^2)$. Alors $\mathrm{ord}(x) \geq p+1$. Nous posons alors $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$ et $\overline{z} = z$.
Dans tous les cas $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ et

$$\overline{x} - x, \overline{y} - y, \overline{z} - z \in \mathfrak{m}^{p+1}.$$

ii) Soient x, y et z dans $\mathcal{O}_N$, avec $N \geq 2$, tels que $x^2 - zy^2 \in \mathfrak{m}^{3p+1}$. Notons

$$\alpha = \mathrm{ord}(x), \ \beta = \mathrm{ord}(y), \ \gamma = \mathrm{ord}(z).$$

Si $\beta > p$, nous posons $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$ et $\overline{z} = z$. Nous avons alors

$$(x - \overline{x})^2 = x^2 \in \mathfrak{m}^{\min\{3p+1,\, 2\beta+\gamma\}} \subset \mathfrak{m}^{2p+2}$$

et donc $\overline{x} - x \in \mathfrak{m}^{p+1}$. Clairement $\overline{y} - y$ et $\overline{z} - z$ sont dans $\mathfrak{m}^{p+1}$ et $\overline{x}^2 - \overline{z}\overline{y}^2 = 0$.

Supposons maintenant que $\beta \leq p$. Nous pouvons écrire $z = z_\gamma + z_{\gamma+1} + z_{\gamma+2} + \cdots$ où z_d est homogène de degré d. Soit γ_1 le plus petit entier pour lequel z_{γ_1} n'est pas un carré. Comme $\operatorname{car} \mathbb{k} = 2$, les monômes apparaissant dans l'écriture de x^2 et de y^2 sont tous des carrés et donc $\gamma_1 + 2\beta \geq 3p + 1$. Notons $\overline{z} = z_\gamma + z_{\gamma+1} + \cdots + z_{\gamma_1 - 1}$; en particulier $\overline{z} - z \in \mathfrak{m}^{3p+1-2\beta} \subset \mathfrak{m}^{p+1}$. Cet élément est un carré, disons $\overline{z} = u^2$, car car $\mathbb{k} = 2$. Nous avons alors $x^2 - (uy)^2 = (x - uy)(x + uy) \in \mathfrak{m}^{3p+1}$. Donc, par exemple, $x - uy \in \mathfrak{m}^{\lfloor (3p+1)/2 \rfloor} \subset \mathfrak{m}^{p+1}$. Posons alors $\overline{x} = uy$ et $\overline{y} = y$. Nous avons alors $x - \overline{x} \in \mathfrak{m}^{p+1}$, $y - \overline{y} \in \mathfrak{m}^{p+1}$ et $z - \overline{z} \in \mathfrak{m}^{p+1}$, et de plus $\overline{x}^2 - \overline{z}\overline{y}^2 = 0$.

iii) Nous allons donner ici une idée de la preuve de ce résultat. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Ro2]. Considérons le polynôme $P_k(X, Y) = X^2 - u_k Y^2$ avec $u_k = T_1^2 + T_2^k$ et $k > 2$. L'idée est de voir que toute majoration affine de la fonction de Artin de P_k a un coefficient de linéraité supérieur à k, et ensuite de considérer ce polynôme comme une "spécialisation" du polynôme P. L'élément u_k n'est pas un carré dans $\mathcal{O}_N$, et donc P_k admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine de la forme $p \longmapsto a(k)p + b(k)$ d'après le théorème 3.5. L'idée est de voir que le plus petit $a(k)$ possible est minoré par $k/2 + 1$. Pour cela, il suffit de voir que u_k est un carré dans $\widehat{V}_N$.

Notons

$$z_k := T_1 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{T_2^p}{T_1^2} - \frac{1}{8}\frac{T_2^{2p}}{T_1^4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\frac{T_2^{np}}{T_1^{2n}} + \cdots \right).$$

Nous avons $z_k^2 = u_k$. Notons $z_{k,p}$ la troncation de z_k à l'ordre p et soient $x_{k,p}$ et $y_{k,p}$ deux éléments de $\mathcal{O}_N$ tels que $x_{k,p}/y_{k,p} = z_{k,p}$, et tels que $x_{k,p}$ et $y_{k,p}$ sont premiers entre eux. Alors $|z_k - (x_{k,p}/y_{k,p})| = K_k |y_{k,p}|^{(k/2)-1}$. En utilisant le théorème 3.5, nous voyons donc que le plus petit $a(k)$ possible est minoré par $k/2 + 1$.

Maintenant, $P(x_{k,p}, y_{k,p}, u_k) \in \mathfrak{m}^{(k+2)p-4}$. Or les zéros (x, y, z) de P sont de deux formes: soit $x = y = 0$, soit z est un carré. Donc

$$\sup_{P(x,y,z)=0} \left(\min\{\operatorname{ord}(x_{k,p} - x), \operatorname{ord}(y_{k,p} - y), \operatorname{ord}(u_k - z)\} \right)$$
$$\leq \max(2k - 3, p).$$

Donc en posant $p = k+2$, nous voyons que $P(x_{k,\,k+2},\, y_{k,\,k+2},\, u_k)\mathfrak{m}^{k^2+4k}$ mais

$$\sup_{P(x,\,y,\,z)=0} \big(\min\{\mathrm{ord}(x_{k,\,k+2} - x),\, \mathrm{ord}(y_{k,\,k+2} - y),\, \mathrm{ord}(u_k - z)\}\big)$$
$$\leq 2k - 3.$$

Nous avons donc une solution approchée de P à l'ordre $k^2 + 4k$ mais la différence entre cette solution approchée et une vraie solution est d'ordre inférieur à $2k - 3$. Q.E.D.

4.5. Le germe de variété défini par $X_1X_2 - X_3X_4 = 0$

Considérons $(X,\, 0) \subset (\mathbb{k}^4,\, 0)$ le germe de variété défini par $X_1X_2 - X_3X_4 = 0$ où $\mathbb{k}$ est un corps muni d'une norme. Nous avons alors la

Proposition 4.5. *Nous avons les cas suivants*:
i) *Si $N = 1$, nous avons*

$$\beta_1(p) = 2p,\ \forall p \geq 1.$$

ii) *Si $N \geq 3$, nous avons*

$$\beta_1(p) \geq p^2 - 1,\ \forall p \geq 1.$$

Preuve. Notons $P(X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4) = X_1X_2 - X_3X_4$.
Montrons i). Soient x_1, x_2, x_3, x_4 tels que $x_1x_2 - x_3x_4 \in \mathfrak{m}^{2p+1}$. Si $\mathrm{ord}(x_1) \geq p+1$ ou $\mathrm{ord}(x_2) \geq p+1$, alors $\mathrm{ord}(x_3) \geq p+1$ ou $\mathrm{ord}(x_4) \geq p+1$. Par exemple $\mathrm{ord}(x_1) \geq p+1$ et $\mathrm{ord}(x_3) \geq p+1$. Dans ce cas nous posons $\overline{x}_1 = 0$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = 0$ et $\overline{x}_4 = x_4$.
Si, pour tout i, $\mathrm{ord}(x_i) \leq p$, alors les termes initiaux de x_1x_2 et de x_3x_4 sont égaux. Donc, par exemple x_1 divise x_3. D'où

$$\varepsilon = x_2 - \frac{x_3}{x_1}x_4 \in \mathfrak{m}^{2p-\mathrm{ord}(x_1)+1} \subset \mathfrak{m}^{p+1}.$$

Nous posons alors $\overline{x}_1 = x_1$, $\overline{x}_2 = x_2 - \varepsilon$, $\overline{x}_3 = x_3$ et $\overline{x}_4 = x_4$.
Dans tous les cas nous avons $P(\overline{x}_1,\, \overline{x}_2,\, \overline{x}_3,\, \overline{x}_4) = 0$ et

$$\overline{x}_1 - x_1,\, \overline{x}_2 - x_2,\, \overline{x}_3 - x_3,\, \overline{x}_4 - x_4 \in \mathfrak{m}^{p+1}.$$

Cela prouve que $\beta_1(p) \leq 2p$ pour tout p.
Enfin, supposons qu'il n'y ait pas égalité, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $\beta_1(p) \leq 2p - 1$. Posons alors $x_1 = x_2 = T^p$ et $x_3 = x_4 = 0$. Nous avons alors $x_1x_2 - x_3x_4 \in \mathfrak{m}^{2p}$. Il existe donc des $\overline{x}_i$ pour $1 \leq i \leq 4$ tels

que $P(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = 0$ et $\overline{x}_i - x_i \in \mathfrak{m}^p$. Nous pouvons alors écrire $\overline{x}_i = x_i + \varepsilon_i$ où $\varepsilon_i \in \mathfrak{m}^p$. Nous avons alors

$$T^{2p} + T^p(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_3\varepsilon_4 = 0 \tag{6}$$

Or $\operatorname{ord}(T^p(\varepsilon_1 + \varepsilon_2))$, $\operatorname{ord}(\varepsilon_1\varepsilon_2)$ et $\operatorname{ord}(\varepsilon_3\varepsilon_4)$ sont tous plus grand que $2p + 1$, donc nous ne pouvons avoir l'égalité 6.

ii) Là encore nous n'allons donner ici qu'une idée de la preuve. Pour plus de détails, on pourra se reporter au théorème 5.1 de [Ro3].

Notons $P_k(X_1, X_2, X_3) := X_1X_2 - (T_1T_2 - T_3^k)X_3$. Comme $T_1T_2 - T_3^k$ est irréductible dans $\mathcal{O}_N$, alors P_k admet une fonction de Artin majorée par une fonction affine de la forme $p \longmapsto a(k)p + b(k)$. On peut montrer que le plus petit $a(k)$ possible est au moins égal à k (cf. [Iz]). Soient $x_{1,p} = T_1^p$, $x_{2,p} = T_2^p$. Alors $x_{1,p}x_{2,p} \in (T_1T_2 - T_3^k) + \mathfrak{m}^{pk}$. Donc il existe $x_{3,p,k}$ tel que $x_{1,p}x_{2,p} - (T_1T_2 - T_3^k)x_{3,p,k} \in \mathfrak{m}^{pk}$.

Posons $k = p$. Notons $x_{4,p} = T_1T_2 - T_3^p$. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une vraie solution de P.

Si $x_4 - x_{4,p} \in \mathfrak{m}^{p+1}$, alors on peut montrer que x_4 est irréductible. Dans ce cas x_1 ou x_2 est divisible par x_4. Or les termes initiaux de $x_{1,p}$ et de $x_{2,p}$ ne sont pas divisibles par le terme initial de $x_{4,p}$ qui est le terme initial de x_4. Donc soit $\operatorname{ord}(x_1 - x_{1,p}) \leq p$, soit $\operatorname{ord}(x_2 - x_{2,p}) \leq p$.

Le second cas est $x_4 - x_{4,p} \notin \mathfrak{m}^{p+1}$.

Dans les deux cas nous avons

$$\sup_{P(\underline{x})=0} \big(\min\{\operatorname{ord}(x_{1,p} - x_1), \operatorname{ord}(x_{2,p} - x_2), \operatorname{ord}(x_{3,p,p} - x_3), \operatorname{ord}(x_{4,p} - x_4)\}\big) \leq p.$$

Nous avons donc une solution approchée de P à l'ordre p^2 mais la différence entre cette solution approchée et une vraie solution de P est d'ordre inférieur à p. Q.E.D.

Nous pouvons remarquer ici que la première fonction de Artin ne différencie pas ce germe d'un germe défini par un monôme de degré 2. Cependant les N-ièmes fonctions de Artin de ces deux germes, pour $N \geq 3$, sont différentes. Une question naturelle qui se pose est la suivante:

Soit $(X, 0)$ un germe d'espace analytique. Si il existe a tel que $\beta_N(p) = ap$ pour tous p et N entiers, alors l'idéal des fonctions de $(X, 0)$ est-il un produit d'idéaux définissants des germes lisses ?

Références

[Ar] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 23–58.

[GP-LJ] G. Gonzalez-Sprinberg and M Lejeune-Jalabert, Sur l'espace des courbes traçées sur une singularité, Algebraic geometry and singularities, La Rábida, 1991, Progress in Maths., **134** (1996), 9–32.

[Gr] M. J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ. Math. IHES, **31** (1966), 59–64.

[H1] M. Hickel, Fonction de Artin et germes de courbes traçés sur un germe d'espace analytique, Am. J. of Math., **115** (1993), 1299–1334.

[H2] M. Hickel, Calcul de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane, Pacific J. of Math., **213** (2004), 37–47.

[Iz] S. Izumi, A measure of integrity for local analytic algebras, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **21** (1985), 719–736.

[LJ] M. Lejeune-Jalabert, Courbes tracçes sur un germe d'hypersurface, Am. J. of Math., **112** (1990).

[LJ-T] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier, Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Séminaire École Polytechnique, 1974, Publi. Inst. Fourier.

[PP] G. Pfister and D. Popescu, Die strenge Approximationeigenschaft lokaler Ringe, Invent. Math., **30** (1975), 145–174.

[Re] D. Rees, Izumi's theorem, Commutative algebra, Berkeley, CA, 1987, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer, New York, 1989, pp. 407–416.

[Ro1] G. Rond, A propos de la fonction de Artin en dimension $N \geq 2$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **340** (2005), 577–580.

[Ro2] G. Rond, Contre-exemple à la linéarité de la fonction de Artin, prépublication ArXiv, 2004.

[Ro3] G. Rond, Lemme d'Artin-Rees, théorème d'Izumi et fonctions de Artin, J. of Algebra, à paraître.

[Ro4] G. Rond, Approximation diophantienne dans les corps de séries en plusierus variables, Ann. Inst. Fourier, à paraître.

[Wa] J. J. Wavrik, A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures, Math. Ann., **216** (1975), 127–142.

Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, Ontario M5S 3G3
Canada
rond@picard.ups-tlse.fr