

## Sur la Formule de Picard-Lefschetz

Luc Illusie

**Introduction.** La formule de Picard-Lefschetz [SGA 7 XV] exprime la variation locale pour une singularité quadratique ordinaire. En cohomologie étale, sa démonstration, dans le cas de dimension relative impaire, requiert un argument transcendant (loc. cit. 3.3). Nous donnons ici, dans ce même cas, une démonstration purement algébrique. L'idée est de déduire le calcul de la variation de la forme explicite donnée par Rapoport-Zink [RZ] pour le logarithme de la monodromie d'une famille semi-stable, de réduction à deux branches. On se ramène à ce cas par ramification et éclatement. La méthode, inspirée d'un calcul de Steenbrink dans [S], s'applique plus généralement à certaines singularités homogènes.

Dans toute la suite, on fixe un trait strictement local  $S = \text{Spec } A$ . On note  $s = \text{Spec } k$  le point fermé,  $p$  l'exposant caractéristique du corps  $k$ , que l'on suppose algébriquement clos,  $\eta = \text{Spec } K$  le point générique,  $v$  la valuation de  $A$ ,  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $A$ . On choisit une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ , on note  $\bar{A}$  le normalisé de  $A$  dans  $\bar{K}$ ,  $\bar{S} = \text{Spec } \bar{A}$ ,  $\bar{\eta} = \text{Spec } \bar{K}$  le point générique de  $\bar{S}$ ,  $\bar{s}$ , identifié naturellement à  $s$ , le point fermé,  $I = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  le groupe d'inertie,  $P \subset I$  le groupe d'inertie sauvage, pro- $p$ -Sylow de  $I$ . On fixe un nombre premier  $\ell \neq p$ , on note  $t_\ell : I \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)(\bar{k})$  le caractère modéré  $\ell$ -adique, donné par  $t_\ell(\sigma) = (\sigma(t^{1/\ell^n})/t^{1/\ell^n})_n$  pour  $v(t) = 1$ . On pose  $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$  ( $\nu \geq 1$ ).

### 1. Réduction semi-stable à deux branches

**1.1.** Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme semi-stable (i.e. tel que localement pour la topologie étale,  $X$  soit lisse sur  $S[x_1, \dots, x_r]/(x_1 \cdots x_r - t)$ , où  $v(t) = 1$ ). Le schéma  $X$  est donc régulier, la fibre générique  $X_\eta$  est

---

Received April 9, 2001.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 14B05, 14D05, 14F20. **Keywords**: Picard-Lefschetz, étale cohomology, vanishing cycles, monodromy, variation, semistable reduction, weight filtration, monodromy filtration, ordinary quadratic singularity, homogeneous singularity, perverse sheaf.

lisse, et la fibre spéciale  $D = X_s$  est un diviseur à croisements normaux dans  $X$ . On suppose que  $D = D_0 + D_1$ , où  $D_0$  et  $D_1$  sont lisses sur  $s$  et se coupent transversalement suivant  $C = D_0 \cap D_1$ . On note  $n$  la dimension relative de  $X$  sur  $S$ , qu'on suppose constante ; donc  $n = \dim D_0 = \dim D_1$ , et  $\dim C = n - 1$ .

On s'intéresse au complexe des cycles proches [SGA 7 XIII 2]

$$(1.1.1) \quad \Psi_f := R\Psi_\eta(\Lambda) \in D^+(D \times_s \eta, \Lambda),$$

défini par  $\Psi_f = \bar{i}^* R\bar{j}_* \Lambda$ , où  $\bar{i} : D \rightarrow \bar{X} = X \times_S \bar{S}$  et  $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \rightarrow \bar{X}$  sont les immersions naturelles, et  $D(D \times_s \eta, \Lambda) = D(D, \Lambda[I])$  est la catégorie dérivée des  $\Lambda[I]$ -modules continus sur  $D$ . La structure de  $\Psi_f$  est bien connue ([RZ], [I1]). Rappelons les points principaux.

(a)  $I$  opère sur  $\Psi_f$  à travers  $t_\ell$ , et trivialement sur  $H^q(\Psi_f)$  pour tout  $q$  ;

(b) On a  $H^q \Psi_f = 0$  pour  $q > 1$ ,  $H^0 \Psi_f = i^* j_* \Lambda = \Lambda_D$  et

$$\begin{aligned} H^1 \Psi_f &= i^*(R^1 j_* \Lambda) / \Lambda_D(-1) = ((\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1}) / \Lambda_D)(-1) \\ &= ((\Lambda_C \oplus \Lambda_C) / \Lambda_C \text{ diagonal})(-1) \end{aligned}$$

(isomorphe à  $\Lambda_C(-1)$  par  $(a, b) \mapsto a - b$ ), où  $i : X_s \rightarrow X$  et  $j : X_\eta \rightarrow X$  sont les inclusions, et l'identification de  $i^* R^1 j_* \Lambda$  à  $(\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1})(-1)$  est donnée par les classes  $e_0$  et  $e_1$  de  $D_0$  et  $D_1$  au sens de [SGA 4 1/2 Cycle 2.1.2] ;

(c) Si  $a : D \rightarrow s$  désigne la projection et  $D(-) = R\mathcal{H}om(-, a^! \Lambda_s)$  le foncteur dualisant, l'accouplement canonique

$$\Psi_f \overset{L}{\otimes} \Psi_f(n)[2n] \rightarrow a^! \Lambda_s$$

est une dualité parfaite, identifiant  $\Psi_f$  à  $D(\Psi_f)(-n)[-2n]$  [I1, 4.2].

(d) On dispose, de plus, sur  $\Psi_f$ , d'un *opérateur de monodromie*  $N : \Psi_f \rightarrow \Psi_f(-1)$  et d'une *filtration par le poids*  $(W_r)$ , définis de la façon suivante ([RZ], [I1]).

(i) Un complexe  $K$  de  $\Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ -modules (continus) sur  $D$ , borné et à degrés  $\geq 0$ , représentant  $\Psi_f$  étant choisi, on construit, par le procédé de Rapoport-Zink [RZ], rappelé en [I1, 3.6], un bicomplexe  $A^\cdot$  de  $\Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)]$ -modules sur  $D$ , borné, concentré dans le premier quadrant, muni d'une augmentation  $K \rightarrow A^\cdot$  induisant des quasi-isomorphismes sur les colonnes de cohomologie et donc un isomorphisme  $K \xrightarrow{\sim} sA^\cdot$  dans  $D^+(D, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$  ; le bicomplexe  $A^\cdot$  est associé (avec différentielles  $d_1, (-1)^i d_2$ ) au bicomplexe naïf dont la  $q$ -ième ligne  $L^q = (A^\cdot{}^q, d_1)$  est  $(\tau_{\geq q+1}(s(K \xrightarrow{T^{-1}} K)(q+1)))[q+1]$ , où  $T$  est un générateur de

$\mathbb{Z}_\ell(1)$  ; la différentielle verticale  $d_2$  et l'augmentation sont déduites de l'application  $x \mapsto xT$  de  $K$  dans  $K(1)$  ; la  $q$ -ième ligne représente  $(\tau_{\geq q+1} i^* Rj_* \Lambda(q+1))[q+1]$  (et est donc acyclique pour  $q > 1$ ), et la différentielle  $d_2$  (resp. l'augmentation  $K \rightarrow L^0$ ) induit sur les faisceaux de cohomologie l'application  $a \mapsto \theta a$ , où  $\theta \in H^1(\eta, \Lambda)(1)$  est la classe du torseur de Kummer, i.e. l'opposée de la classe de  $s$  dans  $S$  [SGA 4 1/2 Cycle 2.1.3] (en particulier,  $1 \in H^0 K = H^0 \Psi_f = \Lambda$  est envoyé sur  $-e_0 - e_1 \in H^0 L^0 = R^1 j_* \Lambda(1)$ , et la classe de  $e_0 \in H^1 K(1) = H^1 \Psi_f(1)$  sur  $(-e_0 - e_1) \wedge e_0 = e_0 \wedge e_1 \in H^1 L^0(1) = R^2 j_* \Lambda(2) = \Lambda^2(R^1 j_* \Lambda(1))$  (avec les notations de (b)).

(ii) On note  $W_r A^\cdot$  le sous-complexe de  $A^\cdot$  obtenu en appliquant  $\tau_{\leq r+q}$  à la  $q$ -ième ligne de  $A^\cdot$ , et  $W_r(sA^\cdot) = s(W_r A^\cdot)$ . Les sous-complexes  $W_r sA^\cdot$  de  $sA^\cdot$  forment une filtration finie croissante, définissant un objet  $(\Psi_f, (W_r))$  de la catégorie dérivée filtrée  $D^+ F(D, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$  ayant  $\Psi_f$  pour objet non filtré sous-jacent. La filtration  $(W_r)$  s'appelle *filtration par le poids*. Le gradué associé est donné (avec des isomorphismes déduits de (i)) par

$$\begin{aligned} \text{gr}_i^W \Psi_f &= 0 \text{ pour } |i| > -1 ; \\ \text{gr}_{-1}^W \Psi_f &= R^2 j_* \Lambda(2)[-1] = \Lambda_C[-1] ; \\ \text{gr}_0^W \Psi_f &= R^1 j_* \Lambda(1) = \Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1} ; \\ \text{gr}_1^W \Psi_f &= R^2 j_* \Lambda(1)[-1] = \Lambda_C(-1)[-1] , \end{aligned}$$

où  $R^1 j_* \Lambda(1)$  est identifié à  $\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1}$  par  $e_0 + e_1$  et  $R^2 j_* \Lambda(2)$  à  $\Lambda_C$  par  $e_0 \wedge e_1$ , avec les notations de (i).

(iii) On note  $\nu : A^\cdot \rightarrow A^{\cdot-1, \cdot+1}(-1)$  l'endomorphisme de bicomplexes donné par  $(-1)^{i+j+1}$  fois la projection canonique en bidegré  $(i, j)$ . (Gabber fait observer que si l'on identifie par la multiplication par  $(-1)^{ij}$  en bidegré  $(i, j)$  le bicomplexe  $A^\cdot$  au bicomplexe déduit de l'ordre  $(d_2, d_1)$  (au lieu de  $(d_1, d_2)$ ) sur les différentielles naïves, le signe dans la définition de  $\nu$  disparaît.) L'homomorphisme

$$N : \Psi_f \rightarrow \Psi_f(-1)$$

de  $D(D, \Lambda[\mathbb{Z}_\ell(1)])$  déduit de  $\nu$  par l'isomorphisme  $\Psi_f \xrightarrow{\sim} sA^\cdot$  s'appelle *opérateur de monodromie*. Il est sous-jacent à un homomorphisme de  $DF$  envoyant  $W_r$  dans  $W_{r-2}$  et induisant un isomorphisme

$$(1.1.2) \quad N : \text{gr}_1^W \Psi_f \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{-1}^W \Psi_f(-1) ,$$

qui, par les isomorphismes de (ii), correspond à l'identité ( $\nu$  est l'identité en bidegré  $(1, 0)$ ). On a  $N^2 = 0$ , et, pour  $\sigma \in I$ ,

$$(1.1.3) \quad \sigma - 1 = t_\ell(\sigma)N : \Psi_f \rightarrow \Psi_f .$$

(iv) Notons  $\text{Per}(D)$  la catégorie des  $\Lambda$ -faisceaux pervers sur  $D$ , pour la perversité auto-duale [BBD]. On sait que  $\Psi_f[n] \in \text{Per}(D)$  (variante de [I1 4.5] pour  $\mathbb{Z}/\ell^v\mathbb{Z}$ ). D'après (1.1.3), l'opérateur de carré nul  $N : \Psi_f \rightarrow \Psi_f(-1)$  est déterminé par l'action de  $I$  (et  $y$  commute), et il résulte de (1.1.2) que la filtration par le poids de  $\Psi_f$  (comme objet de  $DF(D, \Lambda)$ ) définit la *filtration de monodromie* de  $\Psi_f[n]$  (comme objet de la catégorie abélienne  $\text{Per}(D)$ ).

(e) L'isomorphisme de dualité  $\Psi_f(n)[n] \xrightarrow{\sim} D(\Psi_f[n])$  de (c) est compatible à l'action de  $I$ , donc à celle de  $N$ , et par suite induit des isomorphismes  $W_i\Psi_f(n)[n] \xrightarrow{\sim} D(\Psi_f[n]/W_{-i-1}\Psi_f[n]) = (W_{-i-1}\Psi_f[n])^\perp$ ,  $\text{gr}_i^W\Psi_f(n)[n] \xrightarrow{\sim} D(\text{gr}_{-i}^W\Psi_f[n])$  dans  $\text{Per}(D)$ . Pour  $i = 1$ , ce dernier isomorphisme est compatible aux identifications de (d) (ii) et à la dualité sur  $C$ .

**1.2.** Notons  $c : C \rightarrow D$ ,  $u_i : D_i \rightarrow D$ ,  $w : D - C \rightarrow D$  les immersions naturelles. Considérons la suite exacte canonique

$$(1.2.1) \quad 0 \rightarrow w_!w^*\Psi_f \rightarrow \Psi_f \rightarrow c_*c^*\Psi_f \rightarrow 0 .$$

Soit  $\sigma \in I$ . L'endomorphisme  $\sigma - 1$  de  $\Psi_f$  induit un endomorphisme du triangle distingué défini par (1.2.1). D'après 1.1 (a) et (b),  $w_!w^*\Psi_f = w_!\Lambda_{D-C}$  et  $(\sigma - 1)|_{D-C} = 0$ . Par suite,  $\sigma - 1$  se factorise à travers  $c_*c^*\Psi_f$  en un homomorphisme

$$(1.2.2) \quad \text{Var}^\sharp(\sigma) : c_*c^*\Psi_f \rightarrow \Psi_f ;$$

cette factorisation est unique car

$\text{Hom}^{-1}(w_!w^*\Psi_f, \Psi_f) = \text{Hom}^{-1}(w^*\Psi_f, w^*\Psi_f) = \text{Hom}^{-1}(\Lambda_{D-C}, \Lambda_{D-C}) = 0$ . Nous appellerons *variation* l'homomorphisme

$$(1.2.3) \quad \text{Var}(\sigma) : c^*\Psi_f \rightarrow c^!\Psi_f$$

déduit de (1.2.2) par adjonction. Considérons d'autre part le triangle distingué canonique

$$(1.2.4) \quad c_*c^!\Psi_f \rightarrow \Psi_f \rightarrow R w_*w^*\Psi_f \rightarrow .$$

**Proposition 1.3.** *Le morphisme canonique  $\Psi_f \rightarrow \text{gr}_1^W\Psi_f$  (resp.  $\text{gr}_{-1}^W\Psi_f \rightarrow \Psi_f$ ) (déduit de 1.1 (d) (ii)) se factorise de manière unique (via*

(1.2.1) et (1.2.4) par un morphisme  $c_*c^*\Psi_f \rightarrow \text{gr}_1^W\Psi_f$  (resp.  $\text{gr}_{-1}^W\Psi_f \rightarrow c_*c^!\Psi_f$ ) et le carré

$$(1.3.1) \quad \begin{array}{ccc} c_*c^*\Psi_f & \longrightarrow & \text{gr}_1^W\Psi_f \\ \text{Var}(\sigma) \downarrow & & \downarrow t_\ell(\sigma)N \\ c_*c^!\Psi_f & \longleftarrow & \text{gr}_{-1}^W\Psi_f \end{array}$$

est commutatif.

La première assertion résulte de 1.1 (d) (ii), et la seconde de (1.1.3).

1.4. Pour  $\sigma \in I$  et  $i = 0, 1$ , on définit de manière analogue

$$(1.4.1) \quad \text{Var}^\sharp(\sigma) : u_{i*}u_i^*\Psi_f \rightarrow \Psi_f ,$$

déduit de l'endomorphisme  $\sigma - 1$  de  $\Psi_f$  et

$$(1.4.2) \quad \text{Var}(\sigma) : u_i^!\Psi_f \rightarrow u_i^!\Psi_f$$

déduit de (1.4.1) par dualité. On a des carrés commutatifs

$$(1.4.3) \quad \begin{array}{ccccc} \Psi_f & \longrightarrow & u_{i*}u_i^*\Psi_f & \longrightarrow & c_*c^*\Psi_f \\ \sigma-1 \downarrow & & \text{Var}(\sigma) \downarrow & & \text{Var}(\sigma) \downarrow \\ \Psi_f & \longleftarrow & u_{i*}u_i^!\Psi_f & \longleftarrow & c_*c^!\Psi_f , \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les flèches canoniques.

**Proposition 1.5.** Notons  $v_i : D_i - C \rightarrow D_i$  l'inclusion.

(a) Le morphisme canonique  $u_i^*\Psi_f \rightarrow Rv_{i*}\Lambda$ , défini par la flèche d'adjonction  $u_i^*\Psi_f \rightarrow Rv_{i*}v_i^*u_i^*\Psi_f$  et l'isomorphisme  $v_i^*u_i^*\Psi_f \cong \Lambda_{D_i-C}$ , est un isomorphisme, qui s'insère dans un isomorphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} u_i^*W_0\Psi_f & \longrightarrow & u_i^*\Psi_f & \longrightarrow & \text{gr}_1^W\Psi_f & \longrightarrow & \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\ \Lambda_{D_i} & \longrightarrow & Rv_{i*}\Lambda & \longrightarrow & \Lambda_C(-1)[-1] & \longrightarrow & , \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est  $(-1)^{i+1}$  celle donnée par 1.1 (d) (ii) et le triangle inférieur par l'isomorphisme canonique  $R^1v_{i*}\Lambda \cong \Lambda_C(-1)$

(donné par la classe de cohomologie de  $C$  dans  $D_i$  [SGA 4 1/2 Cycle 2.1]).

(b) Le morphisme canonique  $v_{i!}\Lambda \rightarrow u_i^!\Psi_f$ , défini par la flèche d'adjonction  $v_i v_i^* u_i^!\Psi_f \rightarrow u_i^!\Psi_f$  et l'isomorphisme  $v_i^* u_i^!\Psi_f \cong \Lambda_{D_i - C}$ , est un isomorphisme, qui s'insère dans un isomorphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathrm{gr}_{-1}^W \Psi_f & \longrightarrow & u_i^!\Psi_f & \longrightarrow & u_i^!(\Psi_f/W_{-1}\Psi_f) & \longrightarrow & \\
 \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \\
 \Lambda_C[-1] & \xrightarrow{-d[-1]} & v_{i!}\Lambda & \longrightarrow & \Lambda_{D_i} & \longrightarrow & ,
 \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est  $(-1)^{i+1}$  celle donnée par 1.1 (d) (ii) et le triangle inférieur est déduit par rotation du triangle défini par la suite exacte canonique  $0 \rightarrow v_{i!}\Lambda \rightarrow \Lambda_{D_i} \rightarrow \Lambda_C \rightarrow 0$ .

(c) Le foncteur  $R\mathrm{Hom}(-, \Lambda_{D_i})$  échange, via la (quasi-) autodualité de  $\Psi_f$  (1.1 (c)), les triangles de (a) et (b).

Le morphisme naturel  $Rj_*\Lambda \rightarrow \Psi_f$ , où  $j : X - D \rightarrow X$  est l'inclusion, identifie  $H^1\Psi_f = \Lambda_C(-1)$  au quotient de  $R^1j_*\Lambda = (\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1})(-1)|C$  par  $\Lambda_C(-1)$  diagonal. Par transversalité de  $D_0$  et  $D_1$ , on a  $Rv_{0*}\Lambda = u_0^*Rj_{1*}\Lambda$ , où  $j_1 : X - D_1 \rightarrow X$  est l'inclusion. Le morphisme naturel  $Rv_{0*}\Lambda \rightarrow u_0^*Rj_*\Lambda$  qui s'en déduit est l'identité sur  $H^0 = \Lambda_{D_0}$  et l'inclusion du facteur  $(\Lambda_{D_1}(-1))|C$  (de base  $e_1|C$ ) sur  $H^1$ . Le morphisme  $Rv_{0*}\Lambda \rightarrow u_0^*\Psi_f$  obtenu en composant avec  $Rj_*\Lambda \rightarrow \Psi_f$  induit l'identité sur  $H^0$  et, sur  $H^1$ , est le composé  $(\Lambda_{D_1}(-1))|C \hookrightarrow (\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1})(-1)|C \rightarrow ((\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1})(-1)|C)/(\Lambda_C(-1) \text{ diagonal})$ , i.e. envoie  $e_1$  sur la classe de  $(0, 1) = -1 \in \Lambda_C(-1)$  (1.1 (b)), c'est donc un isomorphisme. Par suite,  $u_0^*\Psi_f$  est l'image directe de sa restriction à  $D_0 - C$ , d'où la première assertion de (a). Pour la seconde, le point est la commutativité du carré de droite. Notons  $e_0$  (resp.  $e_1$ ) la base de  $R^1j_{0*}\Lambda(1)$  (resp.  $R^1j_{1*}\Lambda(1)$ ) considérée en 1.1 (b),  $e$  la base correspondante de  $H^1\Psi_f(1)$ , classe de  $e_0$  ou de  $-e_1$  modulo  $\Lambda$  diagonal ; dans le diagramme relatif à  $i = 0$ , l'image de  $e$  dans  $\Lambda$  par le composé  $H^1\Psi_f(1) \rightarrow R^1v_{0*}\Lambda(1) \rightarrow \Lambda$  est  $-1$  ; pour calculer l'image de  $e$  par l'autre composé, on doit identifier  $H^1\Psi_f(1)$  à  $\mathrm{gr}_1^W \Psi_f[1](1) = R^2j_*\Lambda(2)$  par 1.1 (d) (ii) : l'image de  $e$  est 1. Pour le diagramme relatif à  $i = 1$ , on trouve le signe opposé. D'où la seconde assertion de (a). La première assertion de 1.5 (b) se déduit de la première de 1.5 (a) par dualité (1.1 (e)). Pour la seconde, le point est la commutativité du carré de gauche. L'argument qui suit est dû à O. Gabber. Il suffit de prouver la commutativité après composition avec la flèche d'adjonction  $u_{i*}u_i^!\Psi_f \rightarrow \Psi_f$ . Dans la construction de

Rapoport-Zink rappelée en 1.1 (d) (i), on peut supposer  $K$  concentré en degrés  $\in [0, 1]$ . Le bicomplexe  $A^\cdot$  est alors concentré en degrés  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ . Le morphisme  $v_{i!}\Lambda \rightarrow \Psi_f$  se factorise (trivialement) par  $H^0\Psi_f$ . Il en est de même du morphisme  $\text{gr}_{-1}\Psi_f \rightarrow \Psi_f$  : il est en effet donné par le composé  $\tau_{\leq 0}L^1[-1] (= A^{01}[-1]) \rightarrow sA^\cdot \leftarrow K$ , et donc se factorise par  $\tau_{\leq 0}L^1[-1] (= R^2j_*\Lambda(2)[-1]) \rightarrow s(\tau_{\leq 0}L^0 \rightarrow \tau_{\leq 0}L^1) (= s(R^1j_*\Lambda(1) \rightarrow R^2j_*\Lambda(2))) \leftarrow \tau_{\leq 0}K (= H^0\Psi_f)$  (où les deuxièmes flèches sont les quasi-isomorphismes donnés par l'augmentation  $K \rightarrow A^\cdot$ ). Si l'on identifie  $H^0\Psi_f$  à  $\Lambda_D$ ,  $R^1j_*\Lambda(1)$  à  $\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1}$  (au moyen de  $e_0 + e_1$ ) et  $R^2j_*\Lambda(2)$  à  $\Lambda_C$  (au moyen de  $e_0 \wedge e_1$ ), ce composé se réécrit  $\Lambda_C[-1] \rightarrow s(\Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1} \xrightarrow{(1,-1)} \Lambda_C) \xleftarrow{(-1,-1)} \Lambda_D$ . D'après les conventions standard [SGA 4 1/2, C. D. I §1 2.1, II §1 1.5], c'est donc  $d[-1]$ , où  $d : \Lambda_C \rightarrow \Lambda_D[1]$  est la flèche de degré 1 du triangle distingué défini par la suite exacte courte  $0 \rightarrow \Lambda_D \xrightarrow{(1,1)} \Lambda_{D_0} \oplus \Lambda_{D_1} \xrightarrow{(1,-1)} \Lambda_C \rightarrow 0$ . Cette suite reçoit la suite exacte canonique  $0 \rightarrow v_{i!}\Lambda \rightarrow \Lambda_{D_i} \rightarrow \Lambda_C \rightarrow 0$  (définissant  $d : \Lambda_C \rightarrow v_{i!}\Lambda[1]$ ) par un morphisme qui est l'identité sur  $\Lambda_C$  et  $(-1)^i$  sur les deux autres termes. La commutativité voulue en résulte. Nous omettons la vérification de (c).

**Corollaire 1.6.** *Posons  $H^q(-) = H^q(-, \Lambda)$  (resp.  $H_c^q(-) = H_c^q(-, \Lambda)$ ). Supposons  $D_1$  propre sur  $s$ , et, pour  $\sigma \in I$ , notons  $\text{Var}(\sigma) : H^q(D_1 - C) \rightarrow H_c^q(D_1 - C)$  l'homomorphisme défini par (1.4.2) via les identifications  $H^q(D_1, u_1^*\Psi_f) \cong H^q(D_1 - C)$  et  $H^q(D_1, u_1^!\Psi_f) \cong H_c^q(D_1 - C)$  définies par 1.5 (a) et (b). On a un carré commutatif*

$$(1.6.1) \quad \begin{array}{ccc} H^q(D_1 - C) & \xrightarrow{d} & H^{q-1}(C)(-1) \\ \text{Var}(\sigma) \downarrow & & \downarrow t_\ell(\sigma) \\ H_c^q(D_1 - C) & \xleftarrow{-d} & H^{q-1}(C), \end{array}$$

où les flèches  $d$  sont les opérateurs bords des suites exactes longues de cohomologie ( $H_c^{q+1}(D_1)$  étant identifié à  $H^{q-1}(C)(-1)$  par l'isomorphisme de Gysin).

Le carré (1.6.1) s'obtient en effet en appliquant  $H^q(D_1, -)$  au carré commutatif

$$(1.6.2) \quad \begin{array}{ccc} u_1^*\Psi_f & \longrightarrow & \text{gr}_1^W\Psi_f \\ \text{Var}(\sigma) \downarrow & & \downarrow Nt_\ell(\sigma) \\ u_1^!\Psi_f & \longleftarrow & \text{gr}_{-1}^W\Psi_f \end{array}$$

déduit de (1.3.1) et (1.4.3), via les identifications de 1.5 (a) et (b). Comme on l'a rappelé en (1.1.2), le morphisme induit par  $N : \text{gr}_1^W \Psi_f \rightarrow \text{gr}_{-1}^W \Psi_f(-1)$  via les identifications  $\text{gr}_1^W \Psi_f \cong \Lambda_C(-1)[-1]$ ,  $\text{gr}_{-1}^W \Psi_f \cong \Lambda_C[-1]$  (1.1 (d) (ii)) n'est autre que l'identité, il en est donc de même du morphisme qui s'en déduit de  $H^{q-1}(C)(-1)$  dans  $H^{q-1}(C)(-1)$ .

**2. Singularités homogènes et variation**

**2.1.** On considère maintenant un morphisme  $f : X \rightarrow S$  localement de type fini, plat, de dimension relative  $n$ , et lisse le long de  $X_s$  hors d'un point  $x_0 \in X_s(k)$ . On note  $\Psi_f$  (resp.  $\Phi_f$ ) le complexe des cycles proches (resp. évanescents)  $R\Psi_\eta(\Lambda)$  (resp.  $R\Phi(\Lambda) \in D^+(X_s \times_s \eta, \Lambda)$  [SGA 7 XIII 2.1]. Le complexe  $\Phi_f$  est concentré en  $\{x_0\}$ . On a de plus le résultat suivant, dont nous ne ferons pas usage :

**Proposition 2.2.** *Si de plus  $f$  est localement d'intersection complète, alors  $H^i\Phi_f = 0$  pour  $i \neq n$ , et  $H^n\Phi_f$  est un  $\Lambda$ -module libre de type fini.*

Le cas où  $S$  est de caractéristique nulle est traité dans [SGA 7 I 4.6]. Pour le cas général, voir [I2].

**2.3.** La construction décrite dans ce numéro est inspirée de l'exemple considéré par Steenbrink dans [S, 3.12]. Soient  $n$  un entier  $\geq 1$ ,  $e$  un entier  $\geq 2$ ,  $F = \sum a_\alpha x^\alpha \in A[x_1, \dots, x_{n+1}]$  un polynôme homogène de degré  $e$ , partout non nul,  $\pi$  une uniformisante de  $A$ ,  $u \in A^*$ . On fait l'hypothèse suivante :

(H) le sous-schéma fermé  $Z$  de  $\mathbb{P}_S^{n+1} = \text{Proj } A[x_1, \dots, x_{n+1}, t]$  d'équation  $F - ut^e = 0$  est lisse sur  $S$ .

Observons que (H) ne dépend que de  $F$  et implique que la section hyperplane  $Z \cap (t = 0) \subset \mathbb{P}_S^{n+1}$  (d'équation homogène  $F = 0$ ) est lisse sur  $S$ , et que la réciproque est vraie si  $(p, e) = 1$ . Gabber fait remarquer par ailleurs que, si  $(p, e) \neq 1$ , la condition (H) ne peut être vérifiée pour  $e > 2$  (la relation d'Euler contredirait l'exactitude du complexe de Koszul défini par la suite  $(F - ut^e, (\partial F / \partial x_i))$ ).

Notons  $X$  le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_S^{n+1} = \text{Spec } A[x_1, \dots, x_{n+1}]$  défini par l'équation  $F - u\pi^e = 0$ ,  $f : X \rightarrow S$  la projection. Le morphisme  $f$  est plat, de dimension relative  $n$ , et lisse hors de l'origine  $x_0 = (0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{A}_S^{n+1}$ . Le complexe  $\Phi_f$  est donc concentré en  $x_0$  et d'après [SGA 7 XIII 2.4.5], on dispose, pour  $\sigma \in I$ , du morphisme *variation*

$$(2.3.1) \quad \text{Var}(\sigma) : (\Phi_f)_{x_0} \rightarrow R\Gamma_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f).$$



On se propose de décrire ce morphisme à l'aide d'un analogue convenable de la variété des cycles évanescents du cas transcendant.

Soient  $Y$  l'éclaté de  $\{x_0\}$  dans  $X$ , ou, ce qui revient au même, le transformé pur de  $X$  dans l'éclaté  $(\mathbb{A}_S^{n+1})^\sim$  de  $\{x_0\}$  dans  $\mathbb{A}_S^{n+1}$ . Notons  $h : Y \rightarrow X$  la projection, et  $g = f \circ h : Y \rightarrow S$ . (Dans le cas considéré par Steenbrink dans (loc. cit.), où  $A = \mathbb{C}\{\pi\}$ , cette construction équivaut à éclater  $x_0$  dans le schéma (régulier) d'équation  $F - \pi = 0$ , puis de normaliser le schéma qui s'en déduit par changement de base par  $\pi \mapsto u\pi^e$ .)

**Proposition 2.4.** *Le morphisme  $g$  a réduction semi-stable. Le diviseur  $D = Y_s$  est somme de deux diviseurs  $D_0$  et  $D_1$ , lisses sur  $s$ , dont l'un,  $D_1$ , est irréductible et propre sur  $s$ . Le diviseur  $D_1 = h^{-1}(x_0)$ , diviseur exceptionnel de l'éclatement  $h$ , est l'hypersurface de degré  $e$  de  $\mathbb{P}_s^{n+1} = \text{Proj } k[x_1, \dots, x_{n+1}, t]$  d'équation  $\bar{F} - \bar{u}t^e = 0$ , où  $(-)^-$  désigne la réduction modulo  $\mathfrak{m}$ . L'intersection  $C = D_0 \cap D_1$ , lieu à l'infini du cône d'équation  $\bar{F} = 0$  dans  $\mathbb{A}_s^{n+1}$ , est la section hyperplane  $t = 0$  de  $D_1$  dans  $\mathbb{P}_s^{n+1}$ . Le diviseur  $D_0$ , éclaté de  $\{x_0\}$  dans la fibre spéciale  $X_s$  (ou transformé pur de  $X_s$  dans l'éclaté de  $\{x_0\}$  dans  $\mathbb{A}_s^{n+1}$ ), est un fibré en droites sur  $C$ .*

On recouvre  $E = (\mathbb{A}_S^{n+1})^\sim$  par les ouverts standard  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq n + 2$  :  $U_i = \text{Spec } A[x_i, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}, t]/(x_i t - \pi)$  ( $1 \leq i \leq n + 1$ ),  $U_{n+2} = \text{Spec } A[y_1, \dots, y_{n+1}]$ , la projection canonique  $E \rightarrow \mathbb{A}_S^{n+1}$  étant donnée par :  $x_j \mapsto x_j$  si  $i = j$  et  $x_i y_j$  pour  $j \neq i$  dans  $U_i$  ( $1 \leq i \leq n + 1$ ), et par  $x_i \mapsto \pi y_i$  ( $1 \leq i \leq n + 1$ ) dans  $U_{n+2}$ . Le morphisme  $g : Y \rightarrow S$  est induit, sur chaque  $U_i$ , par la projection canonique. Pour  $1 \leq i \leq n + 1$ ,  $Y \cap U_i$  est l'intersection, dans  $\text{Spec } A[x_i, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}, t]$ , des sous-schémas  $U_i$  (d'équation  $x_i t = \pi$ ) et  $V_i$  d'équation  $F(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_{n+1}) - ut^e = 0$ . Par l'hypothèse (H),  $V_i$  est lisse sur  $S$ . Donc, localement,  $V_i$  est étale soit sur  $A[x_i, (y_j)_{j \neq i, j \neq q}, t]$  (pour  $q \in \{1, \dots, n + 1\} - \{i\}$ ), soit sur  $A[x_i, (y_j)_{j \neq i}]$  (avec  $t$  inversible). Dans le premier cas,  $Y \cap U_i = U_i \cap V_i$  est étale sur  $A[x_i, (y_j)_{j \neq i, j \neq q}, t]/(x_i t - \pi)$ , et a donc réduction semi-stable sur  $S$ . Dans le second,  $Y \cap U_i$  est étale sur  $A[(y_j)_{j \neq i}]$ , donc lisse sur  $S$ . Pour  $i = n + 2$ ,  $Y \cap U_{n+2}$  est le sous-schéma de  $U_{n+2}$  d'équation  $F(y_1, \dots, y_{n+1}) - u = 0$ , et est donc, par l'hypothèse (H), lisse sur  $S$ . Cela prouve la première assertion. Le diviseur  $D_1$  est le lieu à l'infini du cône tangent  $\Gamma$  à  $X$  en  $x_0$ . Ce cône  $\Gamma$  a pour équation  $\bar{F} - \bar{u}t^e = 0$  dans  $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_{n+1}, t]$ . Son lieu à l'infini est donc lisse, par hypothèse, donc irréductible puisque  $n \geq 1$ . D'autre part,  $D_0$  est le fibré  $\mathbb{V}(\mathcal{O}_C(1))$  sur  $C$ , lieu à l'infini du cône  $\Gamma \cap (t = 0)$  (d'équation  $\bar{F} = 0$  dans  $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ ), et  $C$  est lisse sur  $s$ , soit par suite de la réduction

semi-stable, soit comme conséquence de l'hypothèse (H) comme on l'a observé plus haut.

**Définition 2.5.** On appelle *variété affine des cycles évanescents* de  $f$  en  $x_0$  le  $s$ -schéma (affine)  $V(f) = V = D_1 - C$ .

Le schéma  $V$  est lisse sur  $s$ , connexe, de dimension  $n$ . La terminologie est justifiée par le résultat suivant :

**Théorème 2.6.** (a) On a  $H^0(V, \Lambda) = \Lambda$  et  $H^i(V, \Lambda) = 0$  pour  $i \neq n, 0$ ,  $H_c^{2n}(V, \Lambda) = \Lambda(-n)$  et  $H_c^i(V, \Lambda) = 0$  pour  $i \neq n, 2n$  ; l'accouplement de dualité  $H^n(V, \Lambda) \otimes H_c^n(V, \Lambda) \rightarrow \Lambda(-n)$ ,  $(a, b) \mapsto \text{Tr}(ab)$ , est un accouplement parfait entre  $\Lambda$ -modules libres de type fini.

(b) On a des isomorphismes canoniques  $(\Psi_f)_{x_0} \cong R\Gamma(V, \Lambda)$ ,  $R\Gamma_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f) \cong R\Gamma_c(V, \Lambda)$ , compatibles aux accouplements de dualité naturels  $R\Gamma(V, \Lambda) \otimes^L R\Gamma_c(V, \Lambda)(n)[2n] \rightarrow \Lambda$  et

$$(\Psi_f)_{x_0} \otimes^L R\Gamma_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f)(n)[2n] \rightarrow R\Gamma_{\{x_0\}}(X_s, a^! \Lambda_s) \xrightarrow{\sim} \Lambda \text{ [I1, 4.2].}$$

(c) Pour  $\sigma \in I$ , notons  $\text{Var}(\sigma) : H^n(V, \Lambda) \rightarrow H_c^n(V, \Lambda)$  le morphisme déduit de  $\text{Var}(\sigma) : H^n(\Phi_f)_{x_0} \rightarrow H_{\{x_0\}}^n(X_s, \Psi_f)$  (2.3.1) par les identifications de (b) ; on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(V, \Lambda) & \xrightarrow{d} & H^{n-1}(C, \Lambda)(-1) \\ \text{Var}(\sigma) \downarrow & & \downarrow t_\ell(\sigma) \\ H_c^n(V, \Lambda) & \xleftarrow{-d} & H^{n-1}(C, \Lambda), \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est définie par (2.3.1) et les flèches  $d$  sont les opérateurs bords des suites exactes longues de cohomologie ( $H_C^{q+1}(D_1, \Lambda)$  étant identifié à  $H^{q-1}(C, \Lambda)(-1)$  par l'isomorphisme de Gysin). De plus, pour  $x \in H^n(V, \Lambda)$  et  $y \in H^{n-1}(C, \Lambda)$ , on a  $\langle dx, y \rangle_C + (-1)^n \langle x, dy \rangle_V = 0$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_C$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ) désignant l'accouplement de dualité à valeurs dans  $\Lambda(-n)$  entre  $H^{n-1}(C, \Lambda)(-1)$  et  $H^{n-1}(C, \Lambda)$  (resp.  $H^n(V, \Lambda)$  et  $H_c^n(V, \Lambda)$ ).

Les assertions de (a) sont bien connues et découlent de la structure de la cohomologie des intersections complètes lisses [SGA 7 XI 1.6] : comme  $D_1$  est une hypersurface lisse de  $\mathbb{P}_s^{n+1}$  et que  $C$  en est une section hyperplane lisse, l'homomorphisme de Gysin  $H^{q-2}(C)(-1) \rightarrow H^q(D_1)$  (où  $H^q(-) = H^q(-, \Lambda)$ ) est un isomorphisme pour  $0 < q < n$  et un isomorphisme sur un facteur direct pour  $q = n$  (envoyant  $\xi^{(q-2)/2}$  sur  $\xi^{q/2}$  pour  $q$  pair, où  $\xi$  est la classe d'une section hyperplane), d'où la nullité des  $H^q(V)$  pour  $0 < q < n$ , par la suite longue de cohomologie  $\dots \rightarrow H^q(D_1) \rightarrow H^q(V) \rightarrow H^{q-1}(C)(-1) \rightarrow \dots$  ; la nullité de

$H^q(V)$  pour  $q > n$  vient de ce que  $V$  est affine ; enfin,  $H^n(V)$ , extension de  $\text{Ker}(H^{n-1}(C)(-1) \rightarrow H^{n+1}(D_1))$  par  $\text{Coker}(H^{n-2}(C)(-1) \rightarrow H^n(D_1))$ , est libre de type fini sur  $\Lambda$ , d'où la dernière assertion de (a). Prouvons (b). Puisque  $h : Y \rightarrow X$  est propre et est un isomorphisme sur les fibres génériques, on a un isomorphisme canonique [SGA 7 XIII 2.1.7]

$$(2.6.1) \quad \Psi_f \cong Rh_*\Psi_g .$$

Par le théorème de changement de base propre, on a donc  $(\Psi_f)_{x_0} \cong R\Gamma(D_1, \Psi_g)$ . D'autre part, comme  $g$  a réduction semi-stable à deux branches  $(D_0, D_1)$  (2.4), on peut appliquer 1.5 à  $g$ . On a ainsi un isomorphisme canonique  $\Psi_g|_{D_1} \xrightarrow{\sim} Rv_{1*}\Lambda$ , où  $v_1 : V = D_1 - C \rightarrow D_1$  est l'inclusion. Par composition, on obtient le premier des deux isomorphismes canoniques annoncés,  $(\Psi_f)_{x_0} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(V, \Lambda)$ . Considérons d'autre part le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{u_1} & D (= Y_s) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \{x_0\} & \xrightarrow{i_0} & X_s, \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les inclusions. D'après [SGA 4 XVIII 3.1.12.3], on a  $i_0^!Rh_* \cong Rh_*u_1^!$ . On a donc des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f) &= i_0^!\Psi_f \\ &\cong i_0^!Rh_*\Psi_g \quad (2.6.1) \\ &\cong Rh_*u_1^!\Psi_g . \end{aligned}$$

D'autre part, d'après 1.5 appliqué à  $g$ , on a  $u_1^!\Psi_g \cong v_{1!}\Lambda$ , d'où finalement le second isomorphisme canonique annoncé,  $R\Gamma_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f) \cong R\Gamma_c(V, \Lambda)$ . La compatibilité à la dualité résulte de 1.5 (c) et de la compatibilité de l'autodualité de  $\Psi$  aux images directes propres. Il reste à prouver (c). La dernière assertion est classique, et cas particulier de 2.6.6 ci-après. Prouvons la première. Soit  $\sigma \in I$ . Notons  $\text{Var}_g(\sigma) : u_1^*\Psi_g \rightarrow u_1^!\Psi_g$  l'homomorphisme défini en (1.4.2). Par ailleurs, soit  $j_0 : X_s - \{x_0\} \rightarrow X_s$  l'inclusion. L'endomorphisme  $\sigma - 1$  de  $\Psi_f$  est sous-jacent à un endomorphisme du triangle distingué canonique

$$(2.6.2) \quad j_0!j_0^*\Psi_f \rightarrow \Psi_f \rightarrow i_{0*}i_0^*\Psi_f \rightarrow .$$

Comme  $f$  est lisse hors de  $x_0$ ,  $j_{0!}j_0^*\Psi_f = j_{0!}\Lambda_{X_s-\{x_0\}}$ . Donc  $\sigma - 1$  s'annule sur  $j_{0!}j_0^*\Psi_f$  et se factorise par un homomorphisme

$$(2.6.3) \quad \text{Var}_f^\sharp(\sigma) : i_{0*}i_0^*\Psi_f \rightarrow \Psi_f ,$$

unique car  $\text{Hom}^{-1}(j_{0!}j_0^*\Psi_f, \Psi_f) = \text{Hom}^{-1}(\Lambda_{X_s-\{x_0\}}, \Lambda_{X_s-\{x_0\}}) = 0$ . Par adjonction,  $\text{Var}_f^\sharp(\sigma)$  définit un homomorphisme

$$(2.6.4) \quad \text{Var}_f(\sigma) : (\Psi_f)_{x_0} \rightarrow i_0^!\Psi_f ,$$

qui est le composé de (2.3.1) et du morphisme canonique  $(\Psi_f)_{x_0} \rightarrow (\Phi_f)_{x_0}$ . En particulier, puisque, en vertu de (a) et (b),  $H^n(\Psi_f) = H^n(\Phi_f)$ ,  $\text{Var}_f(\sigma)$  induit sur  $H^n$  le morphisme variation de [SGA 7 XIII 2.4.5]. Pour achever la preuve de (c), Il suffit donc, compte tenu de 1.6 appliqué à  $g$ , d'établir la commutativité du carré

$$(2.6.5) \quad \begin{array}{ccc} (\Psi_f)_{x_0} & \xrightarrow{\text{Var}_f(\sigma)} & i_0^!\Psi_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rh_*u_1^*\Psi_g & \xrightarrow{Rh_*\text{Var}_g(\sigma)} & Rh_*u_1^!\Psi_g , \end{array}$$

où  $h : D_1 \rightarrow \{x_0\}$  est la projection, et les flèches verticales sont les isomorphismes canoniques (changement de base propre et [SGA 4 XVIII 3.1.12.3]). Par adjonction, il revient au même de vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} i_{0*}i_0^*\Psi_f & \xrightarrow{\text{Var}_f^\sharp(\sigma)} & \Psi_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rh_*u_{1*}u_1^*\Psi_g & \xrightarrow{Rh_*\text{Var}_g^\sharp(\sigma)} & Rh_*\Psi_g . \end{array}$$

Comme  $\text{Hom}^{-1}(j_{0!}j_0^*\Psi_f, Rh_*\Psi_g) = \text{Hom}^{-1}(\Lambda_{X_s-\{x_0\}}, \Lambda_{X_s-\{x_0\}}) = 0$ , il suffit de montrer que le carré déduit par composition avec  $\Psi_f \rightarrow i_{0*}i_0^*\Psi_f$  est commutatif. Par définition de  $\text{Var}_f^\sharp(\sigma)$  et  $\text{Var}_g^\sharp(\sigma)$ , on est ramené à vérifier la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} \Psi_f & \xrightarrow{\sigma-1} & \Psi_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rh_*\Psi_g & \xrightarrow{\sigma-1} & Rh_*\Psi_g . \end{array}$$

Mais celle-ci résulte de la functorialité de  $\Psi$ .

**Lemme 2.6.6.**<sup>1</sup> Soient  $X$  un schéma,  $i : Y \rightarrow X$  un sous-schéma fermé,  $j : U \rightarrow X$  l'ouvert complémentaire,  $r, s$  des entiers,  $x \in H^r(U, \Lambda)$ ,  $y \in H^s(Y, \Lambda)$ . Alors on a, dans  $H^{r+s+1}(X, \Lambda)$ ,

$$((dx) \cdot y)_X = (-1)^{r+1}(x \cdot dy)_X,$$

avec les notations suivantes :  $dx \in H_Y^{r+1}(X, \Lambda)$  (resp.  $dy \in H^{s+1}(X, j_!\Lambda)$ ) est déduit de  $x$  (resp.  $y$ ) par le bord de la suite exacte de cohomologie à supports ;  $((dx) \cdot y)_X$  (resp.  $(x \cdot dy)_X$ ) est l'image dans  $H^{r+s+1}(X, \Lambda)$ , par la flèche canonique, du cup-produit  $(dx) \cdot y \in H_Y^{r+s+1}(X, \Lambda)$  (resp.  $x \cdot dy \in H^{r+s+1}(X, j_!\Lambda)$ ).

Rappelons d'abord que, pour  $A, B, C \in D^-(X, \Lambda)$  et un accouplement  $\pi : A \overset{L}{\otimes} B \rightarrow C$ , le cup-produit  $H^m(X, A) \otimes H^n(X, B) \rightarrow H^{m+n}(X, C)$ ,  $a \otimes b \mapsto ab$ , défini de la façon usuelle par un produit de cochaînes au moyen d'un relèvement de  $\pi$  à des résolutions convenables de  $A, B, C$ , vérifie la formule

(\*)

$$(-1)^{mn}ab = \varepsilon \circ (a \overset{L}{\otimes} b) = \varepsilon \circ (\text{Id} \overset{L}{\otimes} b) \circ (a \overset{L}{\otimes} \text{Id}) = \varepsilon \circ (a \overset{L}{\otimes} \text{Id}) \circ (\text{Id} \overset{L}{\otimes} b),$$

où  $a$  (resp.  $b$ ) est considéré comme une flèche  $\Lambda_X \rightarrow A[m]$  (resp.  $\Lambda_X \rightarrow B[n]$ ) de  $D(X, \Lambda)$ , et

$$\varepsilon : A[m] \overset{L}{\otimes} B[n] \rightarrow C[m+n]$$

est composé de l'isomorphisme canonique  $A[m] \overset{L}{\otimes} B[n] \xrightarrow{\sim} (A \overset{L}{\otimes} B)[m+n]$  (défini, pour  $P, Q \in C(X, \Lambda)$ , par l'isomorphisme de Koszul  $\Lambda[m] \otimes P \otimes \Lambda[n] \otimes Q \xrightarrow{\sim} \Lambda[m] \otimes \Lambda[n] \otimes P \otimes Q$ , via les identifications évidentes  $\Lambda[m] \otimes P = P[m]$ ,  $\Lambda[n] \otimes Q = Q[n]$ ,  $\Lambda[m] \otimes \Lambda[n] = \Lambda[m+n]$ , qui ne font pas intervenir de signes) et de  $\pi[m+n]$ .

Considérons le diagramme suivant :

$$\Lambda_X \xrightarrow{y} \Lambda_Y[s] \xrightarrow{\delta[s]} j_!\Lambda_U[s+1] \xrightarrow{x[s+1]} \Lambda_X[r+s+1],$$

où  $\delta : \Lambda_Y \rightarrow j_!\Lambda_U[1]$  est le morphisme de degré 1 du triangle distingué  $j_!\Lambda_U \rightarrow \Lambda_X \rightarrow \Lambda_Y \rightarrow$  et  $x$  (resp.  $y$ ) est considéré comme une flèche  $j_!\Lambda_U \rightarrow \Lambda_X[r]$  (resp.  $\Lambda_X \rightarrow \Lambda_Y[s]$ ) dans  $D(X, \Lambda)$ . Posons  $f = x[s+1] \circ \delta[s] \circ y$ . Par définition,  $\delta[s] \circ y = dy \in H^{s+1}(X, j_!\Lambda_U)$ . Comme

<sup>1</sup>Je remercie vivement T. Saito et O. Gabber pour leur aide dans la démonstration de ce lemme.

$x \cdot dy = (-1)^{r(s+1)}(dy) \cdot x$  dans  $H^{r+s+1}(X, j_! \Lambda_U)$ , et donc  $(x \cdot dy)_X = (-1)^{r(s+1)}((dy) \cdot x)_X$  dans  $H^{r+s+1}(X, \Lambda)$ , il résulte de la formule (\*) que  $f = (x \cdot dy)_X$ . On voit de même que  $f = ((x[1] \circ \delta) \cdot y)_X$ . Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que

$$(**) \quad x[1] \circ \delta = (-1)^{r+1} dx$$

dans  $H_Y^{r+1}(X, \Lambda) = \text{Hom}_{D(X, \Lambda)}(\Lambda_Y, \Lambda_X[r+1])$ . Pour cela, choisissons une résolution flasque  $C \cdot = (\dots \rightarrow C^i \xrightarrow{d_C} C^{i+1} \rightarrow \dots)$  de  $\Lambda_X$  et un cocycle  $\xi \in C^r(U)$  représentant  $x$ . Le morphisme  $\delta : \Lambda_Y \rightarrow j_! \Lambda_U[1]$  est représenté par les morphismes de complexes

$$\Lambda_Y \xleftarrow{q} \text{Cône}(j_! \Lambda_U \longrightarrow \Lambda_X) \xrightarrow{-1} j_! \Lambda_U[1],$$

où  $q$  est le quasi-isomorphisme donné par la projection  $\Lambda_X \rightarrow \Lambda_Y$ . Par suite  $x[1] \circ \delta$  est représenté par le composé de  $q^{-1}$  et du morphisme de complexes  $u$  :

$$\begin{array}{ccccccc} (0 \longrightarrow & j_! \Lambda_U & \longrightarrow & \Lambda_X & \longrightarrow & 0) & = \text{Cône}(j_! \Lambda_U \longrightarrow \Lambda_X) \\ & \downarrow -\xi & & \downarrow 0 & & & \\ (\dots \longrightarrow & C^r & \xrightarrow{(-1)^{r+1} d_C} & C^{r+1} & \longrightarrow & \dots) & = C \cdot[r+1]. \end{array}$$

De même, utilisant la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Y^0(C \cdot) \rightarrow C \cdot \rightarrow j_* C_U \rightarrow 0$ , on voit que  $(-1)^{r+1} dx$  est représenté par le composé de  $q^{-1}$  et du morphisme de complexes  $v$  :

$$\begin{array}{ccccccc} (0 \longrightarrow & j_! \Lambda_U & \longrightarrow & \Lambda_X & \longrightarrow & 0) & \\ & \downarrow 0 & & \downarrow (-1)^{r+1} d_C \tilde{\xi} & & & \\ (\dots \longrightarrow & C^r & \xrightarrow{(-1)^{r+1} d_C} & C^{r+1} & \longrightarrow & \dots) & = C \cdot[r+1], \end{array}$$

où  $\tilde{\xi} \in C^r(X)$  est un relèvement de  $\xi$ . L'identité (\*\*) découle alors de la formule  $u - v = dh + hd$ , où  $h$  est l'homotopie définie par  $-\tilde{\xi} : \Lambda_X \rightarrow C^r$ .

**Remarques 2.7.** (i) Compte tenu des isomorphismes de 2.6 (b), la nullité des  $H^i(V)$  pour  $i \neq 0, n$  concorde avec le résultat de 2.2.

(ii) Les résultats de 2.6 impliquent des résultats analogues pour  $\Lambda$  remplacé par  $\mathbb{Z}_\ell$ . Posons (avec  $\Psi_f = \Psi_f(\mathbb{Z}_\ell)$ )

$$\begin{aligned} H^n(\Psi_f)_{\text{prim}} &= \text{Coker } H^n(D_1, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^n(V, \mathbb{Z}_\ell) \\ &= \text{Im } H^n(V, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)(-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f)^{\text{prim}} &= \text{Ker } H_c^n(V, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^n(D_1, \mathbb{Z}_\ell) \\ &= \text{Im } H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H_c^n(V, \mathbb{Z}_\ell). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} H^n(\Psi_f)_{\text{prim}} &= \text{Ker } H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)(-1) \rightarrow H^{n+1}(D_1, \mathbb{Z}_\ell) \\ &= \text{Ker } \xi : H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)(-1) \rightarrow H^{n+1}(C, \mathbb{Z}_\ell) \\ &= H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)^{\text{prim}}(-1), \end{aligned}$$

où  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)^{\text{prim}}$  est la *partie primitive* de  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)$ , égale à  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)$  si  $n$  est pair, et à l'orthogonal de  $\xi^{(n-1)/2}$  si  $n$  est impair,  $\xi$  désignant la classe d'une section hyperplane. De même,  $H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f)^{\text{prim}}$  est le *quotient primitif*  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{prim}}$  de  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)$ , un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de type fini, dual de la partie primitive, égal à  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)$  si  $n$  est pair, et à  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)/\mathbb{Z}_\ell \xi^{(n-1)/2}$  si  $n$  est impair. Il résulte du diagramme de 2.6 (c) que  $\text{Var}(\sigma)$  induit un morphisme

$$(2.7.1) \quad \text{Var}(\sigma)_{\text{prim}} : H^n(\Psi_f)_{\text{prim}} \rightarrow H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f)^{\text{prim}}.$$

Supposons que  $t_\ell(\sigma)$  soit un générateur de  $\mathbb{Z}_\ell(1)$ . Alors, si  $n$  est pair,  $\text{Var}(\sigma)_{\text{prim}}$  est un isomorphisme, et si  $n$  est impair,  $\text{Var}(\sigma)_{\text{prim}}$  est injectif, de conoyau de longueur égale à la valuation  $\ell$ -adique de  $e$ . Le discriminant de la restriction à la partie primitive de la forme d'intersection sur  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)$  est en effet égal à  $e$  (puisque  $(\xi^{(n-1)/2} \cdot \xi^{(n-1)/2}) = e$  et que la forme d'intersection sur  $H^{n-1}(C, \mathbb{Z}_\ell)$  est unimodulaire, cf. [SGA 7 XIX 5]). J'ignore comment définir directement (2.7.1), sans recours à l'éclatement  $h$ .

### 3. La formule de Picard-Lefschetz en dimension relative impaire

**3.1.** Soit  $n = 2m + 1$  un entier impair, et soit  $Q \in A[x_1, \dots, x_{n+1}]$  une forme quadratique ordinaire [SGA 7 XII 1] : cela signifie que  $Q \otimes k$  est non nulle et que la quadrique projective de  $\mathbb{P}_S^n$  d'équation  $Q = 0$  est lisse, ou encore qu'il existe un changement linéaire de coordonnées  $x = Py$ ,  $P \in \text{GL}_{n+1}(A)$ , transformant  $Q$  en  $\sum_{1 \leq i \leq m+1} y_i y_{m+1+i}$ . Soit  $\pi$  une uniformisante de  $A$ . Soit  $X$  le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_S^{n+1} = \text{Spec } A[x_1, \dots, x_{n+1}]$  d'équation  $Q - \pi = 0$ , notons  $f : X \rightarrow S$  la projection, et, comme en 2.1,  $\Psi_f$  (resp.  $\Phi_f$ ) le complexe des cycles proches (resp. évanescents) correspondant. Le morphisme  $f$  est lisse hors de l'origine  $x_0 = (0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{A}_S^{n+1}$ , de sorte que  $\Phi_f$  est concentré

en  $x_0$ . Les résultats suivants sont établis par Deligne dans [SGA 7 XV, 2.2, 3.3].

(a) On a  $H^i\Psi_f = 0$  pour  $i \neq 0, n$ ,  $H^i_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f) = 0$  pour  $i \neq n, 2n$ ,  $H^0\Psi_f = \Lambda_{X_s}$ ,  $H^{2n}_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(n)) = \Lambda$ . Les  $\Lambda$ -modules  $H^n(\Psi_f(m+1))_{x_0}$  et  $H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(m))$  sont libres de rang 1, et duaux l'un de l'autre par l'accouplement naturel  $\langle , \rangle : H^n(\Psi_f(m+1))_{x_0} \otimes H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(m)) \rightarrow H^{2n}_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(n)) = \Lambda$ . Ils ont des bases canoniques  $\delta \in H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(m))$  et  $\delta' \in H^n(\Psi_f(m+1))_{x_0}$ , définies au signe près, que l'on peut choisir de manière que  $\langle \delta', \delta \rangle = 1$ . L'application naturelle  $\phi : H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f) \rightarrow H^n(\Psi_f)_{x_0}$  est nulle.

(b) Pour  $\sigma \in I$  et  $x \in H^n(\Psi_f(m+1))_{x_0}$ , on a (*formule de Picard-Lefschetz*)

$$(3.1.1) \quad \text{Var}(\sigma)x = (-1)^{m+1}t_\ell(\sigma)\langle x, \delta \rangle\delta .$$

**3.2.** Nous allons montrer comment on peut déduire, algébriquement, (a) et (b) de 2.6. En fait, la démonstration de (a) dans [SGA 7 XV] est elle aussi entièrement algébrique, ce n'est que celle de (b) qui fait appel à un argument transcendant.

On peut supposer les coordonnées  $x_i$  sur  $\mathbb{A}_S^{n+1}$  choisies de manière que  $Q = \sum_{1 \leq i \leq m+1} x_i x_{m+1+i}$ . Soit  $K' \subset \bar{K}$  une extension quadratique séparable de  $K$ , totalement ramifiée. Notons  $I' = \text{Gal}(\bar{K}/K')$  le sous-groupe (d'indice 2) de  $I$  correspondant,  $A'$  le normalisé de  $A$  dans  $K'$ ,  $\pi'$  une uniformisante de  $A'$ ,  $S' = \text{Spec } A'$ ,  $f' : X' \rightarrow S'$  le morphisme déduit de  $f$  par le changement de base  $S' \rightarrow S$ . On a  $\pi = u\pi'^2$  dans  $A'$ , avec  $u \in A'^*$ , et  $X'$  est le sous-schéma fermé de  $\mathbb{A}_{S'}^{n+1}$  d'équation  $Q - u\pi'^2 = 0$ . On a  $\Psi_f = \Psi_{f'}$  et l'action de  $I'$  sur  $\Psi_{f'}$  est induite par celle de  $I$  sur  $\Psi_f$ . La forme quadratique  $Q - ut^2 \in A'[x_1, \dots, x_{n+1}, t]$  étant ordinaire, l'hypothèse (H) de 2.3 est vérifiée, avec  $F = Q$ ,  $e = 2$  et  $A$  remplacé par  $A'$ . On peut donc appliquer 2.6. La variété des cycles évanescents  $V$  de  $f'$  est une quadrique affine, complément, dans la quadrique projective lisse  $D_1$  d'équation  $Q - \bar{u}t^2 = 0$  dans  $\mathbb{P}_S^{n+1} = \text{Proj } k[x_1, \dots, x_{n+1}, t]$ , de la section hyperplane  $C$  d'équation  $t = 0$ , quadrique lisse de  $\mathbb{P}_S^n = \text{Proj } k[x_1, \dots, x_{n+1}]$  d'équation  $Q = 0$ . Les assertions de 3.1 (a) découlent donc de 2.6 (a) et (b), compte tenu de la structure de la cohomologie des quadriques [SGA 7 XII]. Comme  $n$  est impair, on a, avec les notations de 2.7 (ii) (et en tensorisant sur  $\mathbb{Z}_\ell$  par  $\Lambda$ ),  $H^n(\Psi_{f'})_{x_0} = H^n(V, \Lambda) = H^{n-1}(C, \Lambda)^{\text{prim}}(-1)$ ,  $H^n_{\{x_0\}}(\Psi_{f'}) =$



$H^{n-1}(C, \Lambda)_{\text{prim}}$ , et l'application canonique  $\phi : H_c^n(V, \Lambda) \rightarrow H^n(V, \Lambda)$  est nulle [SGA 7 XII, 3.6]. Choisissons une base  $\delta'$  de  $H^{n-1}(C, \Lambda(m))_{\text{prim}}$  (de la forme  $cl(\alpha) - cl(\beta)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des génératrices de  $C$  de types distincts) [SGA 7 XII 3.5], et notons  $\delta \in H^{n-1}(C, \Lambda(m))_{\text{prim}} = \text{Hom}(H^{n-1}(C, \Lambda(m))_{\text{prim}}, \Lambda)$  la base duale. Comme  $\langle \delta', \delta' \rangle = (-1)^{m \cdot 2}$  [SGA 7 XII, 3.3 (iii) (b)], l'image de  $\delta'$  dans le quotient  $H^{n-1}(C, \Lambda(m))_{\text{prim}}$  est  $(-1)^m 2\delta$ . Notant  $\text{Var}_f$  (resp.  $\text{Var}_{f'}$ ) la variation relative à  $f$  (resp.  $f'$ ) et  $t'_\ell : I' \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$  le caractère canonique relatif à  $A'$ , il résulte donc de 2.6 (c) que, pour  $\tau \in I'$ , on a

$$(*) \quad \text{Var}_{f'}(\tau)\delta' = (-1)^{m+1}t'_\ell(\tau)2\delta .$$

Pour  $\sigma \in I$ , on a  $\sigma^2 \in I'$ . Donc, d'après (\*),

$$\text{Var}_f(\sigma^2)\delta' = \text{Var}_{f'}(\sigma^2)\delta' = (-1)^{m+1}t'_\ell(\sigma^2)2\delta .$$

Mais  $2t'_\ell(\sigma^2) = (\sigma^2((u\pi'^2)^{1/\ell^m})/(u\pi'^2)^{1/\ell^m})_m = (\sigma^2(\pi^{1/\ell^m})/\pi^{1/\ell^m})_m = t_\ell(\sigma^2)$ .

On en déduit, pour tout  $\sigma \in I$ ,

$$(**) \quad \text{Var}_f(\sigma^2)\delta' = (-1)^{m+1}t_\ell(\sigma^2)\delta .$$

Mais  $t_\ell(\sigma^2) = 2t_\ell(\sigma)$ , et comme l'application  $\phi$  est nulle,  $\sigma \mapsto \text{Var}_f(\sigma)\delta'$  est un homomorphisme de  $I$  dans  $H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(m))$ . En particulier,  $\text{Var}_f(\sigma^2)\delta' = 2\text{Var}_f(\sigma)\delta'$ . On peut donc récrire (\*\*\*) sous la forme

$$2\text{Var}_f(\sigma)\delta' = (-1)^{m+1}2t_\ell(\sigma)\delta .$$

Passant à la limite sur les  $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$  ( $\nu \geq 1$ ), on obtient la même formule à coefficients dans  $\mathbb{Z}_\ell$ . Comme  $H^n_{\{x_0\}}(X_s, \Psi_f(\mathbb{Z}_\ell)(m))$  est libre de rang 1 sur  $\mathbb{Z}_\ell$ , de base  $\delta$ , on peut diviser par 2, et on en déduit (3.1.1) pour  $x = \delta'$ , donc pour tout  $x$ .

**Remarque 3.3.** On peut montrer que l'identification de  $H^n(\Psi_f)_{x_0}$  à  $H^{n-1}(C)_{\text{prim}}(-1)$  utilisée en 3.2 coïncide avec celle décrite dans [SGA 7 XV 2.2.3]. Notons  $i_1$  la première,  $i_2$  la seconde. Rappelons la définition de  $i_2$ . Soit  $\bar{X}$  la complétion projective de  $X$ , d'équation  $Q - \pi t^2 = 0$  dans  $\mathbb{P}_S^{n+1} = \text{Proj } A[x_1, \dots, x_{n+1}, t]$ ,  $\bar{X}_\infty$  son lieu à l'infini, défini par  $t = 0$ , quadrique lisse sur  $S$ , d'équation  $Q = 0$  dans  $\mathbb{P}_S^n$ , de fibre spéciale  $(\bar{X}_\infty)_s = C$ . Comme  $\bar{X}$  est lisse sur  $S$  au voisinage de  $\bar{X}_\infty$ , la flèche canonique  $H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow H^n(X_s, \Psi_f)$  [SGA 7 XIII 2.1.8.3] est un isomorphisme, et, comme expliqué en [SGA 7 XV 2.2.3], la flèche  $H^n(X_s, \Psi_f) \rightarrow H^n(\Psi_f)_{x_0}$  est un isomorphisme ; on a par ailleurs  $H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}((\bar{X}_\infty)_{\bar{\eta}}, \Lambda)^{\text{prim}}(-1) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(C)^{\text{prim}}(-1)$  ; l'identification  $i_2$  est composée de ces isomorphismes. On obtiendrait la même

identification  $i_2$  en remplaçant  $X/S$  par  $X'/S'$ ,  $\bar{X}$  par  $\bar{X}'$  (d'équation  $Q - u\pi'^2t^2 = 0$  dans  $\mathbb{P}_{S'}^{n+1}$ ) et appliquant la même suite d'isomorphismes. Pour établir la coïncidence de  $i_1$  et  $i_2$ , on peut employer l'argument suivant, dû à T. Saito.

Soit  $P \subset \mathbb{P}_{S'}^{n+1} \times \mathbb{P}_{S'}^{n+1}$  l'adhérence schématique du graphe de l'isomorphisme  $\phi : \mathbb{P}_{\eta'}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_{\eta'}^{n+1}, ((x_i), t) \mapsto ((x_i), \pi't)$  (d'inverse  $((x_i), t) \mapsto ((\pi'x_i), t)$ ). Dans  $\text{Proj } A[x_1, \dots, x_{n+1}, t] \times \text{Proj } A[x'_1, \dots, x'_{n+1}, t']$ ,  $P$  est défini par les équations  $x_it' = \pi'x'_it$  ( $1 \leq i \leq n+1$ ),  $x_ix'_j = x'_ix_j$  ( $1 \leq i, j \leq n+1$ ). On a des projections canoniques  $p_i : P \rightarrow \mathbb{P}_{S'}^{n+1}$  ( $i = 1, 2$ ), où  $p_1$  (resp.  $p_2$ ) identifie  $P$  à l'éclaté de  $x_0$  (resp. du sous-schéma fermé d'équations  $\pi' = t' = 0$ ) dans  $\mathbb{P}_{S'}^{n+1}$ . On en déduit un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_{S'}^{n+1} & \xleftarrow{p_1} & P & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{P}_{S'}^{n+1} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \bar{X}' & \longleftarrow & \bar{Z} & \longrightarrow & \bar{W} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \bar{X}'_s & \longleftarrow & \bar{D}_0 \cup D_1 & \longrightarrow & D_1 \end{array},$$

où  $\bar{W}$  est la quadrique projective (lisse) d'équation  $Q(x') - ut'^2 = 0$ , et  $\bar{Z}$  l'éclaté de  $(\bar{W}_\infty)_s := (\pi' = t' = 0)$  dans  $\bar{W}$  ou de  $x_0$  dans  $\bar{X}'$  (complétion projective de l'éclaté  $Z$  de  $x_0$  dans  $X'$  considéré en 3.2) ; la ligne inférieure est formée des fibres spéciales ;  $\bar{D}_0$  est la complétion projective de  $D_0$ , un fibré en droites projectives sur  $C = D_0 \cap D_1$ , que la projection  $\bar{Z} \rightarrow \bar{W}$  contracte en  $(\bar{W}_\infty)_s (= C)$ . Par functorialité de  $R\Psi$ , on obtient un diagramme commutatif d'isomorphismes (pour abrégé,  $\Lambda$  est omis, et "0" = "prim")

$$\begin{array}{ccccc} H^n(X'_\eta) & \xrightarrow{(2)} & H^n(Z_\eta) & \longrightarrow & H^n(W_\eta) \\ \downarrow (1) & & \downarrow (3) & & \downarrow \\ H^n(\Psi_f) & \longrightarrow & H^n(D_1 - C) & \longrightarrow & H^n(W_s) \\ & & & \longrightarrow & H^n(X'_\eta) \longrightarrow H^{n-1}((\bar{X}'_\infty)_\eta)^0(-1) \\ & & & & \downarrow (4) \\ & & & & \longrightarrow H^{n-1}(C)^0(-1), \end{array}$$

où  $Z$  (resp.  $W$ ) est le complément du diviseur à l'infini  $t = 0$ . Notons  $h$  la flèche composée des isomorphismes horizontaux, et  $c : H^n(D_1 - C) \rightarrow H^{n-1}(C)^0(-1)$  la flèche composée dans la ligne inférieure, qui est l'isomorphisme canonique. Par définition,  $i_2 = (4) \circ h \circ (1)^{-1}$ , et  $i_1 = c \circ (3) \circ (2) \circ (1)^{-1}$ , donc  $i_1 = i_2$ .

**Remarque 3.4.** Pour  $X$  d'équation  $Q - b = 0$ , pour  $b \in \mathfrak{m} - \{0\}$ , on a les mêmes résultats qu'en 3.1 (a) et (b),  $t_\ell(\sigma)$  au second membre de (3.1.1) étant remplacé par  $\varepsilon_b(\sigma) = v(b)t_\ell(\sigma)$  [SGA 7 XV 3.3.3]. Il est possible qu'une variante des arguments précédents permette de les établir directement.

Ce travail a été achevé lors d'un séjour, de mai à septembre 2000, à l'Université de Tokyo, que je remercie de son hospitalité. Je remercie chaleureusement O. Gabber pour ses commentaires détaillés sur des versions préliminaires de ce texte, ainsi que T. Saito pour d'utiles discussions. Je suis très reconnaissant au rapporteur pour sa lecture minutieuse de la version finale et les corrections qu'ils m'a signalées. Je tiens, enfin, à remercier Mme Bonnardel pour le soin avec lequel elle a assuré la saisie du manuscrit.

### References

- [BBD] A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, et P. DELIGNE, *Faisceaux pervers*, Astérisque, **100** (1982).
- [I1] L. ILLUSIE, *Autour du théorème de monodromie locale*, dans *Périodes  $p$ -adiques*, Séminaire de Bures, 1988 (Ed. J.-M. Fontaine), 9–57, Astérisque, **223** (1994).
- [I2] L. ILLUSIE, *Perversité et variation*, en préparation.
- [RZ] M. RAPOPORT et T. ZINK, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, Monodromie filtration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, *Inv. Math.*, **68** (1982), 21–101.
- [S] J. STEENBRINK, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, *Nordic Summer School/NAVF, Symposium in Mathematics*, Oslo, 1976, 525–563.
- [SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *SLN*, **269**, **270**, **305**, Springer-Verlag, 1972, 1973.
- [SGA 4 1/2] *Cohomologie étale*, par P. Deligne, *SLN*, **569**, Springer-Verlag, 1977.
- [SGA 7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–69, I, dirigé par A. Grothendieck, II par P. Deligne et N. Katz, *SLN*, **288**, **340**, Springer-Verlag, 1972, 1973.

*Université de Paris-Sud  
Mathématique, bât. 425  
UMR 8628 du CNRS  
91405 ORSAY Cedex  
France*