Advanced Studies in Pure Mathematics 29, 2000
Singularities - Sapporo 1998
pp. 79–95

Constructibilité de l'idéal de Bernstein

Joël Briançon, Philippe Maisonobe et Michel Merle

Soit X une variété analytique, $f = (f_1, \dots, f_p)$ des fonctions analytiques sur X, $F = f_1 \dots f_p$ leur produit.
Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier; C. Sabbah montre dans [Sab 1] [Sab 2] que toute section m de M satisfait localement des équations non triviales

$$(*) \qquad b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$$

où $b(s_1, \dots, s_p)$ est un produit de formes affines. De plus, les coefficients de la partie linéaire de ces formes sont des entiers positifs ou nuls. En particulier, l'idéal $B(x, f_1, \dots, f_p, m)$ des polynômes $b(s_1, \dots, s_p)$ vérifiant au voisinage d'un point x une équation fonctionnelle $(*)$ est non réduit à zéro. Désignons par $\operatorname{car} M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l} X$ la variété caractéristique de M. Nous montrons que le germe de l'idéal $B(x, f_1, \dots, f_p, m)$ est constant le long des composantes d'une partition qui se détermine géométriquement à partir des restrictions de la seule fonction F aux Y_l. En particulier, nous en déduisons le résultat :

Théorème. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier engendré par une section m et* $\operatorname{car} M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l} X$ *sa variété caractéristique. Soit $(V_\beta)_{\beta \in \Gamma}$ une stratification analytique de $\bigcup_{l \in L} Y_l$ compatible aux Y_l et à $F^{-1}(0)$, satisfaisant la condition de frontière et la condition a_F de Thom.*

Le germe de l'idéal de Bernstein de $f_1, \dots, f_p, m$ est constant le long des strates de la stratification $(V_\beta)_{\beta \in \Gamma}$.

Ce résultat généralise celui obtenu par J. Briançon et H. Maynadier ([B.M] théorème 3.3 page 14) dans le cas où $p = 1$ et m une fonction constante sur X.

Détaillons section par section les résultats que nous obtenons.

Received March 24, 1999
Revised July 22, 1999

Section 1 Soit Y un sous-espace analytique irréductible de X. On note T^*X le fibré cotangent à X, T^*_YX l'espace conormal à Y dans X. Soit A le sous-ensemble de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ défini par :

$$A = \left\{ \left(x, \eta + s_1 \frac{df_1(x)}{f_1(x)} + \cdots + s_p \frac{df_p(x)}{f_p(x)}, s_1, \cdots, s_p \right) \right.$$
$$\left. ; F(x) \neq 0 \text{ et } (x, \eta) \in T^*_YX \right\}$$

L'espace $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$, adhérence de A dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$ a été introduit par T. Kawai et M. Kashiwara ([K.K]).

Nous donnons ici quelques propriétés de $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$. Désignons par π_2 la projection de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ sur $\mathbf{C}^p$.

1. Les fibres réduites de la restriction de π_2 à $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$ sont des sous-espaces lagrangiens de T^*X. La fibre au-dessus de l'origine est en particulier un sous-espace lagrangien conique.
2. La projection par π_2 de la trace de $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$ sur l'hypersurface d'équation $F = 0$ est une réunion H d'hyperplans vectoriels de $\mathbf{C}^p$ dont les équations sont des formes linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls.
3. La partie de $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$ au dessus de la droite vectorielle $s_1 = \ldots = s_p$ de $\mathbf{C}^p$ s'identifie à l'espace $W^\sharp_{F,Y}$.

Section 2 Nous étudions ici des propriétés générales des $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Modules cohérents. Nous dirons qu'un $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module cohérent M est à fibre lagrangienne si $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\cdots,s_p]} M)(0)$, intersection de sa variété caractéristique et de $\pi_2^{-1}(0)$, est un sous-espace lagrangien de T^*X. Nous étudions plus particulièment les $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Modules cohérents à fibre lagrangienne. Ils se comportent bien par suite exacte. Nous montrons que l'idéal des polynômes de $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$ annulant le germe en un point d'un tel module est localement constant le long des strates d'une stratification associée à la variété lagrangienne $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\cdots,s_p]} M)$ (0).

Section 3 Soit m une section engendrant un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier M. Désignons par $\mathrm{car}\, M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l}X$ sa variété caractéristique. Nous commençons par établir le résultat suivant :

Le $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p] m f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}$ est cohérent de variété caractéristique :

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\cdots,s_p]}\, \mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p] m f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p} = \bigcup_{F|_{Y_l} \neq 0} W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y_l}$$

Ce résultat complète ceux de l'article [B.B.M.M] ; nous le montrons à l'aide du théorème de C. Sabbah sur les variétés caractéristiques de Modules relatifs [Sab 2].

On en déduit que $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent à fibre lagrangienne. Donc, la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module à gauche cohérent :

$$N = \frac{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1+1}\dots f_p^{s_p+1}}$$

est incluse dans $(\bigcup_{F|_{Y_l}\neq 0} W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y_l})\bigcap F^{-1}(0)$. Ce Module est encore à fibre lagrangienne; il en résulte que l'idéal $B(x,f_1,\dots,f_p,m)$ des polynômes $b(s_1,\dots,s_p)$ vérifiant au voisinage d'un point x de X une équation fonctionnelle

$$(*)\qquad b(s_1,\dots,s_p)mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}\in\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1+1}\dots f_p^{s_p+1}$$

est constant le long des strates d'une partition canoniquement associée à la variété lagrangienne

$$\Big(\bigcup_{F|_{Y_l}\neq 0} W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y_l}\Big)\bigcap F^{-1}(0)\bigcap \pi_2^{-1}(0)$$

égale à la trace sur $F^{-1}(0)$ de l'espace conormal relatif à F sur $\bigcup_{F|_{Y_l}\neq 0} Y_l$.

TABLE DES MATIÈRES

§1. Famille de variétés lagrangiennes

Soit X une variété analytique complexe de dimension n. Soit $f=(f_1,\dots,f_p)$ des fonctions holomorphes sur X. Nous désignons par T^*X le fibré cotangent à X et par π_1 (resp. π_2) la projection de $T^*X\times\mathbf{C}^p$ sur

T^*X (resp. sur $\mathbf{C}^p$). On note F le produit $f_1 \ldots f_p$. Soit $Y \subset X$ un sous espace analytique irréductible non contenu dans l'hypersurface $F^{-1}(0)$. On désigne par T_Y^*X l'espace conormal à Y dans X, égal à l'adhérence dans T^*X du fibré conormal à la partie lisse de Y.

Notation 1. *Soit A le sous-ensemble de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ défini par :*

$$A = \left\{ \left(x, \eta + s_1 \frac{df_1(x)}{f_1(x)} + \cdots + s_p \frac{df_p(x)}{f_p(x)}, s_1, \cdots, s_p \right) \right.$$
$$\left. ; \ F(x) \neq 0 \ \text{ et } \ (x,\eta) \in T_Y^*X \right\}$$

Nous notons $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$ l'adhérence de A dans $T^*X \times \mathbf{C}^p$. L'ensemble $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$ est un espace analytique complexe irréductible de dimension $n+p$. L'action de $\mathbf{C}^*$ sur $T^*X \times \mathbf{C}^p$ donnée par :

$$\lambda, (x, \xi, s) \longmapsto (x, \lambda\xi, \lambda s)$$

laisse stable A, donc $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$. Le diviseur $F^{-1}(0)$ est également laissé stable par cette action.

Notation 2. *Pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, nous noterons $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c)$ la fibre au-dessus de c de la restriction de π_2 à $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$:*

$$W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c) = W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y} \cap \pi_2^{-1}(c)$$

On identifie $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c)$ à un sous espace analytique de T^*X. Pour $c = 0$, c'est un sous-espace stable par l'action de $\mathbf{C}^*$ sur T^*X donnée par :

$$\lambda, (x, \xi) \longmapsto (x, \lambda\xi).$$

Proposition 1. *Pour tout $c \in \mathbf{C}^p$, l'espace $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c)$ est un sous-espace lagrangien de T^*X.*

Preuve. Soit $c = (c_1, \ldots, c_p) \in \mathbf{C}^p$. L'espace $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}$ étant un espace analytique irréductible de dimension $n+p$, les composantes irréductibles de l'espace analytique réduit sous jacent à $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c)$ sont de dimension supérieure ou égale à n. Pour établir la proposition, il suffira donc de montrer que $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c)$ est isotrope. Désignons par α la 1-forme canonique sur T^*X. Nous avons donc à montrer que la restriction de $d\alpha$ à la partie lisse de toute composante de $W^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y}(c)$ est nulle. Pour cela, considérons l'éclatement normalisé $E : \widetilde{W}^\sharp_{f_1,\cdots,f_p,Y} \to$

$W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$ de l'idéal engendré par $(s_1 - c_1, \dots, s_p - c_p)$ dans l'anneau structural de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{lcll}
\widetilde{C} = E^{-1}(C) & \hookrightarrow & \widetilde{W}^\sharp_{f_1,\dots,f_p} & \\
\downarrow E & & \downarrow E & \\
C = W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}(c) & \hookrightarrow & W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} & \xrightarrow{\pi_1'} T^*X
\end{array}$$

dans lequel $\widetilde{C}$ est le diviseur exceptionnel et π_1' la restriction de π_1 à $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$.

On a $d\alpha|_C = ((\pi_1')^* d\alpha)|_C$. Il suffira donc de montrer que la restriction de $E^*((\pi_1')^* d\alpha)$ à la partie lisse de toute composante de $\widetilde{C}$ est nulle. Plaçons nous au voisinage d'un point générique e d'une composante de $\widetilde{C}$. Le point e est un point lisse de $\widetilde{C}$ et de $\widetilde{W}^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$ (car $\widetilde{C}$ est un diviseur d'un espace normal) ; ainsi, il existe une fonction holomorphe ψ telle que $\widetilde{C}$ soit défini au voisinage de e par l'équation $\psi = 0$. Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, il existe donc un entier naturel m_j strictement positif et une unité u_j tels que :

$$s_j - c_j = u_j \psi^{m_j}$$

et il existe un entier n_j et une unité v_j tels que :

$$f_j = v_j \psi^{n_j}$$

Notons Ω l'ouvert dense de Y des points lisses où F n'est pas nulle. Notons $U = {\pi_1'}^{-1}(\pi^{-1}(\Omega))$, si $\pi : T^*X \to X$ désigne la projection canonique. C'est un ouvert lisse dense de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$. Par définition de A (sachant que la restriction de α à la variété lagrangienne $T^*_Y X$ est nulle), nous avons :

$$((\pi_1')^*\alpha)|_U = \left(\sum_{j=1}^{p} s_j \frac{df_j}{f_j} \right) \Bigg|_U$$

$$((\pi_1')^* d\alpha)|_U = \left(\sum_{j=1}^{p} ds_j \wedge \frac{df_j}{f_j} \right) \Bigg|_U$$

Ainsi, au voisinage de e :

$$(E^*(\pi_1')^* d\alpha)|_{E^{-1}(U)}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{p} \psi^{m_j} du_j \wedge \frac{dv_j}{v_j} + \sum_{j=1}^{p} \psi^{m_j - 1} \left(n_j du_j - m_j u_j \frac{dv_j}{v_j} \right) \wedge d\psi \right) \Bigg|_{E^{-1}(U)}$$

La restriction de cette forme à $\psi = 0$ est nulle, d'où le résultat.

Proposition 2. *Soit $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap F^{-1}(0)$ la trace de l'hypersurface $F^{-1}(0)$ sur $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$. L'espace :*

$$\pi_2(W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap F^{-1}(0))$$

est une réunion d'hyperplans de $\mathbf{C}^p$ définis par des équations à coefficients entiers positifs. La famille de ces hyperplans est localement finie sur $F^{-1}(0)$.

Preuve. Considérons la normalisation $G : \overline{W} \to W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$ de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{lcll} \bar{Z} = G^{-1}(Z) & \hookrightarrow & \overline{W} & \\ \downarrow G & & \downarrow G & \\ Z = W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap F^{-1}(0) & \hookrightarrow & W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} & \stackrel{\pi_1'}{\to} T^*X \end{array}$$

Soit T une composante de Z. Soit e un point générique d'une composante de $\bar{Z}$ se projetant surjectivement sur T. Le point e est un point lisse de l'hypersurface $\bar{Z}$ et de $\overline{W}$. Soit $\psi = 0$ une équation réduite de $\bar{Z}$ au voisinage de e. Pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$, il existe un entier positif n_j (stictement positif pour au moins un indice) et v_j une unité tels qu'au voisinage de e on ait :

$$f_j = v_j \psi^{n_j}$$

On désigne par U le même ouvert que dans la preuve de la proposition précédente. On a au voisinage de e :

$$\begin{aligned} (G^*(\pi_1')^*\alpha)|_{G^{-1}(U)} &= \left(G^*\left(\sum_{j=1}^{p} s_j df_j/f_j\right)\right)\Big|_{G^{-1}(U)} \\ &= \sum_{j=1}^{p} s_j n_j d\psi/\psi + \sum_{j=1}^{p} s_j dv_j/v_j \end{aligned}$$

Cette forme est la restriction de la forme holomorphe $G^*(\pi_1')^*\alpha$. Il faut donc que $\sum_{j=1}^{p} s_j n_j$ soit un multiple de ψ. Ainsi, $\pi_2(T)$ est contenu dans l'hyperplan H_T d'équation :

$$\sum_{j=1}^{p} s_j n_j = 0$$

Considérons la restriction $\pi_2|_T : T \to H_T$. Pour tout $c \in \mathbf{C}^p$ les fibres :

$$(\pi_2|_T)^{-1}(c)$$

sont incluses dans $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}(c)$ et sont donc d'après la proposition 1 de dimension inférieure ou égale à n. La dimension de T est $n+p-1$ et la dimension de H_T est $p-1$, les fibres de $\pi_2|_T$ sont donc équidimensionnelles de dimension n.

T étant stable sous l'action de $\mathbf{C}^*$ sur $T^*X \times \mathbf{C}^p$ et fermée dans ce dernier espace, elle contient donc des points de la forme $(x, 0, 0)$. La fibre de $\pi_2|_T$ au dessus de 0 est donc non vide et de plus isotrope et conique. Comme H_T est lisse, le morphisme $\pi_2|_T$ est ouvert en un tel point $(x, 0, 0) \in T$ et son image contient donc un voisinage de l'origine de H_T. Comme cette image est conique, $\pi_2(T) = H_T$. On en déduit la proposition 2 et la remarque suivante :

Remarque 1. Soit $c \in \mathbf{C}^p$. Si $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}(c) \cap F^{-1}(0)$ n'est pas vide, c'est une réunion de composantes irréductibles de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}(c)$, donc un espace lagrangien.

Corollaire 1. *L'espace $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap \{s_1 = \dots = s_p\}$ s'identifie (par le plongement diagonal de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^p$) au sous-espace $W^\sharp_{F,Y}$ de $T^*X \times \mathbf{C}$.*

Preuve. $W^\sharp_{F,Y}$ est l'adhérence de

$$\{x, \eta + t(dF(x)/F(x)), t) \,;\, (x, \eta) \in T^*_Y X \,;\, F(x) \neq 0\}$$

On a clairement l'inclusion :

$$W^\sharp_{F,Y} \subset W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap (s_1 = \dots = s_p)$$

En dehors de l'hypersurface $F^{-1}(0)$, cette inclusion est une égalité. Il résulte de la proposition 1 que $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap (s_1 = \dots = s_p)$ est équidimensionnelle de dimension $n+1$, donc de même dimension que $W^\sharp_{F,Y}$. Pour montrer le corollaire, il suffit donc de montrer qu'aucune composante irréductible de $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y} \cap (s_1 = \dots = s_p)$ n'est contenue dans $F^{-1}(0)$. Supposons le contraire : soit Z une composante contenue dans $F^{-1}(0)$; $\pi_2(Z)$ est contenue d'après la proposition 2 dans un hyperplan à coefficients entiers positifs. Z est donc contenue dans $W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y}(0)$ qui est, d'après la proposition 1, de dimension n. C'est impossible, puisque Z est de dimension $n+1$.

§2. $\mathcal{D}[s_1, \dots, s_p]$-Module cohérent à fibre lagrangienne

2.1. Définitions

On reprend les notations du début de la section 1.

Désignons par $\mathcal{D}_X$, le faisceau des opérateurs différentiels sur la variété X. Pour $k \in \mathbf{N}$, notons $\mathcal{D}_X(k)$ le k^{ième} terme de la filtration de $\mathcal{D}_X$: si $(x_1, \dots, x_n)$ désigne un système de coordonnées locales de X et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$, notons :

$$\partial^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n} \quad \text{et} \quad |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$$

Un opérateur P de $\mathcal{D}_X(k)$, défini localement, s'écrit :

$$P = \sum_{|\beta| \leq k} c_\beta(x) \partial^\beta$$

On appelle degré de P et on note deg$P$ l'entier sup $\{|\beta|; c_\beta \neq 0\}$. Le symbole principal d'ordre k de P est l'élément de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}[\xi_1, \dots, \xi_n]$:

$$\sigma_k(P) = \sum_{|\beta| = k} c_\beta(x) \xi^\beta$$

et se recolle en une fonction $\sigma_k(P)$ sur le fibré cotangent T^*X. Considérons $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] = \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p] \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X$. Pour $j \in \mathbf{N}$, notons par $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p](j)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à j. L'anneau $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est alors naturellement filtré : pour $l \in \mathbf{N}$, le terme d'ordre l de cette filtration est

$$\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](l) = \sum_{j+k=l} \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p](j) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{D}_X(k)$$

C'est une filtration croissante. Pour tout $l \in \mathbf{N}$, $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](l)$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de type fini.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{N}^p$, notons $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_p^{\alpha_p}$. Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$ de X, un opérateur P de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](l)$ s'ecrit localement :

$$P = \sum_{|\alpha| + \deg P_\alpha \leq l} s^\alpha P_\alpha$$

avec P_α dans $\mathcal{D}_X$. Le symbole principal d'ordre l de P est l'élément de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}[\xi_1, \dots, \xi_n, s_1, \dots, s_p]$:

$$\sigma_l(P) = \sum_{|\alpha| + \deg P_\alpha = l} s^\alpha \sigma_{\deg P_\alpha}(P_\alpha)$$

et se recolle en une fonction sur $T^*X \times \mathbf{C}^p$, encore notée $\sigma_l(P)$, homogène sur les fibres de la projection $\pi \circ \pi_1$ sur X. On appelle degré de P et on note $\deg P$ l'entier $\sup\{|\alpha| + \deg P_\alpha \ ; \ P_\alpha \neq 0\}$. On vérifie que si P (resp. Q)est une section de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](l)$ (resp. $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](m)$) l'opérateur :

$$PQ - QP \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p](l + m - 1)$$

De plus, le symbole d'ordre $l + m - 1$ de $PQ - QP$ est, dans un système de coordonnées locales :

$$\{\sigma_l(P), \sigma_m(Q)\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \sigma_m(Q)}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma_l(P)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \sigma_m(Q)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \sigma_l(P)}{\partial x_i}$$

Cette formule est une extension du crochet de Poisson associé à deux symboles d'opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_X$.

D'après ce qui précède, le gradué $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ de $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ est un anneau commutatif. Il s'identifie au sous-faisceau de $(\pi \circ \pi_1)_*(\mathcal{O}_{T^*X \times \mathbf{C}^p})$ des fonctions homogènes relativement aux variables (ξ, s). Les faisceaux d'anneaux $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ et $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ sont cohérents.

Donnons maintenant quelques propriétés de la catégorie des $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$-Modules cohérents à gauche, qui généralisent les propriétés des $\mathcal{D}_X$-Modules cohérents (leurs démonstrations sont les mêmes, voir par exemple [G.M]). Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$-Module cohérent à gauche; localement M admet une bonne filtration $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$. Le faisceau $\sqrt{\mathrm{ann}_{\mathrm{gr}\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]} \mathrm{gr}M}$ définit un idéal $\mathcal{J}(M)$ de $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$ indépendant des bonnes filtrations locales. Il en est de même de la multiplicité de $\mathrm{gr}M$ en un point générique d'une composante irréductible de son support.

La variété des zéros de l'idéal $\mathcal{J}(M)$ est $\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}M$, un sous-ensemble analytique de $T^*X \times \mathbf{C}^p$ appelé variété caractéristique de M. On appelle *cycle caractéristique* de M le cycle associé au module $\mathrm{gr}M$. On le note $\mathrm{Car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}M$.

Le théorème de Gabber s'énonce dans notre situation ([G]) :

Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$-Module cohérent à gauche. Si σ et τ sont deux sections de $\mathcal{J}(M)$, leur crochet $\{\sigma, \tau\}$ est une section de $\mathcal{J}(M)$.

Notation 3. *Soit $\pi_2 : T^*X \times \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}^p$ la projection sur $\mathbf{C}^p$. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]$-Module cohérent à gauche. On notera $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}M)(c)$ la fibre du point $c = (c_1, \dots, c_p)$ de la restriction de π_2 à $\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}M$. En particulier*

$$(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}M)(0) = (\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p]}M) \bigcap \pi_2^{-1}(0)$$

Tout point de $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(c)$ est limite de points lisses de la variété caractéristique de M en lesquels la restriction de π_2 est de rang localement constant. Les fibres de π_2 en ces points sont lisses réduites. Il résulte alors du théorème de Gabber qu'au voisinage d'un de ses points génériques, cette fibre, identifiée à un sous espace de T^*X, est involutive au sens de la 2-forme canonique sur l'espace cotangent à X. Elle est donc de dimension supérieure ou égale à la dimension de X. La semi-continuité de la dimension des fibres implique alors :

Proposition 3. *Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent à gauche. Les fibres $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(c)$ non vides ont leurs composantes irréductibles de dimensions supérieures ou égales à la dimension de X.*

Compte-tenu du caractère conique des variétés caractéristiques, on a en identifiant X à la section nulle de $T^*X \times \mathbf{C}^p$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Supp}(M) &= \mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M \bigcap \{s = \xi = 0\}\\ &= (\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(0) \bigcap \{\xi = 0\}\end{aligned}$$

D'où :

Remarque 2. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent à gauche : $M = 0$ si et seulement si $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(0) = \emptyset$

Définition 1. Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent à gauche. On dira que M est à fibre lagrangienne si $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(0)$, est une sous-variété lagrangienne de T^*X.

Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Modules cohérents à gauche. Comme dans le cadre des $\mathcal{D}_X$-Modules, on a :

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M = \mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M' \bigcup \mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M''$$

On en déduit en particulier la proposition suivante :

Proposition 4. *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de la catégorie des $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Modules cohérents à gauche. Le Module M est à fibre lagrangienne si et seulement si M' et M'' le sont.*

2.2. Constructibilité de l'idéal associé

Dans ce paragraphe, M désignera un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module à gauche cohérent à fibre lagrangienne. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ les projections des composantes irréductibles de la variété lagrangienne conique $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(0)$:

$$(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}M)(0) = \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{X_\alpha}X$$

L'espace $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ est le support de M et la famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles irréductibles est localement finie. Pour $J = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ un l-uplet d'éléments de A, on note :

$$U_J = X_{\alpha_1} \bigcap \ldots \bigcap X_{\alpha_l} - \bigcup_{\beta \notin J} X_\beta \bigcap X_{\alpha_1} \bigcap \ldots \bigcap X_{\alpha_l}$$

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{P}^f(A)$ l'ensemble des parties finies J de A pour lesquelles $U_J \neq \emptyset$. Alors, $\{U_J\}_{J \in \mathcal{A}}$ est une partition de $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. En effet pour $J \in \mathcal{A}$: $x \in U_J$ si et seulement si $J = \{\alpha \; ; \; x \in X_\alpha\}$

Définition 2. La partition $\{U_J\}_{J \in \mathcal{A}}$ est appelée la partition associée à la variété lagrangienne $\bigcup_{\alpha \in A} T^*_{X_\alpha} X$.

Notons pour $\alpha \in A$:

$$U'_\alpha = X_\alpha - \bigcup_{X_\alpha \not\subset X_\beta} X_\beta \cap X_\alpha$$

Si $J(\alpha) = \{\gamma \in A \; ; \; X_\alpha \subset X_\gamma\}$, $J(\alpha) \in \mathcal{A}$ et $U'_\alpha = U_{J(\alpha)}$; c'est un ouvert connexe dense de X_α.

Notation 4. *Nous notons $B(x, M)$ l'idéal de $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$ des polynômes annulant le germe de M en x.*

Proposition 5. *Soit M un $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module à gauche cohérent à fibre lagrangienne. Pour tout $J \in \mathcal{A}$, l'idéal $B(x, M)$ est constant pour $x \in U_J$, et est noté $B_J(M)$. En particulier, $B_\alpha(M) = B_{J(\alpha)}(M)$ est constant sur U'_α et on a :*

$$B_J(M) = \bigcap_{\alpha \in J} B_\alpha(M)$$

Preuve. Soit $x \in U_J$. Considérons le sous $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module de M :

$$L = B(x, M)M$$

La variété caractéristique $\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} L$ de L est contenue dans la variété caractéristique de M. Comme cette dernière est supposée à fibre lagrangienne, il résulte de la proposition 3 que l'ensemble des composantes irréductibles de $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} L)(0)$ est contenu dans l'ensemble des composantes irréductibles de $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} M)(0)$: $\{T^*_{X_\alpha} X\}_{\alpha \in A}$. Par définition de l'idéal $B(x, M)$, L est nul au voisinage de x, donc $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} L)(0)$ est vide au voisinage de x. Ainsi, pour $\gamma \in J$, la variété $T^*_{X_\gamma} X$ n'est pas une composante irréductible de $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} L)$ (0). Si $y \in U_J$, comme $J = \{\gamma \; ; \; x \in X_\gamma\}$, on obtient que $(\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} L)$

(0) est vide au voisinage de y. Ainsi, L est nul en restriction à U_J. L'idéal $B(x,M)$ est donc égal à l'idéal de $\mathbf{C}[s_1,\dots,s_p]$ annulant la restriction de M à U_J, $B_J(M)$.
D'autre part, pour $x \in U_J$, le module L est nul au voisinage de x. Donc, pour $\alpha \in J$, le Module L est nul en un point de U'_α. On a donc :

$$B(x,M) \subset \bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha(M)$$

Inversement pour $\gamma \in J$, $T^*_{X_\gamma}X$ n'est pas une composante irréductible de la variété caractéristique de $(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha(M)).M$. Et donc $(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha(M)).M$ est nul au voisinage de $x \in U_J$. L'inclusion précédente est donc une égalité.

§3. $\mathcal{D}[s_1,\dots,s_p]$-Modules et équations fonctionnelles associés à p fonctions holomorphes

Soit $f=(f_1,\dots,f_p)$ des fonctions holomorphes sur X. On désigne par F le produit de ces p fonctions. Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome. La variété caractéristique de M s'écrit $\operatorname{car} M = \bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$ où $Y_l \subset X$ est un sous-espace analytique irréductible de X. Considérons :

$$\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$$

$\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]$-Module libre de rang 1 engendré par $f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$. Le produit tensoriel $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est muni de la structure de $\mathcal{D}_X$-Module obtenue en posant :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(m\otimes af_1^{s_1}\dots f_p^{s_p})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_i}m\otimes af_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} + m\otimes\frac{\partial a}{\partial x_i}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} + \sum_{j=1}^{p} s_j m\otimes\frac{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}a}{f_j}f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$$

pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$ et pour toute section locale m (resp. a) de M (resp. de $\mathcal{O}_X[s_1,\dots,s_p,1/F]$). Si m est une section de M, on notera $mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} = m\otimes f_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$.

3.1. Rappels et compléments

Soit m une section de M. A l'aide du critère usuel sur les bonnes filtrations (voir [G.M]), on montre que $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-cohérent.

Théorème 1. *Soit m une section engendrant un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier M de variété caractéristique $\bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$. Le module $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p}$ est un $\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]$-Module cohérent de variété caractéristique :*

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]}\,\mathcal{D}_X[s_1,\dots,s_p]mf_1^{s_1}\dots f_p^{s_p} = \bigcup_{F|_{Y_l}\neq 0} W^\sharp_{f_1,\dots,f_p,Y_l}$$

Preuve. Ce théorème a été demontré dans le cas $m = 1$ et $M = \mathcal{O}_X$ à l'aide d'un théorème de C. Sabbah ([Sab 2] théorème 3.2., page 228)(voir aussi [B.B.M.M]). Commençons par établir un corollaire direct du théorème de C. Sabbah.

Soit $\phi : \mathcal{X} \to S$ une submersion entre deux espaces analytiques lisses. Désignons par $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}$ l'anneau des opérateurs relatifs au morphisme ϕ. Soit $T^*\mathcal{X}/S$ le fibré cotangent relatif. A tout $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}$-Module cohérent $\mathcal{N}$, on associe sa variété caractéristique $\mathrm{car}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}}\mathcal{N} \subset T^*\mathcal{X}/S$. Si $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ est un sous-espace analytique, on désigne par $T^*_{\phi|_\mathcal{Y}}(\mathcal{X}/S)$ l'espace conormal relatif à la restriction de ϕ à $\mathcal{Y}$. Il s'agit de l'adhérence dans $T^*\mathcal{X}/S$ de l'ensemble des vecteurs conormaux nuls sur les espaces tangents aux fibres de la restriction de ϕ à $\mathcal{Y}$. Nous dirons que ϕ est non caractéristique pour $\mathcal{Y}$, si l'intersection de l'image du morphisme naturel $T^*S \times_\mathcal{X} \mathcal{X} \to T^*_\mathcal{Y}\mathcal{X}$ est contenue dans la section nulle.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_\mathcal{X}$-Module holonome régulier de variété caractéristique $\mathrm{car}\,\mathcal{M} = \bigcup_{l\in L} T^*_{\mathcal{Y}_l}\mathcal{X}$, et $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction non triviale qui s'annule identiquement sur tout $\mathcal{Y}_l$ dont l'image par ϕ ne contient pas un ouvert non vide de S. Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}$-Module cohérent qui engendre $\mathcal{M}$. Supposons de plus que $\mathcal{M}$ soit sans F-torsion. La variété caractéristique de $\mathcal{N}$ est alors donnée par*

$$\mathrm{car}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}}\mathcal{N} = \bigcup_{F|_{\mathcal{Y}_l}\neq 0} T^*_{\phi|_{\mathcal{Y}_l}}(\mathcal{X}/S)$$

Preuve du lemme. Le théorème de C. Sabbah dit exactement que si Σ est une composante irréductible de la variété caractéristique de $\mathcal{N}$, il existe $l \in L$ tel que $\Sigma = T^*_{\phi|_{\mathcal{Y}_l}}(\mathcal{X}/S)$.

Supposons que F ne s'annule pas identiquement sur $\mathcal{Y}_l$. En un point générique de $\mathcal{Y}_l$, le morphisme ϕ, transverse aux $\mathcal{Y}_j$ passant par ce point, n'est donc pas caractéristique pour $\mathcal{M}$. Au voisinage de ce point, $\mathcal{M}$ est alors cohérent comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}$-Module. Par des arguments simples, on peut déterminer la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}$-Module. Cette variété est la même que celle de $\mathcal{N}$ ([Sch] lemme 1.3.3, page 125). Cela prouve que $T^*_{\phi|_{\mathcal{Y}_l}}(\mathcal{X}/S)$ est contenu dans la variété caractéristique de $\mathcal{N}$.

Si F s'annule identiquement sur $\mathcal{Y}_l$, alors $T^*_{\phi|\mathcal{Y}_l}(\mathcal{X}/S)$ est de dimension strictement inférieure à $\dim \mathcal{X}$. Supposons que la variété caractéristique de $\mathcal{N}$ ne soit pas de dimension pure $\dim\mathcal{X}$. Soit $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ le plus grand sous-module cohérent de $\mathcal{N}$ de dimension strictement inférieure à $\dim\mathcal{X}$. D'après [Bj] (Chap. 2.7 et Chap. 5.6), $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ est alors non nul. Il engendre sur $\mathcal{D}_\mathcal{X}$ un sous-Module de $\mathcal{M}$. D'après nos hypothèses et le théorème de C. Sabbah, ce Module serait annulé par une puissance de F, d'où la contradiction.

Terminons la preuve du théorème. Considérons l'application :

$$X \times \mathbf{C}^p \xrightarrow{i} X \times \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^p = \mathcal{X}$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, t_1 = e^{y_1} f_1(x), \ldots, t_p = e^{y_p} f_p(x))$$

Soit $p : X \times \mathbf{C}^p \to X$ la projection sur X. Notons $M' = \mathcal{O}_{X\times\mathbf{C}^p} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_X} p^{-1}M$ l'image inverse par p de M. L'image directe $\mathcal{M} = i^+(M')$ est un $\mathcal{D}_\mathcal{X}$-Module régulier de variété caractéristique (voir par exemple [G.M] page 130.)

$$\bigcup_{l\in L} T^*_{i(Y_l\times\mathbf{C}^p)}\mathcal{X}$$

Considérons $\phi : \mathcal{X} \to S = \mathbf{C}^p$, $(x, y, t) \mapsto t$. Pour démontrer le théorème, quitte à remplacer M par $M[1/F]$, on peut supposer que M est sans F-torsion. Comme ϕ est submersif en restriction à $i(Y_l \times \mathbf{C}^p)$ si et seulement si F est non nulle sur Y_l , le lemme permet alors de calculer la variété caractéristique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}/S}(1 \otimes m)(e^{y_1} f_1)^{s_1} \ldots (e^{y_p} f_p)^{s_p}$. Le théorème s'en déduit par le même principe que dans le cas $m = 1$ et $M = \mathcal{O}_X$ (voir [B.B.M.M] page 126).

Il résulte de la proposition 1 que $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]mf_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}$ est à fibre lagrangienne. Comme conséquence directe du théorème 1, nous obtenons :

Corollaire 2. *Sous les hypothèses du théorème 1, la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module à gauche cohérent*

$$N = \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]mf_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]mf_1^{s_1+1} \ldots f_p^{s_p+1}}$$

est contenue dans $(\bigcup_{F|_{Y_l}\neq 0} W^\sharp_{f_1,\ldots,f_p,Y_l}) \bigcap F^{-1}(0)$.

Remarque 3. On peut montrer (ce sera fait dans un prochain travail) que cette inclusion est en fait une égalité. Nous n'utiliserons pas ce fait ici.

3.2. Idéal de Bernstein

Dans ce paragraphe M désigne un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier engendré par une section m. Soit $\operatorname{car} M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l} X$ sa variété caractéristique. Pour tout $x \in X$, l'idéal $B(x, f_1, \ldots, f_p, m)$ des polynômes de $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$ annulant la fibre en x du $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module à gauche :

$$N = \frac{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p] m f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}}{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p] m f_1^{s_1+1} \ldots f_p^{s_p+1}}$$

est appelé idéal de Bernstein de $f_1, \ldots, f_p, m$ en x. Il est montré dans [Sab 1] [Sab 2] que cet idéal contient un polynôme non nul qui s'écrit comme produit de formes linéaires affines à coefficients rationnels positifs. Le module N, quotient d'un $\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]$-Module à fibre lagrangienne, est donc à fibre lagrangienne. Et on a l'inclusion (corollaire 2) :

$$\operatorname{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} N \subset \Big(\bigcup_{F|_{Y_l} \neq 0} W^\sharp_{f_1, \ldots, f_p, Y_l} \Big) \bigcap F^{-1}(0)$$

D'où l'inclusion :

$$(\operatorname{car}_{\mathcal{D}_X[s_1, \ldots, s_p]} N)(0) \subset \bigcup_{F|_{Y_l} \neq 0} (W^\sharp_{f_1, \ldots, f_p, Y_l})(0) \bigcap F^{-1}(0)$$

Il résulte de la remarque 1 que $(W^\sharp_{f_1, \ldots, f_p, Y_l})(0) \bigcap F^{-1}(0)$ est une variété lagrangienne contenue dans $(W^\sharp_{f_1, \ldots, f_p, Y_l})(0)$. De plus, d'après le corollaire 1, $(W^\sharp_{f_1, \ldots, f_p, Y_l})(0) = (W^\sharp_{F, Y_l})(0)$. Traduisons la proposition 5 :

Théorème 2. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier engendré par une section m et $\operatorname{car} M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l} X$ sa variété caractéristique. L'idéal de Bernstein de $f_1, \ldots, f_p, m$ en x est constant le long des strates de la partition associée à la variété lagrangienne :*

$$\Big(\bigcup_{F|_{Y_l} \neq 0} W^\sharp_{F, Y_l} \Big)(0) \bigcap F^{-1}(0)$$

Soit l tel que $F|_{Y_l} \neq 0$. L'espace $(W^\sharp_{F, Y_l})(0)$ est la réunion de $T^*_{Y_l} X$ et de $(W_{F, Y_l})(0)$, trace de $F^{-1}(0)$ sur l'espace conormal relatif de la restriction de F à Y_l. Soit $(V_\beta)_{\beta \in \Gamma_l}$ une stratification analytique de Y_l (partition localement finie par des strates lisses connexes) compatible à $F^{-1}(0)$ et satisfaisant la condition de frontière et la condition $a_{F|_{Y_l}}$ de Thom. Cette condition entraine l'inclusion :

$$W^\sharp_{F, Y_l}(0) \bigcap F^{-1}(0) \subset \bigcup_{\beta \in \Gamma_l} T^*_{V_\beta} X$$

Donc, si $T^*_{X_\alpha}X$ est une composante irréductible de $(W^\sharp_{F,Y_l})(0) \bigcap F^{-1}(0)$, il existe $\beta \in \Gamma_l$ tel que X_α soit l'adhérence de V_β. Donc, grâce à la condition de frontière, X_α est réunion de strates de la stratification $(V_\beta)_{\beta\in\Gamma_l}$. On obtient ainsi le corollaire :

Corollaire 3. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier engendré par une section m et* car $M = \bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$ *sa variété caractéristique. Soit $(V_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ une stratification analytique de $\bigcup_{l\in L} Y_l$ compatible aux Y_l et à $F^{-1}(0)$ satisfaisant la condition de frontière et la condition a_F de Thom. Alors l'idéal de Bernstein de $f_1, \ldots, f_p, m$ en x est constant le long des strates de la stratification $(V_\beta)_{\beta\in\Gamma}$.*

Remarque 4 (après [B.M.M] (théorème 4.2.1 page 541))**.** Si la stratification $(V_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ est de Whitney, nous savons qu'elle satisfait alors la condition a_F de Thom et la conclusion reste valable.

Dans le cas $p = 1$, N est un $\mathcal{D}_X[s_1]$-Module qui est holonome en tant que $\mathcal{D}_X$-Module. Dans ce cas, la preuve de la proposition 5 est plus simple : on peut montrer directement par la même méthode que le polynôme minimal de la fibre en un point d'un endomorphisme du $\mathcal{D}_X$-Module holonome M est constant le long des strates de la partition associée à sa variété caractéristique. On obtient ainsi une autre preuve de la proposition de [B.M]. Grâce à la correspondance de Riemann-Hilbert [M] [K], cette preuve se transcrit dans la catégorie des faisceaux pervers, où l'on dispose également de la notion de variété caractéristique, de la manière suivante :

Remarque 5. Soit $f : X \to \mathbf{C}$ une application analytique. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau pervers sur X de variété caractéristique $\bigcup_{l\in L} T^*_{Y_l}X$ et $\psi_f\mathcal{F}$ le faisceau des cycles proches muni de son automorphisme de monodromie (voir [D.K]).

On obtient ainsi, par exemple, que le polynome minimal de la monodromie du germe du faisceau pervers $\psi_f\mathcal{F}$ est constant le long des strates d'une stratification compatible aux Y_l et à $f^{-1}(0)$, satisfaisant de plus la condition de frontière et la condition a_f de Thom.

On pourra se reporter à [B.M.M] [Sab 3] [Gn] pour le calcul de la variété caractéristique de $\psi_f\mathcal{F}$.

Références

[B.B.M.M] Biosca, H., Briançon, J., Maisonobe, P., Maynadier, H., Espaces conormaux relatifs II : Modules différentiels, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 34 (1998), 123–134.

[Bj] BJÖRK, J.-E., *Rings of Differential Operators*, North Holland, 1979.

[B.M.M] BRIANÇON, J., MAISONOBE, P., MERLE, M., Localisation de systèmes différentiels, stratifications de Whitney et conditions de Thom, *Invent. Math.*, 117 (1994), 531–550.

[B.M] BRIANÇON, J., MAYNADIER, H., Équations fonctionnelles généralisées : transversalité et principalité de l'idéal de Bernstein-Sato, *Prépubl. Univ. Nice*, 483 (1997), 1–24.

[D.K] DELIGNE, P., KATZ, N., *Groupes de Monodromie en géométrie algébrique* (*SGA* 7), Lecture Notes in Math., 340 (1972-73), Springer.

[G] GABBER, O., The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. of Math.*, 103 (1981), 445–468.

[Gn] GINSBURG , V., Characteristic varietes and vanishing cycles, *Invent. Math.*, 34 (1983).

[G.M] GRANGER, M., MAISONOBE, P., A basic course on differential modules, dans *$\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes*, Les cours du CIMPA, Travaux en cours, Hermann, 45 (1993), 103–168.

[K] KASHIWARA, M., The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 20 (1984), 319–365.

[K.K] KASHIWARA, M., KAWAI, T., On Holonomic Systems for $\prod_{l=1}^{N}(f_l + \sqrt{-1}.0)^{\lambda_l}$, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* 15 (1979), 551–575.

[M] MEBKHOUT, Z., Une équivalence de catégorie, une autre équivalence de catégorie *Compositio Math.*, 51 (1984), 51–88.

[Sab 1] SABBAH, C., Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module, *Compositio Math.*, 62 (1987), 283–328.

[Sab 2] SABBAH, C., Proximité évanescente II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, *Compositio Math.*, 64 (1987), 213–241.

[Sab 3] SABBAH, C., Systèmes Différentiels et Singularités, Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux, *Astérisque* 130 (1985), 161–192.

[Sch] SCHAPIRA, P., *Microdifferential Systems in the Complex Domain*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 269, Springer, 1985.

Laboratoire J.A. Dieudonné
Unité Mixte de Recherche du CNRS 6621
Université de Nice Sophia-Antipolis
Parc Valrose, F 06108 Nice Cedex 2
France