Advanced Studies in Pure Mathematics 17, 1989
Algebraic Number Theory — in honor of K. Iwasawa
pp. 347–358

Variation de la fonction L p-adique par isogénie

B. Perrin-Riou

à Kenkichi Iwasawa

Soit p un nombre premier impair. Soit W une représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$, c'est-à-dire un $\boldsymbol{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie sur lequel $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$ agit de manière continue. Soit $\boldsymbol{Q}_\infty$ la $\boldsymbol{Z}_p$-extension cyclotomique de $\boldsymbol{Q}$ de groupe de Galois Γ sur $\boldsymbol{Q}$. Choisissons un réseau L de W stable par $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/\boldsymbol{Q})$. Greenberg construit à partir de ces données un module d'Iwasawa sur l'algèbre $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$ (dont nous rappellerons la construction). Si on fait l'hypothèse qu'il est de $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-torsion, ce qui est une conjecture sous des hypothèses raisonnables, on définit (à une unité près) un élément f_L de $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$ que l'on appelle sa série caractéristique. Soit $\mu(L)$ l'ordre de la plus grande puissance de p divisant f_L, c'est-à-dire le μ-invariant de f_L. Nous étudions ici la variation de $\mu(L)$ et donc de f_L lorsque L varie (W étant fixé). Cela nous permettra ultérieurement de comparer cette variation avec celle de périodes p-adiques et pourra être utile pour formuler une conjecture raisonnable liant les séries caractéristiques aux fonctions L p-adiques interpolant des valeurs spéciales de fonctions L. Dans le cas des représentations p-adiques attachées à une variété abélienne ayant bonne réduction ordinaire en toute place au dessus de p, cette étude a été faite dans [3] et dans [4]. Nous reprenons ici les méthodes de [3] utilisant les théorèmes classiques de dualité locale de Tate et globale de Poitou et Tate.

1. Position du problème

On fixe une clôture algébrique $\bar{\boldsymbol{Q}}$ de $\boldsymbol{Q}$. Toutes les extensions algébriques de $\boldsymbol{Q}$ considérées seront supposées contenues dans $\bar{\boldsymbol{Q}}$. Soit L une extension algébrique de $\boldsymbol{Q}$. Si v est une place de L, on note par L_v la réunion des complétés en v des extensions finies contenues dans L en v. Soit $G_v(L)$ le sous-groupe de décomposition en v de $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/L)$ et $I_v(L)$ le sous-groupe d'inertie. On notera enfin L_v^{nr} le composé de L_v avec l'exten-

Received May 6, 1988.

sion maximale non ramifiée de $\boldsymbol{Q}_r$ pour $v \mid r$. Les groupes de cohomologie utilisés sont les groupes de cohomologie galoisienne. On note

$$H^i(\mathrm{Gal}(L/F), M) = H^i(L/F, M), \quad H^i(\mathrm{Gal}(\bar{L}_v/L_v), M) = H^i(L_v, M).$$

Soit K un corps de nombres et W une représentation p-adique de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/K)$. Si L est une extension finie de K, on note $P(L)$ l'ensemble de places de L au dessus de p, $M(L)$ la réunion des places à l'infini et de l'ensemble de places de L ne divisant pas p où la représentation W a mauvaise réduction (c'est-à-dire telles que $I_v(L)$ agit non trivialement sur W) et $T(L)$ la réunion de $M(L)$ et de $P(L)$.

Supposons que, en chaque place v de $P(K)$, la représentation W est ordinaire, c'est-à-dire qu'il existe une filtration de W par des sous-$\boldsymbol{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}_v^t W$ tels que $\mathrm{Fil}_v^{t+1} W \subset \mathrm{Fil}_v^t W$, $\mathrm{Fil}_v^t W = 0$ pour t assez grand, $\mathrm{Fil}_v^t W = W$ pour t assez petit, qui soient stables par le sous-groupe de décomposition $G_w(K)$ pour un choix de w au dessus de v et tel que le sous-groupe d'inertie $I_w(K)$ agisse sur $\mathrm{Fil}_v^t W/\mathrm{Fil}_v^{t+1} W$ par χ^t où χ est le caractère cyclotomique. Soit L un réseau de W stable par $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/K)$. On pose $U = W/L$. La filtration de W en v induit une filtration de U: on note $F_v^t U$ l'image de $\mathrm{Fil}_v^t W$ dans U. D'autre part, soit W^* la représentation duale de W, c'est-à-dire

$$W^* = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Q}_p}(W, V_p(\mu))$$

où $T_p(\mu)$ est le module de Tate des racines de l'unité d'ordre une puissance de p et $V_p(\mu) = T_p(\mu) \otimes_{\boldsymbol{Z}_p} \boldsymbol{Q}_p$. On choisit pour réseau de W^* le réseau dual L^* de L et on pose $U^* = W^*/L^*$. On vérifie alors facilement que les $\boldsymbol{Q}_p$-sous-espaces vectoriels de W^*

$$\mathrm{Fil}_v^t W^* = (W/\mathrm{Fil}_v^{2-t} W)^*$$

définissent une filtration "ordinaire" de W^* en v.

Greenberg définit alors les groupes de Selmer généralisés suivants: pour toute extension L de K, on définit $S_U^t(L)$ comme le noyau de l'application de localisation

$$H^1(\bar{\boldsymbol{Q}}/L, U) \longrightarrow \prod_{v \notin P(L)} H^1(I_v(L), U) \prod_{v \in P(L)} H^1(I_v(L), U/F_v^t U).$$

C'est un $\boldsymbol{Z}_p$-module discret. On notera $\hat{S}_U^t(L)$ son dual de Pontryagin:

$$\hat{S}_U^t(L) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p}(S_U^t(L), \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p).$$

Soit K_∞ une $\boldsymbol{Z}_p$-extension de K et soit Γ le groupe de Galois de K_∞/K. Alors, $S_U^t(K_\infty)$ et son dual de Pontryagin $\hat{S}_U^t(K_\infty)$ sont munis d'une action naturelle de $Z_p[[\Gamma]]$-modules de type fini. On dira qu'un $Z_p[[\Gamma]]$-module de type fini discret est de cotorsion si son dual de Pontryagin (qui est compact) est de $Z_p[[\Gamma]]$-torsion.

On dit que W est p-critique en t si les $Z_p[[\Gamma]]$-modules $\hat{S}^t_U(K_\infty)$ et $\hat{S}^{2-t}_{U^*}(K_\infty)$ sont de torsion. Sous des hypothèses raisonnables sur W (disons si W est la réalisation p-adique d'un motif sur K) et si K_∞ est la Z_p-extension cyclotomique de K, Greenberg conjecture que cette notion de p-critique coïncide avec la notion de critique définie par Deligne. On renvoie à [2] pour une discussion de ces questions. Sous l'hypothèse que W est p-critique en l'entier t ou plutôt lorsque le $Z_p[[\Gamma]]$-module $S^t_U(K_\infty)$ est de cotorsion, soit f_L une série caractéristique de $\hat{S}^t_U(K_\infty)$, par exemple

$$f_L(T) = p^{\mu(L)}\det(T-\gamma \mid \hat{S}^t_U(K_\infty) \otimes_{Z_p} Q_p)$$

où γ est un générateur topologique de Γ. L'entier $\mu(L)$ est le μ-invariant de $\hat{S}^t_U(K_\infty)$ (ou de $S^t_U(K_\infty)$).

Soient deux réseaux L_1 et L_2 de W stables par $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/K)$ tels que L_1 soit contenu dans L_2. Le conoyau C est un $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/K)$-module fini. Posons pour toute place v de K divisant p

$$F^t_v C = (L_2 \cap \mathrm{Fil}^t_v W)/(L_1 \cap \mathrm{Fil}^t_v W).$$

On vérifie facilement que $F^t_v C$ est un sous-$\mathrm{Gal}(\bar{Q}_p/K_v)$-module fini contenu dans C.

Soit ord_p la valuation p-adique de Q normalisée par $\mathrm{ord}_p(p)=1$.

Théorème. *Soit K_∞/K une Z_p-extension vérifiant l'hypothèse suivante* (H) *Les places v de $M(K)$ ne sont pas totalement décomposées dans K_∞. Alors si $\hat{S}^t_U(K_\infty)$ et $\hat{S}^{2-t}_{U^*}(K_\infty)$ sont de Z_p $[[\Gamma]]$-torsion, on a*

$$\mu(L_2)-\mu(L_1) = \textstyle\sum_{v\mid\infty} \mathrm{ord}_p(\#(C(K_v))) - \sum_{v\in P(K)}[K_v : Q_p]\,\mathrm{ord}_p(\#(F^t_v C)).$$

Lorsque K_∞ est la Z_p-extension cyclotomique de K, l'hypothèse (H) est vérifiée puisque aucune place de K ne se décompose totalement dans K_∞.

2. Rappels sur les théorèmes de dualité

Nous allons rappeler dans ce paragraphe les théorèmes de dualité locale et de dualité globale de Poitou et Tate dont nous ferons usage ici.

2.1. Théorèmes de dualité locale

Soit r un nombre premier et soit L_v une extension finie de Q_r. Soit C un $\mathrm{Gal}(\bar{L}_v/L_v)$-module fini et C^* son $\mathrm{Gal}(\bar{L}_v/L_v)$-module dual, c'est-à-dire

$C^*=\mathrm{Hom}(C, \bar{L}_v^\times)$. On note $C(L_v)$ le sous-module des éléments de C invariants par $\mathrm{Gal}(\bar{L}_v/L_v)$. Alors, le cup-produit

$$H^i(L_v, C)\times H^{2-i}(L_v, C^*)\longrightarrow H^2(L_v, \bar{L}_v^\times)=\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$$

définit une dualité entre groupes finis. Les groupes $H^i(L_v, C)$ sont nuls pour $i\geqslant 3$. Enfin on a

$$\sum_{i=0}^2(-1)^i \operatorname{ord}_r(\#(H^i(L_v, C)))=-[L_v: \boldsymbol{Q}_r] \operatorname{ord}_r(\#(C))$$
$$\sum_{i=0}^2(-1)^i \operatorname{ord}_l(\#(H^i(L_v, C)))=0$$

pour l nombre premier différent de r (ici, ord_r est la valuation r-adique de $\boldsymbol{Q}$ normalisée par $\operatorname{ord}_r(r)=1$.

2.2. Théorèmes de dualité globale

Soit L un corps de nombres et soit C un $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/L)$-module fini et C^* son $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/L)$-module dual: $C^*=\mathrm{Hom}(C, \bar{\boldsymbol{Q}}^\times)$. On note $C(L)$ le sous-module des éléments de C invariants par $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/L)$. Soit T l'ensemble des places de L formé des places archimédiennes, des places divisant l'ordre de C et des places où le $\mathrm{Gal}(\bar{\boldsymbol{Q}}/L)$-module C est ramifié. Soit $\boldsymbol{Q}_T$ la plus grande extension de $\boldsymbol{Q}$ non ramifiée au dehors de T. Considérons les homomorphismes de localisation

$$\alpha_i: H^i(\boldsymbol{Q}_T/L, C)\longrightarrow \prod_{v\in T(L)} H^i(L_v, C)$$

et

$$\alpha_i^*: H^i(\boldsymbol{Q}_T/L, C^*)\longrightarrow \prod_{v\in T(L)} H^i(L_v, C^*).$$

Alors, $\ker \alpha_1$ et $\ker \alpha_2^*$ sont exactement en dualité. De plus, on a une suite exacte canonique

$$\begin{array}{c}
0\to H^0(\boldsymbol{Q}_T/L, C)\to \prod_{v\in T(L)} H^0(L_v, C)\to H^2(\boldsymbol{Q}_T/L, C^*)^\wedge\to H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, C) \\
\downarrow \\
\prod_{v\in T(L)} H^1(L_v, C) \\
\downarrow \\
0\leftarrow H^0(\boldsymbol{Q}_T/L, C)^\wedge\leftarrow \prod_{v\in T(L)} H^2(L_v, C)\leftarrow H^2(\boldsymbol{Q}_T/L, C)\leftarrow H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, C^*)^\wedge
\end{array}$$

où $^\wedge$ désigne le passage au dual de Pontryagin. Enfin, on a

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \operatorname{ord}_r(\#(H^i(\boldsymbol{Q}_T/L, C)))=\sum_{v|\infty} \operatorname{ord}_r(\#(C(L_v)) -[L: \boldsymbol{Q}] \operatorname{ord}_r(\#(C)).$$

3. Expression du μ-invariant comme une caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit toujours Q_T la plus grande extension de Q non ramifiée au dehors de T où T est l'ensemble fini de places associé à W. On a alors la suite exacte

$$0 \to H^1(Q_T/L, U) \to H^1(L, U) \to \prod_{v \notin T(L)} H^1(I_v(L), U).$$

On introduit d'autre part pour $i=0, 1, 2$ les homomorphismes

$$\gamma_i(L)\colon H^i(Q_T/L, U) \to \prod_{v \in M(L)} H^i(L_v, U) \prod_{v \in P(L)} H^i(L_v, U/F_v^t U).$$

Nous allons montrer que lorsque les $Z_p[[\Gamma]]$-modules $S_U^t(K_\infty)$ et $S_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$ sont de cotorsion, il en est de même des noyaux et conoyaux des $\gamma_i(K_\infty)$ et que l'on peut exprimer l'invariant μ de $S_U^t(K_\infty)$ comme une caractéristique d'Euler-Poincaré des invariants μ de ces noyaux et conoyaux.

Soit $\sum_U^t(L)$ le noyau de $\gamma_1(L)$. On a alors les suites exactes

$$(1) \qquad 0 \to \textstyle\sum_U^t(L) \to H^1(Q_T/L, U) \to \prod_{v \in M(L)} H^i(L_v, U) \prod_{v \in P(L)} H^1(L_v, U/F_v^t U)$$

et

$$(2) \qquad 0 \to \textstyle\sum_U^t(K_\infty) \to S_U^t(K_\infty) \to \prod_{v \in M(K_\infty)} H^1(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, U^{I_v(K_\infty)}) \times \prod_{v \in P(K_\infty)} H^1(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, (U/F_v^t U)^{I_v(K_\infty)}) \to \operatorname{coker} \gamma_1(K_\infty)$$

(la dernière suite exacte se déduit de la suite exacte inflation-restriction appliquée aux termes locaux).

Introduisons une hypothèse provisoire

(H′) Si v est une place de $P(K)$ totalement décomposée dans K_∞, $(U/F_v^t U)(K_v)$ est fini et $H^1(K_v^{nr}/K_v, (U/F_v^t U)(K_v^{nr}))=0$.

De nouveau, cette hypothèse est vérifiée lorsque K_∞ est la Z_p-extension cyclotomique de K ou lorsque la représentation W est la représentation p-adique associée à une variété abélienne A ayant bonne réduction ordinaire en toutes les places au dessus de p. Nous verrons un peu plus loin que l'hypothèse (H′) est nécessaire pour que les modules d'Iwasawa auxquels l'on s'intéresse soient de $Z_p[[\Gamma]]$-torsion. Aussi n'intervient-elle pas dans l'énoncé du théorème.

On étudie successivement les homomorphismes $\gamma_i(L)$ pour $i=0, 1, 2$. Commençons par l'étude la plus facile c'est-à-dire $i=0$. Sous les hypothèses (H) et (H′), les $Z_p[[\Gamma]]$-modules $H^0(Q_T/K_\infty, U)$ et

$$\prod_{v\in M(K_\infty)} H^0(K_{\infty,v}, U) \prod_{v\in P(K_\infty)} H^0(K_{\infty,v}, U/F_v^t U)$$

sont eux-même de $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-cotorsion et on a donc le lemme suivant.

Lemme 1. *Sous les hypothèses* (H) *et* (H′), *les* $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$*-modules* coker $\gamma_0(K_\infty)$ *et* ker $\gamma_0(K_\infty)$ *sont de cotorsion et on a*

$$\mu(\operatorname{coker}\gamma_0(K_\infty)) - \mu(\ker\gamma_0(K_\infty)) = \mu\left(\prod_{v\in P(K_\infty)} (U/F_v^t U)(K_{\infty,v})\right).$$

Passons maintenant à $i=1$.

Lemme 2. *Supposons que les* $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$*-modules* $S_U^t(K_\infty)$ *et* $S_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$ *sont de cotorsion.*

(i) *Alors,* coker $\gamma_1(K_\infty)$ *est un* $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$*-module de cotorsion dont le* μ*-invariant est nul.*

(ii) *L'hypothèse* (H′) *est vérifiée.*

(iii) *On a*

$$\mu(\operatorname{coker}\gamma_1(K_\infty)) - \mu(\ker\gamma_1(K_\infty)) = -\mu(S_U^t(K_\infty)) + \mu\left(\sum_{v\in P(K_\infty)} H^1(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, (U/F_v^t U)^{I_v(K_\infty)})\right).$$

La démonstration utilise plusieurs lemmes auxiliaires. On introduit d'abord quelques notations. Soient U_m le sous-groupe des éléments de U annulés par p^m et $\gamma_i(L)^{(m)}$ l'homomorphisme

$$H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, U_m) \longrightarrow \prod_{v\in M(L)} H^1(L_v, U_m) \prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, U_m/F_v^t U_m)$$

où $F_v^t U_m$ est l'image dans U de $p^{-m}L \cap F_v^t U$ (c'est aussi égal au sous-groupe des éléments de $F_v^t U$ annulés par p^m). Soit $\sum_U^t(L)^{(m)}$ le noyau de $\gamma_1(L)^{(m)}$. Notons $(\prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, U_m/F_v^t U_m))_0$ le noyau de l'application

$$\prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, U_m/F_v^t U_m) \longrightarrow \prod_{v\in P(L)} H^2(L_v, F_v^t U_m)$$

et $(\prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, F_v^{2-t} U_m^*))^0$ l'image de

$$\prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, F_v^{2-t} U_m^*) \longrightarrow \prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, U_m^*)$$

Lemme 3. *Soit L une extension finie de* $\boldsymbol{Q}$. *L'image de*

$$\gamma_i(L)^{(m)}: H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, U_m) \longrightarrow \prod_{v\in M(L)} H^1(L_v, U_m) \times \left(\prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, U_m/F_v^t U_m)\right)_0$$

est égale à l'orthogonal de l'image de

$$\xi_i(L)^{(m)}: \sum\nolimits_{U^*}^{2-t}(L)^{(m)} \longrightarrow \prod_{v\in M(L)} H^1(L_v, U_m^*) \times \left(\prod_{v\in P(L)} H^1(L_v, F_v^{2-t} U_m^*)\right)^0$$

Démonstration. Remarquons que les espaces d'arrivée des flèches considérées sont en dualité relativement à la somme d'accouplements locaux décrits dans le paragraphe 2.1 (pour $v \in P(L)$, cela vient de ce que les modules $U_m/F_v^t U_m$ et $F_v^{2-t} U_m^*$ sont en dualité). Montrons d'abord que les images de $\gamma_1(L)^{(m)}$ et de $\xi_1(L)^{(m)}$ sont orthogonales. Soit $x = \gamma_1(L)^{(m)}(X)$ avec $X \in H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, U_m)$ et $y = \xi_1(L)^{(m)}(Y)$ avec $Y \in \sum_{U^*}^{2-t}(L)^{(m)}$. On a alors

$$\sum\nolimits_{v \in T(L)} (x_v, y_v)_v = \sum\nolimits_{v \in T(L)} (X, Y)_v = \sum\nolimits_v (X, Y)_v = 0.$$

On montre ensuite que l'orthogonal de l'image de $\xi_1(L)^{(m)}$ est contenu dans l'image de $\gamma_1(L)^{(m)}$. De la définition de $\sum_{U^*}^{2-t}(L)^{(m)}$, on déduit que l'orthogonal de l'image de $\xi_1(L)^{(m)}$ est égal au noyau de l'application duale de

$$\gamma_1^*(L)^{(m)}\colon H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, U_m^*) \to \prod\nolimits_{v \in M(L)} H^1(L_v, U_m^*) \\ \times \prod\nolimits_{v \in P(L)} H^1(L_v, U_m^*/F_v^{2-t} U_m^*)$$

c'est-à-dire au noyau de

$$\prod\nolimits_{v \in M(L)} H^1(L_v, U_m) \prod\nolimits_{v \in P(L)} H^1(L_v, F_v^t U_m) \to H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, U_m^*)^\wedge.$$

On le calcule à l'aide des théorèmes de dualité globale. Il est contenu dans l'image de $H^1(\boldsymbol{Q}_T/L, U_m)$ par $\gamma_1(L)^{(m)}$, qui est ce que l'on cherchait à montrer.

Pour finir la démonstration du lemme 2, introduisons un nouveau module. Posons

$$\tilde{\sum}\nolimits_U^t(K_\infty) = \varprojlim_n \varprojlim_m \sum\nolimits_U^t (K_n)^{(m)}$$

où K_n est la sous-extension de K_∞/K de degré p^n. Les homomorphismes de transition sont les suivants. Les homomorphismes indexés par m sont induits par la multiplication par p de U_{m+1} dans U_m, ceux indexés par n sont induits par la corestriction (norme) de K_{n+1} à K_n.

Lemme 4 (que l'on appliquera à U^* et à 2-t). *Supposons que $\sum_U^t(K_\infty)$ est de cotorsion. Alors $\tilde{\sum}_U^t(K_\infty)$ est un $\boldsymbol{Z}_p$-module de type fini sans $\boldsymbol{Z}_p$-torsion.*

Montrons comment on déduit des lemmes 3 et 4 le lemme 2. Il s'agit d'abord de montrer que, si $\sum_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$ est de cotorsion, le conoyau de $\gamma_1(K_\infty)$ a un μ-invariant nul. Le lemme 4 affirme que le dual de coker $\gamma_1(K_n)^{(m)}$ est égal à l'image de $\sum_{U^*}^{2-t}(K_n)^{(m)}$ par $\xi_i(K_n)^{(m)}$. On en déduit que le dual de coker $\gamma_1(K_\infty)$ est isomorphe à l'image de $\tilde{\sum}_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$. D'où la partie (i) du lemme 2. Montrons (ii). On déduit de la suite exacte (2) que le $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-module

$$\prod_{v\in M(K_\infty)} H^1(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, U^{I_v(K_\infty)}) \prod_{v\in P(K_\infty)} H^1(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, (U/F_v^t U)^{I_v(K_\infty)})$$

est de cotorsion. Soit v une place de $P(K)$ totalement décomposée dans K_∞; si pour une place w de K_∞ au dessus de v, le $\boldsymbol{Z}_p$-module

$$H^1(K_{\infty,w}^{nr}/K_{\infty,w}, (U/F_v^t U)^{I_w(K_\infty)})$$

est infini, il en est de même de toute place au dessus de v et

$$\prod_{w\in P(K_\infty)} H^1(K_{\infty,w}^{nr}/K_{\infty,w}, (U/F_v^t U)^{I_w(K_\infty)})$$

n'est pas de cotorsion. Mais ce $\boldsymbol{Z}_p$-module est infini si et seulement si

$$(U/F_v^t U)^{G_w(K_\infty)}$$

est infini pour $w|v$, ce qui est équivalent à ce que $(U/F_v^t U)(K_v)$ soit infini. D'autre part, on remarque que $(U/F_v^t U)^{I_w(K_\infty)}$ est isomorphe en tant que $\boldsymbol{Z}_p$-module à un produit de $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$. On en déduit que lorsque

$$H^1(K_{\infty,w}^{nr}/K_{\infty,w}, (U/F_v^t U)^{I_w(K_\infty)})$$

est fini, il est nul. On en déduit (ii). La partie (iii) se déduit alors de la suite exacte (2).

Remarque. On peut démontrer de la même manière que si les $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $S_U^t(K_\infty)$ et $S_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$ sont de cotorsion, les places de $M(K)$ telles que $U^{G_v(K)}$ est infini ne se décomposent pas totalement dans K_∞

Démonstration du lemme 4. Soit M un $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-module compact de type fini. Posons

$$M_n = M_{\Gamma_n}$$

avec $\Gamma_n = \Gamma^{p^n} = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ et $\hat{M}$ son dual de Pontryagin. Notons encore $T_p(A)$ le module de Tate d'un $\boldsymbol{Z}_p$-module A, c'est-à-dire

$$T_p(A) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p}(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p, A).$$

On a alors le lemme facile à vérifier.

Lemme 5. *On a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]}(M, \boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]) = \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p}(M_n, \boldsymbol{Z}_p) = \varprojlim_n T_p(\hat{M}^{\Gamma_n}).$$

En particulier, si M est de $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-torsion, ces $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-modules sont nuls.

Pour montrer le lemme 4, nous allons maintenant relier

$$\varprojlim_n T_p(\sum_U^t (K_\infty)^{\Gamma_n}) \text{ avec } \tilde{\sum}_U^t (K_\infty).$$

En utilisant les suites exactes

$$0 \to U_m \to U \to U \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to U_m/F_v^t U_m \to U/F_v^t U \to U/F_v^t U \to 0$$

et les suites de cohomologie qui s'en déduisent, on voit que le noyau de l'homomorphisme naturel $\sum_U^t (K_n)^{(m)} \to \sum_U^t (K_n)_{p^m}$ est contenu dans $U(K_n)/p^m U(K_n)$. En particulier, le noyau de

$$\varprojlim_m \sum_U^t (K_n)^{(m)} \longrightarrow T_p(\sum_U^t (K_n))$$

est de type fini sur $\boldsymbol{Z}_p$ et de rang borné (puisque contenu dans $U(K_n)$).

Comparons maintenant $T_p(\sum_U^t (K_n))$ avec $T_p(\sum_U^t (K_\infty)^{\Gamma_n})$. De la suite exacte inflation-restriction, on déduit que le noyau de l'application de restriction $\sum_U^t (K_n) \to \sum_U^t (K_\infty)^{\Gamma_n}$ est contenu dans $H^1(\Gamma/\Gamma_n, U(K_n))$ qui est isomorphe à $U(K_n)_{\Gamma/\Gamma_n}$. Le noyau de

$$T_p(\sum_U^t (K_n)) \longrightarrow T_p(\sum_U^t (K_\infty)^{\Gamma_n})$$

est donc un $\boldsymbol{Z}_p$-module de type fini et de rang borné sans $\boldsymbol{Z}_p$-torsion (il est même nul dès que $U(K_\infty)$ est fini).

Par passage à la limite projective, on en déduit un homomorphisme de $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-modules compacts

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim_n \varprojlim_m \sum_U^t (K_n)^{(m)} & \longrightarrow & \varprojlim_n T_p(\sum_U^t (K_\infty)^{\Gamma_n}) \\
\| & & \| \\
\tilde{\sum}_U^t (K_\infty) & & \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]}(\hat{\sum}_U^t (K_\infty), \boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]])
\end{array}$$

dont le noyau est un $\boldsymbol{Z}_p$-module de type fini. L'hypothèse que $\hat{\sum}_U^t (K_\infty)$ est de $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-torsion implique que

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]}(\hat{\sum}_U^t (K_\infty), \boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]) = 0$$

et donc le lemme 4.

Passons à $i=2$.

Lemme 6. *Si les $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $S_U^t(K_\infty)$ et $S_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$ sont de cotorsion, il en est de même de* coker $\gamma_2(K_\infty)$ *et de* ker $\gamma_2(K_\infty)$ *et leurs μ-invariants sont nuls. On a donc*

$$\mu(\operatorname{coker} \gamma_2(K_\infty)) - \mu(\ker \gamma_2(K_\infty)) = 0.$$

Démonstration. On va ici comparer $\gamma_2(L)^{(m)}$ avec l'homomorphisme

$$\alpha_2(L)^{(m)}: H^2(\mathbf{Q}_T/L, U_m) \longrightarrow \prod_{v \in T(L)} H^2(L_v, U_m)$$

On vérifie facilement que l'on a une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} \alpha_2(L)^{(m)} \to \operatorname{Ker} \gamma_2(L)^{(m)} \to R_m(L) \\ \to \operatorname{coker} \alpha_2(L)^{(m)} \to \operatorname{coker} \gamma_2(L)^{(m)} \to 0,$$

où $R_m(L)$ est un quotient de $\prod_{v \in P(L)} H^2(L_v, F_v^t U_m)$ (on utilise ici la nullité de $H^3(L_v, F_v^t U_m)$ pour $v \in P(L)$). Par les théorèmes de dualité locale, le dual de $H^2(L_v, F_v^t U_m)$ est isomorphe à $H^0(L_v, U_m^*/F_v^{2-t} U_m^*)$, le dual du groupe fini $F_v^t U_m$ étant isomorphe à $U_m^*/F_v^{2-t} U_m^*$. Donc le dual de $\prod_{v \in P(K_\infty)} H^2(K_{\infty,v}, F_v^t U)$ est isomorphe à

$$\varprojlim_n \varprojlim_m \prod_{v \in P(K_n)} (U_m^*/F_v^{2-t} U_m^*)(K_{n,v}) = \varprojlim_n \prod_{v \in P(K_n)} T_p((U^*/F_v^{2-t} U^*)(K_{n,v}))$$

(on remarque que

$$U_m^*/F_v^{2-t} U_m^* = (U^*/F_v^{2-t} U^*)_{p^m}$$

car $F_v^{2-t} U^* \cap U_m^* = F_v^{2-t} U_m^*$). Donc, en utilisant l'hypothèse (H′) relative à U^* qui est vérifiée sous les hypothèses du lemme, on voit que $\varprojlim_n \varprojlim_m R_m(K_n)$ est nul. Les $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $\operatorname{Ker} \alpha_2(K_\infty)$ et $\operatorname{coker} \alpha_2(K_\infty)$ sont donc de cotorsion si et seulement si il en est de même de $\operatorname{Ker} \gamma_2(K_\infty)$ et de $\operatorname{coker} \gamma_2(K_\infty)$. D'autre part, $\operatorname{Ker} \alpha_2(K_n)^{(m)}$ et $\operatorname{Ker} \alpha_1^*(K_n)^{(m)}$ sont duaux. Donc $\operatorname{Ker} \alpha_2(K_\infty)$ est dual de

$$\varprojlim_n \varprojlim_m \operatorname{Ker} \alpha_1^*(K_n)^{(m)}$$

qui est un sous-$\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$-module de $\tilde{\sum}_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$. Son μ-invariant est nul. Quant à $\operatorname{coker} \alpha_2(K_n)^{(m)}$, son dual est isomorphe à $H^0(\mathbf{Q}_T/K_n, U_m^*)$. On en déduit que le dual de $\operatorname{coker} \alpha_2(K_\infty)$ est isomorphe à $\varprojlim_n T_p(U^*(K_n))$ dont le μ-invariant est nul.

On déduit des lemmes 1, 2 et 6 la proposition suivante.

Proposition 7. *Supposons que $S_U^t(K_\infty)$ et $S_{U^*}^{2-t}(K_\infty)$ sont des $\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$-modules de cotorsion. Alors, on a*

$$\mu(S_U^t(K_\infty)) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \mu(\operatorname{coker} \gamma_i(K_\infty)) - \sum_{i=0}^2 (-1)^i \mu(\operatorname{Ker} \gamma_i(K_\infty)) \\ - \mu\Big(\prod_{v \in P(K_\infty)} H^0(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, (U/F_v^t U)^{I_v(K_\infty)}\Big).$$

4. Variation du μ-invariant par isogenie

On démontre maintenant le théorème énoncé dans le paragraphe 1. De la suite exacte de $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/K)$

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_2 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où C est un groupe fini, on déduit la suite exacte de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}_T/K)$-modules

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow U_1 \longrightarrow U_2 \longrightarrow 0$$

et les suites exactes de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$-modules

$$0 \longrightarrow F_v^t C \longrightarrow F_v^t U_1 \longrightarrow F_v^t U_2 \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow C/F_v^t C \longrightarrow U_1/F_v^t U_1 \longrightarrow U_2/F_v^t U_2 \longrightarrow 0$$

où $U_i = W/L_i$. On a alors les suites exactes longues pour toute extension L de K

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to H^i(\boldsymbol{Q}_T/L, C) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{Q}_T/L, U_1) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{Q}_T/L, U_2) \to \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\prod_{v\in M(L)} H^i(L_v, C) & & \prod_{v\in M(L)} H^i(L_v, U_1) & & \prod_{v\in M(L)} H^i(L_v, U_2) \\
& \to & & \to & \\
\prod_{v\in P(L)} H^i(L_v, C/F_v^t C) & & \prod_{v\in P(L)} H^i(L_v, U_1/F_v^t U_1) & & \prod_{v\in P(L)} H^i(L_v, U_2/F_v^t U_2)
\end{array}$$

Les $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $H^i(\boldsymbol{Q}_T/K_\infty, C)$ et

$$\prod_{v\in M(K_\infty)} H^i(K_{\infty,v}, C) \prod_{v\in P(K_\infty)} H^i(K_{\infty,v}, C/F_v^t C)$$

sont de cotorsion. On déduit alors (sous l'hypothèse (H)) que

$$\begin{aligned}
\mu(S_{U_2}^t(K_\infty)) - \mu(S_{U_1}^t(K_\infty)) = \mu_{\text{global}} - \mu_{\text{local}} \\
- \mu\Big(\prod_{v\in P(K_\infty)} H^0(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, (U_2/F_v^t U_2)^{I_v(K_\infty)})\Big) \\
+ \mu\Big(\prod_{v\in P(K_\infty)} H^0(K_{\infty,v}^{nr}/K_{\infty,v}, (U_1/F_v^t U_2)^{I_v(K_\infty)})\Big)
\end{aligned}$$

avec

$$\mu_{\text{global}} = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \mu(H^i(\boldsymbol{Q}_T/K_\infty, C))$$

et

$$\mu_{\text{local}} = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \mu\Big(\prod_{v\in P(K_\infty)} H^i(K_{\infty,v}, C/F_v^t C)\Big).$$

On utilise alors le lemme.

Lemme 8. *Si M est un $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]]$-module compact de type fini de torsion tel qu'il existe un entier μ tel que*

$$\mathrm{ord}_p(\#(M_{\Gamma_n})) = \mu[K_n : K] + 0([K_n : K]),$$

alors, le μ-invariant de M est égal à μ.

Grâce à la suite inflation-restriction, on montre facilement que les $Z_p[[\Gamma]]$-modules

$$H^i(Q_T/K_\infty, C)^{\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)} \text{ et } H^i(Q_T/K, C)$$

sont isomorphes à un groupe fini d'ordre borné par rapport à n près de même que les $Z_p[[\Gamma]]$-modules

$$\prod_{v \in P(K_\infty)} H^i(G_v(K_\infty), C/F_v^t C)^{\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)} \text{ et } \prod_{v \in P(K_n)} H^i(G_v(K_n), C/F_v^t C).$$

Grâee aux formules de caractéristiques d'Euler-Poincaré locale et globale rappelées dans le paragraphe 2, on calcule μ_{global} et μ_{local}. On en déduit le théorème en remarquant que

$$\#(H^0(K_{n,v}^{nr}/K_{n,v}, (C/F_v^t C)^{I_v(K_n)})) = \#(H^1(K_{n,v}^{nr}/K_{n,v}, (C/F_v^t C)^{I_v(K_n)}))$$

et en utilisant la suite exacte longue de cohomologie pour $G(K_{n,v}^{nr}/K_{n,v})$ de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (C/F_v^t C)^{I_v(K_n)} \longrightarrow (U_1/F_v^t U_1)^{I_v(K_n)} \longrightarrow (U_2/F_v^t U_2)^{I_v(K_n)} \longrightarrow 0$$

(il n'y a que les dimensions 1 et 2 qui interviennent), ce qui implique la nullité du terme supplémentaire.

Bibliographie

[1] M. I. Bashmakov, The cohomology of abelian varieties over a number field, Russian Math. Surveys, **27** (1972), 25–70.

[2] R. Greenberg, Iwasawa theory and p-adic representations, ce volume.

[3] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques, théorie d'Iwasawa et points de Heegner; Appendice : Variation de la fonction L p-adique par isogénie, Bull. Soc. Math. France, **115** (1987), 399–456.

[4] P. Schneider, The μ-invariant of isogenies.

[5] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math. 5 (1964), Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New-York).

[6] J. Tate, Duality theorems in Galois cohomology over number fields, Proc. Int. Congress, Stockholm (1962), 288–295.

U.E.R. 48, L.M.F.
Tour 45–46, 3ième étage
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
F-75230 Paris Cedex 05
France
et
Unité associée au C.N.R.S. 752
Université de Paris-Sud
France