

## Certaines Représentations Monomiales d'un Groupe de Lie Résoluble Exponentiel

Hidénori Fujiwara et Shigeru Yamagami

*A Professeur N. Iwahori pour fêter ses soixante ans*

### Introduction

Cette étude est une suite de [11], où l'on a écrit d'une façon explicite la formule de Plancherel abstraite due à Penney [17] pour des représentations monomiales de multiplicités finies d'un groupe de Lie nilpotent. Ici on s'occupe de ce problème dans le cas exponentiel pour des représentations monomiales construites d'une polarisation réelle et s'intéresse en même temps à une propriété de réciprocity pour telles représentations.

Précisons nos objets à étudier. Soient  $G$  un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . En notant  $\exp$  l'application exponentielle, on écrira  $G = \exp \mathfrak{g}$ . On désigne par  $e$  l'élément neutre de  $G$ , par  $\Delta_G$  la fonction module de  $G$  et par  $\hat{G}$  le dual unitaire de  $G$ . Bien que chaque élément de  $\hat{G}$  soit une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles, on l'identifie avec sa représentante.

Pour une représentation unitaire  $\rho$  de  $G$ , on note  $\mathcal{H}_\rho$  son espace de Hilbert,  $\mathcal{H}_\rho^{+\infty}$  l'espace des vecteurs  $C^\infty$  muni de la topologie habituelle, et  $\mathcal{H}_\rho^{-\infty}$  son antidual (cf. [8], [18]). Etant donné un sous-groupe fermé  $K$  de  $G$  et son caractère  $c$ , nous posons

$$(\mathcal{H}_\rho^{-\infty})^{K,c} = \{a \in \mathcal{H}_\rho^{-\infty}; \rho(k)a = c(k)a, k \in K\}.$$

Soient  $H$  un sous-groupe fermé et  $\chi$  son caractère unitaire. On construit une représentation induite  $\tau = \text{ind}_H^G \chi$  dont la désintégration centrale canonique s'écrit

$$\tau = \int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi)$$

avec une mesure de Borel  $\nu$  sur  $\hat{G}$  et la fonction  $m(\pi)$  de multiplicités. Il vient que la forme antilinéaire  $\delta, : \mathcal{H}_\tau^{+\infty} \ni \phi \mapsto \overline{\phi(e)} \in \mathbb{C}$  définit un élément de

$(\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H, \lambda \Delta_H^3, \sigma}$ , où  $\Delta_{H, G} = \Delta_H / \Delta_G$ . Alors, conformément à la désintégration,  $\delta_\tau$  s'écrit

$$\delta_\tau = \int_{\hat{G}} \left( \sum_{k=1}^{m(\pi)} a_\pi^k \right) d\nu(\pi)$$

avec  $a_\pi^k \in (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H, \lambda \Delta_H^2, \sigma}$  (cf. [5], [17]).

Dans cette situation nous nous posons deux problèmes suivants. Premièrement vérifie-t-on une réciprocity, c'est-à-dire qu'on peut prendre  $\dim (\mathcal{H}_\tau^{-\infty})^{H, \lambda \Delta_H^2, \sigma}$  pour la multiplicité  $m(\pi)$ ? Deuxièmement nous aimerions expliciter les  $a_\pi^k$  ci-dessus. Comme premier abord à ces questions nous allons examiner dans la suite des représentations monomiales bien particulières.

Le dual de  $\mathfrak{g}$  se notant  $\mathfrak{g}^*$ ,  $G$  y opère par l'action coadjointe et  $\hat{G}$  se paramètre de l'espace des orbites  $\mathfrak{g}^*/G$  (cf. [4], [16]). Il s'ensuit qu'à  $\pi \in \hat{G}$  (resp.  $\Omega \in \mathfrak{g}^*/G$ ) s'associe  $\Omega(\pi) \in \mathfrak{g}^*/G$  (resp.  $\pi(\Omega) \in \hat{G}$ ). Etant donnée  $f \in \mathfrak{g}^*$ , on désigne par  $B_f$  la forme bilinéaire sur  $\mathfrak{g}$  définie par  $B_f(X, Y) = f([X, Y])$  et par  $\mathfrak{g}(f)$  le radical de  $B_f$ . Alors  $\mathfrak{g}(f)$  n'est autre que l'algèbre de Lie du stabilisateur  $G(f)$  de  $f$  dans  $G$ . Une sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  sera dite subordonnée à  $f \in \mathfrak{g}^*$  si  $B_f(X, Y) = 0$  pour tous  $X, Y$  dans  $\mathfrak{h}$ . Soient  $S(f, \mathfrak{g})$  l'ensemble des sous-algèbres subordonnées et  $M(f, \mathfrak{g})$  celui des polarisations réelles au point  $f \in \mathfrak{g}^*$ . On dit que  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  vérifie la condition de Pukanszky si  $H \cdot f = f + \mathfrak{h}^\perp$  où  $H = \exp \mathfrak{h}$  le sous-groupe analytique correspondant à  $\mathfrak{h}$  et où  $\mathfrak{h}^\perp$  signifie l'annihilateur de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}^*$ . On introduit l'ensemble  $I(f, \mathfrak{g})$  des  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  vérifiant la condition de Pukanszky. On sait qu'en général  $\emptyset \neq I(f, \mathfrak{g}) \subsetneq M(f, \mathfrak{g}) \subsetneq S(f, \mathfrak{g})$ .

Pour  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$  il se produit un caractère unitaire  $\chi_f$  de  $H = \exp \mathfrak{h}$  par  $\chi_f(\exp X) = e^{i f(X)}$  ( $X \in \mathfrak{h}, i = \sqrt{-1}$ ) et ensuite une représentation monomiale  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  de  $G$ . Pour que  $\tau$  soit irréductible, il faut et il suffit que  $\mathfrak{h}$  appartienne à  $I(f, \mathfrak{g})$  (pour tout ce qui précède, cf. [4]).

Dans ce qui suit nous allons étudier ces représentations monomiales  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  pour établir la réciprocity lorsque  $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$  (Théorème 1) et pour écrire une formule de Plancherel concrète lorsque  $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$  (Théorème 2).

### § 1. Préliminaires

Conservons les notations et notons, pour  $a \in \mathcal{H}_\tau^{\pm\infty}$  et  $b \in \mathcal{H}_\tau^{\mp\infty}$ ,  $\langle a, b \rangle$  l'image de  $b$  par  $a$ . Soit  $\tau = \text{ind}_H^G \chi$  avec un certain caractère unitaire  $\chi$  d'un sous-groupe fermé  $H$  de  $G$ . Soit  $\mathcal{D}(G)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $G$  à valeurs complexes et à support compact. Pour  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ , on fabrique, en faisant le choix d'une mesure de Haar à gauche  $dh$  sur  $H$ , un élément  $\phi_H^\chi$  de  $\mathcal{H}_\tau^{+\infty}$  par

$$\phi_H^*(g) = \int_H \phi(gh)\chi(h)\Delta_{G/H}^{-1/2}(h)dh \quad (g \in G)$$

et un opérateur  $\tau(\phi) = \int_G \phi(g)\tau(g) dg$  sous le choix d'une mesure de Haar à gauche sur  $G$ . On normalise la forme  $\nu_{G,H}$  positive  $G$ -invariante sur l'espace des fonctions numériques  $F$  sur  $G$  vérifiant  $F(gh) = \Delta_{H,G}(h)F(g)$  ( $h \in H, g \in G$ ) de telle sorte qu'on ait  $\nu_{G,H} = dg/\Delta_{H,G}^{-1}dh$ . Ecrivons

$$\nu_{G,H}(F) = \oint_{G/H} F(g)d\nu_{G,H}(g)$$

et définissons par cette  $\nu_{G,H}$  la norme dans  $\mathcal{H}_\tau$ .

Alors, pour  $\psi \in \mathcal{H}_\tau^{+\infty}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \tau(\phi)\delta_\tau, \psi \rangle &= \left\langle \int_G \phi(g)\tau(g)\delta_\tau dg, \psi \right\rangle = \left\langle \delta_\tau, \int_G \overline{\phi(g)}\tau(g^{-1})\psi dg \right\rangle \\ &= \int_G \phi(g)\overline{\psi(g)} dg = \oint_{G/H} d\nu_{G,H}(g) \int_H \phi(gh)\Delta_{H,G}^{-1}(h)\overline{\psi(gh)}dh \\ &= \oint_{G/H} \overline{\psi(g)}d\nu_{G,H}(g) \int_H \phi(gh)\chi(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh = \langle \phi_H^*, \psi \rangle. \end{aligned}$$

On a ainsi  $\tau(\phi)\delta_\tau = \phi_H^* \in \mathcal{H}_\tau^{+\infty}$  et par suite  $\langle \tau(\phi)\delta_\tau, \delta_\tau \rangle = \int_H \phi(h)\chi(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h)dh = \phi_H^*(e)$  quelle que soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ .

De ce qui précède la désintégration de  $\delta_\tau$  nous donne

$$\phi_H^*(e) = \int_G \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi)a_\pi^k, a_\pi^k \rangle d\nu(\pi).$$

C'est cette formule qu'on appelle la formule de Plancherel abstraite pour  $\tau$ .

Bornons-nous au cas où  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  avec  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ . D'après Vergne [21],  $\tau$  se décompose comme suit. On désigne par  $U(f, \mathfrak{h})$  l'ensemble des orbites coadjointes qui rencontrent le sous-espace affine  $f + \mathfrak{h}^\perp$  suivant un ouvert non vide de celui-ci. Il se trouve que  $U(f, \mathfrak{h})$  est un ensemble fini. Pour  $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$  les composantes connexes de  $\Omega \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ , dont chacune est une  $H$ -orbite, sont en nombre fini. Ce nombre sera noté  $c(\Omega, f, \mathfrak{h})$  ou plus tard  $m(\Omega)$  pour simplicité. Le résultat de Vergne dit que  $\tau$  se décompose en somme directe

$$\tau = \sum_{\Omega \in U(f, \mathfrak{h})} \oplus^{c(\Omega, f, \mathfrak{h})} \pi(\Omega).$$

Dans cette situation particulière, notre formule de Plancherel abstraite

pour  $\tau$  s'écrit, en notant  $\phi_H^f$  au lieu de  $\phi_H^{\lambda f}$ ,

$$\phi_H^f(e) = \sum_{\Omega \in U(f, \mathfrak{h})} \sum_{k=1}^{c(\Omega, f, \mathfrak{h})} \langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\pi}^k, a_{\pi}^k \rangle$$

pour toute  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ . Il s'agira plus loin d'expliciter ces  $a_{\pi}^k$  pour obtenir une formule de Plancherel concrète pour telles  $\tau$ .

Avant de cheminer dans une étude assez minutieuse, soient en général  $G$  un groupe de Lie dénombrable à l'infini,  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$  et  $\chi$  un caractère unitaire de  $H$ . On suppose que la représentation induite  $\tau = \text{ind}_H^G \chi$  se décompose en somme directe

$$\tau = \sum \oplus m_{\pi} \pi \quad (m_{\pi} : \text{multiplicité de } \pi),$$

et, pour un opérateur d'entrelacement  $R: \mathcal{H}_{\pi} \rightarrow \mathcal{H}_{\tau}$ , se donne  $a_R \in \mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$  par  $a_R(\phi) = \langle \delta_{\tau}, R(\phi) \rangle = \overline{R(\phi)(e)}$ ,  $\phi \in \mathcal{H}_{\pi}^{+\infty}$ . Un simple calcul montre que  $a_R \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \chi \Delta_{H,G}^{1/2}}$  et que l'application  $R \mapsto a_R$  est antilinéaire injective. D'où

$$\dim (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \chi \Delta_{H,G}^{1/2}} \geq m_{\pi}$$

(en tout cas, cf. [17]).

### § 2. Vecteurs semi-invariants généralisés

Commençons par établir une réciprocity due à Howe [15] dans le cas nilpotent.

**Théorème 1.** *Soient  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe résoluble exponentiel,  $f \in \mathfrak{g}^*$  et  $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ . Soit encore  $\pi \in \hat{G}$ . On a*

$$\dim (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{1/2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Omega(\pi) = G \cdot f, \\ 0 & \text{si } \Omega(\pi) \neq G \cdot f. \end{cases}$$

*Preuve.* En s'appuyant sur la méthode classique de récurrence, on se ramène au cas où il n'existe aucun idéal abélien non nul sur lequel  $f$  s'annule. Le centre de  $\mathfrak{g}$  sera noté  $\mathfrak{z}$  et  $\alpha$  désigne un idéal non central minimal, ce qui veut dire que  $\alpha$  est minimal parmi les idéaux non centraux.

On va examiner différents cas. Lorsqu'il s'agit d'un vecteur généralisé  $a \in \mathcal{H}_{\pi}^{-\infty}$  pour  $\pi \in \hat{G}$ , on réalisera, en prenant  $l \in \Omega(\pi)$  et  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$ ,  $\pi$  comme  $\text{ind}_{\mathfrak{b}}^G \chi_l$  avec  $B = \exp \mathfrak{b}$ , et regardera  $a$  comme distribution ou bien sur  $G$  donnée par  $\mathcal{D}(G) \ni \phi \mapsto \langle \phi|_{\mathfrak{b}}, a \rangle \in \mathbb{C}$  ou bien sur  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{b}$ , en se servant d'une base coexponentielle à  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

I.  $\mathfrak{g} \cap \alpha = \{0\}$ . Dans ce cas  $\alpha$  est un idéal minimal et par suite contenu dans  $\mathfrak{h}$  (cf. [4]). Il se divise en deux sous-cas.

(i)  $\dim \alpha = 1$ . Soit  $Y \in \alpha$  tel que  $f(Y) = 1$ . Prenons  $l \in \Omega(\pi)$  et posons  $\lambda = l(Y)$ . On réalise  $\pi$  en utilisant  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$ , qui contient toujours  $\alpha$ . Soit maintenant  $a \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \lambda, f, d_{H^2, \alpha}}$ . Puisqu'il existe  $X \in \mathfrak{g}$  tel que  $[X, Y] = Y$ , on convient d'introduire la première coordonnée dans l'espace de  $\pi$  au moyen du sous-groupe à un paramètre  $\exp \mathbf{R}X$ . Notons  $G_0$  le centralisateur de  $Y$  dans  $G$ .

La semi-invariance de  $a$  relative à  $h_t = \exp tY \in H(t \in \mathbf{R})$  entraîne

$$\langle a, (e^{-it} - e^{-i\lambda t e^{-s}})\phi(\exp sXg_0) \rangle = 0$$

pour toute  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}(s \in \mathbf{R}, g_0 \in G_0)$ . Il en résulte que la première coordonnée  $s$  du support de  $a$  doit vérifier  $e^s = \lambda$ , d'où  $\lambda > 0$  si  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \lambda, f, d_{H^2, \alpha}} \neq \{0\}$ . Quitte à remplacer  $l \in \Omega(\pi)$  au besoin, supposons que  $\lambda = 1$ . Par conséquent, il est imposé que  $s = 0$ . Puisque

$$\frac{d}{ds}(e^{-it} - e^{-ite^{-s}})|_{s=0} = -ite^{-it} \neq 0$$

pour  $t \neq 0$ , l'ordre transversal de  $a$  par rapport à  $G_0$  est nul (cf. [6]), ce qui nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à  $G_0$  car

$$\langle a, \phi \rangle = \langle a_0, \Delta_{G_0, G}^{-1/2}(\phi|_{G_0}) \rangle \text{ avec } a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H, \lambda, f, d_{H^2, \alpha_0}}, \pi_0 = \text{ind}_{G_0}^{G_0} \chi_l \in \hat{G}_0.$$

(ii)  $\dim \alpha = 2$ . On choisit des éléments  $Y_1, Y_2 \in \alpha$  et  $X \in \mathfrak{g}$  de manière que  $\alpha = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2$ ,  $[X, Y_1] = Y_1 + \alpha Y_2$ ,  $[X, Y_2] = Y_2 - \alpha Y_1$  ( $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$ ) et que  $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$  pour  $\mu_j = f(Y_j)$  ( $j = 1, 2$ ). Chaque élément  $g \in G$  s'exprime d'une façon unique sous la forme  $g = \exp sXg_0$  avec  $s \in \mathbf{R}$  et  $g_0$  appartenant au centralisateur  $G_0$  de  $\alpha$  dans  $G$ . On réalise  $\pi$  par l'intermédiaire de  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  à  $l \in \Omega(\pi)$ , et pose  $B = \exp \mathfrak{b}$ ,  $\lambda_j = l(Y_j)$  ( $j = 1, 2$ ). Comme  $\alpha$  est un idéal minimal,  $\alpha \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ , ce qu'on utilise pour calculer la semi-invariance de  $a \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \lambda, f, d_{H^2, \alpha}}$ .

Ceci donne, d'abord quant à  $\exp tY_1 \in B \cap H$  ( $t \in \mathbf{R}$ ),

$$\langle a, (e^{-it\mu_1} - e^{-it e^{-s}(\lambda_1 \cos s\alpha - \lambda_2 \sin s\alpha)})\phi(\exp sXg_0) \rangle = 0,$$

ensuite quant à  $\exp t'Y_2 \in B \cap H$  ( $t' \in \mathbf{R}$ ),

$$\langle a, (e^{-it'\mu_2} - e^{-it' e^{-s}(\lambda_1 \sin s\alpha + \lambda_2 \cos s\alpha)})\phi(\exp sXg_0) \rangle = 0$$

pour n'importe quel  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ . Il en résulte que, si  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \lambda, f, d_{H^2, \alpha}} \neq \{0\}$ , la première coordonnée  $s$  du support de  $a \neq 0$  satisfait aux égalités

$$\begin{cases} e^{-s}(\lambda_1 \cos \alpha s - \lambda_2 \sin \alpha s) = \mu_1, \\ e^{-s}(\lambda_1 \sin \alpha s + \lambda_2 \cos \alpha s) = \mu_2. \end{cases}$$

Cela signifie que  $l|\alpha, f|\alpha$  appartiennent au même  $G$ -orbite dans  $\alpha^*$ . Il vient, choisissant à nouveau  $l \in \Omega(\pi)$  vérifiant  $l|\alpha = f|\alpha$ , que  $s=0$ .

Pour que  $a$  admette des termes différentiels, il est nécessaire qu'on ait

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} (e^{-it\mu_1} - e^{-ite^{-s}(\lambda_1 \cos \alpha s - \lambda_2 \sin \alpha s)})|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} (e^{-it'\mu_2} - e^{-it'e^{-s}(\lambda_1 \sin \alpha s + \lambda_2 \cos \alpha s)})|_{s=0} = 0 \end{aligned}$$

pour tous  $t, t' \in \mathbf{R}$ . Ceci mène à  $\lambda_1 + \alpha\lambda_2 = \lambda_2 - \alpha\lambda_1 = 0$ , d'où vient une contradiction. On se ramène ainsi au sous-groupe  $G_0$  comme avant.

II.  $\dim \mathfrak{z} = 1$  et  $\mathfrak{z} \subset \alpha$ . Soit  $\mathfrak{z} = \mathbf{R}Z$  avec  $f(Z) = 1$ . Quitte à supposer que  $l(Z) = 1$  quelle que soit  $l \in \Omega(\pi)$ , sinon notre assertion serait triviale, on prend  $l \in \Omega(\pi)$  de sorte que  $l|\alpha = f|\alpha$ . On sépare deux cas.

(i)  $\dim \alpha = 2$ . Soient  $Y \in \ker f \cap \alpha = \ker l \cap \alpha, X \in \mathfrak{g}$  tels que  $[X, Y] = Z$ . On met à l'aide d'un sous-groupe à un paramètre  $\exp sX$  ( $s \in \mathbf{R}$ ) la première coordonnée dans l'espace de  $\pi$  et écrit  $g \in G$  sous la forme  $g = \exp sXg_0$  avec  $s \in \mathbf{R}, g_0 \in G_0 = \exp \alpha^f = \exp \alpha^t$  où, par exemple,  $\alpha^f$  désigne l'orthogonal de  $\alpha$  par rapport à  $B_f$ . Soit  $a \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, X, f, \Delta_{H, G}^{1/2}}$  et l'on réalise  $\pi$  au moyen de  $\mathfrak{h} \in I(l, \mathfrak{g})$  qui contient  $\alpha$ . Posons  $B = \exp \mathfrak{b}$  et  $\pi_0 = \text{ind}_B^{G_0} \chi_l \hat{G}_0$ .

1) En premier lieu, soit  $\alpha \subset \mathfrak{h}$ . La semi-invariance de  $a$  relative à  $h_t = \exp tY \in B \cap H$  nous fournit

$$\langle a, (1 - e^{ts})\phi(\exp sXg_0) \rangle = 0$$

quel que soit  $t \in \mathbf{R}$ . De façon analogue aux cas précédents, on en déduit que tout se ramène au sous-groupe  $G_0$ .

2) En deuxième lieu, soit  $\alpha \not\subset \mathfrak{h}$ . Il est possible de choisir  $X$  ci-dessus dans  $\mathfrak{h}$  (cf. [4]). Ceci fait, la semi-invariance de  $a$  relative à  $h_t = \exp tX \in H$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) entraîne qu'au moins pour  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$  à support compact modulo  $B$ ,

$$(1) \quad \langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp tX \cdot) \rangle \overline{\chi_f(\exp tX)} \Delta_{H, G}^{-1/2}(\exp tX) dt$$

avec certaine distribution  $a_0$  telle que  $\Delta_{G_0, G}^{1/2} a_0 \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ .

Voyons que  $\Delta_{G_0, G}^{1/2} a_0 \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H', X, f, \Delta_{H', G}^{1/2}, \sigma_0}$  où  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \alpha^f + \alpha \in I(f, \mathfrak{g})$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . En effet, si  $[\mathfrak{h}, \alpha] \subset \mathfrak{z}$ , on pose, pour  $t \in \mathbf{R}$  et  $h \in H \cap G_0$ ,  $\exp t \text{Ad}(h)X = \exp tXh(t)$  avec  $h(t) \in G_0 \cap \exp[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ . Alors de (1) découle

$$\langle \pi(h)a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp tXh(t)h \cdot) \overline{\chi_f(\exp tX)} \Delta_{H,G}^{-1/2}(\exp tX) dt.$$

En considérant  $\phi$  ayant la forme  $\phi(\exp tXg_0) = \Phi(t)\psi(g_0)\Delta_{G_0,G}^{1/2}(g_0)$  avec  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  et  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_0}^{+\infty}$ , on en déduit

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi(t) \overline{\chi_f(\exp tX)} \Delta_{H,G}^{-1/2}(\exp tX) \{ \chi_f(h)\Delta_{H,G}^{1/2}(h) \langle a_0, \Delta_{G_0,G}^{1/2}\psi \rangle - \langle a_0, (\Delta_{G_0,G}^{1/2}\psi)(h(t)hg_0) \rangle \} dt = 0.$$

$\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  étant arbitraire, on a

$$\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{1/2}(h) \langle a_0, \Delta_{G_0,G}^{1/2}\psi \rangle = \langle a_0, (\Delta_{G_0,G}^{1/2}\psi)(h(t)hg_0) \rangle$$

pour tout  $t \in \mathbf{R}$ . Car les deux membres dépendent continûment de  $t \in \mathbf{R}$ . En particulier cette égalité s'établit pour  $t=0$ . D'où

$$\pi_0(h)(\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0) = \chi_f(h)\Delta_{H,G}^{1/2}(h)\Delta_{G_0,G}^{-1/2}(h)(\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0)$$

pour  $h \in H \cap G_0$ . Comme  $\Delta_{H,G} = \Delta_{H',G}$  sur  $H \cap G_0$  et qu'il se voit facilement que  $\pi_0(h)a = \chi_f(h)a$  pour  $h \in A = \exp \alpha$ , on constate  $\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H', \chi_f \Delta_{H',G}^{1/2}, \sigma_0}$ .

Si  $[\mathfrak{h}, \alpha] \not\subseteq \mathfrak{g}$ , il existe  $T \in \mathfrak{h}$  tel que  $[T, Y] = Y$ . Remplaçant  $X$  par  $[X, T]$  au besoin,  $X$  se trouve dans  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ . Alors, la formula (1) devient

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp tX \cdot) \rangle dt.$$

Pour montrer que  $\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H', \chi_f \Delta_{H',G}^{1/2}, \sigma_0}$ , un pareil argument à celui fait plus haut s'applique comme suit. En posant, pour  $h_s = \exp sT \in H \cap G_0$  ( $s \in \mathbf{R}$ ),  $h_s \exp tX = \exp te^{-s}Xh(s, t)h_s$  avec  $h(s, t) \in G_0 \cap \exp [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ , on a

$$\langle \pi(h_s)a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp te^{-s}Xh(s, t)h_s \cdot) \rangle dt.$$

Par suite, pour  $\phi$  de la forme  $\phi(\exp tXg_0) = \Phi(t)\psi(g_0)\Delta_{G_0,G}^{1/2}(g_0)$ ,  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  et  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_0}^{+\infty}$ ,

$$\int_{\mathbf{R}} \overline{\Phi(t)} \{ \chi_f(h_s)\Delta_{H,G}^{1/2}(h_s) \langle a_0, \Delta_{G_0,G}^{1/2}\psi \rangle - e^s \langle a_0, (\Delta_{G_0,G}^{1/2}\psi)(h(s, e^s t)h_s g_0) \rangle \} dt = 0.$$

Il en découle  $\pi_0(h_s)(\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0) = \chi_f(h_s)e^{-s}\Delta_{H,G}^{1/2}(h_s)\Delta_{G_0,G}^{-1/2}(h_s)(\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0)$  et puis  $\pi_0(h_s)(\Delta_{G_0,G}^{1/2}a_0) = \chi_f(h_s)\Delta_{H',G_0}^{1/2}(h_s)a_0$  car  $\Delta_{H',G}^{1/2}(h') = \Delta_{H',G}^{1/2}(h')\Delta_{H_0,H}(h')$  pour tout  $h' \in H \cap G_0$ .

(ii)  $\dim \alpha = 3$ . On choisit  $Y_1, Y_2 \in \ker f \cap \alpha = \ker l \cap \alpha$  de sorte qu'on ait, pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$[X, Y_1] = \lambda(X)(Y_1 + \alpha Y_2) + \mu(X)Z, \quad [X, Y_2] = \lambda(X)(Y_2 - \alpha Y_1) + \xi(X)Z$$

( $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$ ), où  $\lambda, \mu, \xi$  sont des éléments linéairement indépendants dans  $\mathfrak{g}^*$  (cf. [20]). A l'aide de  $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$  tels que  $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z, g \in G$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $g = \exp s_1 X_1 \exp s_2 X_2 g_0$  avec  $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$  et  $g_0 \in G_0 = \exp \alpha^f = \exp \alpha^l$ . Soit  $a \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_H^{1/2}, \sigma}$  et, comme d'habitude, on réalise  $\pi$  au moyen de  $\mathfrak{h} \in I(l, \mathfrak{g})$  contenant  $\alpha$ . Soient  $B = \exp \mathfrak{h}, \pi_0 = \text{ind}_B^G \chi_l \in \hat{G}_0, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \alpha^f + \alpha \in I(f, \mathfrak{g})$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ .

1) Supposons  $\alpha \subset \mathfrak{h}$ . Un calcul simple mène, pour tous  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$  et  $\phi \in \mathcal{H}_{\pi}^{+\infty}$ , à  $\langle \pi(\exp(t_1 Y_1 + t_2 Y_2))a, \phi \rangle = \langle a, e^{i(t_1 s_1 + t_2 s_2)} \phi(g) \rangle (g = \exp s_1 X_1 \cdot \exp s_2 X_2 g_0)$ . La semi-invariance de  $a$  entraîne donc

$$\langle a, (1 - e^{i(t_1 s_1 + t_2 s_2)}) \phi(g) \rangle = 0$$

quels que soient  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$  et  $\phi \in \mathcal{H}_{\pi}^{+\infty}$ . Le raisonnement déjà fait à plusieurs reprises nous permet de descendre au sous-groupe  $G_0$ .

2) Supposons  $\dim \mathfrak{h} \cap \alpha = 2$ . Il est immédiat que  $[\mathfrak{h}, \alpha] = \mathfrak{z}$  est possible de prendre les  $Y_1, Y_2 \in \alpha, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$  ci-dessus de sorte que  $Y_1, X_2$  appartiennent à  $\mathfrak{h}$ . Ceci posé, une combinaison de deux type d'arguments précédents entraîne au moins pour  $\phi \in \mathcal{H}_{\pi}^{+\infty}$  à support compact modulo  $B$ ,

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp s_2 X_2 \cdot) \rangle \overline{\chi_f(\exp s_2 X_2) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_2 X_2)} ds_2$$

avec une certaine  $a_0$  vérifiant  $\Delta_{G_0, G}^{1/2} a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H', \chi_f \Delta_{H'}^{1/2}, \sigma_0}$ .

3) Supposons enfin  $\mathfrak{h} \cap \alpha = \mathfrak{z}$ . Il suffit de répéter, utilisant  $X_1, X_2$  ci-dessus choisis cette fois dans  $\mathfrak{h}$ , l'observation précédente pour obtenir

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} \langle a_0, \phi(\exp s_1 X_1 \exp s_2 X_2 \cdot) \rangle \overline{\chi_f(\exp s_1 X_1 \exp s_2 X_2) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_1 X_1 \exp s_2 X_2)} ds_1 ds_2$$

sur certain sous-espace dense de  $\mathcal{H}_{\pi}^{+\infty}$ . Là  $a_0$  est une certaine distribution telle que  $\Delta_{G_0, G}^{1/2} a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H', \chi_f \Delta_{H'}^{1/2}, \sigma_0}$ . c.q.f.d.

**Corollaire 1.** *On reprend les notations du théorème 1, et forme  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$ . Alors  $(\mathcal{H}_{\tau}^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_H^{1/2}, \sigma} = C \delta_{\tau}$ , où  $\delta_{\tau}: \mathcal{H}_{\tau}^{+\infty} \ni \phi \mapsto \overline{\phi(e)} \in \mathbf{C}$ .*

**Corollaire 2.** *Soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe résoluble exponentiel et soit  $f \in \mathfrak{g}^*$ . Il existe  $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$  possédant les propriétés suivantes. Pour  $\mathfrak{h} \in$*



$I(f, \mathfrak{g})$  quelconque, l'image de produit  $HB$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$  et  $B = \exp \mathfrak{b}$ , est un fermé de  $G$ . Un opérateur d'entrelacement  $R$  entre  $\pi = \text{ind}_B^G \lambda_f$  et  $\tau = \text{ind}_H^G \lambda_f$  se révèle sous la forme

$$(R\phi)(g) = \int_{H/H \cap B} \phi(gh) \lambda_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B}(h) \quad (g \in G)$$

au moins pour  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$  à support compact modulo  $B$ . En d'autres termes,  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \lambda_f \Delta_{H,G}^{1/2}} = Ca$  où  $a$  s'exprime, au moins pour telles  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ ,

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{H/H \cap B} \overline{\phi(h) \lambda_f(h)} \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B}(h).$$

Si l'on considère  $a$  come distribution sur  $G$  donnée par  $\mathcal{D}(G) \ni \psi \mapsto \langle \psi_B^f, a \rangle \in \mathbb{C}$ , son support est égale à la double classe fermée  $HB$  ou encore à  $\{g \in G; g \cdot (f + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset\}$  (cf. [12]).

*Preuve* (cf. [4], [10]). On rapelle le raisonnement dans la preuve du théorème 1. Si par exemple,  $\mathfrak{h}$  ne contient pas  $\alpha$ , l'idéal non-central minimal, on pose comme d'habitude  $\mathfrak{g}_0 = \alpha'$ ,  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ,  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \alpha$ ,  $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ ,  $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ .  $j$  désignant le noyau de la représentation adjointe de  $\mathfrak{h}$  dans  $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ , on sait que  $\mathfrak{h} = j + \mathfrak{h}_0$ . Soit  $\mathcal{T}$  un supplémentaire de  $\mathfrak{h}_0$  dans  $\mathfrak{h}$  contenu dans  $j$ .

L'existence de  $\mathfrak{b} \in I(f, \mathfrak{g}_0)$  ayant les propriétés de l'énoncé au niveau du sous-group  $G_0$ , ce qui est assuré par hypothèse de récurrence, implique d'abord que  $HB$  est fermé dans  $G$ , car une base de  $\mathcal{T}$  fait partie d'une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_0$  dans  $\mathfrak{g}$ .

Par ailleurs, d'après ce qu'on a vu dans la démonstration du théorème,

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathcal{T}} \langle a_0, \phi(\exp X \cdot) \rangle \overline{\lambda_f(\exp X)} \Delta_{H,G}^{-1/2}(\exp X) dX,$$

où  $\Delta_{G_0,G}^{1/2} a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H, \lambda_f \Delta_{H,G}^{1/2}}$ ,  $\pi_0 = \text{ind}_{B'}^{G_0} \lambda_{f'}$  et où  $dX$  désigne une mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{T}$ . L'hypothèse de récurrence nous mène à

$$\begin{aligned} \langle a_0, \phi(\exp X \cdot) \rangle &= \int_{H'/H' \cap B} \Delta_{G_0,G}^{-1/2}(h') \overline{\phi(\exp X h') \lambda_{f'}(h')} \Delta_{H',G_0}^{-1/2}(h') d\nu_{H', H' \cap B}(h') \\ &= \int_{H_0/H \cap B} \overline{\phi(\exp X h') \lambda_{f'}(h')} \Delta_{H',G}^{-1/2}(h') d\nu_{H_0, H \cap B}(h'). \end{aligned}$$

Compte tenu de la transitivité des formes  $\nu \dots$ , on en prouve

$$\begin{aligned} \langle a, \phi \rangle &= \int_{\mathcal{T}} \overline{\lambda_f(\exp X)} \Delta_{H,G}^{-1/2}(\exp X) dX \\ &\quad \times \int_{H_0/H \cap B} \overline{\phi(\exp X h') \lambda_{f'}(h')} \Delta_{H',G}^{-1/2}(h') d\nu_{H_0, H \cap B}(h') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \oint_{H/H_0} d\nu_{H, H_0}(h) \oint_{H_0/H \cap B} \overline{\phi(hh')\chi_f(hh')} \Delta_{H, G}^{-1/2}(hh') \Delta_{H_0, H}^{-1}(h') d\nu_{H_0, H \cap B}(h') \\
 &= \oint_{H/H \cap B} \overline{\phi(h)\chi_f(h)} \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B}(h)
 \end{aligned}$$

puisque  $\Delta_{H, G}^{-1/2}(h') = \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \Delta_{H_0, H}(h')$  pour tout  $h' \in H_0$ . c.q.f.d.

Dans toute la suite  $G$  désignera, sauf mention contraire, un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On se donne  $f \in \mathfrak{g}^*$  et  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ . Soient  $H = \exp \mathfrak{h}$  et  $\chi_f(\exp X) = e^{i f(X)} (X \in \mathfrak{h})$  comme avant. La désintégration central canonique de  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  se notant

$$\tau = \int_{\hat{\mathfrak{g}}}^{\oplus} m(\pi) \pi d\nu(\pi),$$

on examine maintenant notre question de réciprocity dans des cas bien particuliers. Evidemment on peut suppose que  $\mathfrak{h}$  contienne le centre de  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $a \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f} \Delta_{H, G}^{1/2}$ . Comme précédemment, on réalise  $\pi$  moyennant  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  à  $l \in \Omega(\pi)$  et regarde  $a$  comme distribution sur  $G$  définie par  $\mathcal{D}(G) \ni \phi \mapsto \langle \phi'_B, a \rangle \in \mathbb{C}$  où  $B = \exp \mathfrak{b}$ .

Lorsque  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ , le raisonnement fait dans la preuve du théorème 1 montre, l'idéal non central minimal utilisé là étant pris dans  $\mathfrak{h}$ , que le support de  $a$  est inclu dans l'adhérence de l'ensemble  $\{g \in G: g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset\}$  et que  $m(\pi) = \dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$ , qui est en fait égale uniformément ou bien à 1 ou bien à l'infini (cf. [13], [19]).

D'ailleurs, quand  $m(\pi) = 1$   $\nu$ -presque partout, pour construire  $\pi \in \hat{G}$  intervenant à la désintégration de  $\tau$  on peut utiliser  $l \in \Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$  (cf. ibid. ou [7]) et  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  contenant  $\mathfrak{h}$ . D'où  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l) = \mathfrak{h}^l = \mathfrak{h}^f$  (cf. ibid. et [11]), qui ne dépend pas de  $l$ , et que  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f} = \mathcal{C}\delta_\pi$ . On obtient donc, pour  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ ,

$$\langle \pi(\phi) \delta_\pi, \delta_\pi \rangle = \int_{B/H} \phi'_H(b) \chi_f(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db$$

avec une mesure invariante  $db$  sur l'espace homogène  $B/H$ . La mesure  $\nu$  étant équivalente à la mesure de Lebesgue  $\hat{\nu}$  sur l'espace quotient  $f + \mathfrak{h}^\perp / B \cong \mathfrak{h}^\perp / \mathfrak{b}^\perp \cong (\mathfrak{b}/\mathfrak{h})^*$  (cf. [13]), notre formule de Plancherel s'interprète comme celle pour  $\mathbb{R}^n$ . En effet, elle redevient

$$\begin{aligned}
 \phi'_H(e) &= \int_{\hat{\mathfrak{g}}} d\nu(\pi) \int_{B/H} \phi'_H(b) \chi_f(b) \Delta_{B, G}^{-1/2}(b) db \\
 &= \int_{(\mathfrak{b}/\mathfrak{h})^*} d\hat{\nu}(l) \int_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}} \phi'_H(\exp X) e^{i l(X)} e^{-(1/2) \text{tr} \text{ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}} X} j_{B/H}(X) dX,
 \end{aligned}$$

où  $j_{B/H}(X) = \left| \det \frac{1 - e^{-ad_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}}X}}{ad_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}}X} \right|$  et où  $dX$  désigne une mesure de Lebesgue.

Gardons les notations et supposons maintenant que  $\mathfrak{b}$  soit un idéal, mais  $\mathfrak{h}$  ne l'est plus. Quand il existe une telle  $\mathfrak{b}$ , on dira que  $\pi$  admet une polarisation distinguée. Dans ce cas il est immédiat que le support de  $a$ , noté  $\text{supp } a$ , est contenu dans l'ensemble des éléments  $g \in G$  vérifiant, quel que soit  $h \in H \cap B$ ,  $\chi_f(h)\Delta_{H,G}^{-1/2}(h) = \chi_{g \cdot l}(h)$ . Affaiblissant cette dernière condition,  $f - g \cdot l \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b})^\perp = \mathfrak{h}^\perp + \mathfrak{b}^\perp$  et par suite  $g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$  puisque  $\mathfrak{b}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ . Le support de  $a$  se trouve ainsi contenu dans l'adhérence de  $\{g \in G; g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset\}$ .

Si l'on présume de plus que  $G$  soit nilpotent, on en prouve que  $m(\pi) = \dim(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, X_f}$ . Pour cela il suffit de traiter le cas où  $m(\pi) < +\infty$   $\nu$ -presque partout. Ceci posé, l'ensemble  $\{g \in G; g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset\}$  est la réunion disjointe des double classes fermées  $Hg_k B$  ( $1 \leq k \leq m(\pi)$ ) (cf. [9], [11]). Prend  $l$  de sorte que  $l \in \Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ , ce qui nous permet de poser, par exemple,  $g_1 = e$ . Choisissons dans  $\mathfrak{g}$  une base supplémentaire  $\{X_1, \dots, X_n\}$  au sous-algèbre  $\mathfrak{h} + \mathfrak{b}$  de manière que  $\mathfrak{g}_k = \sum_{j=k}^n \mathbb{R}X_j \oplus (\mathfrak{h} + \mathfrak{b})$  ( $1 \leq k \leq n$ ) soient des sous-algèbres de  $\mathfrak{g}$ , et formons des coordonnées dans l'espace de  $\pi$  par la correspondance

$$G \ni g = \left( \prod_{j=1}^n \exp x_j X_j \right) h' \mapsto (x_1, \dots, x_n, h') \in \mathbb{R}^n \times HB.$$

Supposons  $\text{supp } a$  égale au sous-groupe fermé  $HB$ , et écrivons  $a$  au voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$  sous la forme

$$a = \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} D_{k_1 \dots k_n}$$

où  $D_{k_1 \dots k_n}$  sont des distributions sur  $HB$ . Mettant un ordre lexicographique parmi les dérivées

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} D_{k_1 \dots k_n},$$

à savoir

$$\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} D_{k_1 \dots k_n} > \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} D_{j_1 \dots j_n}$$

lorsque  $k_1 = j_1, \dots, k_i = j_i, k_{i+1} > j_{i+1}$  pour un certain indice  $i$ , soit

$$\frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} D_{m_1 \dots m_n}$$

le terme dominant de  $a$ .

Puisque  $\mathfrak{b}$  soit un idéal de  $\mathfrak{g}$ , la semi-invariance de  $a$  pour  $h \in H \cap B$  donne  $\langle a, (\chi_f(h) - \chi_{g \cdot l}(h))\phi(g) \rangle = 0$  ( $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ ). C'est-à-dire

$$(2) \quad \langle a, (e^{-if(X)} - e^{-ig \cdot l(X)})\phi(g) \rangle = 0$$

pour  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$  quelconque.

Supposant  $m_n \geq 1$ . En récrivant (2) pour  $\phi$  de la forme  $\phi(g) = (\prod_{j=1}^n \psi_j(x_j))\psi(h')$ , où  $\psi$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $HB$  et où  $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  vérifiant

$$\frac{d^k \psi_j}{dx_j^k}(0) = \delta_{k, m_j} \quad (1 \leq j \leq n-1, 0 \leq k \leq m_j),$$

$$\frac{d^k \psi_n}{dx_n^k}(0) = \delta_{k, m_n-1} \quad (0 \leq k \leq m_n),$$

on en déduit que  $l([X_n, X]) \langle D_{m_1 \dots m_n}, \psi \rangle = 0$ .

D'autre part la finitude de multiplicités dans  $\tau$  implique que  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l)$  (cf. [11]) et par suite que la forme bilinéaire  $B_l$  met en dualité  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$  et l'espace vectoriel engendré par  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Il existe donc  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$  tel que  $l([X_n, X]) \neq 0$ , d'où  $D_{m_1 \dots m_n} = 0$ , ce qui est absurde. En conséquence  $m_n = 0$ .

Ensuite soit

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial^{m_1 \dots + m_{n-1}}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_{n-1}^{m_{n-1}}} D_{m_1 \dots m_{n-1} 0} \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{\partial^{m_1 \dots + m_{n-1} - 1 + k}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_{n-2}^{m_{n-2}} \partial x_{n-1}^{m_{n-1}-1} \partial x_n^k} D_{m_1 \dots m_{n-2} m_{n-1} - 1 k} \\ &+ (\text{des termes plus petits}). \end{aligned}$$

Supposons  $m_{n-1} \geq 1$  et  $m \geq 1$ . En récrivant (2) pour  $\phi$  ayant la même forme qu'avant, mais cette fois  $\psi_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , vérifient

$$\begin{aligned} \frac{d^k \psi_j}{dx_j^k}(0) &= \delta_{k, m_j} \quad (1 \leq j \leq n-2, 0 \leq k \leq m_j), \\ \frac{d^k \psi_{n-1}}{dx_{n-1}^k}(0) &= \delta_{k, m_{n-1}-1} \quad (0 \leq k \leq m_{n-1}), \\ (3) \quad \frac{d^k \psi_n}{dx_n^k}(0) &= \delta_{k, m-1} \quad (0 \leq k \leq m), \end{aligned}$$

on obtient

$$l([X_{n-1}, X]) \langle D_{m_1, \dots, m_{n-1}}, \psi \rangle \delta_{m,1} + l([X_n, X]) \langle D_{m_1, \dots, m_{n-1}m}, \psi \rangle = 0$$

pour tout  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ . On en tire une contradiction comme précédemment. Donc  $m=0$  si  $m_{n-1} \geq 1$ . Ceci étant, remplaçant (3) par  $\psi_n(0)=1$ , on déduit de (2) que  $l([X_n, X]) \langle D_{m_1, \dots, m_{n-1}}, \psi \rangle = 0$  pour tout  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ , ce qui mène aussi à une contradiction. On arrive ainsi à  $m_{n-1}=0$ .

En se servant totalement de la dualité on répète ce procédé pour finir par se convaincre que  $a$  est une distributrice sur  $HB$ .

Il est facile de voir que les  $\pi \in \hat{G}$  admettant une polarisation distinguée constituent un ensemble borélien, sur lequel  $m(\pi) = \dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$  d'après ce qu'on vient de constater. En résumé:

**Proposition 1.** *Si  $\mathfrak{h}$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$ ,  $m(\pi) = \dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$   $\nu$ -presque partout.*

**Proposition 2.** *Supposons  $G$  nilpotent. On a  $m(\pi) = \dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f}$   $\nu$ -presque partout sur la partie borélienne composée par  $\pi$  admettant une polarisation distinguée.*

Conservons les notations:  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$ ,  $\chi_f: H \rightarrow \mathbf{T}$  défini par  $\chi_f(\exp X) = e^{i f(X)}$  ( $X \in \mathfrak{h}$ ) et  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$ . Soit  $c: H \rightarrow \mathbf{R}_+$  un caractère réel de  $H$  et soit  $\pi \in \hat{G}$ . Lorsque  $\mathfrak{h}$  n'est plus un idéal de  $\mathfrak{g}$  et que  $\pi$  n'admet plus de polarisation distinguée, en bref dans le cas général, nous ne savons pas comment manipuler l'espace  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f c}$ .

Supposons ici à contre-cœur que ce dernier soit de dimension finie et proposons-nous de montrer que non annulation de  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f c}$  entraîne  $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$ . La démonstration se fait par récurrence sur  $\dim G$  en faisant usage des raisonnements dans la preuve du théorème 1. Dans ce qui suit  $\mathfrak{z}$  désignera le centre de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{a}$  un idéal non central minimal. Soit  $a$  un élément non nul dans  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f c}$ . Expliquons un argument dont on aura besoin.

Par exemple si  $G$  est nilpotent, tout se ramène facilement au cas où  $\dim \mathfrak{z} = 1$  et où  $f$  et  $l \in \Omega(\pi)$  ont la même restriction non nulle sur  $\mathfrak{z}$ . Prenons un triplet de Heisenberg  $(X, Y, Z)$  tel que  $\mathfrak{z} = \mathbf{R}Z$ ,  $[X, Y] = Z$ ,  $f(Z) = l(Z) = 1$ ,  $l(Y) = 0$  et que  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}X + \mathfrak{g}_0$  avec  $\mathfrak{g}_0 = \{U \in \mathfrak{g}; [U, Y] = 0\}$ . Posons  $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ . Dans le cas crucial  $\mathfrak{h}$  est contenue dans  $\mathfrak{g}_0$  et ne contient pas  $Y$ . Ceci posé, on fabrique  $\pi$  en choisissant  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{g}_0$ ;  $\pi = \text{ind}_B^G \chi_\nu$ ,  $B = \exp \mathfrak{b}$ , et met la première coordonnée dans l'espace de  $\pi$  par un sous-groupe à un paramètre  $\exp tX$  ( $t \in \mathbf{R}$ ).

Vu que  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ ,  $\pi(\exp sY)a = e^{-ist}a$  ( $s \in \mathbf{R}$ ) appartient à  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f c}$ , d'où le sont aussi  $t^k a$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Compte tenu de l'hypothèse que

l'espace en question est de dimension finie, il existe un polynôme  $P(t)$  tel que  $P(t)a=0$ . Par conséquent les premières coordonnées de  $\text{supp } a$  satisfont à l'égalité  $P(t)=0$  et sont donc discrètes. S'il s'agit d'un voisinage de  $t=\alpha$ , on développe  $a$ :

$$a = \sum_{k=0}^m \frac{\partial^k}{\partial t^k} D_k|_{t=\alpha},$$

$D_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) étant distribution sur la sous-variété fermée  $\exp \alpha X G_0$ . D'après ce qu'on a vu plus haut, quelle que soit  $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ,

$$\Phi a = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} \phi^{(l)}(\alpha) \left( \frac{\partial^{k-l}}{\partial t^{k-l}} D_k \right) |_{t=\alpha} \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \chi, f, c},$$

où l'on a convenu de noter  $\Phi^{(l)}$  la  $l$ -ième dérivée de  $\Phi$ . Pour  $\Phi$  prenons  $\Phi_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ) vérifiant  $\Phi_j^{(k)}(\alpha) = \delta_{k,j}$ , ce qui nous donne

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{m-j} \frac{\partial^k}{\partial t^k} D_{k+j} |_{t=\alpha} \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \chi, f, c} \quad (0 \leq j \leq m).$$

En faisant  $j=m$  dans (4) et en regardant  $D_m$  comme distribution sur  $G_0$ , on conclut que  $D_m \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H', \chi, f', c'}$ , où  $\mathfrak{h}' = \exp -\alpha X \cdot \mathfrak{h}$ ,  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ ,  $f' = \exp -\alpha X \cdot f$ ,  $c': H' \rightarrow \mathbf{R}_+$  donné par  $c'(h') = c(\exp \alpha X h' \exp -\alpha X)$  et où  $\pi_0 = \text{ind}_{\mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}_0} \chi_l \in \hat{G}_0$ .

Pour qu'il existe une telle  $D_m \neq 0$ , l'hypothèse de récurrence assure que la  $G_0$ -orbite associée à  $\pi_0$  rencontre le sous-espace affine  $f'_0 + \mathfrak{h}'^{\perp, \mathfrak{g}_0^*}$  dans  $\mathfrak{g}_0^*$ , là évidemment  $f'_0 = f'|_{\mathfrak{g}_0} \in \mathfrak{g}_0^*$ ,  $\mathfrak{h}'^{\perp, \mathfrak{g}_0^*} = \{l_0 \in \mathfrak{g}_0^* : l_0 | \mathfrak{h}' \equiv 0\}$ . Cela veut dire qu'il existe  $g_0 \in G_0$  tel que  $(g_0 \cdot l) | \mathfrak{h}' = f' | \mathfrak{h}'$ , c'est-à-dire  $(\exp \alpha X \cdot g_0 \cdot l) | \mathfrak{h} = f | \mathfrak{h}$  ou encore  $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^{\perp}) \neq \emptyset$ .

Passons maintenant au cas exponentiel. Nous abstenons de répéter nettement une longue discussion fastidieuse de récurrence suivant un schéma bien classique et nous contenterons de manipuler des cas plus ou moins essentiels. Soit  $f|_{\mathfrak{g}} \neq 0$ .

I. Cas où  $\dim \mathfrak{g} = 1$ ,  $\dim \alpha = 3$  et  $\mathfrak{g} \subset \alpha$ . Soient  $l \in \Omega(\pi)$  et  $A' = \exp \alpha'$ . Il faut commenter le cas où  $\alpha' \neq \mathfrak{g}$  et  $[\mathfrak{h}, \alpha] \not\subset \mathfrak{g}$ . On prend des éléments  $Z$  dans  $\mathfrak{g}$ ,  $Y_1, Y_2$  dans  $\alpha$ ,  $X$  dans  $\mathfrak{h}$  et  $T_1, T_2$  dans  $\mathfrak{g}$  de sorte que  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}Z$ ,  $\alpha = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2 \oplus \mathfrak{g}$ ,  $f(Z) = l(Z) = 1$ ,  $[X, Y_1] = Y_1 + \alpha Y_2$ ,  $[X, Y_2] = Y_2 - \alpha Y_1$  ( $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$ ) et que  $[T_i, Y_j] = \delta_{i,j} Z$  ( $i, j = 1, 2$ ). On note  $g_0$  le centralisateur de  $\alpha$  dans  $\mathfrak{g}$ . Si  $\alpha \subset \mathfrak{h}$  ou s'il est possible de choisir  $\mathfrak{h} \in I(l, \mathfrak{g})$  dans  $\mathfrak{g}_0$ , on est en mesure de procéder comme avant, en écrivant la semi-invariance de  $a$  relative à  $A = \exp \alpha \subset H$  ou en mettant la première coordonnée dans l'espace de  $\pi$  moyennant un sous-groupe à un paramètre  $\exp \mathbf{R}X$  appartenant à  $H$ .

S'il n'en est pas ainsi, on voit  $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}_0$  et il ne suffira pas d'appliquer les raisonnements déjà cités seulement si  $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = 1$ . Tout supposé, prenons  $l \in \Omega(\pi)$  de façon que  $l(Y_1) \neq 0$  et  $l(Y_2) = 0$ , plus précisément,  $l|\alpha = Y_1^* + Z^* \in \alpha^*$  par exemple, et réalisons  $\pi$  au moyen de  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  contenant  $\alpha$ ;  $\pi = \text{ind}_B^\alpha \chi_l$ ,  $B = \exp \mathfrak{b}$ .

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$ , on considère un ouvert  $Q$ ,  $H$ -invariant à gauche, de la forme  $\exp \mathbf{R}X \exp IT_2 A^l$  tel que tout  $g \in Q$  s'exprime d'une manière unique sous la forme  $g = \exp tX \exp sT_2 g'$  avec  $t \in \mathbf{R}$ ,  $s \in I$  et  $g' \in A^l$ . Soit  $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  telle que  $\text{supp } \theta \subset I$ , et posons

$$\rho(g) = \begin{cases} \theta(s) & \text{si } g = \exp tX \exp sT_2 g' \in Q \ (t \in \mathbf{R}, s \in I, g' \in A^l), \\ 0 & \text{si } g \notin Q. \end{cases}$$

On voit alors que  $\rho \in C^\infty(G)$  est  $H$ -invariante à gauche et  $B$ -invariante à droite. En outre  $\text{supp } \rho \subset Q$  et  $\rho \alpha \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi, f, c}$ .

On pose  $l_0 = l|\alpha \in \alpha^*$  et note  $\{Y_1^*, Y_2^*, Z^*\}$  la base duale de  $\alpha^*$ . Puisque dans  $\alpha^*$  l'orbite passant  $l_0$  sous l'action de  $\exp \mathbf{R}X$  et la droite  $l_0 + \mathbf{R}Y_2^*$  se croisent transversalement au point  $l_0$ , on peut recouvrir  $G$  par des ouverts  $Q$  de la forme indiquée ci-dessus et en nombre fini, il suffit en effet d'en prendre deux, et par  $P = \exp \mathbf{R}X \exp T_1 A^l$ . Remarquons  $P = \{g \in G; g \cdot l_0 = Z^*\} = G(Z^*) \exp T_1$ , ici  $G(Z^*)$  désigne le stabilisateur de  $Z^*$  dans  $G$ .

Soit  $T \in \mathfrak{g}(l)$  tel que  $T \notin \mathfrak{g}_0$ . On a  $\mathfrak{b} = \mathbf{R}T + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0)$  et  $A^l = G_0 \exp \mathbf{R}T$  avec  $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ . L'action adjointe de  $\mathfrak{g}$  sur  $\alpha/\mathfrak{g}$  produit deux racines de la forme  $\lambda(1 \pm i\alpha)$ ,  $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ . Soient  $g' = \ker \lambda$  et  $G' = \exp g'$ . Afin de traiter  $a$  sur  $Q$ , considérons le sous-groupe  $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1 = \exp \mathbf{R}T_2 G_0$ ,  $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{R}T_2 + \mathfrak{g}_0$  et  $\pi_1 = \text{ind}_{B \cap \alpha_0}^{\alpha_1} \chi_l \in \hat{G}_1$  de sorte que  $\pi|G' = \text{ind}_{\alpha_1}^{\alpha_0} \pi_1 \in \hat{G}'$ . Alors sur  $Q$ , pour la plupart de  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ ,

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a, \phi(\exp tX \cdot) \rangle \overline{\chi_f(\exp tX)} c(\exp tX)^{-1} dt$$

avec un certain  $a_0 \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H_0, \chi, f, c}$ , où  $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$ ,  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ .

Donc, si  $a$  ne s'y annule pas, l'hypothèse de récurrence assure qu'il existe  $g_1 \in G_1$  vérifiant  $(g_1 \cdot l)|\mathfrak{h}_0 = f|\mathfrak{h}_0$ . De là, pour établir notre assertion  $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$ , il suffit de montrer l'existence de  $\xi, \eta \in \mathbf{R}$  tels que

$$(5) \quad \exp(\xi Y_1 + \eta Y_2) \cdot g_1 \cdot l(X) = f(X).$$

Si l'on écrit  $g_1 = \exp \zeta T_2 g_0$  ( $\zeta \in \mathbf{R}$ ,  $g_0 \in G_0$ ), le premier membre de (5) devient

$$g_1 \cdot l(X) + \xi - \alpha\eta + Z^*([-\zeta T_2, \xi\alpha Y_2 + \eta Y_2]) = g_1 \cdot l(X) + \xi - \alpha\eta - \zeta(\xi\alpha + \eta).$$

Tout se ramène ainsi à trouver  $\xi, \eta \in \mathbf{R}$  de sorte qu'on ait  $(1 - \zeta\alpha)\xi - (\alpha + \zeta)\eta = f(X) - g_1 \cdot l(X)$ , ce qui est bien possible.

Soit maintenant  $\text{supp } a \subset P$ . Pour alléger les notations, on note  $G_2$  au lieu de  $G(Z^*)$ . Tout  $g \in G$  s'écrit d'une façon unique sous la forme  $g = \exp(xT_1 + yT_2)g_2 \exp T_1$  avec  $x, y \in \mathbf{R}$  et  $g_2 \in G_2$ . Grâce à cette expression, on considère  $a$  comme distribution de la variable  $g' = \exp(xT_1 + yT_2) \cdot g_2 \in G(x, y \in \mathbf{R}, g_2 \in G_2)$  ayant le support sur la sous-variété fermée  $G_2$ . On développe

$$a = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} D_{k,l} |_{x=y=0},$$

$D_{k,l}$  ( $0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n$ ) étant des distributions sur  $G_2$ .

Posons  $l_1 = \exp T_1 \cdot l \in \mathfrak{g}^*, \bar{b}_1 = \exp T_1 \cdot \bar{b} \in I(l_1, \mathfrak{g}), B_1 = \exp \bar{b}_1$  et enfin  $\pi_0 = \text{ind}_{B_1}^{G_2} \chi_{l_1} \in \hat{G}_2$ . Si l'on réécrit la relation  $\langle \pi(h)a, \Phi \rangle = \chi_f(h)c(h)\langle a, \Phi \rangle$  par rapport à  $h = h_s = \exp sX \in H$  ( $s \in \mathbf{R}$ ) et pour  $\Phi(g) = \phi(x, y)\psi(g_2)\Delta_{G_2, G}^{1/2}$  avec  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$  et  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_0}^{+\infty}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (-1)^{k+l} \left\langle D_{k,l}, \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \left\{ \phi(e^{-s}(x \cos \alpha s - y \sin \alpha s), \right. \right. \\ & \quad \left. \left. e^{-s}(y \cos \alpha s + x \sin \alpha s)) (\Delta_{G_2, G}^{1/2} \psi)(h(s, x, y)g_2) \Big|_{x=y=0} \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (-1)^{k+l} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \binom{k}{p} \binom{l}{q} \left\langle D_{k,l}, \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \phi \right. \\ & \quad \times (e^{-s}(x \cos \alpha s - y \sin \alpha s), e^{-s}(y \cos \alpha s + x \sin \alpha s)) \Big|_{x=y=0} \\ & \quad \times \left. \frac{\partial^{k+l-p-q}}{\partial x^k \partial y^l} (\Delta_{G_2, G}^{1/2} \psi)(h(s, x, y)g_2) \Big|_{x=y=0} \right\rangle \\ &= \chi_f(h_s)c(h_s) \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (-1)^{k+l} \bar{\phi}^{(k,l)}(0, 0) \langle D_{k,l}, \Delta_{G_2, G}^{1/2} \psi \rangle, \end{aligned}$$

où  $\bar{\phi}^{(k,l)}$  désigne  $\partial^{k+l} \phi / \partial x^k \partial y^l$  et où  $h(s, x, y) \in G_2$  vérifiant  $h(s, 0, 0) = h_s$  pour tout  $s \in \mathbf{R}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (-1)^{k+l} \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^l \binom{k}{p} \binom{l}{q} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q \binom{p}{u} \binom{q}{v} \\ & \quad \times (e^{-s} \cos \alpha s)^u (-e^{-s} \sin \alpha s)^v (e^{-s} \cos \alpha s)^{p-u} \\ & \quad \times (e^{-s} \sin \alpha s)^{q-v} \bar{\phi}^{(u+v, p+q-u-v)}(0, 0) \\ & \quad \times \left\langle D_{k,l}, \frac{\partial^{k+l-p-q}}{\partial x^k \partial y^l} (\Delta_{G_2, G}^{1/2} \psi)(h(s, x, y)g_2) \Big|_{x=y=0} \right\rangle \\ &= \chi_f(h_s)c(h_s) \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n (-1)^{k+l} \bar{\phi}^{(k,l)}(0, 0) \langle D_{k,l}, \Delta_{G_2, G}^{1/2} \psi \rangle. \end{aligned}$$



Lorsqu'on choisit  $\phi$  de sorte que

$$\phi^{(r, r')}(0, 0) = \delta_{r, m+n},$$

il en résulte que, si  $n \geq 1$ ,

$$e^{-(m+n)s} (\cos \alpha s)^m (\sin \alpha s)^n \langle \pi_0(h_s) D_{m,n}, A_{G_2, G}^{1/2} \psi \rangle = 0.$$

pour  $s \in \mathbf{R}$  quelconque. D'où  $D_{m,n} = 0$ , ce qui est contradictoire. On conclut ainsi que  $n=0$ . De même,  $m=0$ , ce qui réduit  $A_{G_2, G}^{1/2} a$  à un élément non nul de l'espace  $(\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H, \chi_f c'}$  avec  $c' = c A_{G_0, G}^{-1/2}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on trouve  $g_2 \in G_2$  tel que  $(g_2 \cdot l_1) | \mathfrak{h} = f | \mathfrak{h}$ , d'où évidemment  $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$ .

II. Cas où  $\dim \mathfrak{g} = 1$ ,  $\dim \alpha = 2$  et  $\mathfrak{g} \subset \alpha$ . Soient  $l \in \Omega(\pi)$ .  $A^l = \exp \alpha^l$  et  $\mathfrak{g}_0$  le centralisateur de  $\alpha$  dans  $\mathfrak{g}$ . Il se peut que  $\alpha \not\subset \mathfrak{h}$  en même temps que  $HA^l \neq G$ , ce qui nous oblige de l'analyse supplémentaire et ce qui se produit seulement si  $\dim \mathfrak{h} / \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = 1$ . S'il en est ainsi, on prend des éléments  $Z$  dans  $\mathfrak{g}$ ,  $Y$  dans  $\alpha$ ,  $e_1$  dans  $\mathfrak{h}$  et  $e_2$  dans  $\mathfrak{g}$  de sorte que  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}Z$ ,  $f(Z) = l(Z) = 1$ ,  $\alpha = \mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{g}$ ,  $l(Y) = 0$ ,  $[e_1, Y] = -Y$  et  $[e_2, Y] = Z$ . Tout comme dans le cas précédent, on construit  $\pi$  par un choix de  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  intermédiaire de manière que  $\alpha \subset \mathfrak{b}$ ;  $\pi = \text{ind}_B^G \chi_l$ ,  $B = \exp \mathfrak{b}$ . Enfin on continue à noter  $\pi_0 = \text{ind}_B^{A^l} \chi_l \in \hat{A}^l$ .

En premier lieu, supposons que  $\text{supp } a \subset A^l$ . Tout  $g \in G$  se met d'une manière unique sous la forme  $g = \exp x e_2 \cdot g_0$  avec  $x \in \mathbf{R}$  et  $g_0 \in A^l$ , ce qui entraîne que  $a$  se développe

$$a = \sum_{k=0}^m \frac{\partial^k}{\partial x^k} D_k |_{x=0},$$

$D_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) étant des distributions sur  $A^l$ . La relation  $\langle \pi(h)a, \Phi \rangle = \chi_f(h)c(h)\langle a, \Phi \rangle$  relative cette fois à  $h = h_s = \exp s e_1 \in H$  ( $s \in \mathbf{R}$ ) et pour  $\Phi(g) = \phi(x)\psi(g_0)A_{A^l, G}^{1/2} \langle g_0 \rangle$ ,  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  et  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_0}^{+\infty}$ , s'écrit

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \left\langle D_k, (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \{ \phi(e^s x) (A_{A^l, G}^{1/2} \psi)(h(s, x)g_0) \} \Big|_{x=0} \right\rangle \\ & = e^{i s f(e_1)} c(h_s) \sum_{k=0}^m (-1)^k \bar{\phi}^{(k)}(0) \langle D_k, A_{A^l, G}^{1/2} \psi \rangle, \end{aligned}$$

où  $h(s, x) \in A^l$  vérifiant  $h(s, 0) = h_s$  quel que soit  $s \in \mathbf{R}$ .

Si l'on choisit  $\phi$  de sorte que  $\phi^{(r)}(0) = \delta_{m,r}$ , il s'ensuit que

$$e^{m s} \langle D_m, (A_{A^l, G}^{1/2} \psi)(h_s g_0) \rangle = \chi_f(h_s) c(h_s) \langle D_m, A_{A^l, G}^{1/2} \psi \rangle.$$

D'où l'on trouve que  $A_{A^l, G}^{1/2} D_m$  est un élément non nul de  $(\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H, \chi_f c'}$  avec

$c' = c\Delta_{A^l, G}^{-m-1/2}$ . Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence pour affirmer qu'il existe  $g_0 \in A^l$  tel que  $(g_0 \cdot l)|\mathfrak{h} = f|\mathfrak{h}$ , à savoir  $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset$ .

En second lieu, afin de débarrasser  $a$  de la restriction sur son support, on emploie des observations semblables à celles faites dans le cas précédent. On note  $\{Y^*, Z^*\}$  la base duale de  $\mathfrak{a}^*$  et pose  $l_+ = \exp -\xi e_2 \cdot l$  et  $l_- = \exp \xi e_2 \cdot l$  avec un certain nombre positif  $\xi$  fixé arbitrairement. Cela signifie que  $l_\pm | \mathfrak{a} = \pm \xi Y^* + Z^*$  respectivement. Soit  $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ , et posons

$$G_+ = \exp R e_1 \exp R(e_1 + \xi e_2) G_0 \exp -\xi e_2 = \exp R e_1 A^{l_+} \exp -\xi e_2,$$

$$G_- = \exp R e_1 \exp R(e_1 - \xi e_2) G_0 \exp \xi e_2 = \exp R e_1 A^{l_-} \exp \xi e_2,$$

qui sont clairement  $H$ -invariants à gauche.  $G/G_0$  n'étant autre que le groupe  $ax + b$ , un calcul direct montre que  $G_\pm$  sont des ouverts de  $G$  et que  $G$  se décompose en réunion disjointe  $G_+ \sqcup A^l \sqcup G_-$ .

On aimerait examiner  $a$  sur, par exemple,  $G_+$ . Une vérification simple prouve que chaque élément  $g \in G_+$  s'écrit uniquement sous la forme  $g = \exp t e_{1g_+} \exp -\xi e_2$  avec  $t \in \mathbf{R}$  et  $g_+ \in A^{l_+}$  et que la frontière de  $G_+$  s'obtient en faisant  $t \rightarrow -\infty$  dans cette expression. Si l'on fabrique  $\theta \in C^\infty(G)$  par

$$\theta(g) = \begin{cases} e^t & \text{si } g = \exp t e_{1g_+} \exp -\xi e_2 \in G_+, \\ 0 & \text{si } g \notin G_+, \end{cases}$$

$\theta$  est  $B$ -invariante à droite et  $H$ -semi-invariante à gauche avec le poids  $\Delta_{A^l, G}$ ;  $\theta(hg) = \Delta_{A^l, G}(h)\theta(g)$  ( $h \in H, g \in G$ ). De plus, on constate que sur  $G_+$   $\pi(Y)\phi = i\xi\theta\phi$  pour  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ . Ces observations nous permettent de conclure que  $\theta a \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \lambda, \lambda' c'}$  avec  $c' = c\Delta_{A^l, G}^{-1}$ .

Nous pouvons ainsi restreindre nos attentions sur  $G_+$ . Posons  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^{l_+} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ ,  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ ,  $\mathfrak{b}_+ = \exp -\xi e_2 \cdot \mathfrak{b}$ ,  $B_+ = \exp \mathfrak{b}_+$  et  $\pi_+ = \text{ind}_{B_+}^{A^{l_+}} \chi_{l_+} \in \hat{A}^{l_+}$ . Au fait,  $a$  est donnée sur  $G_+$  par formule, valable pour au moins  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$  convenables,

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp t e_1 \cdot \exp -\xi e_2) \rangle \overline{\chi_{f'}(\exp t e_1) c(\exp t X)^{-1}} dt,$$

avec une certaine  $a_0$  vérifiant  $\Delta_{A^{l_+}, G}^{1/2} a_0 \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H', \lambda, \lambda' c}$ . L'hypothèse de récurrence nous donne ainsi  $g_0 \in A^{l_+}$  tel que  $(g_0 \cdot l_+)|\mathfrak{h}' = f|\mathfrak{h}'$ . De là, on atteindrait son but s'il existe  $b \in A = \exp \mathfrak{a}$  de sorte que  $b \cdot g_0 \cdot l_+(e_1) = f(e_1)$ . Pour  $b_t = \exp t Y$  ( $t \in \mathbf{R}$ ), on calcule

$$b_t \cdot g_0 \cdot l_+(e_1) = g_0 \cdot l_+(e_1 - tY) = g_0 \cdot l_+(e_1) - t l_+(Y) = g_0 \cdot l_+(e_1) - \xi t,$$

ce qui affirme notre assertion car  $\xi > 0$ .

Finalement on procède de façon analogue sur  $G_-$ .

III. Touchons enfin au cas où  $[\mathfrak{h}, \alpha] = 0$ . Notre méthode sera celle expliquée auparavant pour le cas nilpotent. Pour dernière fois  $\mathfrak{g}_0$  désigne le centralisateur de  $\alpha$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\pi$  se réalise à l'aide de  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  ( $l \in \Omega(\pi)$ ) contenant  $\alpha$ . Soit  $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ . Supposons  $l|_{\mathfrak{g}} \neq 0$ , si  $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ , et  $l|_{\alpha} \neq 0$ , sinon rien à faire, et distinguons plusieurs cas.

(i)  $\dim \alpha = 1$ . Soient  $X, Y \in \mathfrak{g}$  tels que  $\alpha = \mathbf{R}Y$ ,  $l(Y) = 1$  et  $[X, Y] = Y$ . Chaque  $g \in G$  ayant l'expression unique  $g = \exp xXg_0$  avec  $x \in \mathbf{R}$  et  $g_0 \in G_0$ ,

$$\langle \pi(\exp tY)a, \phi \rangle = \langle a, e^{-ite^{-x}}\phi(g) \rangle$$

pour tous  $t \in \mathbf{R}$  et  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ . Il en résulte que  $e^{ite^{-x}}a$  puis  $e^{-xa}$  appartiennent à  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \mathcal{L}fc}$ . Celui-ci étant de dimension finie, les  $x$ -coordonnées de  $\text{supp } a$  satisfont à l'égalité  $P(e^{-x}) = 0$  pour un certain polynôme non nul et sont donc discrètes. On en prend  $x = \alpha$ , au voisinage de lequel s'écrit  $a$ :

$$a = \sum_{k=0}^m \frac{\partial^k}{\partial x^k} D_k |_{x=\alpha},$$

toutes  $D_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) étant des distributions sur  $G_0$ .

Deci posé,

$$e^{-x}a = e^{-\alpha}a + e^{-\alpha} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} D_m |_{x=\alpha} + a',$$

où l'ordre transversal de  $a'$  est inférieur ou égal à  $m - 2$ . Cela signifie que

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} D_m + e^\alpha a' \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \mathcal{L}fc}.$$

Ces opérations itératives arrivent à ce que  $D_m \in (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \mathcal{L}fc}$ , d'où l'on descend au sous-groupe  $G_0$ .

(ii)  $\dim \alpha = 2$  et  $\alpha \cap \mathfrak{g} = \{0\}$ . Soient  $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$  tels que  $\alpha = \mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2$  et  $[X, Y_1] = Y_1 + \alpha Y_2$ ,  $[X, Y_2] = Y_2 - \alpha Y_1$  ( $0 \neq \alpha \in \mathbf{R}$ ). On choisit  $l \in \Omega(\pi)$  de sorte que  $l|_{\alpha} = \mu Y_1^*$  ( $\mu \neq 0$ ) par rapport à la base duale  $\{Y_1^*, Y_2^*\}$  de  $\alpha^*$ . Chaque  $g \in G$  ayant ici aussi l'expression unique sous la forme  $g = \exp xXg_0$  avec  $x \in \mathbf{R}$  et  $g_0 \in G_0$ , on a, pour  $t \in \mathbf{R}$  et  $\phi \in \mathcal{H}_\pi^{+\infty}$ ,

$$\langle \pi(\exp tY_1)a, \phi \rangle = \langle a, e^{-i\mu t e^{-x} \cos \alpha x} \phi(g) \rangle,$$

$$\langle \pi(\exp tY_2)a, \phi \rangle = \langle a, e^{-i\mu t e^{-x} \sin \alpha x} \phi(g) \rangle.$$

Il s'ensuit de là que  $e^{-x} \cos \alpha x a$ ,  $e^{-x} \sin \alpha x a$  et puis  $e^{-2x}a$  appartiennent à  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \mathcal{L}fc}$ . On en raisonne comme avant pour trouver que les  $x$ -coordonnées de  $\text{supp } a$  sont discrètes et le même chemin qu'on a suivi ci-dessus

nous amènerait au sous-groupe  $G_0$ .

(iii)  $\dim \mathfrak{g}=1, \dim \alpha=2$  et  $\mathfrak{g} \subset \alpha$ . Soient  $\mathfrak{g}=\mathbf{R}Z, \alpha=\mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{g}$  et  $X, T \in \mathfrak{g}$  tels que  $[X, Y]=Y, [T, Y]=Z$ . On choisit  $l \in \Omega(\pi)$  de sorte que  $l|_{\alpha}=\mathbf{Z}^*$  par notations conventionnelles. Sous l'expression unique de  $g \in G, g=\exp tT \exp xX g_0$  avec  $t, x \in \mathbf{R}$  et  $g_0 \in G_0$ , on trouve  $\pi(\exp sY) a=e^{-\lambda s t} a \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \lambda, f^c}$  pour tout  $s \in \mathbf{R}$ . D'où  $ta \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \lambda, f^c}$ , dont la finitude de dimension entraîne que les  $t$ -coordonnées de  $\text{supp } a$  sont discrètes. Ensuite, on développe  $a$  au voisinage de, par exemple,  $t=\alpha$  et se sert de deux faits,  $ta \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H, \lambda, f^c}$  et  $(d/dt)(t)|_{t=\alpha}=1 \neq 0$ , pour baisser l'ordre transversal de  $a$  jusqu'à arriver au sous-groupe  $A^l=\exp \alpha^l$ , auquel s'applique l'hypothèse de récurrence.

(iv)  $\dim \mathfrak{g}=1$  et  $\dim \alpha=3$ . Soient  $\mathfrak{g}=\mathbf{R}Z$  et  $\alpha=\mathbf{R}Y_1 \oplus \mathbf{R}Y_2 \oplus \mathfrak{g}$ . Prenons  $X, T_j \in \mathfrak{g} (j=1, 2)$  et  $l \in \Omega(\pi)$  de façon que  $[X, Y_1]=Y_1+\alpha Y_2, [X, Y_2]=Y_2-\alpha Y_1 (0 \neq \alpha \in \mathbf{R}), [T_i, Y_j]=\delta_{ij}Z$  et que  $l|_{\alpha}=\mathbf{Z}^*$ . En utilisant ceux-ci, on est capable de raisonner tout à fait pareillement au cas (iii).

Dans ces arguments, il reste obscur que notre hypothèse survive la récurrence et l'on est obligé de remplacer l'espace des vecteurs généralisés par l'espace des distributions qui se note par l'indice zéro.

Au bout de compte: avec une réalisation convenable;

**Proposition 3.** Soient  $c: H \rightarrow \mathbf{R}$  un caractère réel et  $\pi \in \hat{G}$  tel que  $\Omega(\pi) \cap (f + \mathfrak{h}^1) = \emptyset$ . Si  $\dim (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})_0^{H, \lambda, f^c} < +\infty$ , alors  $(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})_0^{H, \lambda, f^c} = \{0\}$ .

Revenons maintenant à la situation décrite à la fin des préliminaires dont les notations seront gardées jusqu'au bout. En particulier  $\mathfrak{h}$  appartient non seulement à  $S(f, \mathfrak{g})$ , mais aussi à  $M(f, \mathfrak{g})$ .

**Proposition 4.** Soit  $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ . Si  $\dim (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{-\infty})_0^{H, \lambda, f, \Omega} < +\infty$ , alors  $\dim (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{-\infty})_0^{H, \lambda, f, \Omega} = c(\Omega, f, \mathfrak{h})$ .

*Preuve.* Soient  $\mathfrak{g}$  le centre de  $\mathfrak{g}$  et  $\alpha$  un idéal central minimal. Concernant le changement  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \alpha^l + \alpha \in M(f, \mathfrak{g})$ , seuls les cas suivants échappent des traitements de la preuve du théorème 1. En tous les cas  $\alpha \not\subset \mathfrak{h}$ , posons donc  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . Soit  $l \in \Omega$  et l'on réalise  $\pi = \pi(\Omega)$  en faisant intervenir  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g})$  telle que  $\alpha \subset \mathfrak{b}; \pi = \text{ind}_B^G \chi_{\mathfrak{b}}, B = \exp \mathfrak{b}$ .

I.  $\dim \alpha=1$ . On prend  $X \in \mathfrak{h}, Y \in \alpha$  et  $f_+, f_- \in \mathfrak{g}^*$  de sorte que  $[X, Y]=Y, l(Y)=1, f_{\pm}|_{\mathfrak{h}}=f|_{\mathfrak{h}}$  et  $f_{\pm}(Y)=\pm 1$  respectivement. Soit  $a \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})_0^{H, \lambda, f, \Omega}$ . Pour  $\phi \in \mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{+\infty}$  choisi au besoin dans un certain sous-espace dense, chaque  $g$  s'écrivant d'une manière unique sous la forme  $g = \exp tX g_0$  avec  $t \in \mathbf{R}$  et  $g_0 \in G_0 = \exp \alpha^l$ ,

$$\langle a, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \langle a_0, \phi(\exp tX \cdot) \rangle \overline{\chi_f(\exp tX)} \Delta_{H, G}^{-1/2}(\exp tX) dt$$

avec un certain  $a_0 \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})_0^{H, \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma, a_0}$ , où  $\pi_0 = \text{ind}_B^G \chi_l \in \hat{G}_0$ .

On établit  $\dim (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{-\infty})_0^{H, \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma} = \dim (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})_0^{H', \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma}$ , qui est, par hypothèse de récurrence, égale à la multiplicité de  $\pi_0$  dans  $\text{ind}_{H'}^G \chi_{f+}$ . Par ailleurs, d'après la théorie de Mackey, cette dernière quantité est égale à la multiplicité de  $\pi(\Omega) = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$  dans  $\text{ind}_{G_0}^G (\text{ind}_{H'}^G \chi_{f+}) = \text{ind}_{H'}^G \chi_{f+}$  ou encore à celle de  $\pi(\Omega)$  dans  $\tau$ , vu que  $\tau = \text{ind}_{H'}^G \chi_{f+} \oplus \text{ind}_{H'}^G \chi_{f-}$ . (cf. [4]) et que  $\pi(\Omega)$  n'apparaît pas dans la seconde.

II.  $\dim \mathfrak{g} = 1$ ,  $\dim \alpha = 2$  et  $\mathfrak{g} \subset \alpha$ . Ce cas se traite justement comme le cas II en chemin à la proposition 3. On en rappelle les arguments et l'on y emprunte les notations. On va se servir de la décomposition disjointe  $G = G_+ \sqcup A \sqcup G_-$ . Remarquons d'abord qu'il n'y a pas de  $0 \neq a \in (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{-\infty})_0^{H, \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma}$  dont le support est contenu dans  $A^l$ . Sinon, comme montré là-bas, il existerait un élément non nul de  $(\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})_0^{M, \chi_f c}$  pour un certain caractère réel  $c: H \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Par suite la proposition 3 nous fournit  $g \in A^l$  tel que  $g \cdot l | \mathfrak{h} = f | \mathfrak{h}$ , d'où  $\mathfrak{h} \in M(g \cdot l, \mathfrak{g})$ . D'autre part  $g \cdot l(Y) = l(Y) = 0$  et, il s'agissant seulement du cas où  $\mathfrak{h} = \mathbb{R}e_1 + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)$ , on en tire que  $\mathfrak{h} + \mathbb{R}Y \in S(g \cdot l, \mathfrak{g})$ , ce qui est absurde.

Tout se réduit sur  $G_{\pm}$  où notre mécanisme marche. On prolonge  $f | \mathfrak{h}$  en deux fonctionnelles  $f_{\pm}$  sur  $\mathfrak{g}$  tels que  $f_{\pm}(Y) = l_{\pm}(Y) = \pm \xi$  ( $\xi > 0$ ) selon les signes, et forme  $b_- = \exp \xi e_2 \cdot b$ ,  $B_- = \exp b_-$  et  $\pi_- = \text{ind}_B^{A^l-} \chi_l \in \hat{A}^l-$  tout comme  $\pi_+ \in \hat{A}^l+$ . D'après ce qu'on a déjà envisagé (cf. *ibid.*),

$$(6) \quad \dim (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{-\infty})_0^{H, \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma} = \dim (\mathcal{H}_{\pi_+}^{-\infty})_0^{H', \chi_f + d^{\frac{1}{2}} \sigma, A^l+} + \dim (\mathcal{H}_{\pi_-}^{-\infty})_0^{H', \chi_f - d^{\frac{1}{2}} \sigma, A^l-}.$$

L'hypothèse de récurrence implique que le premier terme du membre droit est égal à la multiplicité de  $\pi_+$  dans  $\text{ind}_{H'+}^{A^l+} \chi_{f+}$  et puis à celle de  $\pi(\Omega)$  dans  $\text{ind}_{H'}^G \chi_{f+}$  vu la théorie de Mackey. De même, le second terme de (6) nous fournit la multiplicité de  $\pi_-$  dans  $\text{ind}_{H'-}^G \chi_{f-}$  et ensuite celle de  $\pi(\Omega)$  dans  $\text{ind}_{H'}^G \chi_{f-}$ . Compte tenu du fait que  $\tau = \text{ind}_{H'}^G \chi_{f+} \oplus \text{ind}_{H'}^G \chi_{f-}$  (cf. [4]), on en déduit le résultat cherché. c.q.f.d.

*Remarque 1.* Au cours de la preuve de la proposition 4, on n'a eu besoin de l'hypothèse  $\dim (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})_0^{H, \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma} < +\infty$  qu'à un seul endroit, c'est-à-dire pour montrer dans le cas II que l'espace en question n'avait pas d'élément non nul ayant le support contenu dans  $A^l$ .

**Corollaire 3.** Soit  $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ . Si  $\pi(\Omega)$  admet une polarisation distinguée, alors  $\dim (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{-\infty})_0^{H, \chi_f d^{\frac{1}{2}} \sigma} = c(\Omega, f, \mathfrak{h})$ .

*Remarque 2.* Soit en général  $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$ . On espère bien que

l'application  $\hat{G} \ni \pi \mapsto \dim (\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma}$  se qualifie pour la fonction de multiplicités dans la désintégration centrale canonique de  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$ , et en même temps on en conçoit deux autres candidats, à savoir ou bien le nombre des composantes connexes de  $\pi(\Omega) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$  ou bien celui des  $H$ -orbites  $y$  incluses (cf. [3], [9], [13], [14], [19]).

D'autre part si l'on réalise  $\pi \in \hat{G}$  au moyen de  $\mathfrak{b} \in I(l, \mathfrak{g}), l \in \Omega(\pi)$ , on se doute que le support d'un élément de  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma}$  se trouve dans l'adhérence de l'ensemble  $\{g \in G; g \cdot (l + \mathfrak{b}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset\}$  (cf. [12]).

**§ 3. Formule de Plancherel concrète**

Commençons par démontrer le :

**Lemme 1.** *Soit toujours  $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ . Il existe  $\mathfrak{b} \in I(f, \mathfrak{g})$  possédant les propriétés suivantes. Posons  $B = \exp \mathfrak{b}, \pi = \text{ind}_B^G \chi_f$  et notons  $(\mathcal{H}_\pi^{+\infty})_0$  le sous-espace de  $\mathcal{H}_\pi^{+\infty}$  constitué par les vecteurs à support compact modulo  $B$ . On voit alors :*

- (i)  $\Delta_{H \cap B, H}(h) \Delta_{H \cap B, B}(h) = 1$  quel que soit  $h \in H \cap B$ ;
- (ii)  $HB$  est fermé dans  $G$ ;
- (iii) d'après (i) et (ii), on est en mesure de fabriquer une forme anti-linéaire

$$a: (\mathcal{H}_\pi^{+\infty})_0 \ni \phi \mapsto \int_{H/H \cap B} \overline{\phi(h)} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B}(h) \in \mathbb{C}$$

qui se prolonge en un élément de  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma}$ .

*Preuve.* S'il existe un idéal non nul  $\alpha$  sur lequel  $f$  s'annule, tout passe immédiatement au quotient  $\mathfrak{g}/\alpha$  auquel s'applique l'hypothèse de récurrence. Supposons désormais non-existence de tel  $\alpha$ . Soit maintenant  $\alpha$  un idéal non central minimal. Posons  $\mathfrak{g}_0 = \alpha' \not\subseteq \mathfrak{g}, G_0 = \exp \mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 + \alpha \in M(f, \mathfrak{g})$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . L'hypothèse de récurrence nous offre  $\mathfrak{b} \in I(f_0, \mathfrak{g}_0), f_0 = f|_{\mathfrak{g}_0} \in \mathfrak{g}_0^*,$  possédant au niveau du sous-groupe  $G_0$  les trois propriétés requises. Il s'agit du cas où  $\alpha \not\subseteq \mathfrak{h}$ .

(i) Soient  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$  et  $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$ . Pour tout  $h = \exp X \in H \cap B = H_0 \cap B (X \in \mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}),$

$$(7) \quad \text{tr ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} X + \text{tr ad}_{\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha} X = 0.$$

Mais  $\mathfrak{b}$  a été choisie de sorte qu'on ait  $\Delta_{H' \cap B, H'}(h') \Delta_{H' \cap B, B}(h') = 1 (h' \in H' \cap B),$  ce qui revient au même de dire que, pour tout  $X \in \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b} + \alpha,$

$$\text{tr ad}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}} X = 0$$

ou encore que

$$(8) \quad \text{tr ad}_{\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}} X - \text{tr ad}_{\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}} X = 0.$$

On déduit de (7) et (8),  $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}$  s'identifiant à  $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ ,

$$\text{tr ad}_{\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{b}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}_0} X = 0$$

ou encore

$$\text{tr ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}} X = 0$$

pour tout  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{b}$ , d'où l'égalité souhaitée.

(ii) On note  $\mathfrak{z}$  le centre de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{j}$  (resp.  $\mathfrak{g}_1$ ) le noyau de la représentation adjointe de  $\mathfrak{h}$  (resp.  $\mathfrak{g}$ ) dans  $\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$  (resp.  $\mathfrak{a}/\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ ). Alors deux possibilités se produisent;  $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$  ou  $\mathfrak{h}_0$  (cf. [4]). Dans la première éventualité on renvoie la preuve du corollaire 2. Si  $\mathfrak{j} + \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0$ , alors  $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$ ,  $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}$  et  $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$ . D'où  $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_1$ , ce qui nous fait capable de choisir notre  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{g}_1$  d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à celle-ci. Pourvu qu'on prenne  $X \in \mathfrak{h}$ ,  $X \notin \mathfrak{j}$ , en tant que base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g}$ ,  $HB = \exp RXH'B$  serait bien fermé dans  $G$  car  $H'B$  l'est dans  $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ .

(iii) Compte tenu de (i), on peut appliquer la fonctionnelle  $\nu_{H, H \cap B}$  à la fonction  $\phi_H: H \ni h \mapsto \overline{\phi(h)\chi_f(h)} \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) \in \mathbb{C}$ , pourvu que  $\phi \in \mathcal{H}_\pi$ . Or, lorsque  $\phi$  parcourt  $(\mathcal{H}_\pi^{+\infty})_0$ , on sait d'après (ii) que

$$\nu_{H, H \cap B}(\phi_H) = \int_{H/H \cap B} \overline{\phi(h)\chi_f(h)} \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B}(h) < +\infty.$$

Il se voit alors que cette forme antilinéaire  $(\mathcal{H}_\pi^{+\infty})_0 \ni \phi \mapsto \nu_{H, H \cap B}(\phi_H) \in \mathbb{C}$  se prolonge uniquement en un élément non nul  $a$  de  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H, G}^{1/2}}$ . Cela résulterait presque immédiatement de tout ce qu'on vient de voir, mais toutefois on va ajouter un commentaire.

Si l'on peut choisir  $\mathfrak{b} \in I(f, \mathfrak{g})$  de façon qu'un opérateur d'entrelacement  $R$  entre  $\pi = \text{ind}_B^G \chi_f$  et  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  s'obtienne, pour  $\phi \in (\mathcal{H}_\pi^{+\infty})_0$  par la formule

$$(R\phi)(g) = \int_{H/H \cap B} \phi(gh)\chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B}(h) \quad (g \in G),$$

un vecteur généralisé  $a = \delta_\tau \circ R$  nous conviendrait. Quant à  $R$ , soit en effet  $\tau' = \text{ind}_H^G \chi_f$ . Si un opérateur d'entrelacement  $T$  entre  $\tau'$  et  $\tau$  s'obtient en donnant un sens à l'opérateur formel

$$(T\psi)(g) = \oint_{H/H_0} \psi(gh) \chi_\tau(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H,H_0}(h) \quad (g \in G)$$

pour  $\psi \in \mathcal{H}_\tau$ , l'hypothèse de récurrence appliquée à  $G_0$  et la transitivité de  $\nu \cdot \cdot$  (cf. [4]) nous donnerait  $R$  cherché.

En ce qui concerne  $T$ , il suffit de raisonner dans la sous-algèbre  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$  et donc on suppose  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$ . Considérons par exemple le cas où  $\tau$  se divise en deux parties sous la modification  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ . Soit  $\alpha = \mathbf{R}Y$  (ou  $\alpha = \mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{g}$ ),  $f(Y) = 1$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{R}X + \mathfrak{h}_0$  et  $[X, Y] = Y$ . Grâce au sous-groupe à un paramètre  $\exp \mathbf{R}Y$  (resp.  $\exp \mathbf{R}X$ ), l'espace  $\mathcal{H}_\tau$  (resp.  $\mathcal{H}_{\tau'}$ ) s'identifiant à  $L^2(\mathbf{R})$ , notre  $T$  devient, pour  $\psi \in \mathcal{H}_{\tau'}$ ,

$$\begin{aligned} (T\psi)(s) &= (T\psi)(\exp sY) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \psi(\exp sY \exp tX) e^{-t/2} dt = \int_{\mathbf{R}} \psi(\exp tX \exp se^{-t}Y) e^{-t/2} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \psi(\exp tX) e^{-is e^{-t}} e^{-t/2} dt. \end{aligned}$$

Par suite, effectuant des changements de variables,

$$\begin{aligned} \|T\psi\|^2 &= \int_{\mathbf{R}} ds \left| \int_{\mathbf{R}} \psi(\exp tX) e^{-is e^{-t}} e^{-t/2} dt \right|^2 \\ &= \int_{\mathbf{R}} ds \left| \int_0^{+\infty} \psi(\exp(-\log t')X) e^{-is t'} \frac{dt'}{\sqrt{t'}} \right|^2 \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} |\psi(\exp(-\log t')X)|^2 \frac{dt'}{t'} \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}} |\psi(\exp -s'X)|^2 ds' = 2\pi \|\psi\|^2 \end{aligned}$$

Le cas où  $\tau$  ne se divise pas se traitant tout à fait également,  $T$  s'interprète comme transformation de Fourier (cf. [4], [10]). c.q.f.d.

Soit toujours  $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ , et l'on se pose dans la même situation qu'avant. Pour  $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ ,  $c(\Omega, f, \mathfrak{h})$  se notera  $m(\Omega)$  pour simplicité. On se propose maintenant de démontrer le:

**Théorème 2.** *Lorsque  $\Omega$  décrit  $U(f, \mathfrak{h})$ , on prend  $l_\Omega^k$  arbitrairement dans chaque composante connexe  $C_\Omega^k$  ( $1 \leq k \leq m(\Omega)$ ) de  $\Omega \cap (f + \mathfrak{h}^\perp)$ . A tous ces points  $l_\Omega^k \in \mathfrak{g}^*$  ( $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ ,  $1 \leq k \leq m(\Omega)$ ) on peut choisir  $b_\Omega^k \in I(l_\Omega^k, \mathfrak{g})$  du lemma 1, qui nous fournit donc  $a_\Omega^k \in (\mathcal{H}_{\tau(\Omega)}^{-\infty})^{H, \chi_\tau \Delta_{H,G}^{1/2}}$ , de sorte qu'une formule de Plancherel concrète pour  $\tau = \text{ind}_{\mathfrak{g}}^G \chi_\tau$  s'exprime en termes des coefficients matriciels pour ces  $a_\Omega^k$  convenablement normalisés: quelle que soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ ,*



$$\phi_H^f(e) = \sum_{\Omega \in \mathcal{U}(f, \mathfrak{h})} \sum_{k=1}^{c(\Omega, f, \mathfrak{h})} \langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k, a_{\Omega}^k \rangle.$$

*Preuve.* Tout d'abord on calcule pour  $\phi \in \mathcal{D}(G)$  le coefficient matriciel  $\langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k, a_{\Omega}^k \rangle$ . Soit  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{+, \infty}$ , où  $\pi(\Omega)$  se réalise moyennant  $B_{\Omega}^k = \exp \mathfrak{h}_{\Omega}^k$ . Sous réserve de normalisations convenables des mesures, la transitivité de  $\nu \cdot, \cdot$  donne

$$\begin{aligned} \langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k, \psi \rangle &= \int_G \phi(g) \langle a_{\Omega}^k, \pi(g^{-1}) \psi \rangle dg \\ &= \int_{G/H} d\nu_{G, H}(g) \int_H \phi(gh') \Delta_{H, G}^{-1}(h') dh' \int_{H/H \cap B_{\Omega}^k} \overline{\psi(gh'h)} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega}^k}(h) \\ &= \int_{G/H} \phi_H^f(g) d\nu_{G, H}(g) \int_{H/H \cap B_{\Omega}^k} \overline{\psi(gh)} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega}^k}(h) \\ &= \int_{G/H \cap B_{\Omega}^k} \overline{\phi_H^f(g) \psi(g)} d\nu_{G, H \cap B_{\Omega}^k}(g) \\ &= \int_{G/B_{\Omega}^k} d\nu_{G, B_{\Omega}^k}(g) \int_{B_{\Omega}^k/H \cap B_{\Omega}^k} \phi_H^f(gb) \overline{\psi(gb)} \Delta_{B_{\Omega}^k, G}^{-1}(b) d\nu_{B_{\Omega}^k, H \cap B_{\Omega}^k}(b) \\ &= \left\langle \int_{B_{\Omega}^k/H \cap B_{\Omega}^k} \phi_H^f(gb) \chi_{i_{\Omega}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega}^k, H \cap B_{\Omega}^k}(b), \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

En somme,

$$\pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k = \int_{B_{\Omega}^k/H \cap B_{\Omega}^k} \phi_H^f(gb) \chi_{i_{\Omega}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega}^k, H \cap B_{\Omega}^k}(b)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k, a_{\Omega}^k \rangle &= \int_{H/H \cap B_{\Omega}^k} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega}^k}(h) \\ &\quad \times \int_{B_{\Omega}^k/H \cap B_{\Omega}^k} \phi_H^f(hb) \chi_{i_{\Omega}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega}^k, H \cap B_{\Omega}^k}(b). \end{aligned}$$

Ici, le membre droit signifie, dans le cas besoin, la valeur limite de  $\int \psi_n(h) \times \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega}^k}(h)$ ,  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (\mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{+, \infty})_0$  tendant vers  $\pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k \in \mathcal{H}_{\pi(\Omega)}^{+, \infty}$ .

On examine des différents cas possibles (cf. [4], [21]).

I. Il existe un idéal non nul  $\alpha$  sur lequel  $f$  s'annule. Soient  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\alpha$ ,  $A = \exp \alpha$ ,  $p: G \rightarrow \tilde{G} = G/A$  l'application canonique,  $\tilde{H} = p(H)$ ,  $\tilde{f}$  l'image de  $f$  dans  $\tilde{\mathfrak{g}}^*$  et  $\tilde{\pi} \in \tilde{G}$  telle que  $\tilde{\pi} \circ p = \pi$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ , on fabrique  $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}(\tilde{G})$

par  $\check{\phi}(p(g)) = \int_A \phi(ga) da$ ,  $da$  étant une mesure de Haar sur  $A$ . Comme  $\phi_H^f(g) = (\check{\phi})_H^f(p(g))$  ( $g \in G$ ), par hypothèse de récurrence, on a

$$\phi_H^f(e) = (\check{\phi})_H^f(p(e)) = \sum_{\check{\Omega}} \sum_k \langle \pi(\check{\Omega}) a_{\check{\Omega}}^k, a_{\check{\Omega}}^k \rangle.$$

De plus, avec les notations sous-entendues,

$$\begin{aligned} \langle \pi(\check{\Omega})(\check{\phi}) a_{\check{\Omega}}^k, a_{\check{\Omega}}^k \rangle &= \int_{\check{H}/\check{H} \cap B_{\check{\Omega}}^k} \chi_f(\check{h}) \Delta_{\check{H}, \check{G}}^{-1/2}(\check{h}) d\nu_{\check{H}, \check{H} \cap B_{\check{\Omega}}^k}(\check{h}) \\ &\quad \times \int_{B_{\check{\Omega}}^k / H \cap B_{\check{\Omega}}^k} (\check{\phi})_H^f(\check{h}\tilde{b}) \chi_{i_{\check{\Omega}}^k}(\tilde{b}) \Delta_{B_{\check{\Omega}}^k, G}^{-1/2}(\tilde{b}) d\nu_{B_{\check{\Omega}}^k, H \cap B_{\check{\Omega}}^k}(\tilde{b}) \\ &= \int_{H/H \cap B_{\check{\Omega}}^k} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\check{\Omega}}^k}(h) \int_{B_{\check{\Omega}}^k / H \cap B_{\check{\Omega}}^k} \phi_H^f(hb) \chi_{i_{\check{\Omega}}^k}(b) \Delta_{B_{\check{\Omega}}^k, G}^{-1/2}(b) \\ &\quad \times d\nu_{B_{\check{\Omega}}^k, H \cap B_{\check{\Omega}}^k}(b) = \langle \pi(\check{\Omega})(\phi) a_{\check{\Omega}}^k, a_{\check{\Omega}}^k \rangle. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à se référer à la démonstration du théorème dans [21].

II. Il n'existe aucun idéal non nul sur lequel  $f$  s'annule. Soit  $\alpha$  un idéal non central minimal de  $\mathfrak{g}$ . Il est évident que  $\alpha^f \subsetneq \alpha^g$ .

(i) Supposons d'abord que  $\alpha \subset \mathfrak{h}$ . On a nécessairement  $\mathfrak{h} \subset \alpha^f$ . Posons  $f_0 = f|_{\alpha^f} \in (\alpha^f)^*$ ,  $G_0 = \exp \alpha^f$  et, quelle que soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ ,  $\phi_0 = (\phi|_{G_0}) \Delta_{G_0, G}^{-1/2} \in \mathcal{D}(G_0)$ . Comme, pour  $g_0 \in G_0$ ,

$$\begin{aligned} (\phi_0)_{G_0}^f(g_0) &= \int_H \phi_0(g_0 h) \chi_{f_0}(h) \Delta_{H, G_0}^{-1/2}(h) dh = \Delta_{G_0, G}^{-1/2}(g_0) \int_H \phi(g_0 h) \chi_f(h) \Delta_{G_0, G}^{-1/2}(h) dh \\ &= \Delta_{G_0, G}^{-1/2}(g_0) \phi_H^f(g_0) \end{aligned}$$

on constate d'après l'hypothèse de récurrence que

$$\phi_H^f(e) = (\phi_0)_{G_0}^f(e) = \sum_{\Omega_0} \sum_k \langle \pi_0(\Omega_0)(\phi_0) a_{\Omega_0}^k, a_{\Omega_0}^k \rangle.$$

Toutefois,

$$\begin{aligned} \langle \pi_0(\Omega_0)(\phi_0) a_{\Omega_0}^k, a_{\Omega_0}^k \rangle &= \int_{H/H \cap B_{\Omega_0}^k} \chi_{f_0}(h) \Delta_{H, G_0}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega_0}^k}(h) \\ &\quad \times \int_{B_{\Omega_0}^k / H \cap B_{\Omega_0}^k} (\phi_0)_{G_0}^f(hb) \chi_{i_{\Omega_0}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega_0}^k, G_0}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega_0}^k, H \cap B_{\Omega_0}^k}(b) \\ &= \int_{H/H \cap B_{\Omega_0}^k} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega_0}^k}(h) \int_{B_{\Omega_0}^k / H \cap B_{\Omega_0}^k} \phi_H^f(hb) \chi_{i_{\Omega_0}^k}(b) \\ &\quad \times \Delta_{B_{\Omega_0}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega_0}^k, H \cap B_{\Omega_0}^k}(b) = \langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\Omega}^k, a_{\Omega}^k \rangle. \end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant de rappeler le fait  $A \cdot l = l + (\alpha^l)^\perp$  ( $l \in \mathfrak{g}^*$ ,  $A = \exp \alpha$ ) pour terminer ce cas.

Supposons dorénavant que  $\alpha \not\subset \mathfrak{h}$ . On pose  $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \alpha^l$ ,  $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \alpha \in M(f, \mathfrak{g})$ ,  $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$  et  $H' = \exp \mathfrak{h}'$ . Enfin on note  $\mathfrak{j}$  le noyau de la représentation de  $\mathfrak{h}$  dans  $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$  et distinguera deux cas selon  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$  ou  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ .

(ii) Supposons  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ . On sait qu'un opérateur d'entrelacement  $R$  de  $\tau' = \text{ind}_{H'}^G \chi_f$  à  $\tau$  s'obtient par la formule

$$(R\psi)(g) = \oint_{H/H_0} \psi(gh)\chi_f(h)\Delta_{H',G}^{-1/2}(h)d\nu_{H,H_0}(h),$$

pourvu que cela ait un sens. On pose  $a' = \delta_\tau \circ R \in (\mathcal{H}_{\tau'}^{-\infty})^{H', \chi_f \Delta_{H',G}^2}$ ;

$$a'; \mathcal{H}_{\tau'}^{+\infty} \ni \psi \mapsto \oint_{H/H_0} \overline{\psi(h)\chi_f(h)}\Delta_{H',G}^{-1/2}(h)d\nu_{H,H_0}(h).$$

**Lemme 2.** *A une normalisation près,*

$$\phi_H^f(e) = \langle \tau(\phi)\delta_\tau, \delta_\tau \rangle = \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle$$

pour toute  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ .

Comme  $R$  est un isomorphisme, ce lemme est trivial. Mais:

*Preuve.* Soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ . En désignant par  $\mathcal{T}$  un supplémentaire de  $\mathfrak{h}_0$  dans  $\mathfrak{h}$  contenu dans  $\mathfrak{j}$ , on fait des calculs. Pour  $\psi \in \mathcal{H}_{\tau'}^{+\infty}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \tau'(\phi)a', \psi \rangle &= \int_G \phi(g) \langle \tau'(g)a', \psi \rangle dg = \int_G \phi(g) \langle a', \psi(g \cdot) \rangle dg \\ &= \int_G \phi(g) dg \oint_{H/H_0} \overline{\psi(gh)\chi_f(h)}\Delta_{H',G}^{-1/2}(h)d\nu_{H,H_0}(h) \\ &= \int_G \overline{\psi(g)} dg \int_{\mathcal{T}} \phi(g \exp -T) e^{-i f(T)} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'} T} e^{\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} T} dT \\ &= \oint_{G/H'} d\nu_{G,H'}(g) \int_{H'} \psi(gh')\Delta_{H',G}^{-1/2}(h') dh' \int_{\mathcal{T}} \phi(gh' \exp -T) e^{-i f(T)} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2}(\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} T + \text{tr ad}_{\mathfrak{h}'} T)} dT \\ &= \oint_{G/H'} \overline{\psi(g)} d\nu_{G,H'}(g) \int_{\mathcal{T}} e^{-i f(T)} e^{\frac{1}{2}(\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} T + \text{tr ad}_{\mathfrak{h}'} T)} dT \\ &\quad \times \int_{H'} \phi(gh' \exp -T)\chi_f(h')\Delta_{H',G}^{-1/2}(h')d\nu_{G,H'}(h'), \end{aligned}$$

$dT$  étant une mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{T}$  et  $dh'$  une mesure de Haar à

gauche sur  $H'$ .

D'où

$$(\tau'(\phi)a')(g) = \int_{\mathcal{I}} e^{-i f(T)} e^{\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T + \text{tr ad}_{\mathfrak{g}'} T)} dT \int_{H'} \phi(gh' \exp - T) \chi_f(h') \Delta_{H', \mathfrak{G}}^{-1/2}(h') dh'$$

et, par suite,

$$(9) \quad \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle = \int_{\mathcal{I}} e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'} T'} dT' \int_{\mathcal{I}} e^{-i f(T)} e^{\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T + \text{tr ad}_{\mathfrak{g}'} T)} dT \\ \times \int_{H'} \phi(\exp T'h' \exp - T) \chi_f(h') \Delta_{H', \mathfrak{G}}^{-1/2}(h') dh'.$$

On choisit un supplémentaire  $\mathcal{U}$  de  $\mathfrak{h}_0$  dans  $\mathfrak{h}'$  de sorte que  $\mathcal{U}$  soit contenu dans  $\alpha$ , et l'on écrit  $h' \in H'$  d'une manière unique sous la forme  $h' = h_0 \exp Y$  avec  $h_0 \in H_0$  et  $Y \in \mathcal{U}$ . On récrit

$$\langle \tau'(\phi)a', a' \rangle = \int_{\mathcal{I}} e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'} T'} P(T') dT'; \\ P(T') = \int_{\mathcal{I}} e^{-i f(T)} e^{\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T + \text{tr ad}_{\mathfrak{g}'} T)} dT \int_{\mathcal{U}} e^{i f(Y)} dY \\ \times \int_{H_0} \phi(\exp T'h_0 \exp Y \exp - T) \chi_f(h_0) \Delta_{H', \mathfrak{G}}^{-1/2}(h_0) dh_0 \\ = \int_{\mathcal{U}} e^{i f(Y)} dY \int_{\mathcal{I}} e^{i f(T)} e^{\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T + \text{tr ad}_{\mathfrak{g}'} T)} dT \\ \times \int_{H_0} \phi(\exp T' \exp Y h_0 \exp T) \chi_f(h_0) \det(\text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cap \alpha} h_0)^{-1} \Delta_{H', \mathfrak{G}}^{-1/2}(h_0) dh_0,$$

$dh_0$  étant une mesure de Haar à droite sur  $H_0$  et  $dY$  celle de Lebesgue sur  $\mathcal{U}$ . En posant  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}_0$  et  $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$ , on divise  $dh_0$  en  $dh_0 dh_1$ , où  $dh_1$  est une mesure de Haar à gauche sur  $H_1$  et où  $dh_0$  est une mesure invariante sur l'espace homogène  $H_0/H_1$  qui s'identifie à  $H/J$  avec  $J = \exp \mathfrak{j}$ . On a alors

$$P(T') = \int_{\mathcal{U}} e^{i f(Y)} dY \int_{\mathcal{I}} e^{-i f(T)} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'} T} dT \int_{H_0/H_1} dh_0 \\ \times \int_{H_1} \phi(\exp T' \exp Y h_0 \exp Th_1) \chi_f(h_0 h_1) \Delta_{H', \mathfrak{G}}^{-1/2}(h_0 h_1) \det(\text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cap \alpha} h_0)^{-1} dh_1 \\ = \int_{\mathcal{U}} e^{i f(Y)} dY \int_{H/J} dT \int_{H_1} \phi(\exp T' \exp Y h_0 \exp Th_1) \\ \times \chi_f(h_0 \exp Th_1) \Delta_{H', \mathfrak{G}}^{-1/2}(h_0 \exp Th_1) dh_1$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathfrak{a}} e^{i f(Y)} dY \int_H \phi(\exp T' \exp Yh) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) dh \\
 &= \int_{\mathfrak{a}} e^{i f(Y)} \phi_H^f(\exp T' \exp Y) dY.
 \end{aligned}$$

Comme  $B_f | \mathcal{T} \times \mathcal{U}$  est non dégénérée,

$$\begin{aligned}
 \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle &= \int_{\mathcal{T}} e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} T'} dT' \int_{\mathfrak{a}} e^{i f(Y)} \phi_H^f(\exp T' \exp Y) dY \\
 &= \int_{\mathcal{T}} dT' \int_{\mathfrak{a}} e^{-i f(\langle T', Y \rangle)} e^{i f(Y)} \phi_H^f(\exp Y) dY = \phi_H^f(e),
 \end{aligned}$$

si les mesures  $dY, dT'$  se sont duales l'une à l'autre. c.q.f.d.

Revenons à la démonstration du théorème. Soient  $f_0 = f | \alpha^f \in (\alpha^f)^*$  et  $G_0 = \exp \alpha^f$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(G)$  on pose, en fixant  $T \in \mathcal{T}$ ,

$$\Phi_T(g_0) = \int_{\mathcal{T}} \phi(\exp Tg_0 \exp T') e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2}(\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} T' + \text{tr ad}_{\mathfrak{h}} T')} dT',$$

où  $g_0$  parcourt  $G_0$ . Comme

$$(\Delta_{G_0,G}^{-1/2} \Phi_T)_{H'}^{f_0}(g_0) = \int_{H'} \Phi_T(g_0 h') \chi_{f_0}(h') \Delta_{G_0,G}^{-1/2}(g_0 h') \Delta_{H',G_0}^{-1/2}(h') dh',$$

on se convainc facilement que

$$(10) \quad \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle = \int_{\mathcal{T}} e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} T'} (\Delta_{G_0,G}^{-1/2} \Phi_T)_{H'}^{f_0}(e) dT,$$

compte tenu de (9).

D'autre part, l'hypothèse de récurrence entraîne la formule

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{G_0,G}^{-1/2} \Phi_T)_{H'}^{f_0}(e) &= \sum_{\mathfrak{u}_0} \sum_k \oint_{H'/H' \cap B_{\mathfrak{u}_0}^k} \chi_{f_0}(h) \Delta_{H',G_0}^{-1/2}(h) P_{\mathfrak{u}_0}^k(T; h) d\nu_{H',H' \cap B_{\mathfrak{u}_0}^k}(h); \\
 P_{\mathfrak{u}_0}^k(T; h) &= \int_{B_{\mathfrak{u}_0}^k / H' \cap B_{\mathfrak{u}_0}^k} (\Delta_{G_0,G}^{-1/2} \Phi_T)_{H'}^{f_0}(hb) \chi_{f_0}(b) \Delta_{B_{\mathfrak{u}_0}^k, G_0}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\mathfrak{u}_0}^k, H' \cap B_{\mathfrak{u}_0}^k}(b) \\
 &= \Delta_{G_0,G}^{-1/2}(h) \oint_{B_{\mathfrak{u}_0}^k / H' \cap B_{\mathfrak{u}_0}^k} \chi_{f_0}(b) \Delta_{B_{\mathfrak{u}_0}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\mathfrak{u}_0}^k, H' \cap B_{\mathfrak{u}_0}^k}(b) \\
 &\quad \times \int_{H'} \Phi_T(hbh') \chi_f(h') \Delta_{H',G}^{-1/2}(h') dh'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Delta_{G_0, G}^{-1/2}(h) \int_{B_{\Omega_0}^k / H' \cap B_{\Omega_0}^k} \chi_{\nu_{\Omega_0}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega_0}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega_0}^k, H \cap B_{\Omega_0}^k}(b) \\
 &\quad \times \int_{H'} \chi_f(h') \Delta_{H', G}^{-1/2}(h') dh' \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{F}} \phi(\exp T h b h' \exp T') e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T' + \text{tr ad}_g T'')} dT'.
 \end{aligned}$$

En mettant cela dans (10), on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle &= \sum_{\Omega_0} \sum_k \int_{\mathcal{F}} e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_g T'} dT \oint_{H'/H' \cap B_{\Omega_0}^k} \chi_{f_0}(h) \Delta_{H', G}^{-1/2}(h) d\nu_{H', H' \cap B_{\Omega_0}^k}(h) \\
 &\quad \times \int_{B_{\Omega_0}^k / H' \cap B_{\Omega_0}^k} \chi_{\nu_{\Omega_0}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega_0}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega_0}^k, H' \cap B_{\Omega_0}^k}(b) \int_{H'} \chi_f(h') \Delta_{H', G}^{-1/2}(h') dh' \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{F}} \phi(\exp T h b h' \exp T') e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T' + \text{tr ad}_g T'')} dT'.
 \end{aligned}$$

On adoptera les notations introduites précédemment. Si l'on écrit  $h' \in H'$  sous la forme unique  $h' = \exp Y h_0$  avec  $Y \in \mathcal{U}$  et  $h_0 \in H_0$ , on a  $dh' = \det(\text{Ad}_{a/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}} h_0) dY dh_0$ . Les couples  $(\Omega_0, k)$  ( $\Omega_0 \in U(f_0, \mathfrak{h}')$ ,  $1 \leq k \leq c(\Omega_0, f_0, \mathfrak{h}')$ ) correspondent biunivoquement aux couples  $(\Omega, k)$  ( $\Omega \in U(f, \mathfrak{h})$ ,  $1 \leq k \leq c(\Omega, f, \mathfrak{h})$ ) et sous cette bijection les  $B_{\Omega_0}^k$  se qualifient pour  $B_{\Omega}^k$  correspondantes. Eu égard à ces observations, la transitivité de  $\nu \cdot, \cdot$  donne

$$\begin{aligned}
 \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle &= \sum_{\Omega} \sum_k \oint_{H/H \cap B_{\Omega}^k} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega}^k}(h) \\
 &\quad \times \int_{B_{\Omega}^k / H \cap B_{\Omega}^k} \chi_{\nu_{\Omega}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega}^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_{\Omega}^k, H \cap B_{\Omega}^k}(b) \\
 &\quad \times \int_{\mathcal{F}} e^{i f(T')} e^{-\frac{1}{2}(\text{tr ad}_g T' + \text{tr ad}_g T'')} dT' \\
 &\quad \times \int_{H_0} \phi(h b h_0 \exp T') \chi_f(h_0) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h_0) dh_0.
 \end{aligned}$$

On substitue  $\dot{h}_0 h_1$  ( $\dot{h}_0 \in H_0/H_1$ ,  $h_1 \in H_1$ ) à  $h_0 \in H_0$  et écrit  $h_0 \exp T' = \dot{h}_0 \exp T' h'_1$  avec  $h'_1 = \exp -T' h_1 \exp T'$ . Alors  $dh'_1 = e^{-\text{tr ad}_g T'} dh_1$  et, par suite,

$$\begin{aligned}
 \phi_H^f(e) &= \langle \tau'(\phi)a', a' \rangle \\
 &= \sum_{\Omega} \sum_k \int_{H/H \cap B_{\Omega}^k} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\Omega}^k}(h) \oint_{B_{\Omega}^k / H \cap B_{\Omega}^k} \chi_{\nu_{\Omega}^k}(b) \Delta_{B_{\Omega}^k, G}^{-1/2}(b) \\
 &\quad \times d\nu_{B_{\Omega}^k, H \cap B_{\Omega}^k}(b) \int_H \phi(h b h') \chi_f(h') \Delta_{H, G}^{-1/2}(h') dh'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_a \sum_k \oint_{H/H \cap B_{\mathfrak{h}}^k} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_{\mathfrak{h}}^k}(h) \\
 &\quad \oint_{B_{\mathfrak{h}}^k/H \cap B_{\mathfrak{h}}^k} \chi_{\mathfrak{h}}(b) \Delta_{B^k,G}^{-1/2}(b) \phi_H'(hb) d\nu_{B_{\mathfrak{h}}^k, H \cap B_{\mathfrak{h}}^k}(b) \\
 &= \sum_a \sum_k \langle \pi(\Omega)(\phi) a_{\mathfrak{h}}^k, a_{\mathfrak{h}}^k \rangle.
 \end{aligned}$$

(iii) Supposons  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{j}$ . On remarque que  $\mathfrak{j} = \mathfrak{h}_0$ ,  $\mathfrak{h} \cap \alpha = \mathfrak{g} \cap \alpha$  où  $\mathfrak{g}$  désigne le centre de  $\mathfrak{g}$ ,  $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 = \dim \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha = 1$  et qu'il existe  $X \in \mathfrak{h}$ ,  $Y \in \alpha$  tels que  $\mathfrak{h} = \mathbf{R}X + \mathfrak{h}_0$ ,  $\alpha = \mathbf{R}Y + (\mathfrak{h} \cap \alpha)$  et  $[X, Y] = Y$ . On prolonge  $f|_{\mathfrak{h}}$  en deux fonctionnelles  $f_{\pm} \in \mathfrak{g}^*$  qui vérifient  $f_{\pm}(Y) = \pm 1$  selon les signes. Dans ces circonstances on sait que  $\tau$  est équivalente à la somme directe  $\tau_+ \oplus \tau_-$ , où  $\tau_{\pm} = \text{ind}_{H'}^G \chi_{f_{\pm}}$ .

Par ailleurs, on a déjà vu qu'un opérateur d'entrelacement  $R_{\pm}$  de  $\tau_{\pm}$  à  $\tau$  se formait par la formule

$$(R_{\pm} \psi)(g) = \oint_{H/H_0} \psi(gh) \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H_0}(h) \quad (\psi \in \mathcal{H}_{\tau_{\pm}}),$$

pourvu que cela ait un sens. On pose cette fois aussi  $a_{\pm} = \delta_{\tau} \circ R_{\pm} \in (\mathcal{H}_{\tau_{\pm}}^{-\infty})^{H, \chi_f \Delta_{H,G}^{-1/2}}$ ;

$$a_{\pm} : \mathcal{H}_{\tau_{\pm}}^{+\infty} \ni \psi \longmapsto \oint_{H/H_0} \overline{\psi(h)} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H_0}(h).$$

**Lemme 3.** *Normalisés convenablement,  $a_{\pm}$  satisfont à*

$$\phi_H'(e) = \langle \tau(\phi) \delta_{\tau}, \delta_{\tau} \rangle = \langle \tau_+(\phi) a_+, a_+ \rangle + \langle \tau_-(\phi) a_-, a_- \rangle$$

quelle que soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ .

*Preuve.* On utilise les notations entendues et pose de plus  $f_+^{\prime} = f_+ | \alpha^f \in (\alpha^f)^*$  et  $G_+ = \exp \alpha^f$ . Sous l'expression unique de  $h \in H$  sous la forme  $h = h_0 \exp sX$  avec  $h_0 \in H_0$  et  $s \in \mathbf{R}$ , on a  $dh = e^{-s} \text{tr ad}_{\mathfrak{h}} X dh_0 ds$ . Soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ . Pour  $t \in \mathbf{R}$  fixé arbitrairement, on fabrique  $\Phi_t \in \mathcal{D}(G_+)$  par

$$(11) \quad \Phi_t(g_0) = \int_{\mathbf{R}} \phi(\exp tXg_0 \exp t'X) e^{it'f(X)} e^{-(t'/2)(\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{h}} X)} dt'.$$

Faisant intervenir

$$(\Phi_t)_{H'}^{f_+^{\prime}}(g_0) = \int_{H'} \Phi_t(g_0 h') \chi_{f_+^{\prime}}(h') \Delta_{H', G_+}^{-1/2}(h') dh' \quad (g_0 \in G_+),$$

un calcul tout à fait semblable à celui exécuté dans la preuve du lemme 2 montre

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \langle \tau_+(\phi)a_+, a_+ \rangle &= \int_{\mathbf{R}} e^{itf(X)} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} X} (\Phi_t)_{H'}^{f_+}(e) dt \\
 &= \int_{\mathbf{R}} e^{itf(X)} e^{-\frac{1}{2} \text{tr ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} X} dt \int_{\mathbf{R}} \phi_H^f(\exp tX \exp sY) \chi_{f_+}(\exp sY) ds \\
 &= \int_{\mathbf{R}} dt \int_{\mathbf{R}} e^{is} \phi_H^f(\exp se^t Y) ds = \int_{\mathbf{R}} e^{-t} dt \int_{\mathbf{R}} e^{iss^{-t}} \phi_H^f(\exp sY) ds \\
 &= \int_0^{+\infty} dv \int_{\mathbf{R}} e^{isv} \phi_H^f(\exp sY) ds.
 \end{aligned}$$

De même,

$$\langle \tau_-(\phi)a_-, a_- \rangle = \int_{-\infty}^0 dv \int_{\mathbf{R}} e^{isv} \phi_H^f(\exp sY) ds.$$

Une addition nous amène au résultat cherché.

c.q.f.d.

Continuons la démonstration du théorème. Pour toute  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ , on forme  $\Phi_t$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) par (11). D'après l'hypothèse de récurrence, on voit

$$\begin{aligned}
 (\Phi_t)_{H'}^{f_+}(e) &= \sum_{\omega \in \bar{U}(f_+, \mathfrak{h}')} \sum_k \int_{H'/H' \cap B_\omega^k} \chi_{f_+}(h) \Delta_{H', G_+}^{-1/2}(h) P_\omega^k(t; h) d\nu_{B_\omega^k, H' \cap B_\omega^k}(h); \\
 P_\omega^k(t; h) &= \oint_{B_\omega^k/H' \cap B_\omega^k} (\Phi_t)_{H'}^{f_+}(hb) \chi_{i_\omega^k}(b) \Delta_{B_\omega^k, G_+}^{-1/2}(b) d\nu_{B_\omega^k, H' \cap B_\omega^k}(b) \\
 &= \oint_{B_\omega^k/H' \cap B_\omega^k} \chi_{i_\omega^k}(b) \Delta_{B_\omega^k, G_+}^{-1/2}(b) d\nu_{B_\omega^k, H' \cap B_\omega^k}(b) \\
 &\quad \times \int_{H'} \Phi_t(hbh') \chi_{f_+}(h') \Delta_{H', G_+}^{-1/2}(h') dh' \\
 &= \oint_{B_\omega^k/H' \cap B_\omega^k} \chi_{i_\omega^k}(b) \Delta_{B_\omega^k, G_+}^{-1/2}(b) d\nu_{B_\omega^k, H' \cap B_\omega^k}(b) \int_{H'} \chi_{f_+}(h') \Delta_{H', G}^{-1/2}(h') dh' \\
 &\quad \times \int_{\mathbf{R}} \phi(\exp tX hbh' \exp t'X) e^{itf(X)} e^{-\frac{1}{2}(\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} X + \text{tr ad}_{\mathfrak{h}} X)} dt'.
 \end{aligned}$$

Compte tenu de la transitivité de  $\nu_{\cdot, \cdot}$ , on déduit de (12) que

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_+(\phi)a_+, a_+ \rangle &= \sum_{\omega \in \bar{U}(f_+, \mathfrak{h}')} \sum_k \oint_{H/H \cap B_\omega^k} \chi_f(h) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_\omega^k}(h) \\
 &\quad \times \oint_{B_\omega^k/H \cap B_\omega^k} \chi_{i_\omega^k}(b) \Delta_{B_\omega^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_\omega^k, H \cap B_\omega^k}(b) \int_{H_0} dh_0 \\
 &\quad \times \int_{\mathbf{R}} \phi(hbh_0 \exp t'X) \chi_f(h_0 \exp t'X) \Delta_{H, G}^{-1/2}(h_0 \exp t'X) e^{-t' \text{tr ad}_{\mathfrak{h}} X} dt'
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\omega \in U(f_+, \mathfrak{h}')} \sum_k \oint_{H/H \cap B_\omega^k} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_\omega^k}(h) \\
 &\quad \times \oint_{B_\omega^k/H \cap B_\omega^k} \chi_{t_\omega^k}(b) \Delta_{B_\omega^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_\omega^k, H \cap B_\omega^k}(b) \\
 &\quad \times \int_H \phi(hbh') \chi_f(h') \Delta_{H,G}^{-1/2}(h') dh'.
 \end{aligned}$$

Les mêmes observations que dans le cas précédent nous permettent de remplacer là la relation  $\omega \in U(f_+, \mathfrak{h}')$  par  $\Omega \in U(f_+, \mathfrak{h}')$  sous une bijection entre ces deux ensembles, ce qui qualifie  $B_\omega^k$  pour  $B_\Omega^k$ . On parvient finalement à la formule

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_+(\phi)a_+, a_+ \rangle &= \sum_{\Omega \in U(f_+, \mathfrak{h}')} \sum_k \oint_{H/H \cap B_\Omega^k} \chi_f(h) \Delta_{H,G}^{-1/2}(h) d\nu_{H, H \cap B_\Omega^k}(h) \\
 &\quad \times \oint_{B_\Omega^k/H \cap B_\Omega^k} \phi_H^f(hb) \chi_{t_\Omega^k}(b) \Delta_{B_\Omega^k, G}^{-1/2}(b) d\nu_{B_\Omega^k, H \cap B_\Omega^k}(b) \\
 &= \sum_{\Omega \in U(f_+, \mathfrak{h}')} \sum_{k=1}^{c(\Omega, f_+, \mathfrak{h}')} \langle \pi(\Omega)(\phi)a_\Omega^k, a_\Omega^k \rangle.
 \end{aligned}$$

D'une façon analogue,

$$\langle \tau_-(\phi)a_-, a_- \rangle = \sum_{\Omega \in U(f_-, \mathfrak{h}')} \sum_{k=1}^{c(\Omega, f_-, \mathfrak{h}')} \langle \pi(\Omega)(\phi)a_\Omega^k, a_\Omega^k \rangle.$$

Pour achever notre but, il ne faut, grâce au lemme 3, que rappeler la démonstration du théorème dans [21]. c.q.f.d.

### § 4. Exemples

D'ici bas on exhibe quelques exemples. Commençons par en donner un fondamental dont on a rencontré la situation à plusieurs reprises.

**Exemple 1.** Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de  $ax + b$ ;  $\mathfrak{g} = \mathbf{R}e_1 + \mathbf{R}e_2$ ,  $[e_1, e_2] = e_2$ . On prend  $f = e_2^*$  et  $\mathfrak{h} = \mathbf{R}e_1 \in M(f, \mathfrak{g})$ . Le groupe complètement résoluble  $G = \exp \mathfrak{g}$  n'a que deux représentations unitaires irréductibles de dimension infinie  $\pi_\pm$  associées à deux orbites ouvertes  $\pm G \cdot e_2^*$ . La représentation monomiale  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$ ,  $H = \exp \mathfrak{h}$ , est équivalente à la somme directe  $\tau_+ \oplus \tau_-$ .

On réalise  $\pi_\pm$  comme  $\text{ind}_B^G \chi_{\pm e_2^*}$  où  $B = \exp \mathbf{R}e_2$  et identifie  $\mathcal{H}_{\pi_\pm}$  à  $L^2(\mathbf{R})$  par l'application  $\psi \mapsto \tilde{\psi}(t) = \psi(\exp te_1)$  ( $t \in \mathbf{R}$ ). Lorsque  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_\pm}^{+\infty}$  on constate que  $((\pi_\pm(e_2))^m \psi)^\sim(t) = (\pm i)^m e^{-mt} \psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$  pour n'importe quel entier  $m$  non négatif. Donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}} e^{-t/2} \tilde{\psi}(t) dt \right| &\leq \int_{-\infty}^0 |e^{-t/2} \tilde{\psi}(t)| dt + \int_0^{+\infty} |e^{-t/2} \tilde{\psi}(t)| dt \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^0 e^t dt \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^0 |e^{-t} \tilde{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right)^{1/2} \left( \int_0^{+\infty} |\tilde{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_0^{+\infty} |\tilde{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left( \int_{-\infty}^0 |e^{-t} \tilde{\psi}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|\psi\| + \|\pi_{\pm}(e_2)\psi\|. \end{aligned}$$

Il en découle que  $a_{\pm} \in (\mathcal{H}_{\pi_{\pm}}^{-\infty})^{H, \chi, f, d_{H^2, \sigma}}$  si l'on pose

$$a_{\pm}(\psi) = \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\exp te_1)} e^{-t/2} dt$$

pour  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_{\pm}}^{+\infty}$ . Soit  $\phi \in \mathcal{D}(G)$ . Sous un choix de  $dg$  sur  $G$ , un calcul direct mène à

$$(\pi_+(\phi)a_+)^{\sim}(t) = \int_{\mathbf{R}^2} \phi(\exp se_1 \exp ue_2) e^{tue^{s-t}} e^{(s-t)/2} ds du$$

et ensuite à

$$\langle \pi_+(\phi)a_+, a_+ \rangle = \int_0^{+\infty} dv \int_{\mathbf{R}^2} \phi(\exp se_1 \exp ue_2) e^{tue^{sv}} e^{-s/2} ds du.$$

De même,

$$\langle \pi_-(\phi)a_-, a_- \rangle = \int_{-\infty}^0 dv \int_{\mathbf{R}^2} \phi(\exp se_1 \exp ue_2) e^{tue^{sv}} e^{-s/2} ds du.$$

Notre formule de Plancherel concrète pour  $\tau$  s'en réduit alors à la formule claire

$$\begin{aligned} &\langle \pi_+(\phi)a_+, a_+ \rangle + \langle \pi_-(\phi)a_-, a_- \rangle \\ &= 2\pi \int_{\mathbf{R}} \phi(\exp se_1) e^{-s/2} ds = \phi_H^f(e) = \langle \tau(\phi)\delta_+, \delta_+ \rangle, \end{aligned}$$

pourvu qu'on normalise différentes mesures à sa convenance.

Si l'on considère la représentation triviale  $\pi_0$  de  $G$ , il est évident que  $\Omega(\pi_0) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) = \Omega(\pi_0) = \{0\}$ , qui est sûrement connexe et même une  $H$ -orbite. En plus, quand on regard  $\pi_0$  construite moyennant  $\mathfrak{g} \in I(0, \mathfrak{g})$ , l'adhérence de l'ensemble  $\{g \in G; g \cdot (0 + \mathfrak{g}^\perp) \cap (f + \mathfrak{h}^\perp) \neq \emptyset\}$  atteint  $G$  tout entier.

Malgré tout cela, il est certain que  $(\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H, \chi, f, d_{H^2, \sigma}} = \{0\}$ .

**Exemple 2.** Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre complètement résoluble de dimension 4 définie sur la base  $(T, P, Q, E)$  par les crochets

$$[T, P]=P/2, \quad [T, Q]=Q/2, \quad [T, E]=E, \quad [P, Q]=E.$$

On prend  $f = E^* \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{RT} + \mathbf{RQ} \in M(f, \mathfrak{g})$  et pose  $H = \exp \mathfrak{h}$ ,  $\tau = \text{ind}_H^G \chi_f$  comme d'habitude. Ici aussi nous avons  $\tau \simeq \pi_+ \oplus \pi_-$ , où  $\pi_{\pm} \in \hat{G}$  sont deux représentations carré intégrables associées à deux orbites ouvertes  $\pm G \cdot E^*$ .

Soit  $a \in (\mathcal{H}_{\pi_{\pm}}^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma}$ . Le choix de  $\mathfrak{b} = \mathbf{RQ} + \mathbf{RE} \in I(\pm E^*, \mathfrak{g})$  nous fournissant une réalisation de  $\pi_{\pm}$ , leur espace  $\mathcal{H}_{\pi_{\pm}}$  s'identifie à  $L^2(\mathbf{R}^2)$  sous l'application  $\psi \mapsto \tilde{\psi}(s, t) = \psi(\exp sT \exp tP) ((s, t) \in \mathbf{R}^2)$ . Dans ce cadre la semi-invariance de  $a$  entraîne

$$\begin{cases} \langle a, \tilde{\psi}(s+x, t) \rangle = e^{x/4} \langle a, \tilde{\psi} \rangle, \\ \langle a, (1 - e^{\pm i x t e^{-s/2}}) \tilde{\psi}(s, t) \rangle = 0 \end{cases}$$

quels que soient  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_{\pm}}^{+\infty}$  et  $x \in \mathbf{R}$ . La seconde condition exige  $\text{supp } a \subset \{(s, t) \in \mathbf{R}^2; t=0\}$  et puis la première conclut que, à un scalaire multiplicatif près,

$$\langle a, \tilde{\psi} \rangle = \int_{\mathbf{R}} \overline{\tilde{\psi}(s, 0)} e^{-s/4} ds.$$

On retrouve ainsi  $\dim (\mathcal{H}_{\pi_{\pm}}^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma} = 1$ , ce qui n'est, bien sûr, qu'un simple cas particulier d'un résultat de [3] combiné avec celui de [17].

On considère maintenant  $\pi_{\alpha, \beta} \in \hat{G}$  associée à l'orbite passant  $l_{\alpha, \beta} = \alpha P^* + \beta Q^* \in \mathfrak{g}^*$ , où  $\alpha, \beta$  décrivent  $\mathbf{R}^2$  excepté l'origine. Soit  $a \in (\mathcal{H}_{\pi_{\alpha, \beta}}^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma}$ . En prenant  $\mathfrak{b} = \mathbf{RP} + \mathbf{RQ} + \mathbf{RE} \in I(l_{\alpha, \beta}, \mathfrak{g})$ , on identifie  $\mathcal{H}_{\pi_{\alpha, \beta}}$  à  $L^2(\mathbf{R})$  sous l'application  $\psi \mapsto \tilde{\psi}(t) = \psi(\exp tT) (t \in \mathbf{R})$ . La semi-invariance de  $a$  nécessite que

$$\begin{cases} \langle a, \tilde{\psi}(t+x) \rangle = e^{3x/4} \langle a, \tilde{\psi} \rangle, \\ \langle a, (1 - e^{-i \beta x e^{-t/2}}) \tilde{\psi}(t) \rangle = 0 \end{cases}$$

quels que soient  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_{\alpha, \beta}}^{+\infty}$  et  $x \in \mathbf{R}$ . La seconde condition oblige que  $a=0$  si  $\beta \neq 0$ . Lorsque  $\beta=0$ , la première exigence demande que

$$\langle a, \tilde{\psi} \rangle = \int_{\mathbf{R}} \overline{\tilde{\psi}(s)} e^{-3s/4} ds,$$

à un scalaire multiplicatif près. En fait, cette formule définit un élément non nul de  $(\mathcal{H}_{\pi_{\alpha, 0}}^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma}$ , ce qui se voit comme dans l'exemple 1. Enfin  $\dim (\mathcal{H}_{\pi_{\alpha, 0}}^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma} = 1$ , quoique  $\pi_{\alpha, 0}$  n'apparaisse pas dans la décomposition de  $\tau$ .

En dernier lieu, se notant  $c_{\alpha}$  le caractère unitaire de  $G$  associé à l'orbite  $\alpha T^*$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ ), il arrive que  $\dim (\mathcal{H}_{\pi_{\alpha}}^{-\infty})^{H, \chi_f, \Delta_H^{1/2}, \sigma} = \{0\}$ .

De ce qu'on vient de voir, il est vrai tout au moins que l'espace  $(\mathcal{H}_\pi^{-\infty})^{H, \chi_f \chi_H^{\frac{1}{2}}, \sigma}$  est trivial pour  $\pi \in \hat{G}$  dont l'orbite ne rencontre pas  $f + \mathfrak{h}^\perp$ .

Avant de terminer, on ajoute un exemple non exponentiel qui a été examiné en détail par plusieurs auteurs (cf. [1]).

**Exemple 3.** Soit  $G$  le revêtement universel du groupe des déplacements du plan. Son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est définie sur la base  $(T, X, Y)$  par les crochets  $[T, X]=Y, [T, Y]=-X$ . Les éléments de  $G$  sont présentés par un triplet de réels  $(\theta, a, b)$  dont la loi de multiplication est

$$(\theta, a, b)(\theta', a', b') = (\theta + \theta', a + a' \cos \theta - b' \sin \theta, b + a' \sin \theta + b' \cos \theta).$$

Prenons une polarisation réelle  $\mathfrak{h} = \mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}Y$  au point  $l_s = -sY^* \in \mathfrak{g}^*$  ( $0 \neq s \in \mathbf{R}$ ). Le stabilisateur  $G(l_s)$  n'est autre que l'extension de  $\exp \mathbf{R}Y$  par le centre  $Z = \exp 2\pi ZT$  de  $G$ , dont les caractères unitaires  $\chi_\alpha, \alpha \in [0, 1)$ , sont donnés par  $\chi_\alpha(\exp 2m\pi T) = e^{2\pi i m \alpha}$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ). Soient  $B^0 = \exp \mathfrak{h}$  et  $B = ZB^0$ . On prolonge  $\chi_\alpha$  en un caractère unitaire  $\chi_{s,\alpha}$  de  $B$  par la formule  $\chi_{s,\alpha}(zb) = \chi_\alpha(z)\chi_{l_s}(b)$  ( $z \in Z, b \in B^0$ ). Quand on fabrique  $\pi_{s,\alpha} = \text{ind}_B^G \chi_{s,\alpha}$  par translations à droite, il est bien connu que  $\pi_{s,\alpha}, s \in \mathbf{R}_+ = (0, +\infty), \alpha \in [0, 1)$ , sont irréductibles et inéquivalentes l'une à l'autre. L'action explicite de  $\pi_{s,\alpha}$  est donnée dans l'espace  $L^2(T), T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  muni de la mesure  $dt/2\pi$ , par la formule

$$(\pi_{s,\alpha}((\theta, a, b))\phi)(t) = e^{i s (\alpha \sin t + b \cos t)} e^{i a [\theta + t]} \widehat{\phi}(t + \theta),$$

où  $g = (\theta, a, b) \in G$  et où l'on a utilisé la notation  $t + \theta = [t + \theta] + \widehat{t + \theta}$  avec  $[t + \theta] \in 2\pi\mathbf{Z}$  et  $\widehat{t + \theta} \in [0, 2\pi)$ .

Soit maintenant  $\mathfrak{h} = \mathbf{R}X$  et  $H^0 = \exp \mathfrak{h}$ . Partant de la représentation triviale  $1_{H^0}$  de  $H^0$ , on construit la représentation monomiale  $\tau = \text{ind}_{H^0}^G 1_{H^0}$  de  $G$ . D'après Benoist [1],

$$\tau \simeq 2 \int_{\mathbf{R}_+ \times [0,1)}^\oplus \pi_{s,\alpha} ds d\alpha,$$

tandis que  $(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty})^{H, 1_{H^0}} = C\delta_0 \oplus C\delta_x$ , où  $\delta_x$  désigne la masse de Dirac en  $x \in T$ . D'autre part, l'intersection  $G \cdot l_s \cap \mathfrak{h}^\perp$  se compose de deux composantes connexes dont chacune est une  $H^0$ -orbite de dimension égale à  $\frac{1}{2} \dim G \cdot l_s$ .

Si l'on calcule  $S = \{g \in G; g^{-1} \cdot (l_s + \mathfrak{h}^\perp) \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset\}$ , il se trouve facilement que  $S = \{g = (\theta, a, b) \in G; \theta \in \mathbf{Z}\pi\}$  qui coïncide avec la réunion des supports des éléments de  $(\mathcal{H}_{\pi_{s,\alpha}}^{-\infty})^{H^0, 1_{H^0}}$ .

On considère désormais l'extension  $H = \exp(\mathbf{Z}\pi T)H^0$  et ses caractères

$\rho_\gamma, \gamma \in [0, 1)$ , définis par  $\rho_\gamma(\exp m\pi T \cdot h^0) = e^{2\pi i m \gamma}$  ( $m \in \mathbf{Z}, h^0 \in H^0$ ). L'action de  $\tau_\gamma = \text{ind}_H^G \rho_\gamma$ , réalisée comme translation à droite, est donnée par

$$(\tau_\gamma(g)\phi)(t, \eta) = e^{2\pi i \gamma [[t+\theta]]} \widehat{\phi}(t+\theta, (-1)^{[[t+\theta]]}(\eta + a \sin t + b \cos t)),$$

où  $\phi \in L^2([0, \pi) \times \mathbf{R})$ ,  $g = (\theta, a, b) \in G$  et où l'on a employé la notation  $t + \theta = [[t+\theta]]\pi + \widehat{t+\theta}$  avec  $[[t+\theta]] \in \mathbf{Z}$  et  $\widehat{t+\theta} \in [0, \pi)$ .

La transformation de Fourier concernant la seconde variable

$$\hat{\phi}(t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{i\eta y} \phi(t, y) dy$$

nous fournit une autre réalisation de  $\tau_\gamma$  par la formule

$$(\tau_\gamma(g)\hat{\phi})(t, \eta) = e^{2\pi i \gamma [[t+\theta]]} e^{-i\eta(a \sin t + b \cos t)} \widehat{\hat{\phi}}(t+\theta, (-1)^{[[t+\theta]]}\eta).$$

Ensuite on utilise l'application qui à  $\hat{\phi} \in L^2([0, \pi) \times \mathbf{R})$  associe  $\check{\phi} \in L^2([0, 2\pi) \times \mathbf{R}_+)$  donnée par

$$\check{\phi}(t, \eta) = \begin{cases} \hat{\phi}(t, \eta) & \text{si } t \in [0, \pi), \\ e^{2\pi i \gamma} \hat{\phi}(t-\pi, -\eta) & \text{si } t \in [\pi, 2\pi), \end{cases}$$

pour en obtenir la troisième dans  $L^2([0, 2\pi) \times \mathbf{R}_+)$ ;

$$(\tau_\gamma(g)\check{\phi})(t, \eta) = e^{2\pi i \gamma [[t+\theta]]} e^{-i\eta(a \sin t + b \cos t)} \check{\hat{\phi}}(t+\theta, \eta).$$

On a ainsi vérifié que

$$\tau_\gamma \simeq \int_{\mathbf{R}_+}^{\oplus} \pi_{s, 2\gamma(\text{mod } \mathbf{Z})} ds,$$

sans multiplicité comme nous en prévient un résultat de [3].

D'un point de vue de la méthode des orbites, il est vraisemblable que ce phénomène s'explique par le fait que les deux  $H^0$ -orbites incluses dans  $G \cdot l_s \cap \mathfrak{h}^\perp$  se relient sous l'action de  $\exp \pi T \in H$ , ce qui fait de  $G \cdot l_s \cap \mathfrak{h}^\perp$ , quoique non connexe, une seule  $H$ -orbite.

Finalement, pour que  $a = \xi \delta_0 + \eta \delta_x \in (\mathcal{H}_{\pi_s, a}^{-\infty})^{H^0, 1H^0}(\xi, \eta \in \mathbf{C})$  appartienne à  $(\mathcal{H}_{\pi_s, a}^{-\infty})^{H, \rho_\gamma}$ , il faut et il suffit que  $\langle \pi_{s, a}(\exp \pi T)a, \psi \rangle = \langle e^{2\pi i \gamma} a, \psi \rangle$  pour tout  $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_s, a}^{+\infty}$ . D'où,

$$(\mathcal{H}_{\pi_s, a}^{-\infty})^{H, \rho_\gamma} = \begin{cases} C(\delta_0 + e^{2\pi i \gamma} \delta_x) & \text{si } \alpha = 2\gamma, \\ 0 & \text{si } \alpha \neq 2\gamma, \end{cases}$$

qui retrouve l'ensemble  $S$  mentionné ci-dessus comme la réunion des supports de ses éléments.

## Bibliographie

- [1] Y. Benoist, Espaces symétriques exponentiels, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Univ. de Paris VII, 1983.
- [2] Y. Benoist, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, *J. Funct. Anal.*, **59** (1984), 211–253.
- [3] Y. Benoist, Multiplicité un pour les espaces symétriques exponentiels, *Mém. Soc. Math. France*, **15** (1984), 1–37.
- [4] P. Bernat et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.
- [5] P. Bonnet, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, *J. Funct. Anal.*, **55** (1984), 220–246.
- [6] F. Bruhat, Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), 97–205.
- [7] I. K. Busyatskaya, Representations of exponential Lie groups, *Functional Anal. Appl.*, **7** (1975), 151–152.
- [8] P. Cartier, Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, *Lect. Notes in Math.*, **514**, Springer (1975), 20–34.
- [9] L. Corwin, F. P. Greenleaf et G. Grélaud, Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups, à paraître.
- [10] H. Fujiwara, Certains opérateurs d'entrelacement pour des groupes de Lie résolubles exponentiels et leurs applications, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A*, **36** (1982), 13–72.
- [11] H. Fujiwara, Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, à paraître dans *Pacific J. Math.*
- [12] V. A. Ginzburg, Symplectic geometry and representations, *Funct. Anal. Appl.*, **17** (1983), 75–76.
- [13] G. Grélaud, Désintégration des représentations induites des groupes de Lie résolubles exponentiels, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Univ. de Poitiers, 1973.
- [14] G. Grélaud, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, Thèse, Univ. de Poitiers, 1984.
- [15] R. Howe, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, *Pacific J. Math.*, **73** (1977), 329–364.
- [16] A. A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, *Uspekhi Mat. Nauk*, **17** (1962), 57–110.
- [17] R. Penney, Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem, *J. Funct. Anal.*, **18** (1975), 177–190.
- [18] N. S. Poulsen, On  $C^\infty$ -vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.*, **9** (1972), 87–120.
- [19] S. R. Quint, Decomposition of induced representations of solvable exponential Lie groups, Dissertation, Univ. of California, Berkeley 1973.
- [20] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), *Math. J. Okayama Univ.*, **7** (1957), 151–161.
- [21] M. Vergne, Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, **3** (1970), 353–384.

Hidénori Fujiwara  
*Dépt. de Math., Faculté des Sciences*  
*Univ. de Kyushu 33*  
*Hakozaki, Fukuoka 812*  
*Japon*

Shigeru Yamagami  
*Dépt. de Math., Faculté des Sciences*  
*Univ. de Ryukyu, Okinawa 903-01*  
*Japon*