

Groupe des Obstructions pour les Déformations de Représentations Galoisiennes

Roland Gillard

Un des thèmes les plus importants en théorie des nombres est l'étude du groupe de Galois absolu, $G_{\mathbb{Q}}$, de la clôture algébrique de \mathbb{Q} . Une des façons possibles d'aborder ce problème est de se concentrer sur les représentations à coefficients dans une \mathbb{Z}_p -algèbre noethérienne $R : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_N(R)$. Ces représentations se factorisent en général par un quotient G_S de $G_{\mathbb{Q}}$ par des groupes d'inertie en dehors d'un ensemble fini S : on a alors de hypothèses de finitude de présentation. Pour $N = 1$, on retrouve ainsi la théorie du corps de classes puisque c'est en fait le quotient abélien maximal qui intervient. La théorie des déformations de représentations peut donc être vue comme une tentative pour généraliser la théorie du corps de classes en sortant du cadre abélien.

Depuis l'article fondateur de Mazur [18], on sait que les problèmes de déformation des représentations galoisiennes sont (pro)-représentables sous des conditions raisonnables; les anneaux sont de la forme $R = \mathcal{O}[[T_1, \dots, T_d]]/I$, avec \mathcal{O} un anneau de Witt. On sait aussi, que pour que l'idéal I , idéal des relations soit nul (le problème alors appelé sans obstruction), il suffit qu'un certain groupe de cohomologie H^2 soit nul.

Le but de ce travail est de préciser ce résultat en construisant et en étudiant un groupe d'obstructions, sous groupe du H^2 ci-dessus, et en montrant que le rang de ce groupe est exactement le nombre minimal de générateurs de I . On montre ensuite que ce groupe, ou une variante concernant la caractéristique p , est fabriqué à l'aide de cup-produits de 1-classes et aussi de produits supérieurs analogues aux produits de Massey.

La première partie reprend la méthode de Vistoli [31] étudiant les relations et obstructions dans un cadre géométrique.

Une question qui se pose donc est de savoir si on peut trouver des exemples où le sous groupe serait nul sans que le groupe de cohomologie

le soit. Une autre serait l'expression directe du sous-groupe en termes du problème initial (par exemple le module galoisien de départ).

Le paragraphe 1 décrit les conditions de Schlessinger d'existence d'une algèbre universelle. Le paragraphe 2 axiomatise la méthode de Vistoli¹ en supposant que le foncteur possède une théorie linéaire d'obstruction. Ceci permet de reprendre plus explicitement la construction de R , d'introduire le groupe d'obstruction O_F et de montrer que sa dimension est égale au nombre de relations dans R . Discuter les conditions d'existence d'une telle théorie nous aurait entraîné trop loin, surtout que sur chaque exemple classique de foncteur de déformations, cette question ne présente guère de difficulté. Le paragraphe 3 s'intéresse au cas introduit par Mazur des représentations d'un groupe, cependant en adoptant le cadre plus général des schémas en groupes lisses comme dans Tilouine [30].

La deuxième partie se concentre sur le cas des déformations de représentations de groupes. Elle fait le lien entre la première partie et la question de Mazur portant sur la dimension relative de R , puis «calcule» le groupe des obstructions en caractéristique p en montrant qu'on peut l'engendrer avec le cup-produit et des produits supérieurs. Le §5 montre l'intervention des opérations de Bockstein.

La dernière partie développe quelques remarques arithmétiques: retour sur la conjecture de Leopoldt dans le §6.1, nullité du groupe des obstructions dans le §6.2 et contrôle de l'idéal correspondant dans le §6.3.

Première partie

Groupe des obstructions

Cette partie se place dans un cadre très général analogue à celui de Schlessinger.

§1. Foncteurs pour les anneaux artiniens

1.1. Catégories

On fixe un nombre premier p et une extension finie K de \mathbb{Q}_p , d'anneau de valuation \mathcal{O} , d'uniformisante π , de valuation π -adique $v_{\mathcal{O}}$ et de corps résiduel k . Soit \mathcal{C} la catégorie des \mathcal{O} -algèbres locales artiniennes complètes de corps résiduel k . Pour A dans \mathcal{C} , on note \mathfrak{m}_A son idéal maximal. Pour n entier, on appelle \mathcal{C}_n la sous-catégorie pleine des algèbres A

¹je remercie A. Mézard qui m'a transmis l'article [31]

annulées par \mathfrak{m}_A^{n+1} . On appelle *1-extension* une surjection $A' \rightarrow A$ dans \mathcal{C} dont le noyau I est annulé par $\mathfrak{m}_{A'}$. Un morphisme de 1-extensions est un diagramme commutatif défini par des morphismes $A' \rightarrow B'$ et $A \rightarrow B$. Une 1-extension est dite *petite* si en plus I est un idéal principal. La catégorie \mathcal{C} est une sous-catégorie pleine de la catégorie \mathcal{C} des \mathcal{O} -algèbres locales noethériennes, complètes de corps résiduel k .

1.2. Foncteurs

On fixe un foncteur covariant F de \mathcal{C} dans Ens la catégorie des ensembles. L'espace tangent de F est par définition $t_F = F(k[\epsilon])$. Pour R un anneau de \mathcal{C} , on note h_R le foncteur $\text{Hom}(R, \bullet)$. On considère des couples (A, a) avec A dans \mathcal{C} ou \mathcal{C}_n et a dans $F(A)$; un morphisme de couples $(A', a') \rightarrow (A, a)$ est un morphisme $u : A' \rightarrow A$ tel que $a = F(u)(a')$. Si R est dans \mathcal{C} , un couple (R, ξ) est R complété par une suite cohérentes de $\xi_n \in F(R_n)$, avec $R_n = R/\mathfrak{m}_R^{n+1}$. Un morphisme de couples $(R, \xi) \rightarrow (A, a)$ est un morphisme $(R_n, \xi_n) \rightarrow (A, a)$ pour n assez grand. On dit qu'un couple (R, ξ) *représente* (ou est universel pour) F si le morphisme de foncteurs $h_R \rightarrow F : \text{Hom}(R, A) = \text{Hom}(R_n, A) \rightarrow F(A)$, $p \rightarrow F(p)(\xi_n)$ est un isomorphisme pour tout n et pour tout A dans \mathcal{C}_n ; Si un tel couple existe on dit que F est pro-représentable. On dit que (R, ξ) est *versel* si ce morphisme est lisse: ceci revient à demander que pour tout morphisme de couples comme ci-dessus où u est 1-extension, tout morphisme $u : (R, \xi) \rightarrow (A, a)$ se relève en $u' : (R, \xi) \rightarrow (A', a')$ rendant commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & (A', a') \\ & \nearrow & \downarrow \\ (R, \xi) & \rightarrow & (A, a) \end{array} .$$

On dit que (R, ξ) est une *enveloppe* si ce couple est versel et si de plus $h_R \rightarrow F$ induit un isomorphisme sur les espaces tangents: $(\mathfrak{m}_R/(\pi) + \mathfrak{m}_R^2)^* \rightarrow F(k[\epsilon])$. Enfin on dit que (R, ξ) est n -versel (resp. est une n -enveloppe) si cet anneau est dans \mathcal{C}_n et y est versel (resp. est une enveloppe) pour la restriction de F . Si (R, ξ) est versel (resp. m -versel) pour R dans \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}_m), alors (R_n, ξ_n) est versel (resp. (R_n, ξ_n) est versel où ξ_n est l'image de ξ_m , pour $n \leq m$). Cette remarque vaut aussi pour les couples universels ou les enveloppes.

1.3. Conditions de Schlessinger

Soit F un foncteur de \mathcal{C} vers Ens avec $F(k) = \{e\}$, l'ensemble à un point. Soit $p : A' \rightarrow A$ et $p' : A'' \rightarrow A$ deux morphismes de \mathcal{C} . On a une

application canonique:

$$(1) \quad \Phi : F(A' \times_A A'') \rightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A'').$$

Rappelons le théorème fondamental de [28].

Théorème 1.1. *Le foncteur F a une enveloppe si et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées:*

H1. Φ est une surjection pour tout p et toute petite surjection p' .

H2. Φ est une bijection si $A = k$ et $A'' = k[\epsilon]$.

H3. t_F est un k -espace vectoriel de dimension finie.

De plus, ces conditions étant supposées satisfaites, F est pro-représentable si et seulement si

H4. Φ est un isomorphisme si $p = p'$ et est une petite surjection.

On sait en effet que H2 implique que t_F est un k -espace vectoriel. Si V est un k espace vectoriel de dimension finie, $k[V]$ désigne l'anneau $k \oplus V$ où la restriction de la multiplication à $V \times V$ est nulle. Par récurrence avec H2, on obtient un isomorphisme canonique: $F(k[V]) \xrightarrow{\sim} t_F \otimes_k V$. Pour toute 1-extension de noyau I , $p : A' \rightarrow A$, l'isomorphisme $A' \times_k k[I] \xrightarrow{\sim} A' \times_A A'$, inverse de [28](2.16) induit compte tenu de H1 et H2 une surjection:

$$(2) \quad F(A') \times t_F \otimes_k I \rightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A').$$

Lemme 1.2. *La surjection précédente munit $F(A')$ d'une action de $t_F \otimes_k I$ $\sigma : a' \rightarrow \sigma \bullet a'$, respectant les fibres de $F(A') \rightarrow F(A)$ et y induisant une action transitive.*

Dans toute la suite on suppose que F vérifie les conditions H1,H2,H3.

1.4. Functorialités

1.4.1 Changement de 1-extension

Un morphisme de 1-extensions $(A' \rightarrow A) \rightarrow (B' \rightarrow B)$, de noyaux respectifs I et J induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(A') & \rightarrow & F(B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A) & \rightarrow & F(B) \end{array}$$

ainsi qu'un morphisme $t_F \otimes I \rightarrow t_F \otimes J$ et $F(A') \rightarrow F(B')$ est équivariant pour les actions décrites dans la section 1.3.

1.4.2 Changement de foncteur

Un morphisme de foncteurs $\varphi : F \rightarrow F'$ vérifiant tous les deux les conditions de Schlessinger induit un morphisme d'anneaux $\varphi^* : R' \rightarrow R$, de sorte que le diagramme naturel induit

$$\begin{array}{ccc} h_R & \rightarrow & h_{R'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \rightarrow & F' \end{array}$$

soit commutatif.

§2. Obstructions

2.1. Théorie linéaire des obstructions

On dit qu'un foncteur F possède une *théorie linéaire des obstructions* si

- i) il existe un k -espace vectoriel T_F
- ii) il existe pour chaque 1-extension $p : A' \rightarrow A$ de noyau I et chaque élément $a \in F(A)$ un élément $o_{p,a} \in T(I) := T_F \otimes_k I$ dépendant fonctoriellement des données $(A' \rightarrow A, a)$.
- iii) $o_{p,a}$ est nul si et seulement si a est dans l'image de l'application $F(A') \rightarrow F(A)$; on dit alors que a se relève à A' .

2.2. Relèvement maximal

Soit $A' \rightarrow A$ une 1-extension de noyau I et $a \in F(A)$.

Lemme 2.1. *Il existe un plus petit sous-idéal I_a de I tel que a se relève à $A_a := A'/I_a$.*

Ce lemme est déjà dans [28], bas de la page 213: il suffit de considérer \mathcal{S} l'ensemble fini non vide (il contient I) des idéaux $K \subset I$ tel que a se relève à $A_K = A'/K$ et d'observer que \mathcal{S} est stable par intersection. En effet si K_1 et K_2 sont deux tels idéaux, quitte à agrandir K_1 sans changer $K_1 \cap K_2$, on peut supposer que $K_1 + K_2 = I$; de sorte que

$$A_{K_1} \times_A A_{K_2} \xrightarrow{\sim} A_{K_1 \cap K_2}$$

et on conclut avec la surjection de (1)

$$F(A_{K_1 \cap K_2}) \xrightarrow{\sim} F(A_{K_1} \times_A A_{K_2}) \twoheadrightarrow F(A_{K_1}) \times_{F(A)} F(A_{K_2})$$

fournie par H1 et une récurrence pour étendre la propriété des petites extensions aux 1-extensions.

2.3. Groupe des obstructions

Il peut arriver que T_F soit trop gros; on va étudier ce qui intervient réellement, le *groupe des obstructions* qui est son sous- k -espace vectoriel O_F engendré par tous les éléments $(Id \otimes \varphi)(o_{p,a})$ fournis par les p et a avec p petite extension ainsi que $\varphi : \ker p \rightarrow k$ induisant

$$T_F \otimes_k \ker p \xrightarrow{Id \otimes \varphi} T_F \otimes_k k \xrightarrow{\sim} k .$$

Ceci nous permet d'énoncer l'analogue de [31], résultat principal de cette partie:

Théorème 2.2. *Soit F un foncteur vérifiant les conditions de Schlessinger et ayant une théorie linéaire des obstructions, cf.2.1. Soient r et s les dimensions respectives de t_F et O_F sur k : l'anneau (uni-)versel de F peut être écrit comme quotient d'un anneau de séries formelles sur \mathcal{O} à r indéterminées par un idéal de relations dont s est le nombre minimal de générateurs.*

Ce théorème ne sera démontré qu'en 2.7. Commençons par quelques lemmes sur les $o_{p,a}$.

Lemme 2.3. *Soit $p : A' \rightarrow A$ une 1-extension de noyau $I : o_{p,a}$ est dans le sous-groupe $O_F \otimes_k I$ de $T_F \otimes_k I$.*

Démonstration: Comme dans [31], on prend une base e_i de I pour écrire $o_{p,a} = \sum o_i \otimes e_i$. Pour voir que les o_i sont tous dans O_F , on utilise la functorialité des $o_{p,a}$ en considérant l'idéal I_i engendré par tous les e_j sauf e_i ainsi que la petite extension $A'/I_i \rightarrow A$.

Ceci permet de préciser le lemme 2.1 en choisissant une base $\omega_i, i = 1, \dots, s$ de O_F ; en reprenant les mêmes notations, on peut alors écrire $o_{p,a} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes x_i$ avec $x_i \in I$.

Lemme 2.4. *L'idéal I_a est engendré par les x_i .*

Démonstration: Soit J l'idéal engendré par les x_i . L'image de $o_{p,a}$ dans $O_F \otimes I/J$ est nulle donc a se relève à A_J ; par minimalité, $I_a \subset J$. Comme a se relève à A/I_a , l'image de $o_{p,a}$ dans $O_F \otimes I/I_a$ est nulle, ce qui impose la nullité des images de chaque x_i dans I/I_a , d'où $J \subset I_a$. Ceci se voit comme plus haut en utilisant la petite extension correspondant à un supplémentaire de la k -droite engendrée par l'image de x_i dans I/I_a ; on forme ainsi un quotient de A_a où a n'a pas de relèvement, ce qui est absurde.

2.4. Construction d'une 1-enveloppe

On part de $R_0 = k[t_F^*]$. On prend une base $e_i, i = 1, \dots, r$ de t_F et on appelle e_i^* la base duale, on considère l'anneau $\Lambda = \Lambda_r$ des séries formelles à r variables X_1, \dots, X_r sur \mathcal{O}, X_i correspondant à e_i^* . On a canoniquement $t_\Lambda \simeq t_F$. On munit Λ de v_Λ , la valuation \mathfrak{m}_A -adique. On peut compléter R_0 par ξ_0 de façon à obtenir un couple universel dans la catégorie \mathcal{C}'_0 des \mathcal{O} -algèbres A annihilées par $(\pi) + \mathfrak{m}_A^2$. En effet $R_0 \rightarrow k$ possède une section donc l'élément de $F(k)$ se relève dans R_0 . H2 implique que l'application (1) est une bijection ce qui montre que $F(R_0)$ est en bijection avec $t_F \otimes_k t_F^* \simeq \text{End}(t_F)$. Il est alors facile de voir que $\sum e_i \otimes e_i^*$ est universel puisqu'il correspond à l'identité de $\text{End}(t_F)$.

Partant de (R_0, ξ_0) comme plus haut, considérons la 1-extension $\tilde{R}_1 = \Lambda/\mathfrak{m}_A^2 \rightarrow R_0$: le noyau est l'idéal engendré par l'image de π . On a une obstruction au relèvement de ξ_0 à $\tilde{R}_1, o_1 = \omega \otimes x$, où x peut être pris égal à 0 ou à l'image de π et on obtient un idéal qu'on note \bar{I}_1 dans Λ/\mathfrak{m}_A^2 d'image réciproque notée I_1 dans Λ : I_1 est nul ou peut être engendré par π . Ce dernier cas correspond à des déformations limitées à la caractéristique p . On choisit un relèvement quelconque ξ_1 à $R_1 := \Lambda/I_1$, cf. 2.4 pour l'existence. L'anneau R_1 admet toujours t_F comme espace tangent.

Lemme 2.5. *Le couple (R_1, ξ_1) est une 1-enveloppe.*

Démonstration: Il suffit de prouver que ce couple est 1-versel. On se place dans la situation de 1.2 avec $A' \rightarrow A$ une petite extension de \mathcal{C}_1 . La première étape consiste à simplement compléter le diagramme de \mathcal{O} -algèbres:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} & & A' \\ & & \downarrow \\ R_1 & \rightarrow & A \end{array}$$

avec une diagonale montante $R_1 \rightarrow A'$. Utilisant que R_0 est versel dans \mathcal{C}'_0 pour obtenir

$$R_1 \rightarrow R_0 \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \\ A'_0 \end{array} \rightarrow A_0$$

avec $A_0 = A/(\pi)$ et $A'_0 = A'/(\pi)$, d'où un relèvement de $R_1 \rightarrow A$ en $u'_0 : R_1 \rightarrow A \times_{A_0} A'_0 \simeq A'/I \times_{A_0} A'/(\pi) \simeq A'/I \cap (\pi)$.

Soit $J = I \cap (\pi)$; il reste à relever $u'_0 : R_1 \rightarrow A'/J$ à A' . Considérons alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_1 & \rightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_1 & \rightarrow & A'/J \end{array}$$

obtenu en relevant u'_0 à Λ et observant que ce relèvement se factorise par \tilde{R}_1 . De plus, u'_0 induit la deuxième ligne du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_1 & \rightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_0 & \rightarrow & A'/(\pi) \end{array}$$

Par functorialité des obstructions aux relèvements, l'image de $o_1 \in T_F \otimes \pi \tilde{R}_1$ dans $T_F \otimes \pi A'$ est nulle; ainsi l'image de I_1 est nulle dans $\pi A'$, si bien que l'homomorphisme $\tilde{R}_1 \rightarrow A'$ se factorise par R_1 fournissant le relèvement $u' : R_1 \rightarrow A'$ de u recherché dans cette première étape.

Il reste maintenant à modifier u' pour que le diagramme de couples

$$\begin{array}{ccc} & & (A', a') \\ & \nearrow & \downarrow \\ (R_1, \xi_1) & \rightarrow & (A, a) \end{array}$$

soit commutatif. Pour cela, on considère le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(R_1, A') & \rightarrow & F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(R_1, A) & \rightarrow & F(A) \end{array}$$

les flèches horizontales étant définies par $v \rightarrow F(v)(\xi_1)$.

Sur la fibre de u dans la première colonne, cf. lemme 1.2, on a une action homogène de $t_{R_1} \otimes I$, sur celle de a dans la deuxième, une action homogène de $t_F \otimes I$; les deux éléments de $F(A')$ sont reliés par un $\sigma \in t_F \otimes I : a' = \sigma \bullet F(u')(\xi_1)$. Si on identifie t_{R_1} à t_F il suffit de prendre $v = \sigma \bullet u'$ pour assurer $a' = F(v)(\xi_1)$ et achever la démonstration.

2.5. Construction d'une n-enveloppe

On suppose construit un couple (R_n, ξ_n) , qui soit une n -enveloppe pour F ; nous construisons maintenant une $(n+1)$ -enveloppe (R_{n+1}, ξ_{n+1}) . Les raisonnements ressemblent à ceux développés pour passer de R_0 à R_1 . On suppose que R_n est de la forme Λ/I_n avec I_n idéal contenant $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$. On considère la 1-extension $\tilde{R}_{n+1} = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \rightarrow R_n$ et ξ_n ; on applique le lemme 2.4 en écrivant l'obstruction au relèvement $o_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes u_i$, en utilisant la même base de O_F et des éléments

u_i de $I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$ qu'on relève par des éléments de même nom dans I_n . L'idéal I_{n+1} qu'ils engendrent avec $\mathfrak{m}_\Lambda I_n$ dans Λ définit le quotient maximal R_{n+1} de \tilde{R}_{n+1} où ξ_n se relève. On choisit un relèvement ξ_{n+1} .

Lemme 2.6. *Le couple (R_{n+1}, ξ_{n+1}) est une $(n + 1)$ -enveloppe.*

Par récurrence, on déduit que $I_{n+1} \subset (\pi) + \mathfrak{m}_\Lambda^2$ si bien que l'espace tangent de R_{n+1} est bien égal à celui de F . Il suffit donc de vérifier la $(n + 1)$ -versalité en procédant en gros comme dans le lemme 2.5 avec une petite extension maintenant dans \mathcal{C}_{n+1} et des morphisme de couples $(R_{n+1}, \xi_{n+1}) \rightarrow (A, a)$ et $(A', a') \rightarrow (A, a)$.

La première étape consiste à compléter le diagramme de \mathcal{O} -algèbres

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} & & A' \\ & & \downarrow \\ R_{n+1} & \rightarrow & A \end{array}$$

avec un morphisme $R_{n+1} \rightarrow A'$. En utilisant la propriété de lissité incluse dans l'hypothèse de versalité du couple (R_n, ξ_n) , on commence par déduire l'existence d'un relèvement au produit fibré $A \times_{A_n} A'_n$, où A_n (resp. A'_n) désigne le quotient de cet anneau par la puissance $(n+1)$ ième de l'idéal maximal. Cet anneau s'identifie à A'/J_{n+1} avec $J_{n+1} = I \cap \mathfrak{m}_{A'}^{n+1}$. On relève alors le morphisme $R_{n+1} \rightarrow A'/J_{n+1}$ en un morphisme $\Lambda \rightarrow A'$. Comme le noyau de $A' \rightarrow A$ est annulé par $\mathfrak{m}_{A'}$, et que le noyau de $\Lambda \rightarrow R_{n+1}$ est I_{n+1} , on voit que $\mathfrak{m}_\Lambda I_{n+1}$ est dans le noyau de ce relèvement: on a une factorisation en $\tilde{R}_{n+1} \rightarrow A'$. On considère alors le diagramme

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{R}_{n+1} & \rightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_n & \rightarrow & A'_n \end{array}$$

pour conclure que le noyau de $\tilde{R}_{n+1} \rightarrow A'$ contient I_{n+1} par le même argument de functorialité des obstructions. Dans la deuxième étape, on ajuste alors le relèvement trouvé grâce au lemme 1.2 et à l'isomorphisme $t_{R_{n+1}} \otimes I \xrightarrow{\sim} t_F \otimes I$ comme dans la section 2.4.

2.6. Sur les générateurs de I_n

Dans cette section, on reprend la méthode de [31] pour étudier I_n .

Lemme 2.7. *La famille des idéaux I_n vérifie la relation de récurrence:*

$$I_{n+1} + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} = I_n.$$

Démonstration: L'inclusion du membre de gauche dans I_n est claire. La surjection naturelle qui en résulte est un isomorphisme par unicité de l'enveloppe de F dans \mathcal{C}_n cf. [28] prop. 2.9.

Considérons des éléments de Λ , u_i ($i = 1, \dots, s$), comme dans 2.5 dont les images engendrent $I_{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$; soit J_{n+1} l'idéal de Λ engendré par ces u_i : on a donc $I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda \cdot I_n + J_{n+1}$.

Lemme 2.8. *On a les égalités d'idéaux de Λ*

- i) $I_n = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + J_{n+1}$,
- ii) $I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+2} + J_{n+1}$.

Démonstration: L'inclusion $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} \subset I_n$ se voit par récurrence puisque $\mathfrak{m}_\Lambda I_n \subset I_{n+1}$. De plus les u_i sont dans $I_{n+1} \subset I_n$.

On a aussi $I_n = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + \mathfrak{m}_\Lambda \cdot I_n + J_{n+1}$ et on en déduit i). En reportant dans la relation $I_{n+1} = \mathfrak{m}_\Lambda \cdot I_n + J_{n+1}$, on en tire ii) grâce au lemme de Nakayama.

Rappelons le lemme élémentaire [31] (7.11).

Lemme 2.9. *Soit M un module de type fini sur un anneau local Λ ; Deux systèmes de générateurs x_i et y_i ($i = 1, \dots, s$) ayant même nombre d'éléments sont reliés par une matrice carrée inversible $\Theta = (\theta_{i,j})$ à coefficients dans Λ : $y_i = \sum_1^s \theta_{i,j} x_j$.*

Lemme 2.10. *Les idéaux I_n peuvent être engendrés par $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$ et s polynômes $f_i^{(n)}$ de degré $\leq n$ de façon à avoir: $f_i^{(n)} = f_i^{(n+1)} \bmod \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$.*

Démonstration: Fabriquons les $f_i^{(n)}$ par récurrence en prenant comme $f_i^{(1)}$ les u_i trouvés en 2.4. On peut les choisir de degré ≤ 1 . Appliquons le lemme 2.9 aux u_i de 2.5 et aux $f_i^{(n)}$ en prenant comme module le quotient $I_n/\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$ et en tenant compte du lemme 2.8 i): on trouve des $\theta_{i,j} \in \Lambda$ tels que $f_i^{(n)} = \sum_1^s \theta_{i,j} u_j \bmod \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$; on peut donc engendrer I_{n+1} par $\mathfrak{m}_\Lambda^{n+2}$ et des $f_i^{(n+1)}$ tels que $f_i^{(n+1)} = \sum_1^s \theta_{i,j} u_j \bmod \mathfrak{m}_\Lambda^{n+2}$. Pour cela on peut choisir $f_i^{(n+1)}$ de forme $f_i^{(n)} + g_i^{(n+1)}$, $g_i^{(n+1)}$ somme de monômes $aX_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r}$ avec $v_\Lambda(aX_1^{n_1} \cdots X_r^{n_r}) = n + 1$.

Ainsi chaque suite $f_i^{(n)}$ est convergente vers une limite f_i dans Λ . Si on note I l'idéal engendré par les f_i , on a $I_n = \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} + I$ et il est clair que, en posant $R = \Lambda/I$ et en appelant ξ la suite des ξ_n , le couple (R, ξ) est une enveloppe pour F .

2.7. Démonstration du théorème 2.2

On procède comme dans [31]. Notons \bar{I}_n l'image de I (ou de I_n) dans $\Lambda_n = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$: Le lemme d'Artin-Rees implique que la surjection

canonique $I/\mathfrak{m}_\Lambda I \rightarrow \bar{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \bar{I}_n$ est un isomorphisme pour n assez gros. Considérons la situation de 2.5 avec la 1-extension $\tilde{R}_{n+1} = \Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \rightarrow R_n = \Lambda/I_n$ et le couple (R_n, ξ_n) ; l'obstruction à relever ξ_n a déjà été écrite sous la forme $o_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes u_i$, en utilisant notre base ω_i de O_F et des éléments u_i de $I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n$. Pour i fixé, choisissons une petite extension $p_i : A'_i \rightarrow A_i$, un élément $a_i \in F(A_i)$ et $\varphi : \ker p_i \xrightarrow{\sim} k$ de façon que ω_i soit égal à $\varphi(o_{p,a_i}) \in O_F$. On construit un diagramme commutatif:

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} f'_i : & \tilde{R}_{n+1} & \rightarrow & A'_i \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f_i : & R_n & \rightarrow & A_i \end{array}$$

En fait puisque A'_i est supposée être dans \mathcal{C}_n , f'_i se factorise par le quotient de \tilde{R}_{n+1} par la puissance $n+1$ -ième de son idéal maximal, soit encore le quotient \tilde{R}_n de Λ par $\mathfrak{m}_\Lambda I + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}$, nous donnant le nouveau diagramme commutatif

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} f''_i : & \tilde{R}_n & \rightarrow & A'_i \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f_i : & R_n & \rightarrow & A_i \end{array}$$

L'obstruction à relever ξ_n à \tilde{R}_n est l'image $\bar{o}_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes \bar{u}_i$ de $o_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes u_i$ dans $O_F \otimes \bar{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \bar{I}_n$. Par restriction aux noyaux, f''_i induit un homomorphisme $\bar{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \bar{I}_n \xrightarrow{\sim} I + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1}/\mathfrak{m}_\Lambda I + \mathfrak{m}_\Lambda^{n+1} \rightarrow \ker p_i$ d'où

$$O_F \otimes I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n \rightarrow O_F \otimes \bar{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \bar{I}_n \rightarrow O_F \otimes \ker p_i \xrightarrow{Id \otimes \varphi} O_F$$

envoyant par functorialité o_{n+1} sur ω_i . L'élément $\bar{o}_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=s} \omega_i \otimes \bar{u}_i$ fournit une application $(\bar{I}_n/\mathfrak{m}_\Lambda \bar{I}_n)^* \rightarrow O_F : g \rightarrow (Id \otimes g)(\bar{o}_{n+1})$. Le raisonnement précédent montre que pour n assez gros pour que \mathcal{C}_n contienne toutes les algèbres A'_i , $i = 1, \dots, s$, cette application est surjective; ceci montre bien que s est le nombre minimal de générateurs de \bar{I}_n , donc de I . Ceci achève la démonstration du théorème 2.2.

2.8. Générateurs de I et functorialité

On a un diagramme commutatif:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \bar{I}_{n+1}/\mathfrak{m}_{\Lambda_{n+1}} \bar{I}_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_n} & \bar{I}_n/\mathfrak{m}_{\Lambda_n} \bar{I}_n, \\ i_n \searrow & & \nearrow s_n \\ & I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n & \end{array}$$

avec $\bar{\Phi}_n$ et s_n surjectives et i_n injective. Pour n assez gros $\bar{\Phi}_n$ est bijective. La démonstration du lemme 2.10 montre que $\text{Im } i_n$, l'image de i_n , est engendrée par les u_i . On déduit du précédent un nouveau diagramme

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \bar{I}_{n+1}/\mathfrak{m}_{\Lambda_{n+1}}\bar{I}_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\Phi}_n} & \bar{I}_n/\mathfrak{m}_{\Lambda_n}\bar{I}_n \\ i_n \searrow & & \nearrow s_n \\ & \text{Im } i_n & \end{array}$$

De plus l'application canonique

$$I_{n+1}/\mathfrak{m}_{\Lambda}I_{n+1} \xrightarrow{\Phi_n} I_n/\mathfrak{m}_{\Lambda}I_n$$

induit un isomorphisme $\Phi : \text{Im } i_{n+1} \rightarrow \text{Im } i_n$ pour n assez grand. Notons maintenant $u_i^{(n)}$ l'élément de Λ noté u_i dans 2.6. On voit ainsi que dans le raisonnement du lemme 2.10, on peut prendre $f_i^{(n)} \equiv u_i^{(n)} \pmod{\mathfrak{m}_{\Lambda}^{n+1}}$, on a alors $f_i^{(n+1)} \equiv u_i^{(n)} \pmod{\mathfrak{m}_{\Lambda}^{n+2}}$. On remarque que, puisque o_{n+2} s'envoie sur o_{n+1} , $\bar{\Phi}_n(u_i^{(n+1)}) = u_i^{(n)}$, si bien que les congruences ci-dessus sont vérifiées par récurrence pour tout entier $m > n$: On peut donc assurer l'égalité

$$f_i^{(m+1)} \equiv u_i^{(m)} \pmod{\mathfrak{m}_{\Lambda}^{m+2}}.$$

Ceci prouve la conséquence suivante de 2.1 ii):

Proposition 2.11. *On suppose que les s générateurs f_1, \dots, f_s de I sont choisis comme on vient de le faire. Etant donné une petite surjection $p : A' \rightarrow A$ et un élément a de $F(A)$, correspondant à un homomorphisme $\bar{\Phi} : R_n \rightarrow A$ pour n assez gros; pour tout $\tilde{\Phi} : \Lambda \rightarrow A'$ relèvement de $\bar{\Phi}$, on a*

$$o_{p,a} = \sum_i \omega_i \otimes \tilde{\Phi}(f_i).$$

Deuxième partie

Déformations de représentations

§3. Relations pour les déformations de représentations

3.1. Théorie de Mazur

Fixons un groupe Π vérifiant les conditions de finitude de [18]: on demande que la pro- p -complétion de chaque sous-groupe ouvert ait un

nombre fini de générateurs topologiques. Comme dans [30], considérons un schéma en groupes \mathbf{G} lisse sur \mathcal{O} , linéaire, réductif et déployé. On note $\mathbf{Z}_{\mathbf{G}}$ son centre; pour un tel groupe, on note $\overline{\mathbf{G}}$ le groupe algébrique sur k défini par sa fibre spéciale ainsi que \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de $\overline{\mathbf{G}}$.

On fixe une représentation $\bar{\rho} : \Pi \rightarrow \mathbf{G}(k)$. Pour chaque \mathcal{O} -algèbre A artinienne on considère V_A l'ensemble des représentations $\rho : \Pi \rightarrow \mathbf{G}(A)$ qui par composition avec $\mathbf{G}(A) \rightarrow \mathbf{G}(k)$ donnent $\bar{\rho}$. On forme le quotient $F(A)$ de V_A par l'action par conjugaison de $\hat{\mathbf{G}}(A) = \ker(\mathbf{G}(A) \rightarrow \mathbf{G}(k))$. On obtient ainsi un foncteur F . On sait, par [30] (prolongeant [18]), que F est représentable moyennant des conditions sur le centre: il suffit qu'au niveau des composantes connexes, le centralisateur de l'image de $\bar{\rho}$ dans \mathbf{G} soit égal au centre de $\overline{\mathbf{G}}$ et que le centre de \mathbf{G} soit formellement lisse sur \mathcal{O} : en effet, dans ces conditions les hypothèses Hi de 1.3 sont vérifiées. Pour toute 1-extension de noyau I , l'application exponentielle induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \otimes_k I \rightarrow \mathbf{G}(A') \rightarrow \mathbf{G}(A) \rightarrow 1$$

si bien, cf. [15], que la question des relèvements d'une représentations $\Pi \rightarrow \mathbf{G}(A)$ à $\mathbf{G}(A')$ s'étudie à l'aide de la cohomologie de Π à valeurs dans $\mathfrak{g} \otimes_k I$. Ce k -espace vectoriel est considéré comme un Π -module grâce à l'action adjointe de $\mathbf{G}(k)$ sur \mathfrak{g} composée avec $\bar{\rho}$. On en déduit que

$$t_F \xrightarrow{\sim} H^1(\Pi, \mathfrak{g}).$$

Il est aussi classique, cf. [18] et [30], qu'en prenant

$$T_F = H^2(\Pi, \mathfrak{g}),$$

on obtient une théorie linéaire des obstructions.

3.2. Description de l'anneau universel

Le foncteur possède donc toutes les propriétés décrites plus haut.

Théorème 3.1. *Soit F le foncteur des déformations de $\bar{\rho}$ et O_F le sous k -espace vectoriel de $T_F = H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ engendré par les obstructions des petites extensions. Désignons par r et s les dimensions respectives de $H^1(\Pi, \mathfrak{g})$ et O_F sur k : l'anneau universel R de F peut être écrit comme quotient d'un anneau de séries formelles sur \mathcal{O} à r indéterminées par un idéal de relations dont s est le nombre minimal de générateurs.*

En commentaire, la question cf. [18] et [30] sur l'égalité de la dimension relative de R sur \mathcal{O} (dans un contexte de corps de nombres) se décompose en deux parties:

Question 3.2. *i) L'anneau R est-il une intersection complète relative sur \mathcal{O} ?*

ii) Le k -espace vectoriel $H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ est-il engendré par les obstructions définies par toutes les petites extensions?

Il est intéressant de remarquer que la démonstration classique, cf. [18] et [30], de l'inégalité $\dim H^2(\Pi, \mathfrak{g}) \geq \dim_k(I_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda I)$ se fait en prouvant que l'application canonique définie par ξ_n (n assez gros)

$$(I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n)^* \rightarrow H^2(\Pi, \mathfrak{g})$$

est injective; cette application se factorise évidemment par O_F et la méthode suivie ici montre en fait $(I_n/\mathfrak{m}_\Lambda I_n)^* \rightarrow O_F$ est surjective; elle est aussi injective puisqu'on a vu que $s = \dim_k O_F$ majore le nombre minimal de générateurs de I .

Remarque: La dimension relative est en fait remplacée dans [18] et [30] par la dimension de la fibre spéciale i.e. celle du quotient $R/\pi R$. On a alors un énoncé analogue au précédent en remplaçant O_F par son sous k -espace vectoriel $O_F^{(p)}$ engendré par les obstructions des petites extensions *annulées par p* . Le but des § suivants est de calculer ce sous k -espace vectoriel, cf. 4.4.

§4. Obstructions et produits de Lie-Massey

Pour Π et $\bar{\rho}$ comme en 3.1, on cherche à calculer les obstructions fournies par les petites extensions. On va faire le lien avec le produit de Lie-Massey dont on résume la définition. La méthode reprend les idées de Laudal [16] et [17]². Elle utilise une récurrence basée sur le calcul préliminaire suivant.

4.1. Calcul de l'obstruction pour une 1-extension

On fixe une 1-extension $p : A' \rightarrow A$ de noyau I . Soit $\bar{\rho} : \Pi \rightarrow \mathbf{G}(A)$ une représentation. On relève $\bar{\rho}$ en une application notée $\rho : \Pi \rightarrow \mathbf{G}(A')$ on déforme ρ en ρ' défini par $\rho'(g) = [1 + \delta(g)]\rho(g)$ où $\delta : \Pi \rightarrow \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{m}_{A'}} A'$ et pas seulement $\mathfrak{g} \otimes I$. Soient a le 2-cocycle associé à ρ et a' celui associé à ρ' . Le premier calcul exprime a' à l'aide de a et δ .

Lemme 4.1. *1) La composition de ρ' et de $\mathbf{G}(A') \rightarrow \mathbf{G}(A)$ est un homomorphisme si et seulement si on a: $d\delta - \delta \cup \delta + a \in \mathfrak{g} \otimes I$.*

2) Si cette condition est vérifiée, alors $a' = d\delta - \delta \cup \delta + a$.

²je remercie J. Bertin qui m'a signalé l'existence de [16] et m'a incité à regarder les produits de Massey

Démonstration: On commence par le calcul où les produits sont calculés à partir de ceux de $M_n(k)$:

$$\begin{aligned}
 (1 + a'(g, h))[1 + \delta(gh)]\rho(gh) &= [1 + \delta(g)]\rho(g)[1 + \delta(h)]\rho(h) \\
 &= [1 + \delta(g)]\rho(g)[1 + \delta(h)]\rho(g)^{-1}\rho(g)\rho(h) \\
 &= [1 + \delta(g)][1 + {}^g\delta(h)](1 + a(g, h))\rho(gh) \\
 &= [1 + \delta(g) + {}^g\delta(h) + \delta(g).{}^g\delta(h)](1 + a(g, h))\rho(gh) \\
 (1 + a'(g, h))[1 + \delta(gh)] &= [1 + \delta(g) + {}^g\delta(h) + \delta(g).{}^g\delta(h)](1 + a(g, h)) .
 \end{aligned}$$

Comme $\tilde{\rho}$ est un homomorphisme, a est à valeurs dans $\mathfrak{g} \otimes I$ et annulé par $\mathfrak{m}_{A'}$ donc par les valeurs de δ ; le membre de droite est donc égal à

$$1 + \delta(g) + {}^g\delta(h) + \delta(g).{}^g\delta(h) + a(g, h) .$$

En regardant l'image dans $\mathbf{G}(A)$ on voit à quelle condition l'égalité précédente modulo I est vérifiée avec $a' = 0 \pmod I$ d'où la partie 1). Pour la partie 2), grâce à l'hypothèse, a' est à valeurs dans $\mathfrak{g} \otimes I$ et est aussi annulé par $\mathfrak{m}_{A'}$ donc par les valeurs de δ : le membre de gauche se simplifie en $1 + a'(g, h) + \delta(gh)$. Ainsi:

$$a'(g, h) = {}^g\delta(h) - \delta(gh) + \delta(g) + \delta(g).{}^g\delta(h) + a(g, h) ,$$

ce qui prouve la formule.

4.2. Produits de Lie-Massey

On résume les définitions, déjà anciennes de Retakh [25,26]. On notera que celles ci ont été aussi introduites pour des considérations topologiques par Tanré [29].

On travaille avec une algèbre de Lie graduée $L = \bigoplus_n L_n$ munie d'un crochet $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$, homogène: $[L_p, L_q] \subset L_{p+q}$ antisymétrique (au sens gradué):

$$(10) \quad [y, x] = (-1)^{pq+1}[x, y] ,$$

$x \in L_p, y \in L_q$, et vérifiant l'identité de Jacobi

$$(11) \quad (-1)^{pr}[x, [y, z]] + (-1)^{qp}[y, [z, x]] + (-1)^{rq}[z, [x, y]] = 0 ,$$

si $x \in L_p, y \in L_q, z \in L_r$. Pour un élément de L_n , on introduit sa variante $\bar{x} = (-1)^{n+1}x$; on pose $|x| = n$, on a donc

$$(12) \quad \bar{\bar{x}} = x \text{ si } x \in L_1 .$$

On suppose L munie aussi d'une structure différentielle $d : L_p \rightarrow L_{p+1}$ telle que $d(x \sqcup y) = dx \sqcup y + (-1)^{|x|} x \sqcup dy$ et $d^2 = 0$.

Etant donné n éléments $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ de la cohomologie $H(L)$ de L , on appelle *donnée de définition* du produit $[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$, une famille d'éléments δ_I de L , indicée par les sous-ensembles propres (ni vides, ni tout) de $\{1, \dots, n\}$, telle que $\delta_1, \dots, \delta_n$ représentent respectivement $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ et soumise à la condition (13) suivante. Pour chaque sous-ensemble I , on considère les partitions régulières $I = J \cup K$ en sous-ensembles propres disjoints avec $\inf(J) < \inf(K)$

$$(13) \quad d\delta_I = \sum_{(J,K)} \epsilon(J, K) [\bar{\delta}_J, \delta_K],$$

où (J, K) parcourt l'ensemble partitions régulières de I et $\epsilon(J, K)$ désigne un signe habilement choisi (c'est $+1$, si les ϵ_i sont de degré impair). La cochaîne

$$(14) \quad \sum_{(J,K)} \epsilon(J, K) [\bar{\delta}_J, \delta_K],$$

où (J, K) parcourt maintenant l'ensemble partitions régulières de $1, \dots, n$, est en fait un *cocycle* [26], prop. 1.6. Le produit de Lie-Massey ([25], [26]) ou de Whitehead ([29]) $[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$ est alors défini comme la classe du cocycle de (14).

On sait construire une telle structure L en partant d'une algèbre graduée (associative): il suffit de définir un nouveau produit en posant $[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx$. Un exemple (à un détail ennuyeux près) de telle L est fourni par le complexe de cochaînes d'un groupe à valeurs dans une sous-algèbre de matrices $\mathfrak{g} \subset M_N(k)$, en prenant le produit (associatif) $C^p(\Pi, \mathfrak{g}) \times C^q(\Pi, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{p+q}(\Pi, \mathfrak{g}) : x, y \rightarrow z = x \cup y$ défini par

$$(15) \quad z(g_1, \dots, g_{p+q}) = (-1)^{|x||y|} x(g_1, \dots, g_p) \cdot^{g_1 \dots g_p} y(g_{p+1}, \dots, g_{p+q}).$$

Notons m la multiplication des matrices $M_N(k) \otimes M_N(k) \rightarrow M_N(k)$ et ι l'involution $A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ dans $M_N(k) \otimes M_N(k)$: Le cup produit \cup est induit par functorialité par m . Sur la cohomologie $H^{p+q}(\Pi, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ un produit d'une chaîne de degré p et d'une chaîne de degré q est transformé par ι par multiplication par le signe $(-1)^{pq}$.

On notera $x \sqcup y$ le crochet $x \cup y - (-1)^{pq}y \cup x$ obtenu plus haut. Il provient du produit dans $M_N(k) \otimes M_N(k) \rightarrow M_N(k)$ en appliquant le morphisme déduit par functorialité $m - m \circ \iota$, c'est à dire le crochet de Lie: Comme \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie, on tombe en fait

bien dans $H^{p+q}(\Pi, \mathfrak{g})$. Pour $L(\Pi, \mathfrak{g}) = C(\Pi, \mathfrak{g})$, on parlera de l'algèbre différentielle graduée (ADG) pour le produit \cup et d'algèbre de Lie différentielle graduée (ALDG) pour le produit \sqcup . Ainsi la relation de commutativité (10) n'est vérifiée que sur la cohomologie, ce qui ne change pas le résultat clef de [26]; c'est le détail évoqué plus haut. On rajoutera quasi (QALDG, QADG) pour marquer que la relation de commutativité n'a lieu qu'à homotopie près.

Pour des classes de cohomologie δ et ϵ de degré 1:

$$(16) \quad \delta \sqcup \epsilon = \delta \cup \epsilon + \epsilon \cup \delta, \quad \delta \sqcup \delta = 0.$$

4.3. Obstructions et produits de Lie-Massey

On se place dans la situation pure et on va voir que l'obstruction de 4.1 est donnée par un produit de Lie-Massey. Considérons l'anneau

$$U(m) = k[t_1, \dots, t_m]/[t_1^2, \dots, t_m^2]$$

ainsi que son quotient $\bar{U}(m)$ par l'image du monôme $t_1 \dots t_m$. On suppose donnée une représentation à valeurs dans $\mathbf{G}(\bar{U}(m))$ et on cherche l'obstruction à la remonter dans $\mathbf{G}(U(m))$. Comme $U(m) \rightarrow k$ a une section on peut prendre $\rho = \bar{\rho}$ dans le lemme 4.1. Une base de l'idéal maximal de $U(m)$ est donnée par les monômes $x_I = x_{i_1} \dots x_{i_t}, 1 \leq t \leq m$. En enlevant $x_1 \dots x_m$, on obtient une base de $\bar{U}(m)$. Ainsi avec les notations du lemme, la déformation générique de $\bar{\rho}$ à $U(m)$ est donnée par $\rho'(g) = [1 + \delta(g)]\rho(g)$; on peut décomposer $\delta \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}_{U(m)}$ en $\sum \delta_I \otimes x_I$, somme sur les sous-ensembles non vides de $\{1, \dots, m\}$.

La partie 1) du lemme dit à quelle condition on a une déformation de $\bar{\rho}$ à $\bar{U}(m)$: $d\delta = \delta \cup \delta \pmod{(x_1 \dots x_m)}$. On décompose sur la base de monômes: en regardant les termes de degré 1, il faut déjà que les $\delta_1, \dots, \delta_m$ soient des 1-cocycles. On note $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ leurs classes. En degré supérieur, on obtient $d\delta_I = \sum \delta_J \cup \delta_K$, somme sur toutes les partitions de I en réunion disjointe de sous-ensemble non vides J et K . Mais J et K jouent un rôle symétrique donc en restreignant la somme aux partitions régulières (J, K) :

$$d\delta_I = \sum (\delta_J \cup \delta_K + \delta_K \cup \delta_J) = \sum \delta_J \sqcup \delta_K = \sum [\bar{\delta}_J, \delta_K],$$

en remarquant que les classes de départ ϵ_i sont de degré 1; ainsi la représentation $\Pi \rightarrow \mathbf{G}(\bar{U}(m))$ équivaut à une donnée de définition pour le produit de Lie-Massey $[\epsilon_1, \dots, \epsilon_m]$ en prenant $L(\Pi, \mathfrak{g})$ comme ALDG: celui-ci (formule (14)) est alors donné par l'inverse de la classe de a' (notations du lemme 4.1).

En considérant le cas $m = 2$ et en faisant varier ϵ_1 et ϵ_2 , on obtient

Proposition 4.2. *Le groupe des obstructions contient l'image $H^2_{\square}(\Pi, \mathfrak{g})$ du cup-produit $\square : H^1(\Pi, \mathfrak{g}) \times H^1(\Pi, \mathfrak{g}) \rightarrow H^2(\Pi, \mathfrak{g})$.*

4.4. Produits de Laudal en caractéristique p

On reprend la construction de l'anneau universel de 2.5: la théorie ressemble à celle de la prop. 4.2, à la complication près que les monômes ne sont plus linéairement indépendants sur k et que les carrés ne sont plus nuls; on va expliciter les obstructions o_{n+1} , ou plutôt leur image en caractéristique p . On rappelle le diagramme issu de 2.5:

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{R}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} & \tilde{R}_n \\ \downarrow \tilde{\bar{p}}_{n+1} & \searrow p_n & \downarrow \tilde{\bar{p}}_n \\ R_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_n} & R_n \end{array}$$

Soit S , resp. S_n , resp. \tilde{S}_n , la réduction de R , resp. R_n , resp. \tilde{R}_n modulo π :

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{S}_{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} & \tilde{S}_n \\ \downarrow \tilde{\bar{p}}_{n+1} & \searrow p_n & \downarrow \tilde{\bar{p}}_n \\ S_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_n} & S_n \end{array}$$

On choisit une base \bar{B}_n de monômes pour S_n et une base B_{n+1} de monômes pour le quotient $\ker \tilde{\varphi}_n$ de $\mathfrak{m}^{n+1}/\mathfrak{m}^{n+2}$. On note \bar{B}'_{n+1} la réunion de \bar{B}_n et B_{n+1} ³. On peut assurer par récurrence que \bar{B}'_{n+1} contienne \bar{B}_{n+1} .

Lemme 4.3. *Tout monôme s'exprime mod f_j à l'aide de \bar{B}'_{n+1} :*

$$(19) \quad x_\nu = \sum_{\mu \in \bar{B}'_{n+1}} \beta_{\nu\mu} x_\mu \pmod{(\pi) + I + \mathfrak{m}^{n+2}}$$

Soit ρ_n un relèvement de $\bar{\rho}$ à S_n : ρ_n peut s'écrire sous la forme

$$\rho_n(g) = [1 + \sum \delta_\mu(g) \otimes x_\mu] \bar{\rho}(g)$$

somme sur \bar{B}_n . On relève ρ_n à \tilde{S}_{n+1} en $\rho_{n+1}(g) = [1 + \sum \delta_\mu(g) \otimes x_\mu] \bar{\rho}(g)$ somme sur \bar{B}'_{n+1} et on cherche l'obstruction à ce que ρ_{n+1} soit un homomorphisme. Comme $\tilde{S}_{n+1} \rightarrow S_n$ est une 1-extension, le lemme 4.1 donne la condition sur les $\delta_\mu, \mu \in \bar{B}_n$:

$$(20) \quad \sum d\delta_\mu \otimes x_\mu = \sum (\delta_{\nu_1} \cup \delta_{\nu_2}) \otimes x_{\nu_1 + \nu_2} ,$$

³ \bar{B}_n et \bar{B}'_{n+1} correspondent respectivement à des bases des gradués $Gr(S_n)$ et $Gr(\tilde{S}_{n+1})$

où dans le deuxième membre ν_1 et ν_2 parcourent \overline{B}_n . Leur somme n'est plus dans \overline{B}_n , mais le lemme 4.3 permet de décomposer sur \overline{B}_n les deux membres de l'égalité de la partie 2) du lemme 4.1; en identifiant alors le coefficient de x_μ :

$$(21) \quad d\delta_\mu = \sum_{\nu_1 \nu_2} \beta_{\nu_1 + \nu_2 \mu} \delta_{\nu_1} \cup \delta_{\nu_2}$$

On voit alors en appliquant la deuxième partie du lemme 4.1 et la famille d'égalités précédentes que l'obstruction $o_{n+1} \pmod p$ est égale à la somme sur B_{n+1}

$$(22) \quad \sum_{\mu} \sum_{\nu_1 \nu_2} \beta_{\nu_1 + \nu_2 \mu} (\delta_{\nu_1} \cup \delta_{\nu_2}) \otimes x_\mu$$

Par définition, pour $\mu \in B_{n+1}$, la variante à la Laudal du produit de Lie-Massey des classes ϵ_i des δ_i (coefficient du générateur $x_i, i = 1, \dots, r$) est la classe $\epsilon(\mu)$ du coefficient $a_\mu = \sum_{\nu_1 \nu_2} \beta_{\nu_1 + \nu_2 \mu} (\delta_{\nu_1} \cup \delta_{\nu_2})$ de x_μ dans l'expression ci-dessus. Elle nécessite la donnée des $\delta_\nu, \nu \in \overline{B}_n$ vérifiant (20) avec les coefficients $\beta_{\nu\mu}$ comme dans le lemme 4.3.

Remarque: On fera attention au fait que les δ_ν ne sont pas des COCYCLES. On ne peut donc décomposer leurs classes.

En s'appuyant sur §2.7, et en notant B_∞ la réunion de des $B_{n+1}, n \geq 1$, on obtient

Théorème 4.4. *Le groupe $O_F^{(p)}$ des obstructions des déformations de \overline{p} en caractéristique p est le sous-groupe $H_{PL}^2(\Pi, \mathfrak{g})$ de $H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ engendré par les produits de Laudal $\epsilon(\mu)$ avec $\mu \in B_\infty$. Il contient le groupe $H_{\square}^2(\Pi, \mathfrak{g})$.*

Question 4.5. *Peut-on faire un lien entre la filtration de Π et celle de H^2 ?*

Remarque: R peut être construit par récurrence à l'aide de $L(\Pi, \mathfrak{g})$. On trouve les $\beta_{\nu\mu}, \xi_n$ et donc δ_ν pour ν dans \overline{B}_n , on en tire alors a_μ ; ceci permet de compléter le sous-groupe de H^2 . En en prenant une base ω_i et en décomposant o_{n+1} dessus, on obtient S_{n+1} comme dans 2.5. Il serait intéressant d'associer directement à R un $L(R)$ et de vérifier qu'il est homotope à $L(\Pi, \mathfrak{g})$.

La construction exhibe en fait un groupe d'obstruction de niveau $\leq n + 1$, $H_{n+1}^2(\Pi, \mathfrak{g})$ et on a la suite d'inclusions:

$$H_{\square}^2(\Pi, \mathfrak{g}) \subset H_{n+1}^2(\Pi, \mathfrak{g}) \subset O_F^{(p)} = H_{PL}^2(\Pi, \mathfrak{g}) \subset O_F \subset H^2(\Pi, \mathfrak{g}) .$$

§5. Opérateurs de Bockstein

On cherche à quitter la caractéristique p .

Commençons par discuter l'obstruction initiale définie par le passage de $R_0 = k[\epsilon_1, \dots, \epsilon_r]$ à $\tilde{R}_1 = \mathcal{O}[X_1, \dots, X_r]/\mathfrak{m}^2$, cf. 2.4. Une première obstruction se présente: peut-on relever $\bar{\rho}$ à $\mathbf{G}(\mathcal{O}/(\pi^2))$: si non, π est dans l'idéal I des relations et toutes les déformations restent en caractéristique p . Dans la suite de ce §, on suppose qu'un tel relèvement ρ existe, ce qui est le cas dans les situations provenant de la géométrie arithmétique (courbes elliptiques, formes modulaires).

L'étape suivante étudie l'obstruction liée au monôme πX_i , i fixé; pour cela on prend la 1-extension avec $A' = \mathcal{O}[X_i]/(\pi^2, X_i^2)$ et $A = \mathcal{O}[X_i]/(\pi, X_i^2) = k[\epsilon_i]$. Le noyau de l'homomorphisme $p : A' \rightarrow A$ est engendré comme k -espace vectoriel par π et πX_i . Le noyau de l'homomorphisme de groupes $\mathbf{G}(A') \rightarrow \mathbf{G}(A)$ est $\mathfrak{g} \otimes [\mathcal{O}\pi + \mathcal{O}\pi X_i]$. Mais X_i correspond à un morphisme $\Pi \rightarrow \mathbf{G}(k[\epsilon_i]) : \rho_i(g) = [1 + \delta_i(g)X_i]\rho(g)$ avec δ_i cocycle à valeurs dans k . On le remonte dans $\mathcal{O}/(\pi^2)$: ce n'est plus un cocycle mais son bord définit un 2-cocycle à valeurs dans le noyau $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}\pi X_i$. Avec l'aide du lemme 4.1, on constate donc que cette obstruction dans $H^2(\Pi, \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}\pi X_i) \xrightarrow{\sim} H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ est l'image de la classe de δ_i dans $H^1(\Pi, \mathfrak{g})$ par l'opération de Bockstein, donnée par le cobord de la suite exacte de cohomologie définie par $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}_2$ est la sous-algèbre définie par \mathbf{G} dans $M_n(\mathcal{O}/(\pi^2))$. On déduit alors facilement:

Proposition 5.1. *L'idéal des relations contient l'uniformisante π si et seulement si $\bar{\rho}$ n'a pas de relèvement à $\mathcal{O}/(\pi^2)$. Si de tels relèvements existent, l'image de I modulo l'idéal $(\pi^2, X_i X_j, i$ et $j = 1, \dots, r)$ contient la classe de πX_i si et seulement si l'image du 1-cobord δ_i , correspondant par dualité à la variable X_i , par l'opération de Bockstein $H^1(\Pi, \mathfrak{g}) \rightarrow H^2(\Pi, \mathfrak{g})$ est non nulle. Le sous-groupe des obstructions à relever $\bar{\rho}$ à $\mathcal{O}[X_1, \dots, X_r]/(\pi^2, X_i X_j, i$ et $j = 1, \dots, r)$ est engendré par l'image de l'opération de Bockstein.*

Remarque: Cette proposition est intéressante pour discuter sur les exemples la question 3.2 puisqu'elle explicite des éléments du H^2 qui sont dans \mathcal{O}_F .

Question 5.2. *on peut continuer en écrivant des suites de Bockstein, mais assez vite on bute sur les problèmes de dénominateurs en caractéristique p (cf. formule de Campbell-Hausdorff): peut-on remonter à \mathcal{O} en utilisant des vecteurs de Witt?*

Troisième partie

§6. Questions arithmétiques

On se place dans la situation des extensions de corps de nombres. On part de $\bar{\rho}$ une représentation du groupe de Galois $G_F = \text{Gal}(\mathbb{Q}/F)$, pour F une extension de \mathbb{Q} de degré fini. Soit $K = F(\bar{\rho})$ l'extension de F définie par le noyau de $\bar{\rho}$ et $G = \text{Gal}(K/F)$. Soit S un ensemble de places de F contenant les places de ramification de $\bar{\rho}$ ainsi que les places au dessus de p et ∞ . Désignons par K_S (resp. F_S) la plus grande p -extension de K (resp. de F) non ramifiée en dehors des places au dessus de S et posons $\Pi = \text{Gal}(K_S/F)$, $P = \text{Gal}(K_S/K)$ et $G_S = \text{Gal}(F_S/F)$; soit \mathbf{G} , \mathcal{O} , k comme avant. On considère $\bar{\rho}$ comme une représentation de Π .

6.1. Sur G_S

On résume des résultats de [13], cf. aussi [21], et on explicite [18] 1.10 lemme 4 en termes de cup-produits dans la cohomologie de G_S . Les invariants principaux de G_S sont son nombre de générateurs:

$$d(S) = r_2 + 1 + r(S) ,$$

et son nombre de relations:

$$r(S) = \sum_{v \in S} \delta_v - \delta + \beta_S ,$$

où β_S désigne la dimension de $\mathbb{B}_S = \text{Hom}(V_S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et V_S le groupe quotient par F^* du groupe des $x \in F^*$ qui sont des puissances locales p -ièmes dans S et qui engendrent un idéal qui est aussi une puissance p -ième.

Si la représentation $\bar{\rho}$ est à valeurs dans le groupe linéaire $GL_N(k)$ et si $N = 1$, R est simplement $\mathbb{Z}_p[[G_S^{ab}]]$. Soit Δ le défaut de la conjecture de Leopoldt (cf. [32]); il intervient dans une décomposition $G_S^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^{r_2+1+\Delta} \oplus \sum_{i=1}^{i=r} \mathbb{Z}_p/p^{n_i}\mathbb{Z}_p$, avec $n_i > 0$: alors $H^1(G_S^{ab}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = H^1(G_S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est de dimension

$$(23) \quad d(S) = r_2 + 1 + \Delta + r .$$

On peut remarquer que $H^2(G_S^{ab}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est la somme directe de 2 sous espaces vectoriels de dimension r (engendré par des éléments de Bockstein) et $\binom{d(S)}{2}$ (engendré par des cup-produits). On a donc

$$R \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p[[X_1, \dots, X_{d(S)}]] / ((1 + X_j)^{n_j} - 1)_{j=r_2+\Delta+2, \dots, d(S)}$$

Le nombre de générateurs de R sur \mathbb{Z}_p est $d(S)$. Le nombre de relations est $r = \dim_k O_F^{(p)}$, à comparer à $\dim H^2(\Pi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \dim H^2(G_S, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = r(S) = d(S) - (r_2 + 1) = r + \Delta$. On voit que dans ce cas R est une intersection complète. Avec les notations du §4, on peut donc reformuler l'énoncé du lemme 4 de [18]:

Proposition 6.1. *Le défaut de la conjecture de Leopoldt est égal à l'excès de la dimension de Krull dans le cas $N = 1$. C'est la différence des dimensions entre $H^2(\Pi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $H_{PL}^2(\Pi, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.*

6.2. Annulation des obstructions par réduction à l'action triviale

Le but de ce § est d'expliquer la méthode généralement suivie pour l'étude des déformations. On peut noter que chaque obstruction liée à une petite extension p correspond à un problème (faible) de plongement à ramification restreinte ([20], [22]). En effet, partant d'un homomorphisme $\Pi \rightarrow \mathbf{G}(A)$ (son noyau correspondant à une extension L de F) et de la donnée d'une surjection $\mathbf{G}(p) : \mathbf{G}(A') \rightarrow \mathbf{G}(A)$ définie par p on cherche à le relever en $\Pi \rightarrow \mathbf{G}(A')$ avec un diagramme commutatif; c'est exactement le problème de plongement de L/F définie par $\mathbf{G}(p)$ avec la condition de restriction de la ramification à S . On sait que la méthode locale-globale est classique dans le problème de plongement; c'est celle qui est suivie en général pour vérifier la nullité du groupe des obstructions, cf. aussi [3] pour une variante dans le cas « Borel ». On montre en général la nullité du H^2 global en s'appuyant sur celle des H^2 locaux. La méthode s'achève en général en vérifiant la nullité d'un groupe de classes qui assure qu'il n'y pas de nouvelles relations (purements globales). On relira [24] pour la prise en considération des nouvelles obstructions dans le problème de plongement.

Détaillons la méthode à l'aide de quelques lemmes. La première étape est d'utiliser la dualité globale de Poitou-Tate. Pour un module galoisien M pour l'action de $\text{Gal}(K_S/F)$, annulé par p , on note $\text{III}_i(K_S/F, M)$ le noyau de l'application obtenue en prenant le produit des applications dans les groupes de cohomologie locaux:

$$(24) \quad \text{III}_i(K_S/F, M) = \ker \left(H^i(K_S/F, M) \rightarrow \prod_{v \in S} H^i(\overline{F}_v/F_v, M) \right).$$

Lemme 6.2. *Le groupes $\text{III}_2(K_S/F, M)$ et $\text{III}_1(K_S/F, \text{Hom}(M, \mu_p))$ sont en dualité exacte.*

Le lemme suivant donne une condition d'annulation assez souvent vérifiée. Posons $K' = K(\mu_p)$. Distinguons les conditions:

- C1) K ne contient pas le groupe μ_p : le groupe $\Delta := \text{Gal}(K'/K)$ n'a que 1 comme point fixe dans μ_p et est d'ordre premier à p : $H^i(\Delta, \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mu_p)) = 0$ si $i > 0$, d'où $H^1(K'/F, \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mu_p)) = H^1(K/F, \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mu_p)^\Delta) = H^1(K/F, \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mu_p^\Delta)) = 0$.
- C2) F contient déjà μ_p , $\mathbf{G} = GL_2$, $\bar{\rho}$ définit une surjection sur $GL_2(\mathbb{F}_p)$ et $p \geq 5$. On a alors un isomorphisme de modules galoisiens $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mu_p) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{F}_p)$ et on peut reprendre le raisonnement de [8], lemme 1.2.
- C3) On suppose ici que $\bar{\rho}$ provient d'une courbe elliptique définie sur $F = \mathbb{Q}$ avec une condition d'irréductibilité absolue pour la restriction à $\text{Gal}(K_S, k)$ avec $k = \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{p-1}p})$, c'est le sous-corps quadratique de $\mathbb{Q}(\mu_p)$, et on s'appuie sur le lemme 19 de [7]; \mathfrak{g}^0 est le sous-module des matrices de trace nulle.

On peut alors énoncer:

Lemme 6.3. *Si une des conditions Ci précédentes est vérifiée, le groupe $H^1(K'/F, \text{Hom}(M, \mu_p))$ est nul pour $M = \mathfrak{g}$ pour C1 ou C2 et $M = \mathfrak{g}^0$ pour C3.*

Notons $\text{Cl}_S(K')$ le quotient du groupe des classes du corps K' par le sous-groupe engendré par les classes des idéaux premiers au-dessus de S . On note $\text{Cl}_S(K')_p$ son plus grand quotient annulé par p .

Lemme 6.4. *Avec M comme dans le lemme précédent, on a un isomorphisme de $\text{Gal}(K'/F)$ -modules: $\text{III}_1(K_S/K', \text{Hom}(M, \mu_p)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(M \otimes \text{Cl}_S(K')_p, \mu_p)$.*

Démonstration: En effet l'action de $\text{Gal}(K_S/K')$ sur $\text{Hom}(M, \mu_p)$ étant triviale, on peut sortir $\text{Hom}(M, \mu_p)$ dans $H^1(K_S/K', \text{Hom}(M, \mu_p))$ de façon $\text{Gal}(K'/F)$ -équivariante pour se ramener au calcul classique de $\text{III}_1(K_S/K', \mu_p)$ par la théorie de Kummer.

On a donc obtenu:

Proposition 6.5. *En supposant une des conditions Ci, ainsi que l'absence d'obstruction locale en S , la nullité du module $\text{Hom}_{\text{Gal}(K'/F)}(M \otimes \text{Cl}_S(K')_p, \mu_p)$ entraîne la nullité du groupe $H^2(\Pi, M)$ et donc l'absence d'obstructions dans le problème de déformation de $\bar{\rho}$ (à déterminant fixé dans le cas C3).*

Remarque: On a donc un critère extrêmement brutal pour pouvoir avancer une réponse positive à la question de Mazur. On aimerait,

comme pour la conjecture de Leopoldt, pouvoir disposer d'un raffinement en termes de diviseurs dans un module d'Iwasawa associé. On pourrait aussi rêver d'une variante analytique en termes de 0 ou de pôle d'une fonction L p -adique.

6.3. Etude du contrôle de l'idéal des relations

C'est une question naturelle d'étudier le contrôle de l'idéal des relations relativement aux extensions. Il est à noter que pour les anneaux de déformations eux-même, Hida ([10], [11]) a montré l'existence d'un tel contrôle moyennant des hypothèses raisonnables. Ce paragraphe résume sa théorie et montre que la conjonction d'un contrôle des relations et de la nullité d'un invariant μ d'Iwasawa implique la nullité des relations. On considère d'abord une extension galoisienne F'/F incluse dans K_S . On fera ensuite varier F' parmi les étages de la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique F_∞/F . Pour simplifier on suppose F' et K linéairement disjointes sur F . On note Π' et Δ les groupes de Galois de K_S sur F' et de F' sur F . On suppose que l'action de Π et donc de Π' sur le sous-module des matrices de trace nulle \mathfrak{g}^0 de \mathfrak{g} est sans point fixe. On se restreint au cas où le groupe \mathbf{G} est simplement GL_N . Considérons les hypothèses ci-dessous où χ désigne un relèvement de $\det(\rho)$ à valeurs dans \mathcal{O} .

- HH1) le déterminant de la déformation est fixé: $\det(\rho) = \chi$
- HH2) l'action adjointe de Π' est sans point fixe dans \mathfrak{g}^0
- HH3) p ne divise pas la dimension de l'espace de la représentation $\bar{\rho}$
- HH4) Le centralisateur de l'image de $\bar{\rho}'$, la restriction de $\bar{\rho}$ à Π' , est réduit au centre (HH2 est la condition dérivée).

Hida, cf. [10] prop. A 2.3, et [11] cor. 3.2 démontre, sous HH1), HH3) et HH4), que l'anneau des déformations (à déterminant fixé) R relatif à Π et $\bar{\rho}$ s'identifie à l'anneau des coinvariants de l'anneau de déformations R' de $\bar{\rho}'$ pour l'action par fonctorialité de Δ . Il en déduit que l'espace cotangent t^* de R s'identifie aux coinvariants de celui t'^* de R' . Considérons la présentation de R' à l'aide de l'algèbre de séries formelles complétée de l'algèbre symétrique sur t'^* : si cette présentation est *équivariante*, on déduit que l'idéal des relations pour Π s'identifie aux coinvariants dans l'idéal correspondant pour Π' : c'est cette condition qu'on appelle *contrôle de l'idéal des relations dans l'extension F'/F* ; par dualité on obtient une injection sur les groupes d'obstructions respectifs $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}'$. Supposons maintenant que ce phénomène existe pour tous les étages F_n/F de la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique F_∞/F , supposée linéairement

disjointe de K . Notons Π'_n le groupe de Galois de K_S sur F_n : on a ainsi un diagramme:

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} O_F & \hookrightarrow & O_{F_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\Pi, \mathfrak{g}^0) & \xrightarrow{res} & H^2(\Pi'_n, \mathfrak{g}^0) . \end{array}$$

On déduit un diagramme analogue en passant à la limite sur n où on pose $\Pi'_\infty = \text{Gal}(K_S/F_\infty)$

$$(26) \quad \begin{array}{ccc} O_F & \hookrightarrow & \varinjlim O_{F_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\Pi, \mathfrak{g}^0) & \xrightarrow{res} & H^2(\Pi'_\infty, \mathfrak{g}^0) . \end{array}$$

Notons L/F la sous-extension de K définie par le p -sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(K/F)$. Iwasawa, cf. [12] th. 3, a remarqué que les nullités des invariants μ des \mathbb{Z}_p -extensions cyclotomiques K_∞ et L_∞ de K et L sont équivalentes. De cette nullité, on déduit celle des groupes $H^2(K_S/K_\infty, \mathfrak{g}^0)$ ou $H^2(K_S/L_\infty, \mathfrak{g}^0)$ en interprétant comme Kuzmin, cf. [14] §5, la nullité de μ en termes de liberté de p -groupes pro-finis. On peut alors déduire la nullité de $H^2(\Pi'_\infty, \mathfrak{g}^0)$ de la nullité de l'invariant μ pour la \mathbb{Z}_p -extension K_∞/K par un argument de restriction et corestriction, cf. [5] III th. (10.3). On a donc:

Proposition 6.6. *En supposant K/F et F_∞ linéairement disjointes, si les idéaux de relations sont contrôlés dans les extensions F_n/F , alors la nullité de l'invariant μ d'Iwasawa pour K_∞/K , ou L_∞/L si on préfère, implique celle de l'idéal des relations dans l'anneau R des déformations de $\bar{\rho}$ à déterminant fixé.*

Références

- [1] J. BERTIN and A. MÉZARD, Espaces des modules formels pour les revêtements sauvagement ramifiés, *Inv. Math.*, **141**(2000), 195–238.
- [2] G. BÖCKLE, A local-to-global principle for deformations of Galois representations, Préprint Essen 1998-6.
- [3] G. BÖCKLE and A. MÉZARD, The prime to adjoint principle and unobstructed Galois deformations in the Borel case, *J. Number theory*, **78**, 2(1999), 167–203.
- [4] N. BOSTON, Explicit deformations of Galois representations, *Inv. Math.*, **103**(1991), 181–196.
- [5] K. BROWN, *Cohomology of groups*. GTM 87, Springer-Verlag, 1982.

- [6] P. CASSOU-NOGUÈS and A. JEHANNE, Parité du nombre de classes des S_4 -extensions de \mathbb{Q} et courbes elliptiques, *J. Numb. Th.*, **57**(1996), 366–384.
- [7] E. DE SHALIT, Hecke rings and universal deformation rings, IN G. CORNELL ET J. H. SILVERMAN ET G. STEVANS, editors, *Modular forms and Fermat's last theorem*, pages 421–445, Springer Verlag, 1997.
- [8] M. FLACH, A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve, *Inv. Math.*, **109**(1992), 307–327.
- [9] R. GREENBERG, Iwasawa theory for p -adic representations, *Algebraic Number theory in honor of K. Iwasawa*, Adv. studies in pure math., pages 97–137, 1989.
- [10] H. HIDA, *On Selmer groups of adjoint representations*. Number theory, Paris LMS lecture Note series, **235**(1996), pp. 89–132
- [11] H. HIDA, *Ajoint Selmer groups as Iwasawa modules*. Preprint, 1998.
- [12] K. IWASAWA, On the μ -invariants of \mathbb{Z}_l -extensions, *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative algebra, in honor of Y. Akizuki*, Kinokuniya, Tokyo, pages 1–11, 1973
- [13] H. KOCH, *Galoissche Theorie der p -erweiterungen*. VEB Berlin 1970.
- [14] L. V. KUZMIN, The Tate module for algebraic number fields, *IZV Akad. Nauk SSSR*: 263–321, 1972.
- [15] S. LANG, *Topics in cohomology of groups*. Lecture Notes in Mathematics., **1625**. Berlin: Springer, 226 p. (1996).
- [16] O. A. LAUDAL, *Formal moduli of algebraic structures*. Lecture Notes in Math., **754**. Berlin: Springer, 161 p. (1979).
- [17] O. A. LAUDAL, Matric Massey products and formal moduli, In J.-E. ROOS, editor, *Algebra, Algebraic topology and their interactions* Lecture Notes in Math., **1183**. Berlin: Springer, pages 218–241, 1986
- [18] B. MAZUR, Deforming Galois Representations, In K. Ribet et J.-P. Serre Y. IHARA, editors, *Galois Groups over \mathbb{Q}* , number 16 in MSRI, pages 385–437, 1987.
- [19] B. MAZUR, An introduction to the deformation theory of Galois representations, IN G. CORNELL ET J. H. SILVERMAN ET G. STEVANS, editors, *Modular forms and Fermat's last theorem*, pages 243–312, Springer Verlag, 1997.
- [20] J. NEUKIRCH, Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie, *Inv. Math.*, **21**(1973), 59–116.
- [21] O. NEUMAN, On p -closed number fields and an analogue of Riemann's existence theorem, In Fröhlich, editor, *Algebraic number fields*, pages 625–647, Acad. Press, 1977.
- [22] A. NOMURA, Embedding Problems with Restricted Ramifications and the Class Number of Hilbert Class Fields, Exposé à cette conférence (CFT 1998).
- [23] B. PERRIN-RIOU, *Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques*. Astérisque., **229**. Paris: 200 p. (1995).

- [24] G. POITOU, Conditions globales pour les problèmes de plongement à noyau abélien, *Ann. Inst. Fourier*, **29**(1979), 1–14.
- [25] V. S. RETAKH, Massey operations in the cohomology of Lie super-algebras and deformations of complex analytical spaces, *Funct. Anal Appl.*, **11**(1977), 88–89.
- [26] V. S. RETAKH, Lie-Massey brackets and n -homotopically multiplicative maps of differential graded Lie algebras, *JPA Alg.*, **89**(1993), 217–229.
- [27] J. P. SERRE, *Corps Locaux*. Hermann, Paris, 1996.
- [28] M. SCHLESSINGER, Functor of Artin rings, *Trans. Am. Math. Soc.*, **130**(1968), 218–22.
- [29] D. TANRÉ, *Homotopie rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*. Lecture Notes in Math., **1025**. Berlin–New York: Springer, 211 p. (1983).
- [30] J. TILOUINE, *Deformations of Galois representations and Hecke algebras*. Publ. Mehta Res. Inst., Narosa Publ. Dehli, 1996.
- [31] A. VISTOLI, The deformation theory of local complete intersections, prépublication électronique: alg-geom/9703008, 1997.
- [32] M. YAMAGISHI, A Survey of p -Extensions, Exposé à cette conférence (CFT 1998).

Institut Fourier, UMR 5582
Université Joseph FOURIER et C.N.R.S.
BP 74
F-38402 Saint Martin d'Hères
E-mail address: roland.gillard@wanadoo.fr