Advanced Studies in Pure Mathematics 8, 1986
Complex Analytic Singularities
pp. 215–227

Le Concept de Singularité Isolée de Fonction Analytique

Lê Dũng Tráng

Introduction

Dans cet article nous introduisons la notion de singularité isolée pour une fonction analytique complexe sur un espace analytique complexe réduit. Cette définition généralise naturellement la notion de fonction de Morse sur un espace singulier stratifié par une stratification de Whitney analytique complexe introduite par F. Lazzeri et R. Pignoni (cf. [P1] and [P2]) et utilisée par M. Goresky et R. MacPherson dans [GM1] (voir aussi [GM2]). La définition introduite ici a été inspirée par la théorie des $\mathscr{D}$-modules et des résultats analogues ont été exposés à Luminy en Juillet 1983. Remarquons aussi que dans les comptes-rendus de la rencontre JSPS-NSC, M. Kashiwara développe également une théorie de Morse sur les espaces singuliers inspirée par la théorie des systèmes différentiels à la Sato.

Le résultat principal est énoncé dans (4.2) et a été suscité par une question de M. Goresky en relation avec la théorie de Morse pour l'homologie d'intersection d'un espace analytique singulier.

Les méthodes utilisées ont été introduites par Mitsuyoshi Kato et l'auteur dans [Lê 1] et seront développées dans un travail ultérieur.

Dans cet article nous donnons surtout des esquisses de preuves et le résultat principal est énoncé et non démontré. Nous avons surtout insisté sur les motivations qui ont conduit au concept de singularité isolée pour une fonction analytique complexe sur un espace analytique complexe réduit quelconque.

§ 1. Singularité isolée d'une fonction analytique complexe

Dans ce paragraphe nous rappelons quelques propriétés attachées aux points critiques isolés de fonction analytique complexe.

(1.1) Soit $f: (\boldsymbol{C}^{n+1}, 0) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ un germe de fonction analytique en 0 dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$. On appelle espace critique de f le germe en 0 du sous-espace analytique de $\boldsymbol{C}^{n+1}$ défini par $df=0$, i.e.

Received December 25, 1984.

$$\partial f/\partial z_0 = \cdots = \partial f/\partial z_n = 0.$$

On note $(C(f), 0)$ l'espace critique de f.

(1.2) **Lemme** (Théorème de Bertini). *La fonction f est constante sur $(C(f), 0)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que f est constante le long de tout chemin analytique complexe $p:(\boldsymbol{D}, 0)\to(C(f), 0)$ germe d'application analytique du germe d'un disque ouvert centré en 0 dans $(C(f), 0)$. On veut donc montrer que $f\circ p=0$. Or:

$$\frac{d(f\circ p)}{dt}(t)=\sum_{i=0}^{n}\partial f/\partial z_i(p(t))dz_i(p(t))/dt$$

et $\partial f/\partial z_i(p(t))=0$ car $p:(\boldsymbol{D}, 0)\to(C(f), 0)$. Donc $\dfrac{d(f\circ p)}{dt}(t)=0$ pour tout $t\in\boldsymbol{D}$, ce qui donne $f\circ p=$constante donc $f\circ p=0$ car $(f\circ p)(0)=0$.

Une autre preuve consiste à remarquer à l'instar de [M] qu'un représentant $C(f)$ assez petit de $(C(f), 0)$ est union disjointe d'un nombre fini de variétés analytiques complexes connexes:

$$C(f)=\coprod_{i=0}^{r} V_i$$

et $f_{|V_i}$ est constante car $df_{|V_i}=0$. Or si $C(f)$ est assez petit, 0 est adhérent à V_i donc $f_{|V_i}=0$ $(i=1, \cdots, r)$, ce qui donne $f_{|C(f)}=0$.

(1.3) **Conséquence.** Le théorème des zéros de Hilbert-Rückert (cf. par exemple [A] (30.12) implique donc que dans l'anneau des séries convergentes $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$ une puissance f^k de f appartient à l'idéal engendré par $\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n$ dans $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$.

(1.4) **Définition.** On dit que la fonction f a un *point critique isolé en* 0 (on dit aussi que la fonction f a un *point singulier* isolée *en* 0) si le point 0 est isolé dans $(C(f), 0)$, i.e. si le germe $(C(f), 0)$ est vide ou est le germe d'un espace analytique complexe dont le support est réduit à $\{0\}$.

(1.5) **Lemme.** *Le point* 0 *est isolé si et seulement si l'anneau quotient $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$, de l'anneau des séries convergentes $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$ en* 0 *par l'idéal engendré par les dérivées partielles $\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n$, est artinien, i.e. l'espace vectoriel complexe:*

$$\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$$

est de dimension finie sur $\boldsymbol{C}$.

Preuve. Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème des zéros de Hilbert-Rückert. En effet le théorème des zéros de Hilbert-Rückert (cf. [Ho] Exposé 19, Corollaire 6 par exemple) montre que 0 est isolé dans $(C(f), 0)$ si et seulement si l'idéal $(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est trivial ou est primaire pour l'idéal maximal $(z_0, \cdots, z_n)$ de $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \boldsymbol{N}$ tel que: $(z_0, \cdots, z_n)^k \subset (\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$. Or le quotient de $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$ par une puissance de son idéal maximal est un espace vectoriel complexe de dimension finie. Le lemme est ainsi démontré puisque $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, f/\partial z_n)$ est un quotient de $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(z_0, \cdots, z_n)^k$ si et seulement si 0 est isolé dans $(C(f), 0)$.

(1.6) **Définition.** Si 0 est un point critique isolé de f, la dimension sur $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est appelée *le nombre de Milnor de* f *en* 0.

(1.7) **Lemme.** *Le point* 0 *est un point critique isolé de* f *si et seulement si le quotient de* $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}$ *par l'idéal* $(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ *engendré par* f *et les dérivées partielles de* f *est de dimension finite sur* $\boldsymbol{C}$.

Preuve. D'après le théorème de Bertini (cf. (1.2)) et le théorème des zéros de Hilbert-Rückert il existe un entier $l \geqslant 1$ tel que:

$$(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)^l \subset (\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n) \subset (f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$$

Si 0 est un point critique isolé de f, il existe $k \in \boldsymbol{N}$ tel que:

$$(z_0, \cdots, z_n)^k \subset (\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n) \subset (f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$$

donc $(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est trivial ou est primaire pour l'idéal maximal $(z_0, \cdots, z_n)$.

Inversement si $(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est trivial ou primaire pour l'idéal $(z_0, \cdots, z_n)$, l'idéal des dérivées partielles $(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est trivial ou contient une puissance de l'idéal maximal puisqu'il contient $(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)^l$.

Le lemme est alors démontré, sachant que $(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est trivial ou primaire pour l'idéal maximal si et seulement si le quotient $\boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est un $\boldsymbol{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

(1.8) **Remarques.** i) Supposons que 0 soit un point critique isolé du germe f. Soit f un représentant de f, i.e. une fonction analytique définie sur un voisinage ouvert U de 0 dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$ dont le germe en 0 égale f. Dans ce cas 0 est un point isolé dans l'ensemble $C(f)$ des points critiques de f, i.e. il existe un voisinage ouvert V de 0 tel que $V \cap C(f) =$

$=\{0\}$ ou bien $V \cap C(f)=\emptyset$.

ii) Dans la définition de point critique isolé il faut comprendre ou bien 0 n'est pas un point critique, i.e. $df_0 \neq 0$ qui équivaut à $\dim_C C\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)=0$, ou bien 0 est bien un point critique isolé mais avec $\dim_C C\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n) \neq 0$.

iii) En fait on a un résultat plus fort que celui de (1.3), conséquence de (1.2). En effet dans [T1] (Chap. 0 (0.5)), on montre que f est intégralement dépendant sur l'idéal $(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$, i.e. il existe une relation:

$$f^r + a_1 f^{r-1} + \cdots + a_{r-1} f + a_r = 0 \qquad \text{avec } r \in N,$$

où $a_1 \in (\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)^i$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

(1.9) On peut interpréter le nombre de Milnor de la façon suivante:

Théorème. *On suppose que* 0 *est une singularité isolée de F. On note encore f un représentant de son germe. Soient* $1 \gg \varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon \gg \eta > 0$. *On suppose* $\eta \geqslant |t| > 0$. *Alors l'espace* $\{f=t\} \cap B_\varepsilon$ *est une variété* C^∞ *à bord isomorphe à une boule de dimension* $2n$ *à laquelle on a attaché* μ *anses d'indice n, où* μ *est le nombre de Milnor de f en* 0.

Ce théorème est démontré par J. Milnor [M] (Th. 6.6) si $n \neq 2$ et par Lê D.T. et B. Perron [Lê-P] si $n=2$.

En particulier le rang de la n-ième homologie réduite de $\{f=t\} \cap B_\varepsilon$ est μ et celui de la k-ième homologie réduite pour $k \neq n$ est zéro.

(1.10) Une autre façon de repérer un point critique isolé se fait de la façon compliquée suivante.

On note encore f le représentant d'un germe de fonction analytique $f: C^{n+1}, 0 \to C, 0$ défini sur le voisinage ouvert U de 0.

Sur U nous avons le fibré cotangent de U qui est trivial:

$$T^*U = U \times (C^{n+1})^* \xrightarrow[\pi]{} U$$

On a une section de π définie par f par:

$$s(z)=(z, df_z)$$

pour tout $z \in U$, avec df_z = différentielle de f en z.

Les points critiques de f sont donc l'image par π de l'intersection de l'image Im s de s et de la section nulle de π:

$$C(f)=\pi(\operatorname{Im} s \cap T^*_U U)$$

où $T^*_U U$ set la section nulle $U \times \{0\}$ de π.

Par conséquent 0 est un point critique isolé de f si et seulement si, ou bien Im s ne coupe pas T_U^*U, ou bien $(0, 0)$ est isolé dans $\operatorname{Im} s \cap T_U^*U$, i.e. le nombre d'intersection $(\operatorname{Im} s.\ T_U^*U)_{(0,0)}$ de Im s et T_U^*U dans T^*U en 0 est fini. En fait:

(1.11) **Lemme.** *Le point* 0 *est un point critique isolé de* f *si et seulement si* $(\operatorname{Im} s.\ T_U^*U)_{(0,0)} < +\infty$ *et dans ce cas:*

$$(\operatorname{Im} s.\ T_U^*U)_{(0,0)} = \dim_C \boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$$

Preuve. La démonstration originale de J. Milnor (cf. [M] Theorem 7.2) utilisant un résultat de Palamodov [Pa] donne en fait ce résultat. En effet soit W un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans T^*U. On remarque tout d'abord que $(\operatorname{Im} s.\ T_U^*U)_{(0,0)} = 1$ si et seulement si 0 est un point critique quadratique ordinaire de f, i.e. il existe des coordonnées locales $\xi_0, \cdots, \xi_n$ telles que $f = \xi_0^2 + \cdots + \xi_n^2$ sur un voisinage ouvert de 0. Par ailleurs soit $a_0z_0 + \cdots + a_nz_n$ une forme linéaire assez générale. Dans [M] (Appendix B Remark) J. Milnor a montré que pour tout $t \in]0, 1[$ [assez petit la fonction $f_t = f + \sum_{i=0}^n ta_iz_i$ n'a que des points quadratiques ordinaires dans W et le calcul de Palamadov montre que leur nombre est μ. Par conséquent si $t \neq 0$ est assez petit, la section $s_t(z) = (z, (df_t)_z)$ de π définie sur W a une image dans T^*W qui coupe T_W^*W transversalement en μ points, où μ est le nombre de Milnor de f en 0. La conservation du nombre d'intersection donne:

$$(\operatorname{Im} s_t.\ T_W^*W)_{T^*W} = (\operatorname{Im} s.\ T_W^*W)_{(0,0)}$$

où $(\operatorname{Im} s_t.\ T_W^*W)_{T^*W}$ est la somme des nombres d'intersection dans T^*W. Or $(\operatorname{Im} s_t.\ T_W^*W)_{T^*W} = \mu$. Ce qui montre le lemme.

Ce lemme nous permettra dans la suite de définir un concept de nombre d'intersection plus général (cf. (4.5)).

(1.12) **Remarques.** Ce qui précède donne une interprétation du nombre de Milnor de f en 0.

i) La dimension $\dim_C \boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)$ est finie si 0 est un point critique isolée de f. Dans [Ti], G. Tiourina montre que cette dimension est la dimension de la base de la définition semi-universelle de germe f.

ii) Dans [S], K. Saito montre que si 0 est un point critique isolé de f, l'égalité des dimensions:

$$\begin{aligned}&\dim_C \boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(f, \partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)\\ &= \dim_C \boldsymbol{C}\{z_0, \cdots, z_n\}/(\partial f/\partial z_0, \cdots, \partial f/\partial z_n)\end{aligned}$$

est équivalente à l'existence de coordonnées locales $\xi_0, \cdots, \xi_n$ et d'une unité u tels que:

$$f = gu(\xi)$$

où g est un polynôme quasi-homogène en les ξ_i.

§ 2. Le concept de singularitée isolée d'une fonction analytique

(2.1) Considérons désormais la situation suivante. Soit (X, x) un germe d'espace analytique complexe réduit. Soit $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe sur (X, x). Nous voulons définir la notion de singularité isolée de f en x.

On considère un représentant de X fermé dans un voisinage ouvert U de x dans $\boldsymbol{C}^N$.

(2.2) Rappelons qu'une famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles analytiques de X est une *stratification analytique complexe* de X si:

i) X est l'union disjointe des X_α, $\alpha \in A$;

ii) les espace X_α sont des variétés analytiques complexes;

iii) let espaces $\bar{X}_\alpha$ et $\bar{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des sous-ensembles analytiques de X;

iv) la famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est localement finie sur X.

On appelle X_α les strates de la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X.

(2.3) Parmi les stratifications analytiques complexes de X, certaines possèdent des propriétés "différentielles" intéressantes.

Nous nous intéresserons aux stratifications analytiques complexes qui satisfont aux conditions introduites par H. Whitney dans [W].

Soient X_α, X_β deux strates de la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X. On suppose $X_\alpha \subset \bar{X}_\beta$ et $x \in X_\alpha$. On dit que la paire (X_β, X_α) satisfait *la condition de Whitney en x* (on dit aussi que X_β satisfait *la condition de Whitney le long de X_α en x*) si, pour toutes suites de points $(x_n)_{n \in N}$ de X_β telles que:

i) $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x$

ii) la limite des droites $x_n y_n$ de $\boldsymbol{C}^N$ quand n tend vers $+\infty$ existe et $\lim_{n \to +\infty} x_n y_n = l$

iii) la limite des sous-espace $T_{y_n} X_\beta$ de $\boldsymbol{C}^N$ quand n tend vers $+\infty$ existe et $\lim_{n \to \infty} T_{y_n} X_\beta = T$

on a : $l \subset T$.

On dit que X_β satisfait la condition de Whitney le long de X_α si $X_\alpha \subset \bar{X}_\beta$ et si X_β satisfait la condition de Whitney le long de X_α en tout point x de X_α.

On dit que la stratification analytique complexe $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X satisfait la condition de Whitney si, pour toute paire de strates (X_β, X_α) telles que $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$, la strate X_β satisfait la condition de Whitney le long de X_α et, si pour tout $\alpha \in A$, $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ est une union de strates (Propriété de frontière). On dit aussi dans ce cas que la *stratification* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X est *régulière* ou *de Whitney.*

Dans [W], H. Whitney montre l'existence d'une stratification régulière analytique complexe sur tout ensemble analytique complexe. Dans [T2], B. Teissier montre que la stratification de [Lê-T1] (6.1) est la stratification de Whitney la moins fine d'un ensemble analytique complexe. Dans [Lê-T2], B. Teissier et Lê D.T. donnent diverses caractérisations algébriques, combinatoires et topologiques des stratifications analytiques complexes d'un ensemble analytique complexe qui vérifient la condition de Whitney.

(2.4) Dans (2.3) on a donc vu que tout sous-ensemble analytique complexe fermé X d'un ouvert U de $\boldsymbol{C}^N$ possède une stratification de Whitney canonique (cf. [Lê T1] (6.1), [T2] VI § 3, [Lê-T2] (1.3.3)).

Soit $x \in X$, si le voisinage ouvert U de x est assez petit on peut supposer que la stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X est finie.

(2.5) Soit $Z \subset U$ un sous-ensemble analytique complexe non singulier localement fermé dans U. On définit $T_Z^* U$ comme étant le sous-ensemble de T^*U composé des couples (z, ξ), où $z \in Z$ et $\xi \in (\boldsymbol{C}^N)^*$ est une forme linéaire qui s'annule sur $T_z Z$, espace tangent de Z en z. La projection $T^*U \xrightarrow{\pi} U$ induit $T_Z^*U \xrightarrow{\pi_Z} Z$.

$$T_Z^*U = \{(z, \xi) \in T^*U,\ \xi(T_z Z) = 0\}$$

On remarque que $\dim_{\boldsymbol{C}} T^*U = 2N$, $\dim_{\boldsymbol{C}} T_Z^\infty U = N$ et que T_Z^*U est une sous-variété Lagrangienne de T^*U muni de sa forme symplectique canonique.

Si Z est un sous-ensemble analytique complexe formé de U (éventuellement singulier) et si Z° est la partie non singulière de Z, on note:

$$T_Z^*U := \overline{T_{Z^\circ}^*U}$$

On appelle T_Z^*U *l'espace conormal de* Z *dans* U.

Si $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification analytique complexe régulière de X, on remarque:

$$\bigcup_{\alpha\in A} T_{X_\alpha}^*U = \bigcup_{\alpha\in A} T_{\overline{X}_\alpha}^*U$$

(2.6) **Remarque.** On trouve que T_U^*U est la section nulle de U. On peut donc à l'instar de (1.10) définir quand $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ est une fonction analytique avec un point singulier isolé en x.

(2.7) **Définition.** Soit (X, x) un germe d'espace analytique complexe réduit et $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe. On note encore $X \subset U \subset \boldsymbol{C}^N$ un représentant de (X, x) qui est un sous-ensemble analytique fermé d'un voisinage ouvert U de x dans $\boldsymbol{C}^N$ et $f: X \to \boldsymbol{C}$ un représentant de $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$. Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ la stratification de Whitney canonique de X. On suppose U assez petit pour que f ait une extension $\tilde{f}$ définie sur U et on note $\tilde{s}$ la section du fibré cotangent $\pi: T^*U \to U$ définie par $\tilde{s}(z) = (z, d\tilde{f}_z)$, pour tout $z \in U$. On dit que *f a une singularité isolée en x* s'il existe un voisinage W de $(x, d\tilde{f}_x)$ dans lequel l'image $\operatorname{Im} \tilde{s}$ de $\tilde{s}$ ne coupe pas l'union d'espaces conormaux $\bigcup_{\alpha \in A} T^*_{X_\alpha} U$ ou bien $\operatorname{Im} \tilde{s}$ coupe $\bigcup_{\alpha \in A} T^*_{X_\alpha} U$ en un point isolé en $(x, d\tilde{f}_x)$.

(2.8) **Remarques.** i) La stratification canonique $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ne dépend pas du plongement local $X \subset U$, mais les espaces conormaux $T^*_{X_\alpha} U$ en dépendent et l'extension $\tilde{f}$ n'est pas unique. Cependant si f a une singularité isolée en x, ceci ne dépend pas du plongement $X \subset U$ et de l'extension locale $\tilde{f}$ de f. En effet supposons que f ait une singularité isolée en x pour un plongement $X \subset U$ et une extension $\tilde{f}$ de f donnée et que pour un plongement $X \subset V$ et une extension f_1 de f à V, la section s_1 de $T^*V \to V$ associée à f_1 a une image $\operatorname{Im} s_1$, qui coupe $\bigcup_{\alpha \in A} T^*_{X_\alpha} V$ en un espace $\tilde{\Gamma}$ de dimension $k > 0$ qui contient $(x, (df_1)_x)$. Nous allons montrer qu'il y a une contradiction. On peut supposer que $\tilde{\Gamma}$ contient une courbe $\tilde{\Gamma}_1$ qui passe par $(x_1, (df_1)_x)$ et l'image de $\tilde{\Gamma}_1$ par $\pi_1: T^*V \to V$ est une courbe notée Γ_1. On peut supposer que $\Gamma_1 - \{x\}$ est contenu dans une strate X_α. Par définition de $\tilde{\Gamma}$, en tout point $y \in \Gamma_1 - \{x\}$, $(df_1)_x$ s'annule sur une limite d'espaces tangents en y à une strate X_β telle que $X_\alpha \subset \bar{X}_\beta$. Comme $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ satisfait la condition de Whitney, $(df_1)_y$ s'annule sur $T_y X_\alpha$ et la restriction de f_1 à X_α est critique le long de Γ_1, mais:

$$f_{1|X_\alpha} = \tilde{f}_{|X_\alpha} = f_{|X_\alpha}$$

et ceci contredit le fait que $\tilde{f}_{|X_\alpha - \{x\}}$ n'est pas critique comme nous le répétons ci-dessous. Donc la définition ne dépend pas du choix de $\tilde{f}$ et du plongement local $X \subset U$.

ii) Dans la définition (2.7) on peut supposer U assez petit pour que A soit fini et que pour tout $\alpha \in A$, $x \in \bar{X}_\alpha$. On remarque alors que si f a une singularité isolée en x, la restriction de f à $X_\alpha - \{x\}$ est lisse et la restriction de f à $\bar{X}_\alpha$ *a* une singularité isolée en x pour tout $\alpha \in A$.

§ 3. Cycles evanescents d'une fonction à singularite isolée

(3.1) Soit $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ un germe de fonction analytique complexe. Dans [Lê 2] on montre que f définit une fibration topologique localement triviale (voir aussi [Lê-T2] Théorème (2.3.1)). Précisément soit $X \subset U$ un plongement local de X. Alors:

Théorème. (Théorème de fibration locale) *Soient* $1 \gg \varepsilon > 0$ *et* $\varepsilon \gg \eta > 0$. *La fonction f induit une application de* $B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ *sur* D_η *qui est une fibration topologique au-dessus de* $D_\eta^* = D_\eta - \{0\}$ *avec* $B_\varepsilon := \{z \in U, \|z\| \leqslant \varepsilon\}$ *et* $D_\eta := \{t \in \boldsymbol{C}, |t| \leqslant \eta\}$.

Nous allons montrer que, dans le cas où f a une singularité isolée, la preuve du théorème de fibration locale de [Lê 2], ne fait pas appel à un résultat de H. Hironaka de [H] (§ 5).

(3.2) Dans le cas où $X = \boldsymbol{C}^{n+1}$ et f a une singularité isolée en x, la démonstration du théorème de fibration locale est relativement facile si l'on utilise le lemme d'Ehresmann.

En effet on montre tout d'abord que si $1 \gg \varepsilon > 0$, la sphère S_ε coupe transversalement $f = 0$ (cf. [M] Corollary 2.9). Par conséquent pour η, $\varepsilon \gg \eta > 0$, S_ε coupe transversalement $f = t$ si $|t| \leqslant \eta$. La fonction f induit donc une application propre de $(B_\varepsilon - (f=0)) \cap \{|f| \leqslant \eta\}$ sur $D_\eta - \{0\}$ qui est de rang maximum ainsi que sa restriction au bord de la boule B_ε. Le lemme d'Ehresmann montre alors que cette application est une fibration C^∞ localement triviale.

(3.3) Supposons désormais que (X, x) soit un germe d'espace analytique complexe réduit (éventuellement singulier). Ce qui va remplacer le lemme d'Ehresmann est le ler théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf. [Th] et [Ma]).

Tout d'abord remarquons que l'on peut supposer que $X \subset U \subset \boldsymbol{C}^N$ et que la stratification de Whitney canonique $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X est finie et que, pour tout $\alpha \in A$, $x \in \bar{X}_\alpha$.

Si $1 \gg \varepsilon > 0$, la sphère S_ε de $\boldsymbol{C}^N$ centrée en x et de rayon $\varepsilon > 0$ coupe transversalement les strates X_α, $\alpha \in A$. D'après [C], la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ induit une stratification de Whitney de $S_\varepsilon \cap X$ qui est sous-analytique (cf. [Lê-T2] (1.2.6) pour la définition).

Comme la restriction de f à $X_\alpha - \{x\}$ est de rang maximum, on peut choisir ε assez petit pour que $f_{|X_\alpha} = 0$ coupe S_ε transversalement pour tout $\alpha \in A$. Donc si $\varepsilon \gg \eta > 0$, pour tout t, $|t| \leqslant \eta$, $f_{|X_\alpha} = t$ coupe S_ε transversalement. La restriction de f à $B_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(D_\eta - \{0\})$ est propre et de rang maximum sur les strates de Whitney de X et celles induites sur $X \cap S_\varepsilon$. Le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather ([Th] et [Ma]) montre alors que f induit une fibration C° localement triviale de $B_\varepsilon \cap X \cap f^{-1}(D_\eta^*)$ sur $D_\eta^* = D_\eta - \{0\}$.

Dans le cas où $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ a une singularité isolée en x, la condition de Thom (cf. [Lê-T2] (1.4)), nécessaire à la démonstration du théorème de fibration locale, est trivialement obtenue, alors que dans le cas d'un germe de fonction analytique général, on a besoin d'un théorème d'Hironaka (cf. [H] § 5 voir [Lê-2] et [Lê-T2] (2.3.1)).

(3.4) Si $1 \gg \varepsilon > 0$, l'espace $(f=0) \cap B_\varepsilon$ est contractile, car il a une structure de cône (cf. [B-V]).

Dans [Lê-T2] (2.3.2) le type d'homotopie de $(f=t) \cap B_\varepsilon$ est un invariant analytique de $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$.

On appelle souvent *cycles proches* les cycles de $(f=t) \cap B_\varepsilon$. On appelle *cycles évanescents* les cycles de dimension $k \geqslant 1$ de $(f=t) \cap B_\varepsilon$.

(3.5) **Lemme.** *Soit $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ avec une singularité isolée en x. Si $1 \gg \varepsilon > 0$ et $\varepsilon \gg \eta > 0$ la restriction de f à $S_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ induit une fibration C° localement triviale de $S_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta)$ sur D_η.*

Ce lemme est encore une conséquence du premier théorème d'isotopie de Thom et Mather.

(3.6) **Lemme.** *Si $1 \gg \varepsilon > 0$, l'espace $(f=0) \cap B_\varepsilon - \{x\}$ est homéomorphe à $((f=0) \cap S_\varepsilon) \times [0, 1[$.*

Ce lemme est conséquence du théorème de la structure conique de [B-V] (voir aussi [M] Théorème 2.10).

(3.7) Soit $t \in D_\eta$, $t \neq 0$. Si f est à singularité isolée en x, on a donc une application continue:

$$\psi: (f=t) \cap B_\varepsilon \longrightarrow (f=0) \cap B_\varepsilon$$

qui donne un homéomorphisme de $(f=t) \cap S_\varepsilon$ sur $(f=0) \cap S_\varepsilon$ et dont l'image par ψ d'un sous-espace de $(f=t) \cap B_\varepsilon$ homéomorphe avec $(f=t) \cap B_\varepsilon$ est $\{x\}$.

(3.8) **Remarque.** A l'instar de la remarque (2.3.3) de [Lê-T2], l'ensemble des $(\varepsilon, \eta) \subset \boldsymbol{R}_+^2$ pour lesquels le théorème de (3.1) ou le lemme (3.5) est vrai contient un ouvert semi-analytique avec un segment $[0, \varepsilon_0]$ dans son adhérence.

(3.9) On peut évidemment définir une notion de singularité isolée pour une fonction analytique relativement à une stratification de Whitney analytique complexe quelconque de X.

§ 4. Morphisme et polyèdre d'effondrement

(4.1) Dans tout ce paragraphe on suppose que (X, x) est un germe d'espace analytique complexe réduit et $f: (X, x) \to (\boldsymbol{C}, 0)$ est un germe de fonction analytique complexe.

On suppose que f ait une singularité isolée en x. On note encore X et f des représentants convenables de (X, x) et $f:(X, x)\to(\boldsymbol{C}, 0)$. Soient $1\gg\varepsilon>0$ et $\varepsilon\gg\eta>0$. On note $F_t=(f=t)\cap B_\varepsilon$ avec $|t|\leqslant\eta$, $\partial F_t=F_t\cap S_\varepsilon$ et $\mathscr{X}=X\cap B_\varepsilon\cap f^{-1}(D_\eta)$.

(4.2) En utilisant des méthodes analogues à celle de [Lê1] obtenues avec M. Kato nous annonçons:

Théorème. *Si $t\neq 0$, $|t|\leqslant\eta$, il existe un sous-espace P_t de F_t qui est un complexe cellulaire de dimension $n=\dim_{\boldsymbol{C}} F_t$ et, une application continue $\varphi_t:\partial F_t\to P_t$ et une application stratifiée $\psi_t: F_t\to F_0$ tels que:*

i) *L'espace F_t est le mapping cyclindre de φ_t;*

ii) *L'application ψ_t envoie P_t sur $\{x\}$ et induit un homéomorphisme de F_t-P_t sur $F_0-\{x\}$.*

Définition. On appelle P_t un *polyèdre d'effondrement de f en x* et ψ_t un *morphisme d'effondrement de f en x.*

(4.3) La démonstration de (4.2) se fait par récurrence sur $\dim_{\boldsymbol{C}} F_t$ et utilise la construction suivante déjà utilisée dans [Lê1] et [Lê2].

Soit $X\subset U\subset \boldsymbol{C}^N$ un plogement local de (X, x) et $\xi: X\to\boldsymbol{C}$ la restriction à X d'une forme linéaire assez générale de $\boldsymbol{C}^N$. On a donc une application $\phi: X\to\boldsymbol{C}^2$ dont les composantes sont ξ et f. Soit Γ_α la fermeture dans X de ϕ la restriction de à X_α pour tout $\alpha\in A$. La restriction de ϕ à $\Gamma=\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha$ est finie si U est assez petit. L'image $\phi(\Gamma)=\Delta=\bigcup_{\alpha\in A}\phi\,(\Gamma_\alpha)$ est alors une courbe et si $1\gg\varepsilon>0$, $\varepsilon\gg\varepsilon_1>0$, l'application ϕ induit une fibration C^0 localement triviale de $X\cap B_\varepsilon\cap\phi^{-1}\,(B'_{\varepsilon_1}-\Delta)$ sur $B'_{\varepsilon_1}-\Delta$. En fait ϕ induit un morphisme descriptible au sens de (2.1) de [Lê-T2] de $X\cap B_\varepsilon\cap\phi^{-1}(\mathring{B}'_{\varepsilon_1})$ sur $\mathring{B}'_{\varepsilon_1}$. La démonstration est analogue à celle de (2.3.5) de [Lê-T2] et n'utilise pas le théorème d'Hironaka de [H] comme il a été nécessaire dans [Lê2].

(4.4) En utilisant les résultats de [Lê3] on démontre que si f a une singularité isolée en x et si (X, x) est une intersection complète, pour tout $t\in D$, F_t a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères.

(4.5) De façon analogue à (4.4), signalons le résultat suivant. Soit $\mathscr{F}$ est un faisceau pervers au sens de [B-B-D] sur (X, x) et soit $f:(X, x)\to(\boldsymbol{C}, 0)$ avec une singularité isolée en 0 relativement à une stratification de Whitney adaptée à $\mathscr{F}$, i.e. telle que la cohomologie de $\mathscr{F}$ soit localement constante sur les strates.

Localement (X, x) se plonge dans un ouvert U de $\boldsymbol{C}^N$ et f s'étend en une fonction f sur U. La différentielle de f donne une section s de $T^*U \rightarrow U$, fibré cotangent de U. L'image de s coupe le cycle obtenu à partir des variétés conormales aux fermetures des strates de Whitney comptées avec une multiplicité convenable. A l'instar de (1.11) le nombre d'intersection obtenu s'interprète comme le nombre de cycles évanouissants de $\mathscr{F}$ en x relativement à f, i.e. $\dim_C(\phi_f\mathscr{F})_x$ (cf. [D] § 2). On peut comparer ce résultat à celui annoncé dans [Du]. Comme $\mathscr{F}$ est isomorphe au faisceau des solutions d'un $\mathscr{D}$-module holonome (cf. [B-B-D], [Me]), on retrouve ce type de résultats dans [K-S] ou dans l'exposé de Kashiwara dans cette conférence sur la théorie de Morse microlocale.

L'analogie avec (4.4) provient de ce que le faisceau constant sur (X, x) décalé convenablement donne un fasiceau pervers si (X, x) est une intersection complète. Remarquons cependant que le résultat de (4.4) est homotopique et ne s'obtient pas par ces techniques purement combinatoires.

Bibliographie

[A] S. Abhyankar, Local Analytic Geometry, Acad. Press 1964, New-York and London.

[B-B-D] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, Astérisque **100**, 1982, Paris.

[B-V] D. Burghelea, A. Verona, Local homological properties of analytic sets, Manuscripta Math., **7** (1972), 55–66.

[C] D. Cheniot, Sur les sections transversales d'un ensemble stratifié, C. R. Acad. Sci. Paris, **275** (1972), 915–916.

[D] P. Deligne, SGA7 II Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Exposé XIII, Lecture Notes in Math., **340**, Springer (1973).

[Du] A. Dubson, Formule pour les cycles évanescents, C. R. Acad. Sci. Paris, **299** (1984), 181–184.

[G-M1] M. Goreski, R. Macpherson, Stratified Morse theory, Proc. Symp. in Pure Math., **40** (1983), part 1, 517–533, A.M.S., Providence, U.S.A.

[G-M2] ——, Stratified Morse theory II: Morse theory of Whitney stratified spaces, preprint.

[H] H. Hironaka, Stratification and flatness, in "Real and complex singularities", Nordic Summer School, Oslo 1976, Sitjhoff and Nordhoff, 1977.

[Ho] C. Houzel, Géométrie analytique locale I à IV, in Sem. Cartan 1960–1961, Inst. Henri Poincaré, Paris, France.

[K-S] M. Kashiwara, P. Schapira, Microlocal study of sheaves Astérisque S.M.F., 1985 (à paraitre).

[Lê1] Lê D. T., Vanishing cycles on analytic sets, Proc. Conf. on Algebraic Analysis, R.I.M.S., Kyoto, July 1975.

[Lê2] ——, Some remarks on relative monodromy, in "Real and Complex singularities", Nordic Summer School, Oslo 1976, Sitjhoff and Nordhoff, 1977.

[Lê3] ——, Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques, C. R. Acad. Sci. Paris, **288** (1979), 283–285.

[Lê-P] Lê D. T., B. Perron, Sur la fibre de Milnor d'une singularité isolée en dimension complexe trois, C. R. Acad. Sci. Paris, **289** (1979), 119–122.

[Lê-T1] Lê D. T., B. Teissier, Variétés polaires locales et classes de Chern des

variétés algébriques singulières, Ann. of Math., **114** (1981), 457–491.
[Lê-T2] ——, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney II, Proc. Symp. in Pure Math., **40** (1983), part 2, 65–103, A.M.S., Providence, U.S.A.
[Ma] J. Mather, Notes on topological stability, Harvard Univ., mimeographed notes, July 1970.
[Me] Z. Mebkhout, Sur le problème de Riemann-Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris, **289** (1980), 415–417.
[M] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Stud., **61** (1968), Princeton, U.S.A.
[Pa] V. I. Palamadov, O kranosti golomorfnovo otobrajenia, Funkcional Anal. i Priložen., (en russe) (1967), 54–65.
[P1] R. Pignoni, Density and stability of Morse functions on a stratified space, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **4** (1979), 592–608.
[P2] ——, Morse functions and the strict Whitney conditions, Boll. Un. Mat. Ital., **17** (1980), 1023–1028.
[S] K. Saito, Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Invent. Math., **14** (1971), 123–142.
[T1] B. Teissier, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisque, **7/8** (1973).
[T2] ——, Multiplicités polaires, Sections planes et conditons de Whitney, Lect. Notes in Math., **961**, Springer (1983).
[Th] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1969), 240–284.
[Ti] G. Tiourina, Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math. USSR-Isv., **3** (1969), 967–999.
[W] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math., **81** (1964), 469–549.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cédex
FRANCE
Unité Associée au CNRS n°169